نشریه علمی- پژوهشی مهندسی هوانوردی
سال سیزدهم، شماره اول، بهار ۹۰

معادلات انتگرال مرزی برای حل حوزه زمان و مدل‌سازی رتبه‌کاسته آیرودینامیک ناپایای بال‌های نازک

محمدی امین، میثم*[1]، قدیری، بهزاد[2]، حدادپور، حسن[3]
۱- دانشجوی دکترا، دانشکده فنی مهندسی، دانشگاه تربیت مدرس، تهران، ایران
۲- استادیار، دانشکده فنی مهندسی، دانشگاه تربیت مدرس، تهران، ایران
۳- دانشیار، دانشکده مهندسی هوافضا، دانشگاه صنعتی شریف، تهران، ایران
(دریافت مقاله: ۱۳۸۹/۱۰/۶   تاریخ پذیرش: ۱۳۹۰/۰۳/۱۰)

چکیده

در این تحقیق با استفاده از معادلات انتگرال مرزی به مطالعه آیرودینامیک ناپایای بال‌های نازک پرداخته شده است. هدف ایجاد بستر مناسب برای توسعه کاربرد روش اجزای مرزی به برخی ترکیب‌های برآزای نوین مانند بال‌های غشایی، بالزن و فرم‌پذیر که دارای ضخامت ناچیزند بوده است. برای این منظور روش اجزای مرزی آیرودینامیکی متداول که تنها قابلیت حل جریان حول اجسام ضخیم را دارد به گونه‌ای فرمول‌بندی و اصلاح می‌شود که برای بال‌های نازک نیز کاربردپذیر باشد. همچنین با توجه به قابل بیان بودن دستگاه معادلات اجزای مرزی در شکل مسأله مقدار ویژه به تحلیل ویژه جریان ناپایا حول بال‌های نازک و توسعه مدل‌های آیرودینامیکی رتبه‌کاسته بر اساس مودهای ویژه جریان پرداخته شده است. از روش اجزای مرزی توسعه یافته و مدل‌های رتبه کاسته مبتنی بر آن برای تحلیل آیرودینامیک حوزه زمان انواع ایرفویل و بال در چند نوع حرکت ناپایا استفاده شده است که نتایج حاصل تطابق بسیار خوبی با نتایج تحلیلی و عددی معتبر دارند.

واژه‌های کلیدی: *معادلات انتگرال مرزی، روش اجزای مرزی، مدل‌سازی رتبه کاسته، آیرودینامیک ناپایا، آیرودینامیک بال نازک*

مقدمه

طی دو دهه اخیر روش‌های مبتنی بر معادلات انتگرال مرزی توسعه چشم‌گیری در زمینه‌های مختلف یافته‌اند و به طور گسترده در کاربردهای گوناگون هوافضایی از جمله تحلیل آیرودینامیک در رژیم‌های مختلف جریان به‌کار گرفته شده‌اند. از مشهورترین انواع این روش‌ها می‌توان به روش اجزای مرزی اشاره کرد که توسعه کاربرد و بهبود کارایی آن در حل مسائل مختلف مهندسی تاکنون مورد توجه بسیاری از محققین بوده است. قابلیت حل جریان حول هندسه‌های نزدیک به ترکیب واقعی وسایل پرنده با هزینه به مراتب کمتر از رویکردهای محاسباتی دامنه‌مبنا[1] سبب شده است روش اجزای مرزی به ویژه در مسائل وابسته به زمان، مطالعات طراحی/بهینه‌سازی و تحلیل‌های کوپل یا چندوجهی[2] مانند آیرواالاستیسیته که محاسبات آیرودینامیک به دفعات نیاز می‌شود، مورد توجه قرار گیرد. قابلیت اعمال تکنیک‌هایی جهت کاهش بیشتر هزینه محاسبات مانند مدل‌سازی رتبه کاسته، روش چندقطبی سریع[3] و مدل‌سازی فضای حالت نیز به هرچه کارامدتر شدن حل مسأله با استفاده از روش اجزای مرزی کمک خواهدکرد. اما علی‌رغم تمام این مزایا روش اجزای مرزی متداول برای آیرودینامیک ناپایا که مبانی آن پیشتر توسط مورینو و شاگردانش [۶-۸] توسعه یافته است، ذاتاً محدودیتی دارد که کاربرد آن را برای بال‌های نازک یا تخت غیرممکن می‌سازد. یک دلیل این محدودیت، نوع فرمول‌بندی و شکل انتگرال‌های مرزی است که مبنای توسعه روش اجزای مرزی قرار گرفته‌اند. نزدیکی بیش از حد نقاط هم‌مکانی به دلیل انطباق تقریبی المان‌های زیر و روی یک بال نازک محاسبات ضرایب تأثیر را با مشکل مواجه خواهد ساخت و مانع از بکارگیری این نوع روش اجزای مرزی برای هندسه‌های نازک می‌شود. همچنین اعمال شرط مرزی عدم نفوذ به صورت معمول مقدور نیست؛ زیرا نازک بودن هندسه الزام می‌کند در یک نقطه دو شرط مرزی

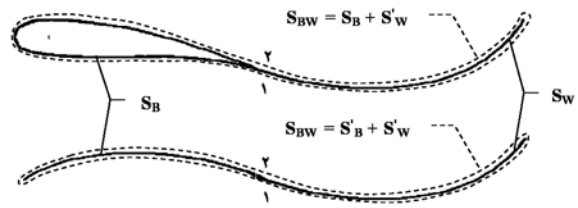
* نویسنده پاسخگو، تلفن: ۰۹۱۲۲۵۱۵۷۰۲، پست الکترونیک: mohammadi_amin@modares.ac.ir

مختلف با توجه به جهات متفاوت بردار نرمال در زیر و روی بال داشته باشیم. از سوی دیگر کاربرد بال‌های با ضخامت اندک در صنایع هوافضا روزبه‌روز گسترده‌تر می‌شود که نمونه‌هایی از آنها عبارت است از بالک موشک‌های کروز، هواپیماهای با بال فرم‌پذیر[4]، روبات‌های بالزن[5] و ریزپهپادهای بال‌غشایی[6]. رویکردهای تحلیلی موجود برای محاسبه ضرایب آیرودینامیک بال‌های نازک مانند حل تئودورسون و تابع واگنر در حالت دوبعدی [۴] و تقریب جونز برای حالت سه‌بعدی [۱] محدود به هندسه‌های تخت و حرکات ناپایای ساده هستند. روندهای عددی مانند روش گردابه متمرکز[7] در حالت دوبعدی و روش‌های حلقه/شبکه گردابه برای حالت سه‌بعدی [۴] نیز فاقد مزایای روش اجزای مرزی هستند. این مزایا عبارتند از: قابلیت توسعه فرمول‌بندی به رژیم‌های گذرصوت و زیرصوت [۷،۱۲]، امکان به‌کارگیری برای هندسه‌های آیرودینامیکی پیچیده [۲،۳،۱۰] و تناسب فرمول‌بندی با طیف وسیعی از انواع تکنیک‌های کاهش ابعاد محاسبات مانند مدل‌سازی رتبه‌کاسته [۲،۳، ۹-۱۱]، بیان فضای حالت و روش چندقطبی سریع [۵].

با توجه به توضیحات بالا درصورتی که بتوان با تمهیداتی در فرمول‌بندی، اعمال شرایط مرزی و نحوه اجرا، محدودیت به‌کارگیری روش اجزای مرزی در حل جریان حول بال‌های نازک را رفع کرد، دامنه کاربرد این روش بسیار وسیع‌تر شده و تمام انواع پیکره‌های آیرودینامیکی را در بر خواهد گرفت. به علاوه می‌توان بر اساس حل اجزای مرزی، مدل‌های رتبه‌کاسته کارآمد توسعه داد که به ویژه در مسائلی که محاسبات مکرر ضرایب یا نیروهای آیرودینامیکی نیاز است، جایگزین حل مستقیم اجزای مرزی شوند. این مدل‌ها مبتنی بر یک بیان مودال از میدان آیرودینامیکی و توصیف آن برحسب تعدادی از مودهای مؤثرند. از نظر مفهومی ساده‌ترین راه انتخاب چنین مجموعه‌ای، در نظر گرفتن مودهای ویژه جریان است که از تحلیل ویژه دستگاه معادلات برخی روش‌های عددی مانند روش اجزای مرزی به دست می‌آیند. با استفاده از یک مدل رتبه‌کاسته می‌توان ضرایب آیرودینامیکی ایرفویل یا بال را در حرکات مختلف ناپایا بدون نیاز به تکرار بخش عمده‌ای از محاسبات به سرعت و با دقت پیش‌بینی کرد. بنابراین نوآوری‌های پژوهش حاضر نسبت به تحقیقات پیشین عبارت است از: (۱) ارائه معادلات انتگرال مرزی برای حل اجزای مرزی جریان ناپایا حول بال‌های نازک در حوزه زمان و (۲) مدل‌سازی رتبه‌کاسته آیرودینامیکی بر اساس روش اجزای مرزی ارائه شده با استفاده از مودهای ویژه جریان. در ادامه این نوشتار ابتدا به فرمول‌بندی معادلات انتگرال مرزی حاکم بر جریان پتانسیل ناپایا حول یک بال نازک پرداخته می‌شود. سپس روش اجزای مرزی برای حل عددی این معادلات انتگرال مرزی تشریح خواهد شد. نحوه تشکیل مسأله مقدار ویژه بر مبنای دستگاه معادلات اجزای مرزی و تحلیل ویژه آن در مرحله بعد ارائه می‌شود. پس از آن روند مدل‌سازی رتبه‌کاسته بر اساس مودهای ویژه جریان به‌طور خلاصه بیان می‌شود و سرانجام به ارائه نتایج حاصل از روش ابداع‌شده در این تحقیق در چند نوع حرکت ناپایای ایرفویل‌ها و بال‌های نازک و بحث درباره دقت و کارایی محاسبات در مقایسه با نتایج معتبر پرداخته می‌شود.

