

معادلات انتگرال مرزی برای حل حوزه زمان و مدلسازی ر تبه کاسته آیرودینامیک ناپایای بال های نازک

محمدی امین، میثم^{۱۰}، قدیری، بهزاد^۲، حدادپور، حسن^۳ ۱- دانشجوی دکترا، دانشکده فنی مهندسی، دانشگاه تربیت مدرس، تهران، ایران ۲- استادیار، دانشکده فنی مهندسی، دانشگاه تربیت مدرس، تهران، ایران ۳- دانشیار، دانشکده مهندسی هوافضا، دانشگاه صنعتی شریف، تهران، ایران (دریافت مقاله: ۱۳۸۹/۱۰/۶ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۰/۰۳/۱)

چکیدہ

در این تحقیق با استفاده از معادلات انتگرال مرزی به مطالعه آیرودینامیک ناپایای بالهای نازک پرداخته شده است. هدف ایجاد بستر مناسب برای توسعه کاربرد روش اجزای مرزی به برخی ترکیبهای برآزای نوین مانند بالهای غشایی، بالزن و فرمپذیر که دارای ضخامت ناچیزند بوده است. برای این منظور روش اجزای مرزی آیرودینامیکی متداول که تنها قابلیت حل جریان حول اجسام ضخیم را دارد به گونهای فرمول بندی و اصلاح میشود که برای بالهای نازک نیز کاربردپذیر باشد. همچنین با توجه به قابل بیان بودن دستگاه معادلات اجزای مرزی در شکل مسأله مقدار ویژه به تحلیل ویژه جریان ناپایا حول بالهای نازک و توسعه مدلهای آیرودینامیکی رتبه کاسته بر اساس مودهای ویژه جریان پرداخته شده است. از روش اجزای مرزی توسعه یافته و مدلهای رتبه کاسته مبتنی بر آن برای تحلیل آیرودینامیک حوزه زمان انواع ایرفویل و بال در چند نوع حرکت ناپایا استفاده شده است که نتایج حاصل تطابق بسیار خوبی با نتایج تحلیلی و عددی معتبر دارند.

مقدمه

طی دو دهه اخیر روشهای مبتنی بر معادلات انتگرال مرزی توسعه چشمگیری در زمینههای مختلف یافتهاند و به طور گسترده در کاربردهای گوناگون هوافضایی از جمله تحلیل آیرودینامیک در رژیمهای مختلف جریان به کار گرفته شدهاند. از مشهورترین انواع این روشها میتوان به روش اجزای مرزی اشاره کرد که توسعه کاربرد و بهبود کارایی آن در حل مسائل مختلف مهندسی تاکنون مورد توجه بسیاری از محققین بوده است. قابلیت حل جریان حول هندسههای نزدیک به ترکیب واقعی وسایل پرنده با هزینه به مراتب کمتر از رویکردهای ویژه در مسائل وابسته به زمان، مطالعات طراحی/بهینهسازی و محاسباتی ایرودینامیک به دفعات نیاز میشود، مورد توجه قرار محاسبات آیرودینامیک به دفعات نیاز میشود، مورد توجه قرار گیرد. قابلیت اعمال تکنیکهایی جهت کاهش بیشتر هزینه

محاسبات مانند مدل سازی رتبه کاسته، روش چندقطبی سریع^۳ و مدل سازی فضای حالت نیز به هرچه کارام دتر شدن حل مسأله با استفاده از روش اجزای مرزی کمک خواه دکرد. اما علی رغم تمام این مزایا روش اجزای مرزی متداول برای آیرودینامیک ناپایا که مبانی آن پیشتر توسط مورینو و شاگردانش [۶–۸] توسعه یافته است، ذاتاً محدودیتی دارد که کاربرد آن را برای بالهای نازک یا تخت غیر ممکن می سازد. یک دلیل این محدودیت، نوع فرمول بندی و شکل انتگراله ای مرزی است که مبنای توسعه روش اجزای مرزی قرار گرفته اند. المان های زیر و روی یک بال نازک محاسبات ضرایب تأثیر را با شرکل مواجه خواهد ساخت و مانع از بکارگیری این نوع روش اجزای مرزی برای هندسه های نازک می شود. همچنین اعمال شرط مرزی عدم نفوذ به صورت معمول مقدور نیست؛ زیرا

mohammadi_amin@modares.ac.ir ، پست الکترونیک: ۰۹۱۲۲۵۱۵۷۰۲ ، پست الکترونیک: *www.SID.ir*

مختلف با توجه به جهات متفاوت بردار نرمال در زیر و روی بال داشته باشیم. از سوی دیگر کاربرد بالهای با ضخامت اندک در صنایع هوافضا روزبهروز گستردهتر می شود که نمونههایی از آنها عبارت است از بالک موشک های کروز، هواپیماهای با بال فرميذير ، روباتهاى بالزن و ريزيهيادهاى بالغشايي . رویکردهای تحلیلی موجود برای محاسبه ضرایب آیرودینامیک بالهای نازک مانند حل تئودورسون و تابع واگنر در حالت دوبعدی [۴] و تقریب جونز برای حالت سهبعدی [۱] محدود به هندسههای تخت و حرکات ناپایای ساده هستند. روندهای عددی مانند روش گردایه متمرکز ^۷ در حالت دوبعدی و روشهای حلقه/شبکه گردابه برای حالت سهبعدی [۴] نیز فاقد مزایای روش اجزای مرزی هستند. این مزایا عبارتند از: قابلیت توسعه فرمول بندی به رژیمهای گذرصوت و زیرصوت [۷،۱۲]، امکان به کارگیری برای هندسه های آیرودینامیکی پیچیده [۲،۳،۱۰] و تناسب فرمول بندی با طيف وسيعی از انواع تكنيكهاى كاهش ابعاد محاسبات مانند مدلسازى رتبه كاسته [۲،۳، ۹–۱۱]، بیان فضای حالت و روش چندقطبی سریع [۵].

با توجه به توضيحات بالا درصورتي كه بتوان با تمهيداتي در فرمول بندی، اعمال شرایط مرزی و نحوه اجرا، محدودیت به کارگیری روش اجزای مرزی در حل جریان حول بالهای نازک را رفع کرد، دامنه کاربرد این روش بسیار وسیعتر شده و تمام انواع پیکرههای آیرودینامیکی را در بر خواهد گرفت. به علاوه می توان بر اساس حل اجزای مرزی، مدل های رتبه کاسته کارآمد توسعه داد که به ویژه در مسائلی که محاسبات مکرر ضرایب یا نیروهای آیرودینامیکی نیاز است، جایگزین حل مستقیم اجزای مرزی شوند. این مدل ها مبتنے بر یک بیان مودال از میدان آیرودینامیکی و توصیف آن برحسب تعدادی از مودهای مؤثرند. از نظر مفهومی سادهترین راه انتخاب چنین مجموعهای، در نظر گرفتن مودهای ویژه جریان است که از تحلیل ویژه دستگاه معادلات برخی روش های عددی مانند روش اجزای مرزی به دست میآیند. با استفاده از یک مدل رتبه کاسته می توان ضرایب آیرودینامیکی ایرفویل یا بال را در حرکات مختلف ناپایا بدون نیاز به تکرار بخش عمدهای از محاسبات به سرعت و با دقت پیشبینی کرد. بنابراین نوآورىهاى پژوهش حاضر نسبت به تحقیقات پیشین عبارت است از: (۱) ارائه معادلات انتگرال مرزی برای حل اجزای مرزی جریان ناپایا حول بالهای نازک در حوزه زمان و (۲) مدلسازی

رتبه کاسته آیرودینامیکی بر اساس روش اجزای مرزی ارائه شده با استفاده از مودهای ویژه جریان. در ادامه این نوشتار ابتدا به فرمول بندی معادلات انتگرال مرزی حاکم بر جریان پتانسیل ناپایا حول یک بال نازک پرداخته میشود. سپس روش اجزای مرزی برای حل عددی این معادلات انتگرال مرزی تشریح خواهد شد. نحوه تشکیل مسأله مقدار ویژه بر مبنای دستگاه معادلات اجزای مرزی و تحلیل ویژه آن در مرحله بعد ارائه میشود. پس از آن روند مدلسازی رتبهکاسته بر اساس مودهای ویژه جریان به طور خلاصه بیان میشود و سرانجام به ارائه نتایج حاصل از روش ابداع شده در این تحقیق در چند نوع حرکت ناپایای ایرفویل ها و بال های نازک و بحث درباره دقت و کرایی محاسبات در مقایسه با نتایج معتبر پرداخته میشود.

