

# تحلیل عددی اثر افزایش مرتبه خطا در روش تفاضل محدود در بررسی رفتار ارتعاشی ورقه‌ای مستطیل شکل ایزوتروپیک

محمدحسین کارگر نوین<sup>۱</sup>، کسری کرباسچی<sup>۲</sup> و حسن حسن زاده<sup>۳</sup>  
K.karbaschi@gmail.com

## چکیده

امروزه سازه‌های با ساختار صفحه‌ای نظیر ورق‌ها، اهمیت ویژه‌ای در فناوری‌های نوین به خود اختصاص داده‌اند. در این میان بررسی رفتار ارتعاشی ورق‌ها از اهمیت بالایی برخوردار است، چرا که در تحلیل‌های دینامیکی و ارتعاشی، اگر فرکانس‌های طبیعی سازه در نظر گرفته نشوند، امکان وقوع پدیده تشدید وجود دارد که این امر صدمات جبران ناپذیری را به همراه خواهد داشت. در این مقاله به منظور بررسی رفتار ارتعاشی ورق‌ها، از روش تفاضل محدود با مرتبه‌های خطای  $O(h^2)$  و  $O(h^4)$  استفاده شده است. برای این منظور ابتدا روش حل تحلیلی کلاسیک مورد بررسی قرار گرفته، سپس روابط متناظر برای تحلیل عددی با مرتبه‌های خطای یاد شده استخراج شده است. در نهایت نتایج بدست آمده برای فرکانس‌های طبیعی در هر دو حالت به صورت بدون بعد مورد مقایسه قرار گرفته‌اند. از آنجا که استفاده از روش تفاضل محدود با مرتبه خطای  $O(h^4)$  برای نخستین بار در این مقاله انجام شده، از نتایج موجود در مراجع مختلف و نیز شبیه سازی صورت گرفته توسط نرم افزار ANSYS جهت تایید صحت و اعتبار نتایج بدست آمده، استفاده شده است.

## کلیدواژه:

فرکانس طبیعی - تشدید - مرتبه خطا - ورق ایزوتروپیک - تفاضل محدود - مولکول محاسباتی - گره

۱- استاد دانشگاه صنعتی شریف، دانشکده مهندسی مکانیک، mhkargar@sharif.edu

۲- دانشجوی دکتری مهندسی مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد علوم و تحقیقات

۳- کارشناس مهندسی مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکزی، h.hasanzadeh84@gmail.com

## ۱- مقدمه

با فرض ایزوتروپیک بودن رفتار ورق، کوچک بودن تغییر مکان‌های نسبی و قابلیت صرف نظر کردن از ترم‌های غیرخطی، معادله کلی حرکت ورق (معادله ورق فون کارمن) با احتساب اثر تکیه‌گاه الاستیک ( $k$ )، بار خارجی اعمالی ( $q$ ) و اثر بار حرارتی ( $T$ ) بصورت زیر بدست می‌آید [۲].

$$D \left( \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} \right) + k w_0 = q - \frac{1}{1-\nu} \left( \frac{\partial^2 M_T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_T}{\partial y^2} \right) - I_0 \ddot{w}_0 + I_2 \left( \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial y^2} \right) \quad (1)$$

در رابطه فوق  $h$  ضخامت ورق،  $D$  سختی خمشی ورق و  $M_T$  اثر بار حرارتی می‌باشند و داریم:

$$D = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)} \quad (2)$$

$$I_0 = \rho h \quad (3)$$

$$M_T = E \alpha \Delta T \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z dz \quad (4)$$

در رابطه (۱)، عبارت  $I_2$  اینرسی چرخشی ورق می‌باشد که با توجه به تاثیر آن در فرکانس‌های بالا، معمولاً در فرکانس‌های پایین از آن صرف نظر می‌شود. با استفاده از اپراتور لاپلاس، رابطه (۱) را می‌توان به صورت زیر باز نویسی نمود [۲]:

$$D \nabla^4 w_0 + k w_0 = q - \frac{1}{1-\nu} \nabla^2 M_T - I_0 \ddot{w}_0 + I_2 \left( \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial y^2} \right) \quad (5)$$