معادلات انتگرال مرزی

در این بخش، فرمول‌بندی انتگرالی ابداع شده برای مسائل آیرودینامیک بال نازک و روش اجزای مرزی متناظر برای حل عددی این معادلات شرح داده خواهد شد. چنانچه پیشتر ذکر شد، هدف از این مقاله توسعه کاربرد روش اجزای مرزی متداول برای اجسام ضخیم به هندسه‌های با ضخامت اندک بوده است. طبعاً فرضیات حاکم بر معادلات و جریان حول بال نازک، مشابه مطالعات پیشین در زمینه اجسام ضخیم (از جمله مراجع [۲]، [۴]، [۶] و [۸]) در نظر گرفته شده که همگی مبتنی بر مدل جریان غیرلزج هستند. در واقع تا زمانی که زاویه حمله مؤثر کمتر از زاویه حمله متناظر با ضریب برآی بیشینه باشد و جدایش بر روی ایرفویل رخ ندهد، فرض جریان غیرلزج صحیح است. به‌علاوه با توجه به کاربرد مورد انتظار از روش ارائه شده یعنی آیرودینامیک خطی و آیروالاستیسیته خطی بال‌های نازک تحت حرکات نوسانی با دامنه تغییرات محدود، زاویه حمله مؤثر ناشی از حرکات ناپایا همواره در محدوده رفتار خطی ضرایب باقی می‌ماند و درنتیجه فرض جریان غیرلزج معتبر است. شایان توجه است که روش‌های کلاسیک مانند روش تئودورسون و واگنر برای بال‌های تخت نیز مبتنی بر فرض جریان غیرلزج هستند. بنابراین فرمول‌بندی انتگرال مرزی که در این بخش ارائه خواهد شد مبتنی بر فرضیات معمول برای جریان پتانسیل یعنی جریان غیرلزج، غیرچرخشی و تراکم‌ناپذیر می‌باشد. این فرضیات از نظر فیزیکی برای جریان‌های با رینولدز متوسط به بالا (بیش از 10^4) و در زوایای حمله کم قابل قبول هستند.



شکل ۱ ــ تعریف سطوح انتگرال‌گیری برای معادله انتگرال مرزی در دو حالت بال ضخیم و نازک

چنانچه در تحقیقات پیشین مانند [۶] اشاره شده است برای دستیابی به بیان انتگرال مرزی گرین برای مسائل برآزا، باید معادله انتگرالی روی یک سطح S_{BW} تعریف شود که حجم جسم همچنین یک لایه نازک شامل سطح دنباله را احاطه کند (شکل۱)؛ زیرا طبق مفروضات، این معادله درون حجم جسم و روی سطح دنباله معتبر نیست. در مورد بال‌های دارای ضخامت که روش اجزای مرزی برای حل جریان آیرودینامیک حول آنها پیش از این ارائه و استفاده شده است روال به این صورت است که تنها دو روی سطح بسته S'_W احاطه‌کننده سطح دنباله S_W را بی‌نهایت به هم نزدیک می‌کنند. در این فرآیند S'_W با دو روی سطح دنباله S_W جایگزین می‌شود. با فرض جهت رو به بالا برای بردار نرمال n (۱ به ۲) در حالت حدی به‌دست می‌آید:

$$\oiint_{S'_W} \phi \frac{\partial G}{\partial n} dS = \iint_{S_W} \Delta\phi \frac{\partial G}{\partial n} dS \qquad (۱)$$

که $\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1$. درحالی که با استفاده از تعریف دنباله برای جریان پتانسیل برآزا داریم، $\Delta\left(\frac{\partial \phi}{\partial n}\right) = 0$ و در نتیجه:

$$\oiint_{S'_W} \frac{\partial \phi}{\partial n} G dS = \iint_{S_W} \Delta\left(\frac{\partial \phi}{\partial n}\right) G dS = 0 \qquad (۲)$$

بنابراین، معادله انتگرال مرزی برای پتانسیل اغتشاشی حول بال ضخیم به صورت زیر حاصل می‌شود [۶]:

$$E(\mathbf{x}_*, t_*)\phi(\mathbf{x}_*, t_*) = \oiint_{S_B} \left(\frac{\partial \phi}{\partial n} G - \phi \frac{\partial G}{\partial n}\right) dS - \iint_{S_W} \Delta\phi \frac{\partial G}{\partial n} dS \qquad (۳)$$

که در آن $S_B = S'_B$ سطح (بسته) جسم و S_W سطح (باز) دنباله است. در تحقیقات پیشین با استفاده از حل اجزای مرزی این معادله، جریان ناپایا حول ایرفویل‌ها و بال‌های دارای ضخامت مورد تحلیل قرار گرفته است. روال به این صورت است که پس از گسسته‌سازی معادله (۳) بر اساس فرمول‌بندی اجزای مرزی از قبل معین، با اعمال شرط عدم نفوذ روی جسم، شرط کوتا در لبه فرار و به‌کارگیری تئوری کلوین روی دنباله، دستگاه معادلات جبری برای حل مجهولات توزیع پتانسیل روی جسم و اختلاف پتانسیل روی دنباله به‌دست می‌آید. چنانچه در مقدمه نیز اشاره شد اتخاذ این رویه برای بال‌های نازک بر اساس معادله (۳) بدون اعمال اصلاحاتی در معادلات انتگرالی و شرایط مکمل غیر ممکن است. در ادامه رویکرد اصلاح‌شده تشریح می‌شود.

برای ایجاد امکان استفاده از معادلات انتگرالی و روش اجزای مرزی برای حل جریان حول بال‌های نازک یا با ضخامت ناچیز ابتدا معادله (۳) برای بال ضخیم را در نظر می‌گیریم. با توجه به ضخامت ناچیز جسم، مشابه فرضی که برای دنباله صورت گرفت بال را نیز به شکل یک سطح ناپیوستگی در نظر می‌گیریم، با این تفاوت که بال بر خلاف دنباله، بار آیرودینامیکی تحمل می‌کند. سپس با توجه به شکل (۱) دو روی سطح بسته S'_B احاطه‌گر سطح S_B را بی‌نهایت به جسم نزدیک می‌کنیم. در این فرآیند، S'_B با دو روی سطح S_B یا اصطلاحاً سطح خیس بال جایگزین می‌شود. به‌طور مشابه با فرض جهت رو به بالا برای بردار نرمال n (۱ به ۲) در حالت حدی به‌دست می‌آید:

$$\oiint_{S'_B} \phi \frac{\partial G}{\partial n} dS = \iint_{S_B} \Delta\phi \frac{\partial G}{\partial n} dS \qquad (۴)$$

$$\oiint_{S'_B} \frac{\partial \phi}{\partial n} G dS = \iint_{S_B} \Delta\left(\frac{\partial \phi}{\partial n}\right) G dS = 0 \qquad (۵)$$

بنابراین، با توجه به معادلات (۴) و (۵)، معادله انتگرال مرزی (۳) برای جریان حول بال نازک به صورت زیر ساده می‌شود:

$$E(\mathbf{x}_*, t_*)\phi(\mathbf{x}_*, t_*) = -\iint_{S_B + S_W} \Delta\phi \frac{\partial G}{\partial n} dS \qquad (۶)$$

در معادله (۳) ضریب E برای نقاط خارج از مرز عدد یک است و برای نقاط روی مرز با حذف نقطه با یک دایره یا کره کوچک و تبدیل انتگرال مرزی بر اساس مقدار اصلی کوشی[8] و رفع تکینگی انتگرال‌ها روی این نقاط به‌دست می‌آید. در اینجا

با توجه به عدم وجود متغیر پتانسیل در طرف راست معادله (۶) ضریب E همان عدد یک فرض می‌شود، اما عبارتی به سمت راست معادله اضافه می‌شود که حاصل حذف تکینگی از انتگرال‌های مرزی است:

$$\phi(\mathbf{x}_*,t_*) = -\iint_{S_B+S_W} \Delta\phi \frac{\partial G}{\partial n} dS \pm \frac{\Delta\phi}{2}\bigg|_{\mathbf{x}_*\in S_B} \qquad (۷)$$

که علائم مثبت و منفی به ترتیب مربوط به روی بال و سطح زیرین آن می‌شوند و G حل اساسی[۹] است ($\ln r/2\pi$ در حالت دوبعدی و $-1/4\pi r$ در حالت سه‌بعدی با $r=\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_*\|$).