معادلات انتگرال مرزی

در این بخش، فرمول بندی انتگرالی ابداع شده برای مسائل آیرودینامیک بال نازک و روش اجزای مرزی متناظر برای حل عددی این معادلات شرح داده خواهد شد. چنانچه پیشتر ذکر شد، هدف از این مقاله توسعه کاربرد روش اجزای مرزی متداول برای اجسام ضخیم به هندسههای با ضخامت اندک بوده است. طبعاً فرضیات حاکم بر معادلات و جریان حول بال نازک، مشابه مطالعات پیشین در زمینه اجسام ضخیم (از جمله مراجع [۲]، [۴]، [۶] و [۸]) در نظر گرفته شده که همگی مبتنی بـر مـدل جریان غیرلزج هستند. در واقع تا زمانی که زاویـه حملـه مـؤثر كمتر از زاویه حمله متناظر با ضریب برآی بیشینه باشد و جدایش بر روی ایرفویل رخ ندهد، فرض جریان غیرلزج صحیح است. بهعلاوه با توجه به کاربرد مورد انتظار از روش ارائه شده يعنى آيروديناميك خطى و آيروالاستيسيته خطى بالهاى نازك تحت حركات نوسانى با دامنه تغييرات محدود، زاويه حمله مؤثر ناشی از حرکات ناپایا همواره در محدوده رفتار خطی ضرایب باقی میماند و درنتیجه فرض جریان غیرلزج معتبر است. شایان توجه است که روشهای کلاسیک مانند روش تئودورسون و واگنر برای بال های تخت نیز مبتنی بر فرض جریان غیرلزج هستند. بنابراین فرمول بندی انتگرال مرزی که در این بخش ارائه خواهد شد مبتنی بر فرضیات معمول برای جریان پتانسیل یعنی جریان غیرلزج، غیرچرخشی و تراکمناپذیر میباشد. ایس فرضیات از نظر فیزیکی برای جریانهای با رینولدز متوسط به بالا (بیش از ^۱۰۴) و در زوایای حمله کم قابل قبول هستند.



شکل ۱ ـ تعریف سطوح انتگرالگیری برای معادله انتگرال مرزی در دو حالت بال ضخیم و نازک

چنانچه در تحقیقات پیشین مانند [۶] اشاره شده است برای دستیابی به بیان انتگرال مرزی گرین برای مسائل برآزا، باید معادله انتگرالی روی یک سطح S_{BW} تعریف شود که حجم جسم همچنین یک لایه نازک شامل سطح دنباله را احاطه کند (شکل۱)؛ زیرا طبق مفروضات، این معادله درون حجم جسم و روی سطح دنباله معتبر نیست. در مورد بالهای دارای ضخامت که روش اجزای مرزی برای حل جریان آیرودینامیک حول آنها پیش از این ارائه و استفاده شده است روال به این صورت است که تنها دو روی سطح بسته w' حاطه کننده سطح دنباله S_{W} با دو که تنها دو روی سطح بسته w' حاطه کننده سطح دنبال مورت است را بی نهایت به هم نزدیک می کنند. در این فرآیند w' با دو برای بردار نرمال n (۱ به ۲) در حالت حدی به دست می آید:

$$\iint_{S'_{W}} \phi \frac{\partial G}{\partial n} dS = \iint_{S_{W}} \Delta \phi \frac{\partial G}{\partial n} dS \tag{1}$$

که ا
$$\phi=\phi_2-\phi_1$$
 درحالی که با استفاده از تعریف دنباله بـرای $\Delta\phi=\phi_2-\phi_1$ و در نتیجه: جریان پتانسیل برآزا داریم، $0=igl(rac{\partial\phi}{\partial n}igr)$ و در نتیجه:

$$\iint_{S'_{w}} \frac{\partial \phi}{\partial n} G dS = \iint_{S_{w}} \Delta \left(\frac{\partial \phi}{\partial n}\right) G dS = 0 \tag{(7)}$$

بنابراین، معادله انتگرال مرزی برای پتانسیل اغتشاشی حول بال ضخیم به صورت زیر حاصل میشود [۶]:

$$E(\mathbf{x}_{*},t_{*})\phi(\mathbf{x}_{*},t_{*}) = \iint_{S_{B}} \left(\frac{\partial\phi}{\partial n}G - \phi\frac{\partial G}{\partial n}\right) dS - \iint_{S_{W}} \Delta\phi\frac{\partial G}{\partial n} dS \qquad (7)$$

که در آن $S_W = S_W$ سطح (بسته) جسم و S_W سطح (باز) دنباله است. در تحقیقات پیشین با استفاده از حل اجزای مرزی

این معادله، جریان ناپایا حول ایرفویلها و بالهای دارای ضخامت مورد تحلیل قرار گرفته است. روال به این صورت است که پس از گسستهسازی معادله (۳) بر اساس فرمول بندی اجزای مرزی از قبل معین، با اعمال شرط عدم نفوذ روی جسم، شرط کوتا در لبه فرار و به کارگیری تئوری کلوین روی دنباله، دستگاه معادلات جبری برای حل مجهولات توزیع پتانسیل روی جسم و اختلاف پتانسیل روی دنباله به دست می آید. چنانچه در مقدمه نیز اشاره شد اتخاذ این رویه برای بالهای نازک بر اساس معادله (۳) بدون اعمال اصلاحاتی در معادلات انتگرالی و شرایط مکمل غیر ممکن است. در ادامه رویکرد اصلاحشده تشریح می شود.

برای ایجاد امکان استفاده از معادلات انتگرالی و روش اجزای مرزی برای حل جریان حول بالهای نازک یا با ضخامت ناچیز ابتدا معادله (۳) برای بال ضخیم را در نظر می گیریم. با توجه به ضخامت ناچیز جسم، مشابه فرضی که برای دنباله صورت گرفت بال را نیز به شکل یک سطح ناپیوستگی در نظر می گیریم، با این تفاوت که بال بر خلاف دنباله، بار روی سطح بسته B' احاطه گر سطح B را بینهایت به جسم زوی سطح بسته B' احاطه گر سطح B را بینهایت به جسم نزدیک می کنیم. در این فرآیند، B' با دو روی سطح B یا اصطلاحاً سطح خیس بال جایگزین می شود. به طور مشابه با فرض جهت رو به بالا برای بردار نرمال n (۱ به ۲) در حالت

$$\iint_{S'_{B}} \phi \frac{\partial G}{\partial n} dS = \iint_{S_{B}} \Delta \phi \frac{\partial G}{\partial n} dS \tag{(f)}$$

$$\iint_{S'_{B}} \frac{\partial \phi}{\partial n} G dS = \iint_{S_{B}} \Delta \left(\frac{\partial \phi}{\partial n} \right) G dS = 0 \tag{(a)}$$