برای بدست آوردن معادله ارتعاشی حاکم بر ورق، تابع تغییر مکان به صورت زیر فرض می‌شود:

$$w_0(x, y, t) = w(x, y) e^{i \omega t} \quad (6)$$

در رابطه فوق  $i = \sqrt{-1}$  و  $\omega$  فرکانس طبیعی می‌باشد. در غیاب نیروی گسترده خارجی و بار حرارتی، جایگذاری رابطه (۶) در رابطه (۵) نتیجه زیر را به همراه خواهد داشت:

$$\left\{ D \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) - \left[ \omega^2 \left[ I_0 w - I_2 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right] \right] \right\} e^{i \omega t} = 0 \quad (7)$$

از آنجا که این معادله برای تمامی زمان‌های  $t$  برقرار است، می‌توان نوشت:

$$D \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) - \omega^2 \left[ I_0 w - I_2 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right] = 0 \quad (8)$$

پاسخ حالت گذرای معادله (۸) را می‌توان به صورت زیر در نظر گرفت:

آگاهی از رفتار دینامیکی ورق‌ها و به‌ویژه رفتار ارتعاشی آنها، جایگاه مهمی به خود اختصاص داده‌است. بررسی روابط پیشنهادی برای محاسبه فرکانس‌های طبیعی ورق نشان می‌دهد جملگی آنها بر مبنای بسط معادلات تغییر مکان حاکم بر ورق بنا شده‌اند [۷-۱]. از آنجا که استفاده از روش‌های تحلیلی در تمامی حالات ممکن میسر نبوده و اغلب فرضیات ساده کننده بسیاری نیز در استفاده از آنها در نظر گرفته می‌شوند با توجه به افزایش قدرت محاسباتی کامپیوترها، گرایش خاصی به استفاده از روش‌های عددی در حل معادلات و مسایل مهندسی بوجود آمده است. از عمده‌ترین گام‌های برداشته شده در تحلیل عددی، یانگ [۸] ارتعاشات ورق‌های مستطیل شکل با استفاده از روش ریتز را مورد بررسی قرار داده است. اودمن [۹] نیز روش‌های عددی حل مسائل مقادیر ویژه را تحلیل نموده است. همچنین روش استخراج ماتریس‌های سختی در روش‌های مستقیم مسائل مقادیر ویژه توسط ملوش [۱۰] مورد بررسی قرار گرفته و خدیر [۱۱] نیز ارتعاشات ورق‌های مستطیل شکل ساخته شده از مواد مرکب را تحلیل نموده است.

در این مقاله به بررسی رفتار ارتعاشی ورق‌ها به وسیله روش‌های عددی پرداخته شده است. روش مورد استفاده، روش تفاضل محدود مرکزی<sup>۱</sup> با مرتبه‌های خطای  $O(h^2)$  و  $O(h^4)$  می‌باشد. در ابتدا حل تحلیلی رفتار ارتعاشی ورق مستطیل شکل با شرایط مرزی مختلف مورد بررسی قرار گرفته و در ادامه حل عددی معادلات حاکم بر رفتار ارتعاشی ورق بر اساس مرتبه‌های خطای مورد استفاده، تجزیه و تحلیل شده است. معادلات حاصل از تحلیل عددی با کد طراحی شده توسط نرم افزار MATLAB حل شده و از روی آنها فرکانس‌های طبیعی ورق به صورت بی‌بعد بدست آمده‌اند. در انتها نیز رفتار ارتعاشی ورق‌های تحت بررسی، با استفاده از نرم افزار ANSYS مورد تحلیل مودال قرار گرفته و فرکانس‌های طبیعی بدست آمده در هر مرحله با نتایج حل تحلیلی و حل عددی مورد مقایسه قرار گرفته است.

## ۲- رفتار عمومی ورقها

ورق سازه‌ای است مسطح که ضخامت آن در قیاس با سایر ابعادش بسیار کوچک می‌باشد. این ویژگی باعث خمیده شدن آسان ورق تحت تاثیر نیروهای جانبی شده و از این رو می‌توان با بکارگیری معادلات الاستیسیته دو بعدی به بررسی رفتار تنش و کرنش در ورق‌ها پرداخت.