معادله (۷) در صورت معلوم بودن توزیع اختلاف پتانسیل روی سطح بال و دنباله می‌تواند برای ارزیابی پتانسیل در نقاط داخل دامنه غیر واقع روی مرز استفاده شود. اما برای تعیین توزیع اختلاف پتانسیل روی مرز شامل بال و دنباله این معادله قابل استفاده نیست زیرا بر خلاف حالت بال ضخیم که با داشتن $\partial\phi/\partial n$ روی S_B (شرط مرزی نیومن) دستگاه معادلات برای ارزیابی ϕ روی S_B و $\Delta\phi$ روی S_W به‌دست می‌آمد در اینجا مشتق نرمال پتانسیل وجود ندارد؛ همچنین روی جسم دو مجهول پتانسیل و اختلاف پتانسیل داریم که تعداد مجهولات را بیش از معادلات می‌سازد. برای رفع این مشکلات می‌توان از معادله (۷) نسبت به جهت عمود بر سطح مشتق گرفت و با توجه به شرایط مشتق‌گیری برداری رابطه زیر را نوشت:

$$\frac{\partial\phi}{\partial n}(\mathbf{x}_*,t_*) = \nabla\phi.\mathbf{n} = -\left(\iint_{S_B+S_W} \Delta\phi \frac{\partial}{\partial n}(\nabla G) dS\right).\mathbf{n} \qquad (۸)$$

که ∇G برای حالت دوبعدی $\mathbf{r}/2\pi r^2$ و در حالت سه‌بعدی $\mathbf{r}/4\pi r^3$ است. با استفاده از شرط عدم نفوذ روی جسم، $\frac{\partial\phi}{\partial n} = -\frac{\partial\phi_\infty}{\partial n} = -\mathbf{v}_\infty.\mathbf{n}$، می‌توان سمت چپ معادله (۸) را در نقاط قرارگرفته روی جسم معین کرد و دستگاه معادلاتی را برای تعیین مجهولات اختلاف پتانسیل روی سطح بال و دنباله تشکیل داد. برای در نظر گرفتن اثرات تراکم‌پذیری در اعداد ماخ بالاتر از ۰/۳ نیز مشابه حالت بال ضخیم می‌توان از مختصات پرانتل- گلاورت بهره برد. در این حالت با تغییر مختصات از (x,y,z) به $(x/\beta,y,z)$ که $\beta=\sqrt{1-M^2}$ معادلات حاکم مشابه حالت تراکم‌ناپذیر حل می‌شوند.

روش اجزای مرزی

برای حل عددی معادله انتگرال مرزی (۸) با استفاده از روش اجزای مرزی مستقیم می‌توان پس از گسسته‌سازی مرز جسم به اجزای دارای اختلاف پتانسیل ثابت در سطح المان و به‌کارگیری روش هم‌مکانی (نقطه هم‌مکانی در مرکز المان) به روابط زیر برای تشکیل دستگاه معادلات مرزی رسید:

$$\sum_{m=1}^{NB+NW} \Delta\phi_m C_{km} = \mathbf{v}_\infty.\mathbf{n}_k \qquad ,k=1..NB \qquad (۹)$$

که

$$C_{km} = \left(\int_{S_m} \frac{\partial}{\partial n}(\nabla G) dS\right).\mathbf{n}_m$$

ضرایب تأثیر هستند که می‌توانند به شکل تحلیلی یا عددی ارزیابی گردند (پیوست الف). در توسعه روابط بالا از فرض برابری مشتق جهت بردار نرمال در سراسر سطح جسم استفاده شد که برای هندسه‌های با انحنای کمتر از ۱۰٪ وتر صحیح است [۴]. در کاربردهای آیرودینامیکی معمول هم انحنای سطح در همین محدوده قرار دارد که با فرض جریان پتانسیل نیز سازگار است.

در روش اجزای مرزی برای آیرودینامیک بال‌های ضخیم به منظور حصول حل یکتا (در حالت دوبعدی) و برقراری ریزش ورتیسیته از بال به دنباله (در حالات دوبعدی و سه‌بعدی) اعمال شرط کوتا در لبه فرار ضروری است. این شرط از نظر فیزیکی دلالت دارد بر اینکه جریان، لبه فرار را به آرامی ترک می‌کند و سرعت در آن نقطه محدود است و می‌تواند این طور تفسیر شود که جریان لبه فرار را در امتداد خط نیمساز زاویه لبه فرار ترک می‌کند. برای وارد ساختن شرط کوتا در رویه حل اجزای مرزی برای بال‌های ضخیم مقدار اختلاف پتانسیل هر المان دنباله متصل به لبه فرار برابر با تفاضل مقادیر پتانسیل روی المان‌های متناظر بالا و زیر بال قرار داده می‌شود. در حالت بال نازک که حاصل حل دستگاه معادلات مرزی، مقادیر اختلاف پتانسیل روی اجزای بال است، اختلاف پتانسیل المان‌های متناظر بال و دنباله متصل به لبه فرار برابر فرض می‌شوند. به این ترتیب با اعمال شرط کوتا به تعداد المان‌های دنباله متصل به لبه فرار معادله اضافی خواهیم داشت و دستگاه معادلات برای یک حل پایا بسته خواهد شد. درصورتی که حل وابسته به زمان یا ناپایا مورد نظر باشد سطح دنباله باید در جهت جریان نیز گسسته‌سازی شود و مشابه حالت بال ضخیم،

اختلاف پتانسیل‌های هر ردیف المان دنباله غیرمتصل به لبه فرار بر اساس تئوری کلوین برابر با مقادیر اختلاف پتانسیل ردیف قبلی المان‌ها در گام زمانی قبل قرار داده شوند. در هر حالت پس از حل دستگاه معادلات توزیع اختلاف پتانسیل روی سطح بال نازک به‌دست می‌آید. با داشتن توزیع اختلاف پتانسیل با استفاده از معادله برنولی ناپایا رابطه زیر برای محاسبه توزیع اختلاف فشار به‌دست می‌آید:

$$\Delta p_i^t = -\rho\left[Q_\infty \frac{\Delta\phi_i^t - \Delta\phi_{i-1}^t}{\Delta l_i} + \frac{\Delta\phi_i^t - \Delta\phi_i^{t-1}}{\Delta t}\right] \tag{۱۰}$$

که Δl_i طول هر المان و Q_∞ مقدار سرعت جریان آزاد است. با معین شدن توزیع اختلاف فشار مقدار نیروهای برآ و ممان آیرودینامیکی نیز با گسسته‌سازی انتگرال‌های مربوطه به صورت زیر قابل محاسبه خواهند بود:

$$L(t) = \sum_{i=1}^{NB} \Delta p_i^t S_i\,, \quad M(t) = -\sum_{i=1}^{NB} \Delta p_i^t S_i x_i \tag{۱۱}$$

که ممان M حول مبدأ دستگاه مختصات تعیین می‌شود. به این ترتیب پس از معین شدن نوع حرکت ناپایا، بر اساس یک رویه گام‌به‌گام زمانی در هر گام، دستگاه معادلات اجزای مرزی برای محاسبه توزیع اختلاف پتانسیل روی بال مستقیماً حل می‌شود. سپس با استفاده از روابط (۱۰) و (۱۱) توزیع اختلاف فشار ناپایا و سرانجام ضرایب آیرودینامیکی ناپایا محاسبه می‌شوند.

تشکیل مسأله مقدار ویژه

چنانچه در بخش مقدمه اشاره شد، با توجه به زمان‌بر بودن حل مستقیم دستگاه معادلات اجزای مرزی در هر گام زمانی، برای برخی کاربردها نیاز به بهره‌برداری از تکنیک‌های کاهشی[۱۰] مانند مدل‌سازی رتبه کاسته است. در این تحقیق از رویکرد مود ویژه برای ایجاد مدل‌های رتبه‌کاسته بر اساس معادلات انتگرال مرزی استفاده شده است. برای تشکیل مسأله مقدار ویژه بر مبنای روش اجزای مرزی از رابطه هم‌مکانی حاصل از گسسته‌سازی انتگرال مرزی جریان حول بال نازک یعنی رابطه (۹) استفاده می‌کنیم. بردار مجهول μ این طور تعریف می‌شود:

$$\mu = \{\Delta\phi_1, \Delta\phi_2, ..., \Delta\phi_{NB}, \Delta\phi_1, \Delta\phi_2, ..., \Delta\phi_{NW}\}^T \tag{۱۲}$$