بنابراین، با توجه به معادلات (۴) و (۵)، معادله انتگرال مرزی (۳) برای جریان حول بال نازک به صورت زیر ساده میشود:

$$E(\mathbf{x}_{*},t_{*})\phi(\mathbf{x}_{*},t_{*}) = -\iint_{S_{B}+S_{W}} \Delta\phi \frac{\partial G}{\partial n} dS \tag{(8)}$$

در معادله (۳) ضریب *E* برای نقاط خارج از مرز عدد یک است و برای نقاط روی مرز با حذف نقطه با یک دایـره یـا کـره کوچک و تبدیل انتگرال مرزی بر اساس مقدار اصلی کوشـی[^] و رفع تکینگی انتگرالها روی این نقاط بهدست میآید. در اینجـا

با توجه به عدم وجود متغیر پتانسیل در طرف راست معادله (۶) ضریب E همان عدد یک فرض می شود، اما عبارتی به سمت راست معادله اضافه می شود که حاصل حذف تکینگی از انتگرال های مرزی است:

$$\phi(\mathbf{x}_{*},t_{*}) = -\iint_{S_{B}+S_{W}} \Delta\phi \frac{\partial G}{\partial n} dS \pm \frac{\Delta\phi}{2} \Big|_{\mathbf{x}_{*} \in S_{B}} \tag{V}$$

که علائم مثبت و منفی به ترتیب مربوط به روی بال و سطح زیرین آن می شوند و G حل اساسی^۹ است ($\pi / 2\pi$ در حالت دوبعدی و $T / 4\pi r$ در حالت سهبعدی با $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_{\parallel}\| = r$). معادله (۲) در صورت معلوم بودن توزیع اختلاف پتانسیل روی سطح بال و دنباله می تواند برای ارزیابی پتانسیل در نقاط داخل دامنه غیر واقع روی مرز استفاده شود. اما برای تعیین توزیع اختلاف پتانسیل روی مرز شامل بال و دنباله این معادله قابل استفاده نیست زیرا بر خلاف حالت بال ضخیم که با داشتن $\hbar \phi \phi$ روی S_{R} و $\phi \Delta$ روی W بهدست میآمد در اینجا مشتق نرمال پتانسیل و جود ندارد؛ همچنین روی جسم دو بیش از معادلات می سازد. برای رفع این مشکلات می توان از معادلات (۲) نسبت به جهت عمود بر سطح مشتق گرفت و با توجه به شرایط مشتق گیری برداری رابطه زیر را نوشت:

$$\frac{\partial \phi}{\partial n}(\mathbf{x}_{*}, t_{*}) = \nabla \phi \mathbf{.n} = -\left(\iint_{S_{B}+S_{W}} \Delta \phi \frac{\partial}{\partial n} (\nabla G) dS\right) \mathbf{n}$$
(A)

که ∇G برای حالت دوبعدی $r/2\pi r^2$ و در حالت سهبعدی ∇G برای حالت دوبعدی $r/2\pi r^3$ و در حالت سهبعدی $r/4\pi r^3$ است. با استفاده از شرط عدم نفوذ روی جسم، $r/4\pi r^3$ وقل $r/4\pi r^3$ می توان سمت چپ معادله (۸) را در نقاط قرار گرفته روی جسم معین کرد و دستگاه معادلاتی را برای تعیین مجه ولات اختلاف پتانسیل روی سطح بال و دنباله تشکیل داد. برای در نظر گرفتن اثرات تراکم پذیری در اعداد تشکیل داد. برای در نظر گرفتن اثرات تراکم پذیری در اعداد ماخ بال و دنباله مختصات پرانترا ($r/4\pi r^3$) به ($r/4\pi r^3$) معادلاتی را برای معین محمد و دستگاه معادلاتی ا و دنباله محمد می توان از تشکیل داد. برای در نظر گرفتن اثرات تراکم پذیری در اعداد مختصات پرانتل (r/4) به (r/8,r/2) به (r/8,r/2) معادلات مختصات از رات تراکم نه داد. می شوند.

www.SID.ir

روش اجزای مرزی

برای حل عددی معادله انتگرال مرزی (۸) با استفاده از روش اجزای مرزی مستقیم میتوان پس از گسستهسازی مرز جسم به اجزای دارای اختلاف پتانسیل ثابت در سطح المان و به کارگیری روش هممکانی (نقطه هممکانی در مرکز المان) به روابط زیر برای تشکیل دستگاه معادلات مرزی رسید:

$$\sum_{m=1}^{NB+NW} \Delta \phi_m C_{km} = \mathbf{v}_{\infty} \cdot \mathbf{n}_k \qquad , k = 1..NB$$
(9)

$$C_{km} = \left(\int_{S_m} \frac{\partial}{\partial n} (\nabla G) dS \right) \cdot \mathbf{n}_m$$

ضرایب تأثیر هستند که میتوانند به شکل تحلیلی یا عددی ارزیابی گردند (پیوست الف). در توسعه روابط بالا از فرض برابری مشتق جهت بردار نرمال در سراسر سطح جسم استفاده شد که برای هندسههای با انحنای کمتر از ۱۰٪ وتر صحیح است [۴]. در کاربردهای آیرودینامیکی معمول هم انحنای سطح در همین محدوده قرار دارد که با فرض جریان پتانسیل نیز سازگار است.

در روش اجزای مرزی برای آیرودینامیک بالهای ضخیم به منظور حصول حل یکتا (در حالت دوبعدی) و برقراری ریزش ورتیسیته از بال به دنباله (در حالات دوبعدی و سهبعدی) اعمال شرط کوتا در لبه فرار ضروری است. این شرط از نظر فیزیکی دلالت دارد بر اینکه جریان، لبه فرار را به آرامی ترک می کند و سرعت در آن نقطه محدود است و می تواند این طور تفسیر شود که جریان لبه فرار را در امتداد خط نیمساز زاویه لبه فرار ترک میکند. برای وارد ساختن شرط کوتا در رویه حل اجزای مرزی برای بالهای ضخیم مقدار اختلاف پتانسیل هر المان دنباله متصل به لبه فرار برابر با تفاضل مقادير پتانسيل روی المانهای متناظر بالا و زیر بال قرار داده می شود. در حالت بال نازک کـه حاصـل حـل دسـتگاه معـادلات مـرزی، مقـادیر اختلاف پتانسیل روی اجزای بال است، اختلاف پتانسیل المانهای متناظر بال و دنباله متصل به لبه فرار برابر فرض می شوند. به این ترتیب با اعمال شرط کوتا به تعداد المان های دنباله متصل به لبه فرار معادله اضافى خواهيم داشت و دستگاه معادلات برای یک حل پایا بسته خواهد شد. درصورتی که حل وابسته به زمان یا ناپایا مورد نظر باشد سطح دنباله باید در جهت جریان نیز گسستهسازی شود و مشابه حالت بال ضخیم،

اختلاف پتانسیلهای هر ردیف المان دنباله غیرمتصل به لبه فرار بر اساس تئوری کلوین برابر با مقادیر اختلاف پتانسیل ردیف قبلی المانها در گام زمانی قبل قرار داده شوند. در هر حالت پس از حل دستگاه معادلات توزیع اختلاف پتانسیل روی سطح بال نازک بهدست میآید. با داشتن توزیع اختلاف پتانسیل با استفاده از معادله برنولی ناپایا رابطه زیر برای محاسبه توزیع اختلاف فشار بهدست میآید:

$$\Delta p_i^t = -\rho \left[Q_{\infty} \frac{\Delta \phi_i^t - \Delta \phi_{i-1}^t}{\Delta l_i} + \frac{\Delta \phi_i^t - \Delta \phi_i^{t-1}}{\Delta t} \right] \tag{(1.)}$$

که ΔI_i طول هر المان و Q_∞ مقدار سرعت جریان آزاد است. با معین شدن توزیع اختلاف فشار مقدار نیروهای برآ و ممان آیرودینامیکی نیز با گسسته سازی انتگرالهای مربوطه به صورت زیر قابل محاسبه خواهند بود:

$$L(t) = \sum_{i=1}^{NB} \Delta p_i^{t} S_i, \quad M(t) = -\sum_{i=1}^{NB} \Delta p_i^{t} S_i x_i$$
 (11)

(14)

که ممان M حول مبدأ دستگاه مختصات تعیین می شود. به این ترتیب پس از معین شدن نوع حرکت ناپایا، بر اساس یک رویه گامبه گام زمانی در هر گام، دستگاه معادلات اجزای مرزی برای محاسبه توزیع اختلاف پتانسیل روی بال مستقیماً حل می شود. سپس با استفاده از روابط (۱۰) و (۱۱) توزیع اختلاف فشار ناپایا و سرانجام ضرایب آیرودینامیکی ناپایا محاسبه می شوند.