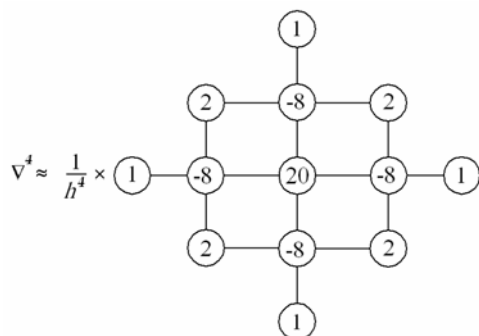
شده است. در روش فوق ورق به شبکه‌های منظم تقسیم بندی شده و هر راس این شبکه، یک گره را تشکیل می‌دهد. با این تکنیک معادلات دیفرانسیل حاکم بر رفتار ورق و شرایط مرزی با یک سری معادلات تفاضل جایگزین می‌شود. از این رو حل مسئله اصلی و محاسبه فرکانس‌های طبیعی سیستم، به حل همزمان دستگاه‌های معادلات جبری نوشته شده برای هر گره داخل صفحه کاهش می‌یابد.

### الف) فرمولاسیون تفاضل مرکزی - مرتبه خطای ۲

معادله تفاضل مرکزی با استفاده از تعریف مشتق تابع به صورت زیر بدست می‌آید [۱۲ و ۱۳]:

$$\delta y_n = \frac{1}{2\Delta x}(y_{n+1} - y_{n-1}) \quad (17)$$

شایان ذکر است مرتبه خطای رابطه فوق از مرتبه  $O(h^2)$  می‌باشد. از آنجا که معادله (۵)، یک معادله دو متغیره برحسب  $x$  و  $y$  است، لذا روابط تفاضل مرکزی با مرتبه خطای یاد شده برای مشتقات مرتبه ۴ به صورت مولکول‌های محاسباتی زیر تعریف می‌شوند [۱۲ و ۱۳]:



شکل (۱): مولکول محاسباتی تفاضل مرکزی برای مشتقات مرتبه ۴

با توجه به مطالب بالا، معادله ورق فون کارمن (معادله ۱) را برای یک ورق ۴ ضلعی ایزوتروپیک با لبه‌های خطی و صرف نظر از ممان اینرسی چرخشی  $I_2$ ، تکیه گاه الاستیک، بار حرارتی و بار خارجی، می‌توان با اپراتور لاپلاس به صورت زیر بازنویسی نمود [۱۴]:

$$\nabla^4 w - Bw = 0 \quad (18)$$

در رابطه فوق داریم:

$$B = \frac{\omega^2 I_0}{D} = \frac{12\rho(1-\nu^2)\omega^2}{Eh^2} \quad (19)$$

در صورتی که مولکول محاسباتی شکل (۱) را برای رابطه (۱۸) استفاده کنیم، معادله حاکم بر رفتار ارتعاشی ورق به صورت معادله تفاضل شکل (۲) بدست می‌آید. شایان ذکر است در این معادله که به صورت مولکول محاسباتی آورده شده، از عبارت  $d$  به جای  $h$  (طول بازوهای مولکول محاسباتی) استفاده شده است.

$$w_0(x, y, t) = w(x, y)T(t) \quad (9)$$

در حالتی که هر چهار لبه ورق بر روی تکیه گاه ساده قرار داشته و  $a$  و  $b$  به ترتیب طول و عرض ورق باشند، می‌توان نوشت [۲]:

$$w(x, y) = W_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (10)$$

شرایط مرزی عبارت است از:

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad (11)$$

$W_{mn}$  دامنه ارتعاش بوده و با جایگذاری روابط در (۸) خواهیم داشت:

$$D(\alpha_m^4 + 2\alpha_m^2 \beta_n^2 + \beta_n^4) - \omega^2 [I_0 + I_2(\alpha_m^2 + \beta_n^2)] = 0 \quad (12)$$

$$\alpha_m = (m\pi/a) \quad (13)$$

$$\beta_n = (n\pi/b) \quad (14)$$

فرکانس طبیعی ورق ایزوتروپیک مربع شکل با لبه‌های خطی و با صرف نظر کردن از ممان چرخشی  $I_2$  بصورت زیر بدست می‌آید:

$$\omega_{mn} = \frac{\pi^2}{a^2} \sqrt{\frac{D}{\rho h}} (m^2 + n^2) \quad (15)$$