با استفاده از ارتباط بین مقادیر اختلاف پتانسیل اجزای جسم و دنباله از طریق شرط کوتا و ارتباط بین مقادیر اختلاف پتانسیل اجزای دنباله در گام‌های زمانی متوالی از طریق تئوری کلوین می‌توان معادله (۹) را بر اساس بردار مجهول μ از نو نوشت:

$$\mathbf{A}\mu^{n+1} + \mathbf{B}\mu^n = w^{n+1} \tag{۱۳}$$

که w بردار معلومی است که با استفاده از شرط مماس بودن جریان روی جسم به‌دست می‌آید. ماتریس $\mathbf{A}$ شامل ضرایب تأثیر اجزای جسم و دنباله آن است و ماتریس $\mathbf{B}$ نیز شامل ضرایبی است که با استفاده از تئوری کلوین ارتباط بین قدرت اجزای دنباله در گام‌های زمانی متوالی را برقرار می‌کند. برای تشکیل مسأله ویژه، با در نظر گرفتن بخش همگن رابطه (۱۳) و جایگذاری $\mu = x_i e^{\lambda_i t}$ و $z_i = e^{\lambda_i \Delta t}$ معادله زیر حاصل می‌شود:

$$z_i \mathbf{A} x_i + \mathbf{B} x_i = \mathbf{0} \tag{۱۴}$$

که z_i و λ_i به ترتیب مقادیر ویژه زمان‌گسسته و پیوسته i ام بوده و x_i بردار ویژه راست متناظر است. به شکل کلی‌تر داریم:

$$\mathbf{AXZ} + \mathbf{BX} = \mathbf{0} \tag{۱۵}$$

که Z ماتریس قطری شامل مقادیر ویژه مسأله ویژه تعمیم‌یافته و X ماتریسی است که ستون‌های آن را بردارهای ویژه راست متناظر تشکیل می‌دهند. با توجه به اینکه ماتریس‌های A و B متقارن هستند، بردارهای ویژه چپ (Y) نیز به‌طور مشابه در رابطه زیر صدق می‌کنند:

$$\mathbf{A}^T\mathbf{YZ} + \mathbf{B}^T\mathbf{Y} = \mathbf{0} \tag{۱۶}$$

شایان ذکر است که بردارهای ویژه راست و چپ شرایط تعامد را ارضا می‌کنند. یعنی:

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}^T\mathbf{AX} &= \mathbf{I} \\ \mathbf{Y}^T\mathbf{BX} &= \mathbf{-Z} \end{aligned} \tag{۱۷}$$

که این خواص بردارهای ویژه در فرمول‌بندی مدل‌سازی رتبه‌کاسته مود ویژه در بخش بعد استفاده خواهند شد.

با توجه به ارتباط بین مقادیر اختلاف پتانسیل اجزای روی دنباله و جسم می‌توان با کمی عملیات جبری ماتریسی به نوع دیگری از مسأله مقدار ویژه بر اساس روش اجزای مرزی دست یافت که چنانچه در بخش بعد توضیح داده خواهد شد می‌تواند مبنای مدل‌سازی رتبه‌کاسته مود ویژه به شکلی کارامدتر قرار گیرد. برای این منظور، ابتدا بردار μ در دستگاه جدید به صورت زیر تعریف می‌شود [۹]:

$$\mu = \begin{Bmatrix} \mu_b \\ \mu_w \end{Bmatrix}$$

که در آن μ_b مشتمل است بر پتانسیل‌های مجهول روی جسم به انضمام اختلاف پتانسیل‌های مجهول اجزایی از دنباله که مستقیماً به لبه فرار متصل هستند. بردار μ_w نیز شامل اختلاف پتانسیل‌های مجهول باقیمانده اجزای دنباله است. بر این اساس می‌توان رابطه (۱۳) را به شکل زیر بازنویسی کرد:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mu_b \\ \mu_w \end{Bmatrix}^{n+1} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mu_b \\ \mu_w \end{Bmatrix}^{n} = \begin{Bmatrix} w_b \\ 0 \end{Bmatrix}^{n+1} \quad (۱۸)$$

به عبارت دیگر:

$$A_{11}\mu_b^{n+1} + A_{12}\mu_w^{n+1} + B_{11}\mu_b^{n} + B_{12}\mu_w^{n} = w_b^{n+1} \quad (۱۹)$$

$$A_{21}\mu_b^{n+1} + A_{22}\mu_w^{n+1} + B_{21}\mu_b^{n} + B_{22}\mu_w^{n} = 0 \quad (۲۰)$$

با توجه به ماهیت و عناصر تشکیل‌دهنده ماتریس‌های $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ می‌توان نشان داد که ضرایب A_{21}، B_{11} و B_{12} در روابط فوق صفر هستند. در نتیجه رابطه (۱۹) به شکل زیر ساده می‌شود:

$$\mu_b^{n+1} = A_{11}^{-1} w_b^{n+1} - A_{11}^{-1} A_{12} \mu_w^{n+1} \quad (۲۱)$$

با جایگذاری رابطه (۲۱) - در گام n - در رابطه (۲۰) داریم:

$$A_{new}\, \mu_w^{n+1} + B_{new}\, \mu_w^{n} = w_{new}^{n} \quad (۲۲)$$

که در آن ضرایب مربوطه به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} A_{new} &= A_{22} \\ B_{new} &= B_{22} - B_{21} A_{11}^{-1} A_{12} \\ w_{new}^{n} &= -B_{21} A_{11}^{-1} w_b^{n} \end{aligned} \quad (۲۳)$$

مشابه حالت استاندارد یعنی معادله (۱۳) با در نظر گرفتن بخش همگن رابطه (۲۲)، مسأله ویژه جدید حاصل می‌شود. روند ذکر شده برای تشکیل مسأله مقدار ویژه جریان ناپایا بر اساس روش اجزای مرزی در حالات دوبعدی و سه‌بعدی صادق است. حاصل تحلیل ویژه مسأله مقدار ویژه، بردارها و مقادیر ویژه خواهند بود که در مدل‌سازی آیرودینامیکی رتبه‌کاسته استفاده می‌شوند. بردارهای ویژه به تعبیری نشانگر مودهای طبیعی حرکت سیال یا حداقل مودهای طبیعی مدل محاسباتی آن هستند و مقادیر ویژه، فرکانس (بخش حقیقی) و میرایی (بخش موهومی) هر مود را توصیف می‌کنند [۳].

روند مدل‌سازی رتبه کاسته

پس از تحلیل ویژه مسأله مقدار ویژه و محاسبه مودهای ویژه، می‌توان با انتخاب تعدادی از مودهای مؤثر یک فضای برداری با ابعاد کوچک‌تر نسبت به فضای محاسباتی مستقیم تشکیل داده و جواب مسأله را در این فضا به‌دست آورد. فرض می‌شود رفتار دینامیکی سیال به‌صورت مجموع مودهای ویژه ارائه شود:

$$\mu = \mathbf{Xc} \quad (۲۴)$$

که در آن X شامل M بردار ویژه سمت راست مربوط به بزرگترین مقادیر ویژه است و این بردارها ستون‌های آن را تشکیل می‌دهند. همچنین c بردار مختصات مود نرمال است که بیانگر ابعاد فضای مودال مورد استفاده است. با یادآوری روابط (۱۳) تا (۱۷) و جایگزینی رابطه (۲۴) در (۱۳) داریم:

$$\mathbf{AXc}^{n+1} + \mathbf{BXc}^{n} = \mathbf{w}^{n+1} \quad (۲۵)$$

ضرب طرفین معادله در $\mathbf{Y}^{\mathbf{T}}$ که سطرهای آن شامل M بردار ویژه چپ مربوط به بزرگترین مقادیر ویژه است و به‌کارگیری شرایط تعامد مودهای ویژه، دستگاهی متشکل از N معادله غیرکوپل در مختصات مودال $\mathbf{c}$ نتیجه می‌دهد:

$$\mathbf{c}^{n+1} - \mathbf{Zc}^{n} = \mathbf{Y}^{T}\mathbf{w}^{n+1} \quad (۲۶)$$

که در آن $\mathbf{c}$ برداری با بعد M، $\mathbf{Z}$ ماتریس قطری $M * M$، $\mathbf{Y}^{\mathbf{T}}$ ماتریسی با ابعاد $N * M$ و w بردار سمت راست با بعد N است. همان‌طورکه مشاهده می‌شود رابطه (۲۶) به دلیل خاصیت

تعامد مودهای ویژه یک سیستم غیرکوپل و با بعد ناچیز است و چون سمت چپ آن قطری است، می‌توان مودها را به طور مستقل و کم‌هزینه با پیمایش گام به گام زمانی محاسبه نمود. سپس با استفاده از معادله (۲۴) و برهم‌نهی مودها بردار مجهولات را به‌دست آورد. نتایج حاصل از این تحقیق برای بال‌های نازک و تحقیقات دیگر برای بال‌های ضخیم [۹] نشان می‌دهد که روش بالا حتی در صورت لحاظ کردن همه مودها نیز جواب مناسبی نخواهد داد. دلیل این مسأله را می‌توان این طور توضیح داد که سیستم معادلات به تعداد المان‌های روی مرز و متصل به آن دارای مقدار ویژه صفر است، لذا تأثیر مودهای متناظر با این مقادیر ویژه در عمل حذف می‌شود، اما این مودها عمود بر فروشار نیستند و از این رو در پاسخ نهایی سهیم هستند. بنابراین چون مودهای صرف‌نظرشده که در واقع به‌طور آنی با حرکت جسم فعال می‌شوند توسط روش بالا در نظر گرفته نمی‌شوند، نتایج حاصل مطلوب نخواهد بود. این مودها تمایل دارند فرکانس‌های طبیعی بزرگ‌تر از فرکانس تحریک داشته باشند و به همین دلیل در یک اسلوب ضرورتاً شبه‌استاتیک پاسخ می‌دهند. برای رفع این مشکل روش تصحیح استاتیکی پیشنهاد شده است که در ادامه تشریح می‌شود. برای گنجاندن تقریبی اثرات مودهای ویژه صرف‌نظرشده، حل ناپایا به دو بخش تجزیه می‌شود: یک بخش شبه‌پایای معادل پاسخ سیستم به اختلال شبه‌پایا؛ و یک بخش دینامیک حاصل از فضای مودال، یعنی:

$$\mu^n = \mu_s^n + \tilde{\mu}^n = \mu_s^n + \mathbf{X}\tilde{\mathbf{c}}^n \qquad (۲۷)$$