تشكيل مسأله مقدار ويژه

چنانچه در بخش مقدمه اشاره شد، با توجه به زمان بر بودن حل مستقیم دستگاه معادلات اجزای مرزی در هر گام زمانی، برای برخی کاربردها نیاز به بهره برداری از تکنیکهای کاهشی^{۱۰} مانند مدل سازی رتبه کاسته است. در این تحقیق از رویکرد مود ویژه برای ایجاد مدل های رتبه کاسته بر اساس معادلات انتگرال مرزی استفاده شده است. برای تشکیل مسأله مقدار ویژه بر مبنای روش اجزای مرزی از رابطه هم مکانی حاصل از گسسته سازی انتگرال مرزی جریان حول بال نازک یعنی رابطه (۹) استفاده می کنیم. بردار مجهول μ این طور تعریف می شود:

 $\mu = \left\{ \Delta \phi_1, \Delta \phi_2, \dots, \Delta \phi_{NB}, \Delta \phi_1, \Delta \phi_2, \dots, \Delta \phi_{NW} \right\}^T$ (17)

با استفاده از ارتباط بین مقادیر اختلاف پتانسیل اجزای جسم و دنباله از طریق شرط کوتا و ارتباط بین مقادیر اختلاف پتانسیل اجزای دنباله در گامهای زمانی متوالی از طریق تئوری کلوین میتوان معادله (۹) را بر اساس بردار مجهول µ از نو نوشت:

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\mu}^{n+1} + \mathbf{B}\boldsymbol{\mu}^n = w^{n+1} \tag{17}$$

که w بردار معلومی است که با استفاده از شرط مماس بودن جریان روی جسم بهدست میآید. ماتریس A شامل ضرایب تأثیر اجزای جسم و دنباله آن است و ماتریس B نیز شامل ضرایبی است که با استفاده از تئوری کلوین ارتباط بین قدرت اجزای دنباله در گامهای زمانی متوالی را برقرار میکند. برای اتشکیل مسأله ویژه، با در نظر گرفتن بخش همگن رابطه (۱۳) و جایگذاری $\mu = x_i e^{\lambda_i t}$ و جایگذاری $z_i = e^{\lambda_i t}$

$$z_i \mathbf{A} x_i + \mathbf{B} x_i = \mathbf{0} \tag{14}$$

که z_i و λ_i به ترتیب مقادیر ویژه زمانگسسته و پیوسته i ام بوده و x_i بردار ویژه راست متناظر است. به شکل کلی تر داریم:

AXZ + BX = 0

که Z ماتریس قطری شامل مقادیر ویژه مسأله ویژه تعمیم یافته و X ماتریسی است که ستونهای آن را بردارهای ویژه راست متناظر تشکیل می دهند. با توجه به اینکه ماتریسهای A و B متقارن هستند، بردارهای ویژه چپ (Y) نیز بهطور مشابه در رابطه زیر صدق می کنند:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{Y} \mathbf{Z} + \mathbf{B}^T \mathbf{Y} = \mathbf{0}$$
 (19)

شایان ذکر است که بردارهای ویژه راست و چپ شرایط تعامد را ارضا میکنند. یعنی:

$$\mathbf{Y}^T \mathbf{A} \mathbf{X} = \mathbf{I}$$
(1Y)
$$\mathbf{Y}^T \mathbf{B} \mathbf{X} = -\mathbf{Z}$$

که این خـواص بردارهـای ویـژه در فرمـول.بنـدی مـدلسـازی رتبهکاسته مود ویژه در بخش بعد استفاده خواهند شد.

با توجه به ارتباط بین مقادیر اختلاف پتانسیل اجزای روی دنباله و جسم میتوان با کمی عملیات جبری ماتریسی به نوع دیگری از مسأله مقدار ویژه بر اساس روش اجزای مرزی دست یافت که چنانچه در بخش بعد توضیح داده خواهد شد میتواند مبنای مدلسازی رتبهکاسته مود ویژه به شکلی کارامدتر قرار گیرد. برای این منظور، ابتدا بردار μ در دستگاه جدید به صورت زیر تعریف می شود [۹]:

$$\mu = \begin{cases} \mu_b \\ \mu_w \end{cases}$$

که در آن μ مشتمل است بر پتانسیلهای مجهول روی جسم به انضمام اختلاف پتانسیلهای مجهول اجزایی از دنباله که مستقیماً به لبه فرار متصل هستند. بردار μ نیز شامل اختلاف پتانسیلهای مجهول باقیمانده اجزای دنباله است. بر این اساس می توان رابطه (۱۳) را به شکل زیر بازنویسی کرد:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{cases} \mu_b \\ \mu_w \end{cases}^{n+1} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \begin{cases} \mu_b \\ \mu_w \end{cases}^n = \begin{cases} w_b \\ 0 \end{cases}^{n+1}$$
(1A)
(1A)

$$A_{11}\mu_b^{n+1} + A_{12}\mu_w^{n+1} + B_{11}\mu_b^n + B_{12}\mu_w^n = w_b^{n+1}$$
(19)

$$A_{21}\mu_b^{n+1} + A_{22}\mu_w^{n+1} + B_{21}\mu_b^n + B_{22}\mu_w^n = 0$$
 (7.)

با توجه به ماهیت و عناصر تشکیل دهنده ماتریس های A و B می توان نشان داد که ضرایب *A*₂₁ و *B*₁₁ و *B*₁₂ در روابط فوق صفر هستند. در نتیجه رابطه (۱۹) به شکل زیر ساده می شود:

$$\mu_b^{n+1} = A_{11}^{-1} W_b^{n+1} - A_{11}^{-1} A_{12} \mu_w^{n+1}$$
^(Y1)

با جایگذاری رابطه (۲۱) - در گام
$$n$$
 - در رابطه (۲۰) داریم:

$$A_{new} \mu_w^{n+1} + B_{new} \mu_w^n = w_{new}^n$$
(TT)

$$A_{new} = A_{22}$$

$$B_{new} = B_{22} - B_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$$
(rr)

$$w_{new}^{n} = -B_{21}A_{11}^{-1}w_{b}^{n}$$

www.SID.ir

مشابه حالت استاندارد یعنی معادله (۱۳) با در نظر گرفتن بخش همگن رابطه (۲۲)، مسأله ویژه جدید حاصل میشود. روند ذکر شده برای تشکیل مسأله مقدار ویژه جریان ناپایا بر اساس روش اجزای مرزی در حالات دوبعدی و سهبعدی صادق ویژه خواهند بود که در مدلسازی آیرودینامیکی رتبهکاسته استفاده میشوند. بردارهای ویژه به تعبیری نشانگر مودهای طبیعی حرکت سیال یا حداقل مودهای طبیعی مدل محاسباتی آن هستند و مقادیر ویژه، فرکانس (بخش حقیقی) و میرایی (بخش موهومی) هر مود را توصیف میکنند [۳].