در نهایت فرکانس طبیعی بی بعد شده ورق ( $\bar{\omega}_{mn}$ ) برابر است با [۲]:

$$\bar{\omega}_{mn} = \omega_{mn} \frac{b^2}{\pi^2} \sqrt{\frac{\rho h}{D}} \quad (16)$$

### ۳- حل عددی معادله ارتعاشی ورقهای با لبه خطی

در بسیاری از موارد بکارگیری روش‌های تحلیلی به سادگی میسر نبوده و تنها برای برخی حالات خاص و اعمال فرضیات ساده کننده، دستیابی به حل تحلیلی نهایی میسر می‌باشد. با پیشرفت روش‌های عددی و افزایش توان محاسباتی کامپیوترها و نرم افزارهای مرتبط، استفاده از روش‌های عددی برای بررسی مسایل پیچیده توجه عمده ای به خود معطوف داشته است. در این مقاله نیز از روش تفاضل محدود مرکزی برای تحلیل رفتار ارتعاشی ورق‌ها استفاده

## ۲- تکیه گاه گیردار

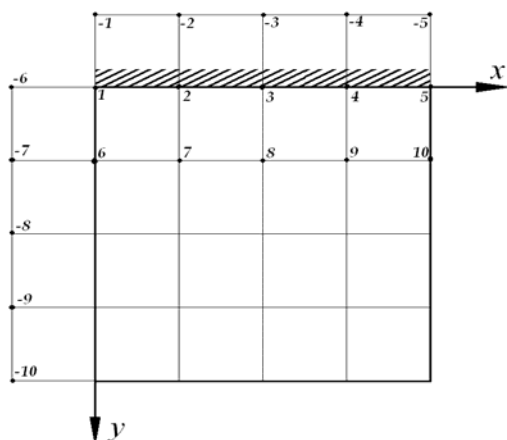
شکل (۴) را در نظر می‌گیریم. با اعمال معادلات تفاضل بر روی معادلات شرایط مرزی، روابط بین گره‌ها به صورت زیر قابل استخراج است:

$$\left. \frac{dw}{dy} \right|_{1,2,3,4,5} = 0 \quad (25)$$

$$\left. \frac{dw}{dy} \right|_2 = 0 \Rightarrow \frac{1}{2d}(-w_{-2} + w_7) = 0 \Rightarrow w_{-2} = w_7 \quad (26)$$

و به همین ترتیب خواهیم داشت:

$$w_{-1} = w_6, w_{-3} = w_8, \dots \quad (27)$$



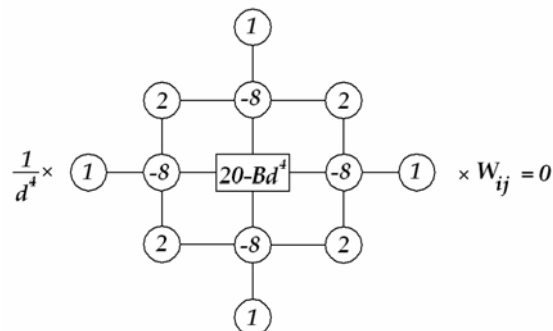
شکل (۴): لبه تکیه گاهی گیردار

## ج) فرمولاسیون تفاضل مرکزی - مرتبه خطای ۴

معادلات تفاضل مرکزی مرتبه ۴ را می‌توان از بسط تیلور توابع ۲ متغییره و انتخاب ۵ جمله اول این بسط بدست آورد. برای نمونه، معادله تفاضل مرکزی برای مشتق مرتبه اول یک تابع ۱ متغییره به صورت زیر به دست می‌آید [۱۲و۱۴]:

$$\delta y_n = \frac{1}{12\Delta x}(-y_{n+2} + 8y_{n+1} - 8y_{n-1} + y_{n-2}) \quad (28)$$

از آنجا که معادله (۵)، یک معادله دو متغییره بر حسب  $x$  و  $y$  است، لذا روابط تفاضل مرکزی با مرتبه خطای یاد شده برای مشتقات مرتبه ۴ به صورت مولکول‌های محاسباتی زیر تعریف می‌شوند: [۱۲و۱۴]:

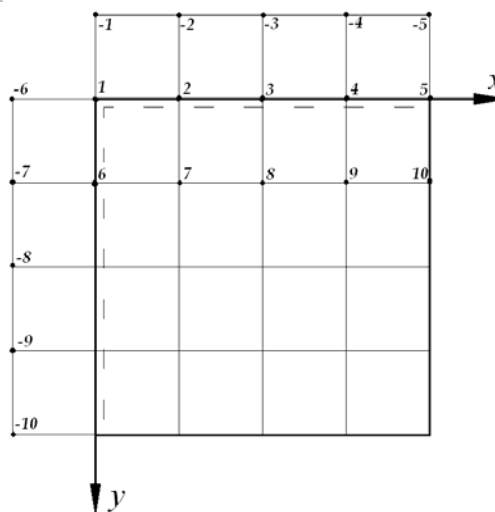


شکل (۲): مولکول محاسباتی حاکم بر رفتار ارتعاشی ورق - مرتبه خطای ۲

## ب) بررسی شرایط مرزی در فرمولاسیون تفاضل مرکزی مرتبه خطای ۲

## ۱- تکیه گاه ساده

با در نظر گرفتن شکل (۳) و اعمال معادلات تفاضل بر روی معادلات شرایط مرزی، روابط بین گره‌ها به صورت زیر قابل استخراج است:



شکل (۳): لبه تکیه گاهی ساده

$$w_1 = w_2 = w_3 = w_4 = w_5 = w_6 = 0 \quad (20)$$

$$\left. \frac{d^2w}{dx^2} \right|_{1,6} = 0, \left. \frac{d^2w}{dy^2} \right|_{1,2,3,4,5} = 0 \quad (21)$$

$$w_2 = 0, \left. \frac{d^2w}{dy^2} \right|_2 = 0 \Rightarrow \frac{1}{d^2}(w_7 - 2w_2 + w_{-2}) = 0 \Rightarrow w_{-2} = -w_7 \quad (22)$$

$$w_6 = 0, \left. \frac{d^2w}{dx^2} \right|_6 = 0 \Rightarrow \frac{1}{d^2}(w_7 - 2w_6 + w_{-7}) = 0 \Rightarrow w_{-7} = -w_7 \quad (23)$$

به همین ترتیب خواهیم داشت:

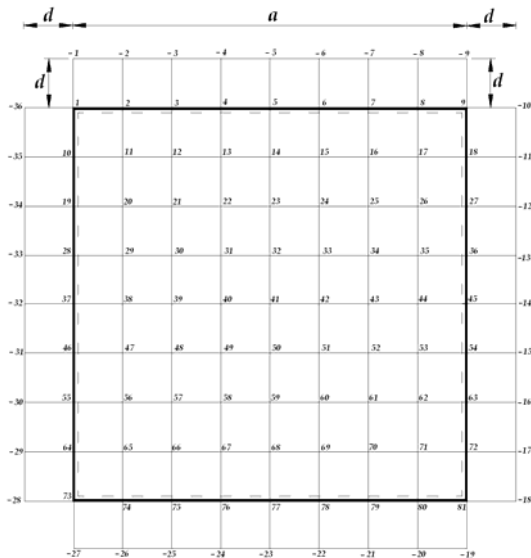
$$w_{-3} = -w_8, w_{-4} = -w_9, \dots \quad (24)$$

گره‌های با اندیس منفی بدست می‌آیند که نتایج آنها در مراحل بعدی مورد استفاده قرار گرفته است.

#### ۴- شبکه بندی ناحیه حل و استخراج معادلات حاکم

##### الف) استفاده از روش تفاضل مرکزی با مرتبه خطای ۲

در ابتدا، ورق مربع شکل با اضلاع خطی  $a$  را که هر چهار طرف آن بر روی تکیه گاه ساده قرار دارد، مطابق شکل (۸) در نظر گرفته می‌شود:



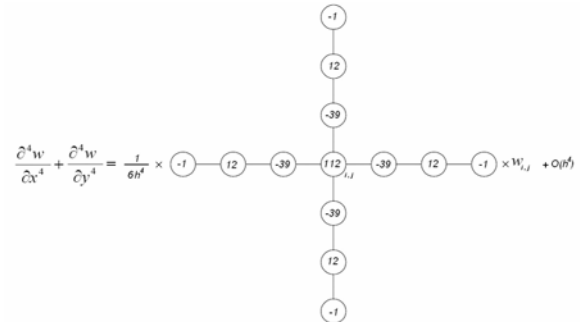
شکل (۸): شبکه بندی ورق مربع شکل به طول  $a$  - تفاضل مرتبه ۲

لازم به ذکر است ورق فوق به ۶۴ قسمت مساوی تقسیم شده، بطوریکه  $d = a/8$  می‌باشد. همچنین گره‌هایی که با علامت منفی مشخص شده اند، گره‌های مجازی بوده که برای تبدیل شرایط مرزی به معادلات تفاضل جهت حل دستگاه معادلات جبری نهایی، لازم می‌باشند. با توجه به شرایط مرزی بررسی شده در شکل (۳) و فرض  $L = Bd^4$ ، نمونه‌ای از معادلات فوق (مثلا برای گره شماره ۱۱) به صورت زیر بدست می‌آید:

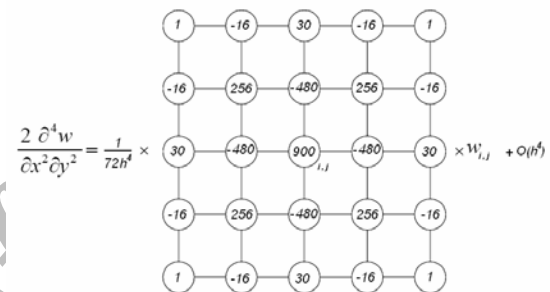
$$\frac{1}{d^4} [w_{-2} + 2w_1 - 8w_2 + 2w_3 + w_{-35} - 8w_{10} + (20 - L)w_{11} - 8w_{12} + w_{13} + 2w_{19} - 8w_{20} + 2w_{21} + w_{29}] = 0 \quad (29)$$

$$w_1 = w_2 = w_3 = w_{10} = w_{19} = 0 \quad (30)$$

$$w_{-2} = w_{-35} = -w_{11} \quad (31)$$

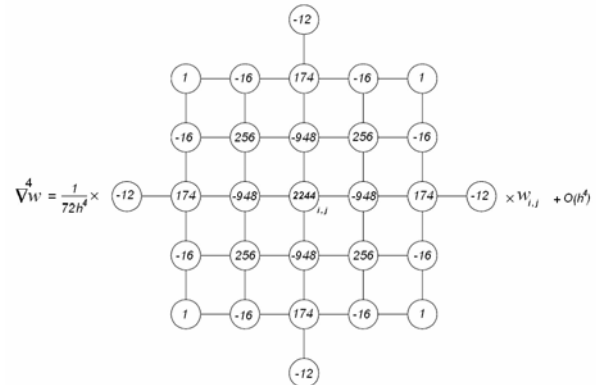


شکل (۵): مولکول محاسباتی روابط تفاضل مرکزی مشتقات مرتبه ۴ - بخش اول



شکل (۶): مولکول محاسباتی روابط تفاضل مرکزی مشتقات مرتبه ۴ - بخش دوم

در انتها معادله حاکم بر رفتار ارتعاشی ورق با مرتبه خطای  $O(h^4)$  به صورت مولکول محاسباتی شکل (۷) بدست می‌آید [۱۴]:



شکل (۷): مولکول محاسباتی حاکم بر رفتار ارتعاشی ورق - مرتبه خطای ۴

#### د) بررسی شرایط مرزی در فرمولاسیون تفاضل مرکزی مرتبه ۴

بررسی شرایط مرزی در فرمولاسیون تفاضل مرکزی مرتبه ۴، همانند فرمولاسیون تفاضل مرکزی مرتبه ۲ در حالات مختلف مورد بررسی قرار گرفته می‌شود، بدین صورت که با نوشتن شرایط مرزی و قراردادن معادلات تفاضل مرتبط، ارتباط بین گره‌ها و به ویژه