که بخش شبه‌پایا μ_s توسط رابطه زیر داده می‌شود:

$$[\mathbf{A}+\mathbf{B}]\mu_s^n = \mathbf{w}^n \qquad (۲۸)$$

با جایگذاری رابطه (۲۷) در معادله (۱۳) و ضرب طرفین رابطه در $\mathbf{Y^T}$ و استفاده از خاصیت تعامد یعنی معادله (۱۷) داریم:

$$\tilde{\mathbf{c}}^{n+1} - \mathbf{Z}\tilde{\mathbf{c}}^n = \mathbf{Y}^T\mathbf{w}^{n+1} - \mathbf{Y}^T(\mathbf{A}\mu_s^{n+1} + \mathbf{B}\mu_s^n) \qquad (۲۹)$$

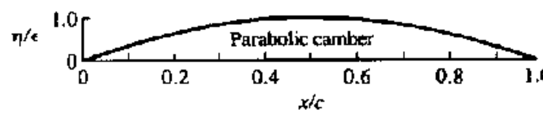
بخش استاتیک حل شامل اثر تمام مودهای ویژه است و در هر گام زمانی از حل سیستم جبری (۲۸) به‌دست می‌آید. برای بخش دینامیک حل، تعریف شده توسط معادله (۲۹)، تنها به حفظ تعداد اندکی از مودها نیاز است، زیرا تنها مودهای فرکانس-پایین به شکل دینامیک پاسخ می‌دهند. امتیاز معادله (۲۹) بر معادله (۲۶) آن است که می‌تواند در کنار روش تصحیح استاتیک برای در نظر گرفتن اثر مودهای متناظر با مقادیر ویژه صفر به منظور حصول حل رضایت‌بخش به‌کار گرفته شود. برای حل جریان ناپایا کافی است با پیمایش زمانی مودها را به‌طور مستقل دنبال کرده و پس از به‌دست آمدن آنها توسط رابطه (۲۹) جواب را از رابطه (۲۷) در هر گام محاسبه نمود.

چنانچه بحث شد، مهمترین دلیل نیاز به تصحیح استاتیک در مدل‌سازی رتبه‌کاسته مود ویژه وجود مقادیر ویژه صفر می‌باشد که در واقع معرف وجود فرکانس‌های بسیار زیاد یا مودهای شبه‌استاتیک در سیستم می‌باشند. بنابراین در صورتی که بتوان با حذف مودهای شبه‌پایا بدون نیاز به تصحیح استاتیک و با در نظر گرفتن تعدادی از مودهای مؤثر به جواب رسید، مدل‌سازی رتبه‌کاسته به مراتب کارامدتری خواهیم داشت. در بخش قبل دو نوع مسأله مقدار ویژه تعریف شد که مسأله نوع دوم یعنی رابطه (۲۲) تنها بر اساس مجهولات روی اجزای غیرمتصل به لبه فرار دنباله بنا شد و در نتیجه هیچ مقدار ویژه صفری نتیجه نمی‌دهد. بنابراین با به‌کارگیری تعدادی از مودهای ویژه حاصل از تحلیل ویژه این رابطه و استفاده از معادله (۲۱) می‌توان بدون تصحیح استاتیک جواب‌های مناسبی به‌دست آورد [۹]. این رویکرد حتی در صورت نیاز به تصحیح استاتیک برای دقت بیشتر نتایج باز هم با توجه به کاهش ابعاد مسأله مقدار ویژه، هزینه محاسباتی کمتری خواهد داشت.

نتایج و بحث

برای اعتبارسنجی روش ارائه شده ابتدا حل جریان پایا دوبعدی حول یک ایرفویل نازک سهموی با انحنای $\varepsilon = 0.1$ (شکل ۲) را در نظر می‌گیریم. این مثال می‌تواند برای بررسی اثر انحنای سطح بال بر تقریب مشتق نرمال در شرایط مرزی نیز استفاده شود. توزیع فشار تحلیلی از رابطه زیر به‌دست می‌آید [۴]:

$$\Delta C_p = 4\sqrt{\frac{c-x}{x}}\alpha + 32\frac{\varepsilon}{c}\sqrt{\frac{x}{c}(1-\frac{x}{c})} \qquad (۳۰)$$



شکل ۲ـ ایروفیل نازک سهموی با انحنای ده درصد وتر

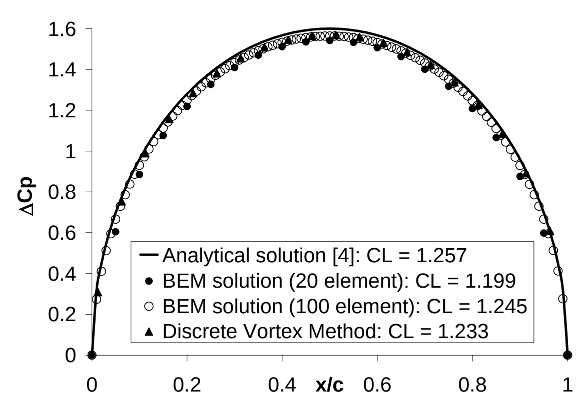
حل تحلیلی با استفاده از توزیع گردابه و اعمال شرایط مرزی روی محور x (وتر) به‌دست می‌آید. چنانچه در نمودارهای (۳) و (۴) مشاهده می‌شود توزیع فشار و ضریب برآی حاصل از روش اجزای مرزی ارائه شده در تحقیق حاضر در دو زاویه حمله صفر و ۱۰ درجه تطابق خوبی با حل تحلیلی و نتایج عددی حاصل از روش گردابه جدا دارد و با افزایش المان‌ها دقت نتایج نیز بیشتر شده است. اختلاف اندک نتایج عددی و تحلیلی می‌تواند ناشی از این امر باشد که در هر دو روش حل عددی، نقاطی که شرایط مرزی روی آنها ارضا می‌شوند (نقاط هم‌مکانی) بر خلاف روش تحلیلی روی خط انحنا قرار دارند. نزدیکی این نتایج نشان می‌دهد برای هندسه‌های با انحنای کمتر از ۱۰٪ وتر ($\varepsilon < 0.1$) محل اعمال شرایط مرزی تأثیر چندانی بر جواب ندارد. پدیده مکش لبه فرار که در آیرودینامیک بال نازک کاملاً شناخته شده است نیز در شکل (۴) در ناحیه لبه فرار مشاهده می‌شود.

بررسی استقلال جواب از مشخصات دنباله نشان داد که طول و شکل دنباله تأثیر قابل ملاحظه‌ای بر حل اجزای مرزی دارند. هر چه طول دنباله بیشتر باشد، جواب به حل تحلیلی نزدیکتر می‌شود که این امر با توجه به مبتنی بودن حل تحلیلی بر دنباله بی‌نهایت قابل انتظار است.

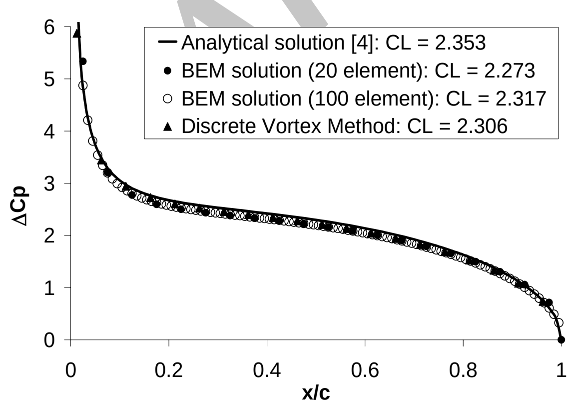
نکته دیگر جهت قرارگیری صفحه دنباله است که از بین سه گزینه مماس بر وتر، مماس بر لبه فرار و مماس بر جهت جریان مورد دوم بهترین نتایج را داد. دلیل این امر را می‌توان حساسیت حل اجزای مرزی به جهت بردار نرمال اجزا به ویژه در محاسبات ضرایب تأثیر دانست. این نتیجه با شرط کوتا که جریان ملایم و مماس بر لبه فرار را الزام می‌کند نیز سازگار است.