روند مدلسازی رتبه کاسته

(70)

پس از تحلیل ویژه مسأله مقدار ویژه و محاسبه مودهای ویژه، میتوان با انتخاب تعدادی از مودهای مؤثر یک فضای برداری با ابعاد کوچکتر نسبت به فضای محاسباتی مستقیم تشکیل داده و جواب مسأله را در این فضا بهدست آورد. فرض میشود رفتار دینامیکی سیال بهصورت مجموع مودهای ویژه ارائه شود:

 $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{X}\mathbf{c} \tag{(11)}$

که در آن X شامل M بردار ویژه سمت راست مربوط به بزرگترین مقادیر ویژه است و این بردارها ستونهای آن را تشکیل میدهند. همچنین c بردار مختصات مود نرمال است که بیانگر ابعاد فضای مودال مورد استفاده است. با یادآوری روابط (۱۳) تا (۱۷) و جایگزینی رابطه (۲۴) در (۱۳) داریم:

$$\mathbf{AXc}^{n+1} + \mathbf{BXc}^n = \mathbf{w}^{n+1}$$

ضرب طرفین معادله در $\mathbf{Y}^{\mathbf{T}}$ که سطرهای آن شامل M بردار ویژه چپ مربوط به بزرگترین مقادیر ویژه است و به کارگیری شرایط تعامد مودهای ویژه، دستگاهی متشکل از N معادله غیر کوپل در مختصات مودال \mathbf{c} نتیجه میدهد:

$$\mathbf{c}^{n+1} - \mathbf{Z}\mathbf{c}^n = \mathbf{Y}^T \mathbf{w}^{n+1}$$
^(YF)

 $\mathbf{Y}^{T} \cdot M * M$ ماتریس قطری $\mathbf{Z} \cdot M$ ماتریس قطری م \mathbf{r} است. ماتریسی با ابعاد N * N و w بردار سمت راست با بعد N است. همان طور که مشاهده می شود رابط ه (۲۶) به دلیل خاصیت

تعامد مودهای ویژه یک سیستم غیرکویل و با بعد ناچیز است و چون سمت چپ آن قطری است، مے توان مودھا را به طور مستقل و کمهزینه با پیمایش گام به گام زمانی محاسبه نم.ود. سپس با استفادہ از معادلے (۲۴) و برھمنھے مودھا بردار مجهولات را بهدست آورد. نتایج حاصل از این تحقیق برای بالهای نازک و تحقیقات دیگر برای بالهای ضخیم [۹] نشان میدهد که روش بالا حتی در صورت لحاظ کردن همه مودها نیز جواب مناسبی نخواهد داد. دلیل این مسأله را میتوان این طور توضيح داد كه سيستم معادلات به تعداد المانهاي روى مرز و متصل به آن دارای مقدار ویژه صفر است، لذا تأثیر مودهای متناظر با این مقادیر ویژه در عمل حذف می شود، اما این مودها عمود بر فروشار نیستند و از این رو در پاسخ نهایی سهیم هستند. بنابراین چون مودهای صرفنظرشده که در واقع بهطور آنی با حرکت جسم فعال می شوند توسط روش بالا در نظر گرفته نمی شوند، نتایج حاصل مطلوب نخواهد بود. این مودها تمایل دارند فرکانسهای طبیعی بزرگتر از فرکانس تحریک داشته باشند و به همین دلیل در یک اسلوب ضرورتاً شبهاستاتیک پاسخ میدهند. برای رفع این مشکل روش تصحیح استاتیکی پیشنهاد شده است که در ادامه تشریح میشود. برای گنجاندن تقریبی اثرات مودهای ویژه صرفنظرشده، حل ناپایا به دو بخش تجزیه می شود: یک بخش شبه پایای معادل پاسخ سیستم به اختلال شبه پایا؛ و یک بخش دینامیک حاصل از فضای مودال، یعنی:

$$\boldsymbol{\mu}^{n} = \boldsymbol{\mu}_{s}^{n} + \tilde{\boldsymbol{\mu}}^{n} = \boldsymbol{\mu}_{s}^{n} + \mathbf{X}\tilde{\mathbf{c}}^{n} \tag{YV}$$

که بخش شبهپایا _لa توسط رابطه زیر داده میشود:

$$[\mathbf{A} + \mathbf{B}]\boldsymbol{\mu}_s^n = \mathbf{w}^n \tag{YA}$$

با جایگذاری رابطه (۲۷) در معادله (۱۳) و ضرب طرفین رابطـه در \mathbf{Y}^{T} و استفاده از خاصیت تعامد یعنی معادله (۱۷) داریم:

$$\tilde{\mathbf{c}}^{n+1} - \mathbf{Z}\tilde{\mathbf{c}}^n = \mathbf{Y}^T \mathbf{w}^{n+1} - \mathbf{Y}^T \left(\mathbf{A}\boldsymbol{\mu}_s^{n+1} + \mathbf{B}\boldsymbol{\mu}_s^n\right)$$
(Y9)

بخش استاتیک حل شامل اثر تمام مودهای ویژه است و در هـر گام زمانی از حل سیستم جبری (۲۸) بهدست مـیآیـد. بـرای بخش دینامیک حل، تعریف شده توسط معادله (۲۹)، تنهـا بـه

حفظ تعداد اندکی از مودها نیاز است، زیرا تنها مودهای فرکانس-پایین به شکل دینامیک پاسخ میدهند. امتیاز معادلـه (۲۹) بر معادلـه (۲۶) آن است کـه میتوانـد در کنـار روش تصحیح استاتیک برای در نظر گرفتن اثر مودهای متناظر با مقادیر ویژه صفر به منظور حصول حل رضایت بخش به کار گرفته شود. برای حل جریان ناپایا کافی است با پیمایش زمانی گرفته شود. برای حل جریان ناپایا کافی است با پیمایش زمانی توسط رابطه (۲۹) جواب را از رابطه (۲۷) در هر گام محاسبه نمود.

چنانچـه بحـث شـد، مهمتـرین دلیـل نیـاز بـه تصـحیح استاتیک در مدلسازی رتبه کاسته مود ویژه وجود مقادیر ویژه صفر می باشد که در واقع معرف وجود فرکانس های بسیار زیاد یا مودهای شبهاستاتیک در سیستم میباشند. بنابراین در صورتی که بتوان با حذف مودهای شبه پایا بدون نیاز به تصحیح استاتیک و با در نظر گرفتن تعدادی از مودهای مؤثر به جواب رسید، مدلسازی رتبه کاسته به مراتب کارامدتری خواهیم داشت. در بخش قبل دو نوع مسأله مقدار ویژه تعریف شد که مسأله نوع دوم يعنى رابطه (٢٢) تنها بر اساس مجهـولات روى اجزای غیرمتصل به لبه فرار دنباله بنا شد و در نتیجه هیچ مقدار ویژه صفری نتیجه نمیدهد. بنابراین با به کارگیری تعدادی از مودهای ویژه حاصل از تحلیل ویـژه ایـن رابطـه و استفاده از معادله (۲۱) میتوان بدون تصحیح استاتیک جوابهای مناسبی بهدست آورد [۹]. این رویکرد حتی در صورت نیاز به تصحیح استاتیک برای دقت بیشتر نتایج باز هم با توجه به كاهش ابعاد مسأله مقدار ويـژه، هزينـه محاسـباتي کمتری خواهد داشت.