در [۴] برای حل جریان حول یک بال ضخیم نامتقارن با استفاده از روش پنل مرتبه اول نشان داده شده که اگر دنباله در ابتدا مماس بر لبه فرار و دور از بال همسو با جریان باشد، نتایجی نزدیک به داده تجربی حاصل خواهد شد. با توجه به اینکه در روش اجزای مرزی ارائه شده در حالت پایا تنها یک المان (صفحه تخت) دنباله وجود دارد برای بررسی مسأله با دنباله منحنی‌شکل باید از حل ناپایا با گام‌های زمانی به تعداد المان‌های روی دنباله و فرض همگرایی حل ناپایا به جواب پایا پس از سپری شدن زمان کافی استفاده کرد.

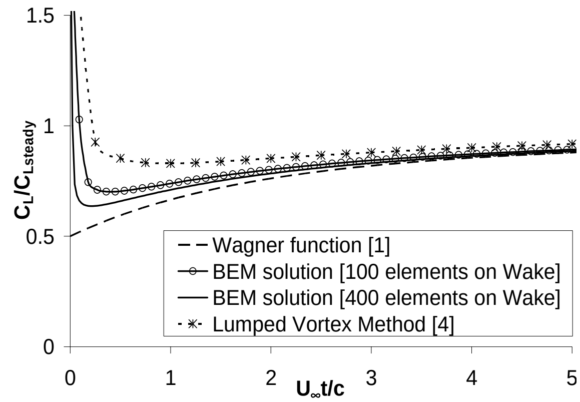
چیدمان المان‌های دنباله در قالب پیشنهادی [۴] و تحلیل اجزای مرزی ناپایا نشان داد که جواب حاصل هیچ تفاوتی با حل پایا به‌دست آمده با دنباله با طول مشابه و یک المان تخت مماس بر لبه فرار ندارد. بنابراین در کاربردهای مورد نظر این تحقیق (زاویه حمله و دامنه نوسان کم) تنها مماس بودن دنباله بر لبه فرار برای حصول جواب مناسب کفایت می‌کند. پس از ارزیابی روش در حالت پایا می‌توان از روش اجزای مرزی ارائه شده برای حل جریان‌های ناپایا استفاده کرد.



شکل ۳- توزیع اختلاف پتانسیل در جهت وتر ایرفویل سهموی در زاویه حمله صفر درجه

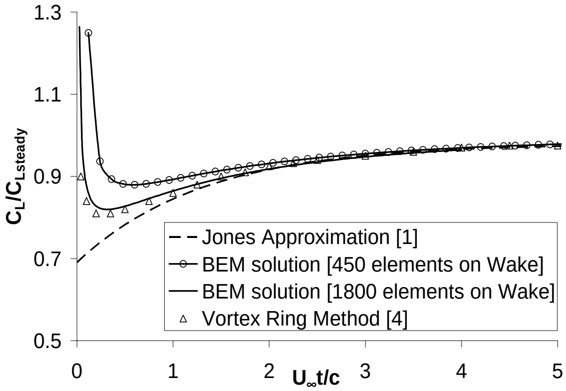


شکل ۴- توزیع اختلاف پتانسیل در جهت وتر ایرفویل سهموی در زاویه حمله ۱۰ درجه



شکل ۵- تغییرات ضریب برآی گذرا برای یک ایرفویل تخت پس از شروع ناگهانی حرکت با سرعت ثابت

برای بررسی قابلیت روش در مسائل آیرودینامیک ناپایا از حرکت ناگهانی یک ایرفویل تخت در زاویه حمله ۵ درجه شروع می‌کنیم. همانطور که در شکل (۵) مشاهده می‌شود نتایج به‌دست آمده از روش اجزای مرزی دقت خوبی در مقایسه با حل دقیق واگنر دارد و هرچه تعداد اجزای دنباله افزوده شده است دقت حل به ویژه در تسخیر تغییرات ضریب برآ در لحظات ابتدایی بیشتر شده است. دلیل این امر وابستگی گام زمانی به اندازه اجزای دنباله از طریق معادله جابجایی می‌باشد. اختلاف بین منحنی محاسبه شده و نتایج کلاسیک واگنر را می‌توان به نرخ محدود شتاب حین اولین گام زمانی نسبت داد. زیرا در حل واگنر زمان شتاب صفر و مقدار نیروی برآ بلافاصله پس از شروع حرکت ($t = 0+$) بی‌نهایت است. اثر شتاب محدود افزایش تند برآ حین شتاب و افزایش نرم آن در لحظات بعدی می‌باشد. در حل اجزای مرزی این حالات آزمایشی طول دنباله ده برابر وتر ایرفویل و تعداد اجزای روی جسم ۱۰۰ فرض شد. همچنین مشابه حالت پایا مشاهده شد که تعداد اجزای روی جسم تأثیر چندانی بر حل ندارد که این رفتار ناشی از این حقیقت است که نتیجه مستقیم و نهایی پیشینه سیرکولاسیون حول ایرفویل در شکل دنباله و توزیع اختلاف پتانسیل روی آن نمود پیدا می‌کند. به‌علاوه چنانچه پیشتر اشاره شد اندازه المان‌های دنباله نیز ارتباط مستقیم با اندازه گام زمانی حل ناپایا دارند. شایان ذکر است که ضریب برآی حالت پایا که برای محاسبه نسبت ضریب برآ در حالت ناپایا به حالت پایا در شکل (۵) مورد استفاده قرار گرفته است، با در نظر گرفتن یک المان دنباله طویل (۱۰۰ برابر وتر) و حل اجزای مرزی مستقل از زمان به‌دست آمده است. در نظر گرفتن چنین المان برای مدل‌سازی فیزیکی صحیح جریان پایا برآزا حول یک ترکیب آیرودینامیکی ضروری است.



شکل ۶- تغییرات ضریب برآی گذرا برای یک بال تخت ($AR = 6$) پس از شروع ناگهانی حرکت با سرعت ثابت

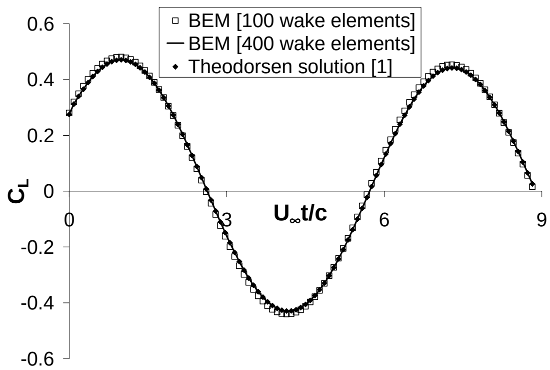
برای مطالعه توانایی روش اجزای مرزی ارائه شده در حل جریان ناپایا حول بال‌های نازک، بال مستطیلی تخت با ضریب منظری ۶ و زاویه حمله ۵ درجه که از حالت سکون شروع به حرکت با سرعت ثابت می‌کند در نظر گرفته شد. روی جسم ۱۵۰ المان (۶ المان در جهت دهانه و ۲۵ المان در جهت وتر) و در دو حالت آزمایشی ۴۵۰ و ۱۸۰۰ المان روی دنباله به طول ده برابر وتر قرار داده شد. در شکل (۶) تغییرات نسبت ضریب برآی آنی به ضریب برآی حالت پایای بال در برابر زمان بی‌بعد نشان داده شده است. چنانچه در شکل مشاهده می‌شود نتایج حاصل از روش اجزای مرزی با تقریب جونز [۱] که مبتنی بر روابط نمایی حوزه زمان است، اختلاف اندکی در شروع حرکت دارند که دلیل آن مشابه علت اختلاف نتایج حالت دوبعدی و حل واگنر است که پیشتر بحث شد. همچنین در شکل (۶) نتایج حاصل از روش حلقه گردابه [۴] که معمولاً برای آیرودینامیک بال نازک مورد استفاده قرار می‌گیرد نشان داده شده است که تفاوت چندانی بین این نتایج و حل اجزای مرزی به ویژه در حالت شبکه ریزتر دنباله وجود ندارد.

چنانچه در شکل (۶) مشخص است در روش اجزای مرزی با افزایش تعداد اجزای روی دنباله و ریزترشدن اندازه المان‌ها در جهت جریان و در نتیجه کوچک‌تر شدن گام زمانی امکان تسخیر دقیق‌تر تغییرات فراهم شده است. شایان توجه است که با افزایش ضریب منظری به مقادیر زیاد نتایج حالت سه‌بعدی به نتایج حالت دوبعدی (شکل ۵) میل می‌کند (مثلاً با قرار دادن $AR=1000$). بنابراین با مقایسه نتایج دو شکل (۵) و (۶)

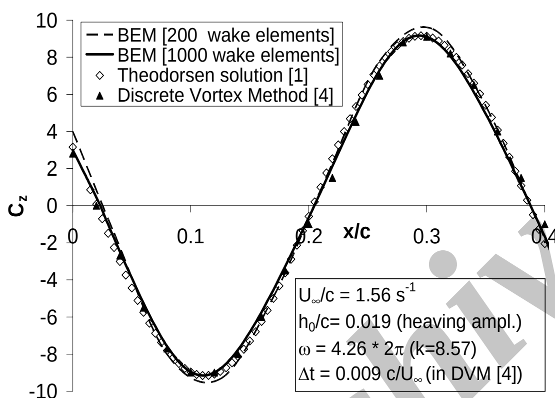
می‌توان نتیجه گرفت که با کاهش ضریب منظری طول برآی گذرا و اتلاف برآی اولیه کاهش می‌یابد. علت این امر را می‌توان تأثیر ضریب منظری محدود بر قدرت گردابه لبه فرار در لحظه شروع حرکت دانست.

پس از ارزیابی روش اجزای مرزی توسعه‌یافته در این تحقیق در مسائل حرکت ناگهانی بال از سکون به بررسی انواع دیگر حرکت ناپایا، یعنی حرکت‌های نوسانی پیچشی و انتقالی می‌پردازیم. در شکل (۷) تغییرات ضریب برآی ایرفویل تخت تحت نوسان پیچ با دامنه ۵ درجه حول زاویه حمله صفر درجه با فرکانس کاهش یافته ۰/۵ نشان داده شده است. در دو حالت حل اجزای مرزی، تعداد اجزای روی جسم ۱۰۰ و طول دنباله ۲۰ برابر وتر ایرفویل فرض شده است. چنانچه مشاهده می‌شود تطابق خوبی بین نتایج روش اجزای مرزی و حل تئودورسون وجود دارد. به دلیل فرکانس بی‌بعد کم حرکت نوسانی، افزایش تعداد اجزای دنباله دقت نتایج را تغییر چندانی نمی‌دهد. زیرا برای این نوع حرکت‌های نوسانی نیازی به گام‌های زمانی خیلی کوچک برای تسخیر دقیق تغییرات زمانی نیست.

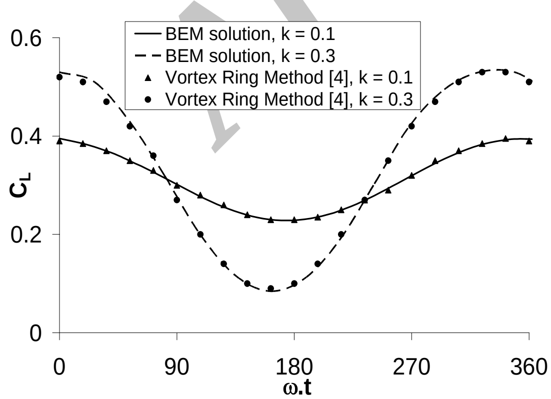
در شکل (۸) نتایج حاصل از محاسبه ضریب نیروی عمودی یک ایرفویل تخت تحت نوسان انتقالی در جهت عمودی با مشخصات ذکر شده روی شکل نشان داده شده است. چنانچه مشاهده می‌شود نتایج حاصل از محاسبه با روش اجزای مرزی در مقایسه با حل کلاسیک تئودورسون [۱] همچنین نتایج [۴] که با مدل گردابه جدا به دست آمده از تطابق خوبی برخوردارند. همچنین با افزایش تعداد اجزای دنباله خطای محاسبات کاهش یافته که علت آن فرکانس بی‌بعد بزرگ نوسانات است که گام زمانی کوچک‌تر و در نتیجه تعداد المان بیشتر روی دنباله را برای بالا بردن دقت حل الزام می‌کند. در هر دو حالت حل اجزای مرزی نشان داده شده در شکل (۸) طول دنباله ۱۰ برابر طول وتر و تعداد المان روی جسم ۱۰۰ عدد در نظر گرفته شد و با افزایش اجزای روی جسم تغییری در نتایج مشاهده نشد. دقت نتایج در این مورد آزمایشی نشان داد که روش ارائه شده در نوسان‌های با فرکانس‌های بی‌بعد بالا نیز قابل استفاده است. در شکل (۹) نیز تغییرات ضریب برآ یک بال مستطیلی تخت با ضریب منظری ۴ و زاویه حمله ۵ درجه در نوسان انتقالی با دامنه ۰/۱ وتر و در دو فرکانس بی‌بعد ۰/۱ و ۰/۳ نمایش داده شده است. نتایج حاصل از روش اجزای مرزی و روش متداول برای بال‌های نازک یعنی روش حلقه گردابه [۴] از انطباق خوبی برخوردار هستند. در این دو حالت آزمایشی سطح جسم با ۱۰۰ و سطح دنباله با ۲۰۰ المان مدل شد که تعداد المان مورد نیاز روی دنباله با توجه به گام زمانی مورد نیاز حل ناپایا تعیین شد.



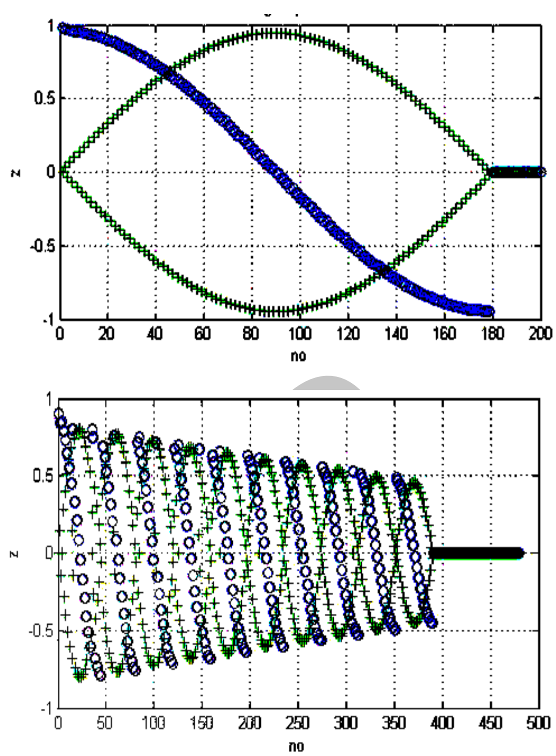
شکل ۷- تغییرات ضریب برآی ایرفویل تخت در نوسان پیچشی



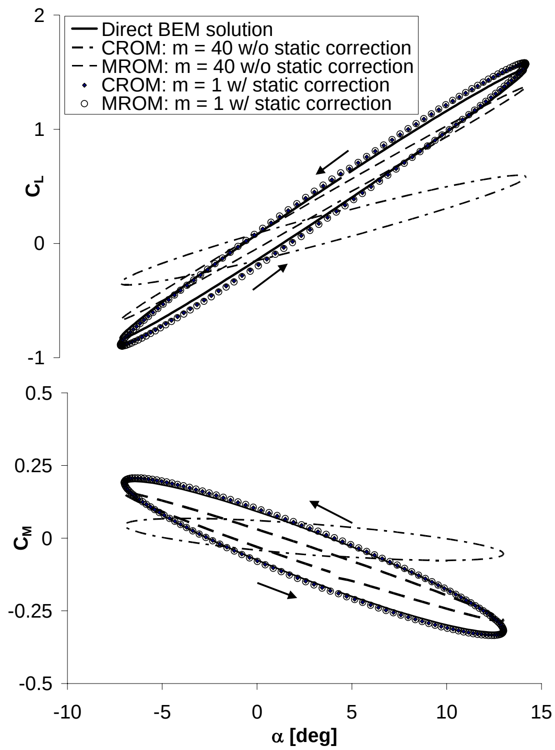
شکل ۸- تغییرات ضریب نیروی عمودی ایرفویل تخت در یک سیکل نوسان انتقالی



شکل ۹- تغییرات ضریب برآی بال مستطیلی تخت در نوسان انتقالی حول زاویه حمله ۵ درجه



شکل ۱۰- بخش‌های حقیقی (o) و موهومی (+) مقادیر ویژه به ترتیب شماره در حالت دوبعدی (بالا) و سه‌بعدی (پایین)



شکل ۱۱- تغییرات ضرایب برآ و ممان آیرودینامیکی برای ایرفویل تخت در نوسان پیچشی

پس از بررسی اعتبار نتایج حاصل از روش اجزای مرزی مستقیم در تحلیل آیرودینامیک ناپایا برای حالت‌های مختلف آزمایشی، به توسعه مدل‌های آیرودینامیکی رتبه‌کاسته بر اساس روش اجزای مرزی ارائه شده می‌پردازیم. یک ایرفویل تخت دوبعدی بدون انحنا که بدنه آن توسط ۲۰ المان و دنباله آن به طول ۹ برابر طول ایرفویل توسط ۱۸۰ المان مدل شده باشد، همچنین یک بال مستطیلی با ضریب منظری ۵ و طول دنباله ۵ برابر طول وتر را در نظر می‌گیریم. تعداد اجزای روی بال در جهت وتر ۸ و در جهت دهانه ۱۰ و تعداد اجزای روی دنباله در جهت جریان ۴۰ لحاظ می‌شود. با حل مسأله مقدار ویژه برای این دو حالت، توزیع مقادیر ویژه حاصل از تحلیل ویژه طبق شکل (۱۰) خواهد بود. اگر مقدار تمام مقادیر ویژه کمتر یا برابر واحد باشد، آنگاه سیستم پایدار و اگر هر یک از مقادیر ویژه از واحد بزرگ‌تر بود، آنگاه سیستم ناپایدار است. از سوی دیگر با توجه به طیف ویژه مشاهده می‌شود که سیستم به تعداد المان‌های متصل به جسم، مقادیر ویژه صفر دارد. از دیدگاه فیزیکی این امر موجه است زیرا چنانچه در بخش‌های قبل نیز بحث شد، مودهای ویژه متناظر با این مقادیر ویژه باید آنی و بدون هیچ تأخیر زمانی با حرکت جسم فعال شوند. در صورت تشکیل مسأله مقدار ویژه نوع دوم و تحلیل ویژه آن مشاهده می‌شود به دلیل حذف مجهولات روی جسم و اجزای دنباله متصل به لبه فرار در مسأله مقدار ویژه جدید اثری از مقادیر ویژه صفر وجود نخواهد داشت. بدیهی است با توجه به کاهش ابعاد سیستم در این حالت، تحلیل ویژه در زمان کمتری صورت پذیرد. همچنین بررسی بال‌های با هندسه پیچیده‌تر ولی دارای دینامیک دنباله یکسان نشان داد ضخامت، انحنا و زاویه حمله جسم تأثیر چندانی بر رفتار توزیع ویژه ندارد.