نتايج و بحث

برای اعتبارسنجی روش ارائه شده ابتداً حل جریان پایا دوبعدی حول یک ایرفویل نازک سهموی با انحنای $\mathcal{E} = 0.1$ (شکل ۲) را در نظر می گیریم. این مثال می تواند برای بررسی اثر انحنای سطح بال بر تقریب مشتق نرمال در شرایط مرزی نیز استفاده شود. توزیع فشار تحلیلی از رابطه زیر بهدست می آید [۴]:

$$\Delta C_p = 4\sqrt{\frac{c-x}{x}}\alpha + 32\frac{\varepsilon}{c}\sqrt{\frac{x}{c}(1-\frac{x}{c})}$$
(7.)



شکل ۲_ایروفیل نازک سهموی با انحنای ده درصد وتر

حل تحلیلی با استفاده از توزیع گردابه و اعمال شرایط مرزی روی محور x (وتر) بهدست میآید. چنانچه در نمودارهای (۳) و (۴) مشاهده میشود توزیع فشار و ضریب برآی حاصل از روش اجزای مرزی ارائه شده در تحقیق حاضر در دو زاویه حمله صفر و ۱۰ درجه تطابق خوبی با حل تحلیلی و نتایج عددی حاصل از روش گردابه جدا دارد و با افزایش المانها دقت نتایج نیز بیشتر شده است. اختلاف اندک نتایج عددی و تحلیلی میتواند ناشی از این امر باشد که در هر دو روش حل عددی، نقاطی که شرایط مرزی روی آنها ارضا میشوند (نقاط هرمکانی) بر خلاف روش تحلیلی روی خط انحنا قرار دارند. نزدیکی این نتایج نشان میدهد برای هندسههای با انحنای چندانی بر جواب ندارد. پدیده مک ش لبه فرار که در آیرودینامیک بال نازک کاملاً شناخته شده است نیز در شکل

بررسی استقلال جواب از مشخصات دنباله نشان داد که طول و شکل دنباله تأثیر قابل ملاحظهای بر حل اجزای مرزی دارند. هر چه طول دنباله بیشتر باشد، جواب به حل تحلیلی نزدیکتر می شود که این امر با توجه به مبتنی بودن حل تحلیلی بر دنباله بی نهایت قابل انتظار است.



نکته دیگر جهت قرارگیری صفحه دنباله است که از بین سه گزینه مماس بر وتر، مماس بر لبه فرار و مماس بر جهت جریان مورد دوم بهترین نتایج را داد. دلیل این امر را میتوان حساسیت حل اجزای مرزی به جهت بردار نرمال اجزا به ویژه در محاسبات ضرایب تأثیر دانست. این نتیجه با شرط کوتا که جریان ملایم و مماس بر لبه فرار را الزام میکند نیز سازگار است.

در [۴] برای حل جریان حول یک بال ضخیم نامتقارن با استفاده از روش پنل مرتبه اول نشان داده شده که اگر دنبالـه در ابتدا مماس بر لبه فرار و دور از بال همسو بـا جریـان باشـد، نتایجی نزدیک به داده تجربی حاصل خواهد شد. بـا توجـه بـه اینکه در روش اجزای مرزی ارائه شده در حالت پایـا تنهـا یـک المان (صفحه تخت) دنباله وجود دارد بـرای بررسـی مسـأله بـا دنباله منحنی شکل باید از حل ناپایا با گامهای زمانی بـه تعـداد المانهای روی دنباله و فرض همگرایی حل ناپایا به جواب پایـا پس از سپری شدن زمان کافی استفاده کرد.

چیدمان المانهای دنباله در قالب پیشنهادی [۴] و تحلیل اجزای مرزی ناپایا نشان داد که جواب حاصل هیچ تفاوتی با حل پایا بهدست آمده با دنباله با طول مشابه و یک المان تخت مماس بر لبه فرار ندارد. بنابراین در کاربردهای مورد نظر این تحقیق (زاویه حمله و دامنه نوسان کم) تنها مماس بودن دنباله بر لبه فرار برای حصول جواب مناسب کفایت می کند. پس از ارزیابی روش در حالت پایا می توان از روش اجزای مرزی ارائه شده برای حل جریانهای ناپایا استفاده کرد.



شکل ۴– توزیع اختلاف پتانسیل در جهت وتر ایرفویل سهموی در زاویه حمله ۱۰ درجه



شکل ۶- تغییرات ضریب بر آی گذرا برای یک بال تخت (AR = 6) پس از شروع ناگهانی حرکت با سرعت ثابت

مدلسازی فیزیکی صحیح جریان پایا برآزا حـول یـک ترکیـب آیرودینامیکی ضروری است.

برای مطالعه توانایی روش اجزای مرزی ارائه شده در حل جریان ناپایا حول بالهای نازک، بال مستطیلی تخت با ضریب منظری ۶ و زاویه حمله ۵ درجه که از حالت سکون شروع به حرکت با سرعت ثابت میکند در نظر گرفته شد. روی جسم ۱۵۰ المان (۶ المان در جهت دهانه و ۲۵ المان در جهت وتـر) و در دو حالت آزمایشی ۴۵۰ و ۱۸۰۰ المان روی دنباله به طول ده برابر وتر قرار داده شد. در شکل (۶) تغییرات نسبت ضریب برای آنی به ضریب برآی حالت پایای بال در برابر زمان بیبعد نشان داده شده است. چنانچه در شکل مشاهده می شود نتایج حاصل از روش اجزای مرزی با تقریب جونز [1] که مبتنی بر روابط نمایی حوزه زمان است، اختلاف اندکی در شروع حرکت دارند که دلیل آن مشابه علت اختلاف نتایج حالت دوبعدی و حل واگنر است که پیشتر بحث شد. همچنین در شکل (۶) نتایج حاصل از روش حلقیه گردایه [۴] کیه معمولاً برای آیرودینامیک بال نازک مورد استفاده قرار می گیرد نشان داده شده است که تفاوت چندانی بین این نتایج و حل اجزای مرزی به ویژه در حالت شبکه ریزتر دنباله وجود ندارد.

چنانچه در شکل (۶) مشخص است در روش اجزای مرزی با افزایش تعداد اجزای روی دنباله و ریزترشدن اندازه المانها در جهت جریان و در نتیجه کوچکتر شدن گام زمانی امکان تسخیر دقیقتر تغییرات فراهم شده است. شایان توجه است که با افزایش ضریب منظری به مقادیر زیاد نتایج حالت سهبعدی به نتایج حالت دوبعدی (شکل ۵) میل میکند (مثلاً با قرار دادن (۹) و (۶).



شکل ۵- تغییرات ضریب بر آی گذرا برای یک ایرفویل تخت پس از شروع ناگهانی حرکت با سرعت ثابت

برای بررسی قابلیت روش در مسائل آیرودینامیک ناپایا از حرکت ناگهانی یک ایرفویل تخت در زاویه حمله ۵ درجه شروع می کنیم. همانطور که در شـکل (۵) مشـاهده مـیشـود نتـایج بهدست آمده از روش اجزای مرزی دقت خوبی در مقایسه با حل دقيق واگنر دارد و هرچه تعداد اجزاي دنباله افـزوده شـده است دقت حل به ویژه در تسخیر تغییرات ضریب برآ در لحظات ابتدایی بیشتر شده است. دلیل این امر وابستگی گام زمانی به اندازه اجزای دنباله از طریق معادله جابجایی می باشد. اختلاف بین منحنی محاسبه شده و نتایج کلاسیک واگنر را می توان به نرخ محدود شتاب حین اولین گام زمانی نسبت داد. زیرا در حل واگنر زمان شتاب صفر و مقدار نیروی برآ بلافاصله یس از شروع حرکت (t = 0) بی نهایت است. اثر شتاب محدود افزایش تند برآ حین شتاب و افزایش نرم آن در لحظات بعدی می باشد. در حل اجزای مرزی این حالات آزمایشی طول دنباله ده برابر وتر ایرفویل و تعداد اجزای روی جسم ۱۰۰ فرض شد. همچنین مشابه حالت پایا مشاهده شد کـه تعـداد اجـزای روی جسم تأثیر چندانی بر حل ندارد کـه ایـن رفتـار ناشـی از ایـن حقيقت است كه نتيجه مستقيم و نهايي پيشينه سيركولاسيون حول ایرفویل در شکل دنباله و توزیع اختلاف یتانسیل روی آن نمود پیدا می کند. به علاوه چنانچه پیشتر اشاره شد اندازه المانهای دنباله نیز ارتباط مستقیم با اندازه گام زمانی حل ناپایا دارند. شایان ذکر است که ضریب برآی حالت پایا که برای محاسبه نسبت ضريب برآ در حالت نايايا به حالت يايا در شکل (۵) مورد استفاده قرار گرفته است، با در نظر گرفتن یک المان دنباله طویل (۱۰۰ برابر وتر) و حل اجزای مرزی مستقل از زمان بهدست آمده است. در نظر گرفتن چنین المان برای

می توان نتیجه گرفت که با کاهش ضریب منظری طول برآی گذرا و اتلاف برآی اولیه کاهش مییابد. علت این امر را می توان تأثیر ضریب منظری محدود بر قدرت گردابه لبه فرار در لحظه شروع حرکت دانست.

پس از ارزیابی روش اجزای مرزی توسعهیافته در این تحقیق در مسائل حرکت ناگهانی بال از سکون به بررسی انواع دیگر حرکت ناپایا، یعنی حرکتهای نوسانی پیچشی و انتقالی میپردازیم. در شکل (۷) تغییرات ضریب برآی ایرفویل تخت تحت نوسان پیچ با دامنه ۵ درجه حول زاویه حمله صفر درجه با فرکانس کاهش یافته ۵/۰ نشان داده شده است. در دو حالت حل اجزای مرزی، تعداد اجزای روی جسم ۱۰۰ و طول دنباله تطابق خوبی بین نتایج روش اجزای مرزی و حل تئودورسون تعداد اجزای دنباله دقت نتایج را تغییر چندانی نمیده. زیرا برای این نوع حرکتهای نوسانی نیازی به گامهای زمانی خیلی کوچک برای تسخیر دقیق تغییرات زمانی نیست.

در شـکل (۸) نتـایج حاصـل از محاسـبه ضـریب نیـروی عمودی یک ایرفویل تخت تحت نوسان انتقالی در جهت عمودی با مشخصات ذکر شده روی شکل نشان داده شده است. چنانچه مشاهده می شود نتایج حاصل از محاسبه با روش اجزای مرزی در مقایسه با حـل کلاسـیک تئودورسـون [۱] همچنـین نتایج [۴] که با مدل گردابه جدا به دست آمده از تطابق خوبی برخوردارند. همچنین با افزایش تعداد اجزای دنباله خطای محاسبات کاهش یافته که علت آن فرکانس بیبعد بزرگ نوسانات است که گام زمانی کوچکتر و در نتیجه تعداد المان بیشتر روی دنباله را برای بالا بردن دقت حل الزام مے کنـد. در هر دو حالت حل اجزای مرزی نشان داده شده در شکل (۸) طول دنباله ۱۰ برابر طول وتر و تعداد المان روی جسم ۱۰۰ عدد در نظر گرفته شد و با افزایش اجزای روی جسم تغییری در نتایج مشاهده نشد. دقت نتایج در این مورد آزمایشی نشان داد که روش ارائه شده در نوسانهای با فرکانسهای بیبعد بالا نیز قابل استفاده است. در شکل (۹) نیز تغییرات ضریب برآ یک بال مستطیلی تخت با ضریب منظری ۴ و زاویه حمله ۵ درجـه در نوسان انتقالی با دامنه ۰/۱ وتر و در دو فرکانس بی بعد ۰/۱ و ۲/۰ نمایش داده شده است. نتایج حاصل از روش اجزای مرزی و روش متداول برای بالهای نازک یعنی روش حلقه

گردابه [۴] از انطباق خوبی برخوردار هستند. در این دو حالت آزمایشی سطح جسم با ۱۰۰ و سطح دنباله با ۲۰۰ المان مدل شد که تعداد المان مورد نیاز روی دنباله با توجه به گام زمانی مورد نیاز حل نایایا تعیین شد.

میثم محمدی امین، بهزاد قدیری، حسن حدادپور









شکل ۱۱- تغییرات ضرایب برآ و ممان آیرودینامیکی برای ایرفویل تخت در نوسان پیچشی

بحث شد، مودهای ویژه متناظر با این مقادیر ویژه باید آنی و بدون هیچ تأخیر زمانی با حرکت جسم فعال شوند. در صورت تشکیل مسأله مقدار ویژه نوع دوم و تحلیل ویژه آن مشاهده میشود به دلیل حذف مجهولات روی جسم و اجزای دنبالـه متصل به لبه فرار در مسأله مقدار ویژه جدید اثری از مقادیر ویژه صفر وجود نخواهد داشت. بدیهی است با توجه به کاهش ابعاد سیستم در این حالت، تحلیل ویژه در زمان کمتری صورت پذیرد. همچنین بررسی بالهای با هندسه پیچیدهتر ولی دارای دینامیک دنباله یکسان نشان داد ضخامت، انحنا و زاویه حملـه جسم تأثیر چندانی بر رفتار توزیع ویژه ندارد.

با استفاده از مودهای ویژه حاصل از تحلیل ویژه می توان مدلهای آیرودینامیکی رتبه کاسته ای توسعه داد که قابلیت جایگزین شدن حل مستقیم اجزای مرزی را داشته باشند. یک ایرفویل تخت در نوسان پیچشی با دامنه ۱۰ درجه حول زاویه حمله ۳ درجه با فرکانس کاهشیافته ۰/۱ فرض می شود. شکل (۱۱) نتایج مدلسازی رتبه کاسته را در مقایسه با حل مستقیم نشان می دهد. چنانچه از نتایج نمایش داده شده در شکل (۱۱)



شکل ۱۰- بخشهای حقیقی (0) و موهومی (+) مقادیر ویژه به ترتیب شماره در حالت دوبعدی (بالا) و سهبعدی (پایین)

پس از بررسی اعتبار نتایج حاصل از روش اجزای مرزی مستقیم در تحلیل آیرودینامیک ناپایا برای حالتهای مختلف آزمایشی، به توسعه مدلهای آیرودینامیکی رتبه کاسته بر اساس روش اجزای مرزی ارائه شده می پردازیم. یک ایرفویل تخت دوبعدی بدون انحنا که بدنه آن توسط ۲۰ المان و دنباله آن به طول ۹ برابر طول ایرفویل توسط ۱۸۰ المان مدل شده باشد، همچنین یک بال مستطیلی با ضریب منظری ۵ و طول دنباله ۵ برابر طول وتر را در نظر می گیریم. تعداد اجزای روی بال در جهت وتر ۸ و در جهت دهانه ۱۰ و تعداد اجزای روی دنباله در جهت جریان ۴۰ لحاظ می شود. با حل مسأله مقدار ویژه برای این دو حالت، توزیع مقادیر ویژه حاصل از تحلیل ویژه طبق شکل (۱۰) خواهد بود. اگر مقدار تمام مقادیر ویژه کمتر یا برابر واحد باشد، آنگاه سیستم پایدار و اگر هر یک از مقادیر ویژه از واحد بزرگتر بود، آنگاه سیستم ناپایدار است. از سوی دیگر با توجه به طیف ویژه مشاهده می شود که سیستم به تعداد المانهای متصل به جسم، مقادیر ویژه صفر دارد. از دیدگاه فیزیکی این امر موجه است زیرا چنانچه در بخشهای قبل نیز