با استفاده از مودهای ویژه حاصل از تحلیل ویژه می‌توان مدل‌های آیرودینامیکی رتبه‌کاسته‌ای توسعه داد که قابلیت جایگزین شدن حل مستقیم اجزای مرزی را داشته باشند. یک ایرفویل تخت در نوسان پیچشی با دامنه ۱۰ درجه حول زاویه حمله ۳ درجه با فرکانس کاهش‌یافته ۰/۱ فرض می‌شود. شکل (۱۱) نتایج مدل‌سازی رتبه کاسته را در مقایسه با حل مستقیم نشان می‌دهد. چنانچه از نتایج نمایش داده شده در شکل (۱۱)

مشخص است، هر دو نوع روش مدل‌سازی رتبه‌کاسته معمول (CROM) و اصلاح‌شده (MROM) بدون تصحیح استاتیک حتی با در نظر گرفتن ۴۰ مود، نتیجه دقیقی ارائه نمی‌دهند. دلیل این رفتار وجود تعدادی مقدار ویژه صفر و در نتیجه مودهای شبه‌استاتیک است که اثر آنها فقط با به‌کارگیری تکنیک تصحیح استاتیک قابل دستیابی است. هر چند، نتایج مدل اصلاح‌شده خطای بسیار کمتری دارند و در زمان محاسباتی کوتاه‌تر نیز به‌دست آمده‌اند. اما همان‌طورکه در شکل (۱۱) مشاهده می‌شود، در صورت به‌کارگیری تصحیح استاتیک، هر دو روش با در نظر گرفتن تنها یک مود نتایج دقیقی ارائه خواهند کرد. در این حالت مزیت رویکرد مدل‌سازی رتبه‌کاسته اصلاح شده کارامدتر بودن آن از نظر هزینه محاسبات است.

نتیجه گیری

در این پژوهش با استفاده از معادلات انتگرال مرزی به مطالعه آیرودینامیک ناپایای بال‌های نازک پرداخته شد. برای این منظور روش اجزای مرزی آیرودینامیکی جدیدی ارائه شد که می‌تواند برای حل جریان حول بال‌های نازک استفاده شود. همچنین بر اساس مسأله ویژه حاصل از به‌کارگیری روش اجزای مرزی ارائه شده به تحلیل ویژه جریان و توسعه مدل‌های رتبه‌کاسته مود ویژه برای بال‌های ناپایا پرداخته شد. از روش اجزای مرزی توسعه‌یافته و مدل‌های رتبه‌کاسته مبتنی بر آن برای تحلیل آیرودینامیک حوزه زمان انواع ایرفویل و بال در چند نوع حرکت ناپایا استفاده شد که نتایج حاصل تطابق بسیار خوبی با نتایج تحلیلی و عددی معتبر داشتند.

پیوست الف.

محاسبه تحلیلی ضرایب تأثیر در حالت دو بعدی

در حل اجزای مرزی جریان حول بال نازک با مقدار اختلاف پتانسیل ثابت روی هر المان، انتگرال زیر برای ضرایب تأثیر به‌دست می‌آید (معادله ۹) که در مختصات محلی المان به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\int_{S_m} \frac{\partial}{\partial n}(\nabla G)\,dS = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\mathbf{x}-\mathbf{x}_*}{2\pi\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_*\|^2}\right)dx \qquad \text{(الف ۱)}$$

که G برای حالت دوبعدی $\ln r/2\pi$ می‌باشد. با انتگرال‌گیری نامعین خواهیم داشت:

$$\int \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\mathbf{x}-\mathbf{x}_*}{2\pi\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_*\|^2}\right)dx = \frac{z-z_*}{2\pi\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_*\|^2}\mathbf{i} - \frac{x-x_*}{2\pi\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_*\|^2}\mathbf{k} \qquad \text{(الف ۲)}$$

درنتیجه انتگرال معین در مختصات محلی به‌دست می‌آید:

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\mathbf{x}-\mathbf{x}_*}{2\pi\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_*\|^2}\right)dx = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{z_*-z_1}{r_1^2}-\frac{z_*-z_2}{r_2^2}\right)\mathbf{i} + \frac{1}{2\pi}\left(\frac{x_*-x_2}{r_2^2}-\frac{x_*-x_1}{r_1^2}\right)\mathbf{k} \qquad \text{(الف ۳)}$$

که r_1 و r_2 فاصله نقطه بار تا دو نقطه انتهای المان هستند.

پی‌نوشت‌ها

۱ Domain-based methods
۲ Multidisciplinary
۳ Fast multipole methods
۴ Morphing wing aircraft
۵ Flapping wing robots
۶ Membrane wing MAV
۷ Lumped vortex method
۸ Cauchy principal value
۹ Fundamental solution
۱۰ Reduction techniques

منابع و مراجع

[1] Bisplinghoff, R.L, Ashley, H, (1982), *"Principles of Aeroelasticity"*, John Wiley and Sons Inc., USA.
[2] Esfahanian,V, Behbahani-Nejad, M, (2002),*"Reduced Order Modeling of Unsteady Flows about Complex Configurations Using Boundary Element Method"*, ASME Journal of Fluids Engineering, Vol. 124, pp. 988-993.
[3] Haddadpour, H, Behbahani-Nejad, M, Firouz-Abadi, R.D, (2007), *"Reduced-Order Aerodynamic Model for Aeroelastic Analysis of Complex Configurations in Incompressible Flow"*, AIAA Journal of Aircraft, Vol. 44 (3), pp. 1015-1017.
[4] Katz, J, Plotkin, A, (2001), *"Low Speed Aerodynamics"*, 2nd Edition, Cambridge University Press, UK.
[5] Liu, Y, (2010), *"Fast Multipole Boundary Element Method - Theory and Applications in Engineering"*, Cambridge University Press, UK.

[6] Morino, L, Gennaretti, M, (1992), "*Boundary Integral Equation Methods for Aerodynamics*", Progress in Astronautics and Aeronautics, Vol. 146, pp. 279-320.

[7] Morino, L, Gennaretti, M, Iemma, U, Salvatore, F, (1998), "*Aerodynamics and Aeroacoustics of Wings and Rotors via BEM - Unsteady, Transonic, and Viscous Effects*", Computational Mechanics, Vol.21, pp.265-275.

[8] Morino, L, Gennaretti, M, Bernardini, G, (2003), "*A Boundary Element Method for the Aerodynamic Analysis of Aircraft in Arbitrary Motions*", Computational Mechanics, Vol.32, pp. 301-311.

[9] Shahverdi, H, Nobari, A.S, Behbahani-Nejad, M, Haddadpour, H, (2007), "*An Efficient Reduced-Order Modeling Approach Based on Fluid Eigenmodes and Boundary Element Method*", Journal of Fluids and Structures, Vol. 23, pp. 143-153.

[10] Shahverdi, H, Nobari, A.S, Behbahani-Nejad, M, Haddadpour, H, (2009), "*Aeroelastic analysis of helicopter rotor blade in hover using an efficient reduced-order aerodynamic model*", Journal of Fluids and Structures, Vol. 25 (8), pp. 1243-1257.

[11] Shahverdi, H, Nobari, A.S, Haddadpour, H, Behbahani-Nejad, M, (2009), "*Application of the Modified Reduced-Order Aerodynamics Modeling Approach to Aeroelastic Analysis*", Proceedings of the Institution of Mechanical Engineer - Part G: Journal of Aerospace Engineering, Vol. 223 (3).

[12] Soltani, N, Esfahanian, V, Haddadpour, H, Behbahani-Nejad, M, (2004), "*Unsteady Supersonic Aerodynamics Based on BEM, Including Thickness Effects in Aeroelastic Analysis*", Journal of Fluids and Structures, Vol. 19, pp. 801-813.