مشخص است، هر دو نوع روش مدل سازی رتبه کاسته معمول (CROM) و اصلاحشده (MROM) بدون تصحیح استاتیک حتی با در نظر گرفتن ۴۰ مود، نتیجه دقیقی ارائه نمی دهند. دلیل این رفتار وجود تعدادی مقدار ویژه صفر و در نتیجه مودهای شبه استاتیک است که اثر آنها فقط با به کارگیری تکنیک تصحیح استاتیک قابل دستیابی است. هر چند، نتایج مدل اصلاحشده خطای بسیار کمتری دارند و در زمان ممال اصلاحشده خطای بسیار کمتری دارند و در زمان محاسباتی کوتاهتر نیز به دست آمده اند. اما همان طور که در شکل (۱۱) مشاهده می شود، در صورت به کارگیری تصحیح استاتیک، هر دو روش با در نظر گرفتن تنها یک مود نتایج دقیقی ارائه خواهند کرد. در این حالت مزیت رویکرد مدل سازی رتبه کاسته اصلاح شده کارامدتر بودن آن از نظر هزینه محاسبات است.

نتيجه گيرى

در این پژوهش با استفاده از معادلات انتگرال مرزی به مطالعه آیرودینامیک ناپایای بالهای نازک پرداخته شد. برای این منظور روش اجزای مرزی آیرودینامیکی جدیدی ارائه شد که میتواند برای حل جریان حول بالهای نازک استفاده شود. همچنین بر اساس مسأله ویژه حاصل از به کارگیری روش اجزای مرزی ارائه شده به تحلیل ویژه جریان و توسعه مدلهای رتبه کاسته مود ویژه برای بالهای ناپایا پرداخته شد. از روش اجزای مرزی توسعهیافته و مدلهای رتبه کاسته مبتنی بر آن برای تحلیل آیرودینامیک حوزه زمان انواع ایرفویل و بال در چند نوع حرکت ناپایا استفاده شد که نتایج حاصل تطابق بسیار خوبی با نتایج تحلیلی و عددی معتبر داشتند.

> پیوست الف. محاسبه تحلیلی ضرایب تأثیر در حالت دو بعدی

در حل اجزای مرزی جریان حول بال نازک با مقدار اختلاف پتانسیل ثابت روی هر المان، انتگرال زیر برای ضرایب تأثیر بهدست میآید (معادله ۹) که در مختصات محلی المان به صورت زیر نوشته میشود:

$$\int_{S_{m}} \frac{\partial}{\partial n} (\nabla G) dS = \int_{x_{1}}^{x_{2}} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_{*}}{2\pi \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_{*}\|^{2}} \right) dx \qquad (1 \text{ (NIL)})$$

که G برای حالت دوبعدی $\ln r/2\pi$ میباشد. با انتگرال گیری G نامعین خواهیم داشت:

$$\int \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_*}{2\pi \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_*\|^2} \right) dx = \frac{z - z_*}{2\pi \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_*\|^2} \mathbf{i} - \frac{z - z_*}{2\pi \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_*\|^2} \mathbf{k} \qquad (1)$$

درنتیجه انتگرال معین در مختصات محلی بهدست میآید:

$$\int_{x_{1}}^{x_{2}} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_{*}}{2\pi \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_{*}\|^{2}} \right) dx =$$

$$\frac{1}{2\pi} \left(\frac{z_{*} - z_{1}}{r_{1}^{2}} - \frac{z_{*} - z_{2}}{r_{2}^{2}} \right) \mathbf{i} + \frac{1}{2\pi} \left(\frac{x_{*} - x_{2}}{r_{2}^{2}} - \frac{x_{*} - x_{1}}{r_{1}^{2}} \right) \mathbf{k}$$
(1)

که r_1 و r_2 فاصله نقطه بار تا دو نقطه انتهای المان هستند.

پینوشتھا

- 1 Domain-based methods
- ۲ Multidisciplinary
- Morphing wing aircraft
- **δ** Flapping wing robots
- ۶ Membrane wing MAV
- Y Lumped vortex method
- A Cauchy principal value
- ۹ Fundamental solution
- 1. Reduction techniques

منابع و مراجع

- [1] Bisplinghoff, R.L, Ashley, H, (1982), "Principles of Aeroelasticity", John Wiley and Sons Inc., USA.
- [2] Esfahanian, V, Behbahani-Nejad, M, (2002), "Reduced Order Modeling of Unsteady Flows about Complex Configurations Using Boundary Element Method", ASME Journal of Fluids Engineering, Vol. 124, pp. 988-993.
- [3] Haddadpour, H, Behbahani-Nejad, M, Firouz-Abadi, R.D, (2007), "Reduced-Order Aerodynamic Model for Aeroelastic Analysis of Complex Configurations in Incompressible Flow", AIAA Journal of Aircraft, Vol. 44 (3), pp. 1015-1017.
- [4] Katz, J, Plotkin, A, (2001), "Low Speed Aerodynamics", 2nd Edition, Cambridge University Press, UK.
- [5] Liu, Y, (2010), "Fast Multipole Boundary Element Method - Theory and Applications in Engineering", Cambridge University Press, UK.

نشریه علمی- پژوهشی مهندسی هوانوردی / ۵۱ سال سیزدهم، شماره اول، بهار ۹۰

23, pp. 143-153.

- [10] Shahverdi, H, Nobari, A.S, Behbahani-Nejad, M, Haddadpour, H, (2009), "Aeroelastic analysis of helicopter rotor blade in hover using an efficient reduced-order aerodynamic model", Journal of Fluids and Structures, Vol. 25 (8), pp. 1243-1257.
- [11] Shahverdi, H, Nobari, A.S, Haddadpour, H, Behbahani-Nejad, M, (2009), "Application of the Modified Reduced-Order Aerodynamics Modeling Approach to Aeroelastic Analysis", Proceedings of the Institution of Mechanical Engineer - Part G: Journal of Aerospace Engineering, Vol. 223 (3).
- [12] Soltani, N, Esfahanian, V, Haddadpour, H, Behbahani-Nejad, M, (2004), "Unsteady Supersonic Aerodynamics Based on BEM, Including Thickness Effects in Aeroelastic Analysis", Journal of Fluids and Structures, Vol. 19, pp. 801-813.

- [6] Morino, L, Gennaretti, M, (1992), "Boundary Integral Equation Methods for Aerodynamics", Progress in Astronautics and Aeronautics, Vol. 146, pp. 279-320.
- [7] Morino, L, Gennaretti, M, Iemma, U, Salvatore, F, (1998), "Aerodynamics and Aeroacoustics of Wings and Rotors via BEM - Unsteady, Transonic, and Viscous Effects", Computational Mechanics, Vol.21, pp.265-275.
- [8] Morino, L, Gennaretti, M, Bernardini, G, (2003), "A Boundary Element Method for the Aerodynamic Analysis of Aircraft in Arbitrary Motions", Computational Mechanics, Vol.32, pp. 301-311.
- [9] Shahverdi, H, Nobari, A.S, Behbahani-Nejad, M, Haddadpour, H, (2007), "An Efficient Reduced-Order Modeling Approach Based on Fluid Eigenmodes and Boundary Element Method", Journal of Fluids and Structures, Vol.