با در نظر گرفتن فرضیات قسمت قبلی و  $L = 72Bd^4$ ، نمونه‌ای از معادلات فوق (مثلا برای گره شماره ۱۲) به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\frac{1}{72d^4}[12(w_{-39} + w_{35} + w_{15} + w_{39}) + (w_{-5} + w_{-1} + w_{28} + w_{32}) - 16(w_{-4} + w_{-2} + w_1 + w_5 + w_{19} + w_{23} + w_{29} + w_{31}) + 174(w_{-3} + w_{10} + w_{14} + w_{30}) + 256(w_2 + w_4 + w_{20} + w_{22}) - 948(w_3 + w_{11} + w_{13} + w_{21}) + (2244 - L)w_{12}] = 0 \quad (35)$$

با اعمال شرایط مرزی بر روی معادله (۳۵)، معادله ساده شده به صورت زیر بدست می‌آید:

$$-920w_{11} + (2070 - L)w_{12} - 932w_{13} + 173w_{14} - 12w_{15} + 256w_{20} - 936w_{21} + 256w_{22} - 16w_{23} - 16w_{29} + 174w_{30} - 16w_{31} + w_{32} - 12w_{39} = 0 \quad (36)$$

به طریق مشابه این عمل برای گره‌های دیگر انجام شده تا دستگاه معادلات مربوطه بدست آید. با طراحی کد مناسب توسط نرم افزار MATLAB، با محاسبه  $L$  های مختلف، فرکانس ارتعاشات هر مود بدست می‌آید فرکانس‌های طبیعی و فرکانس‌های بی بعد متناظر از روابط زیر حاصل می‌شوند [۱۵، ۱۴، ۲]:

$$\omega_{mn} = \frac{64}{a^2 \sqrt{72}} \left( \sqrt{\frac{D}{I_0}} \right) (\sqrt{L_i}) \quad (37)$$

$$\bar{\omega}_{mn} = \frac{64}{\pi^2 \sqrt{72}} (\sqrt{L_i}) = 0.7642 \sqrt{L_i} \quad (38)$$

همچنین به جهت تعریف متفاوت بیان شده برای فرکانس‌های بی بعد سایر حالات شرایط مرزی در مراجع مورد استفاده، این فرکانس‌ها از رابطه زیر بدست می‌آیند [۱۵، ۲، ۱۴]:

$$\bar{\omega}_{mn} = \frac{64}{\sqrt{72}} (\sqrt{L_i}) = 7.5423 \sqrt{L_i} \quad (39)$$

#### ۵- شبیه سازی با نرم افزار ANSYS

نرم افزار ANSYS، یک نرم افزار قوی در تحلیل به روش اجزای محدود برای حل مسائل مختلف مکانیک از جمله تحلیل مودال برای

با جایگذاری شرایط مرزی بالا در رابطه (۲۹)، معادله حاکم بر گره ۱۱ به صورت زیر بدست خواهد آمد:

$$(18 - L)w_{11} - 8w_{12} + w_{13} - 8w_{20} + 2w_{21} + w_{29} = 0 \quad (32)$$

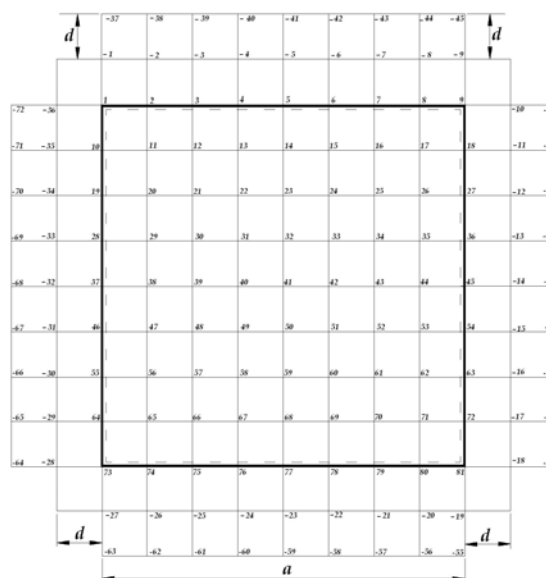
به طریق مشابه این عمل برای گره‌های دیگر انجام شده تا دستگاه معادلات مربوطه بدست آید. در این مثال خاص، بررسی‌ها نشان می‌دهد معادله حاکم برای محاسبه فرکانس‌های طبیعی به صورت یک چند جمله‌ای از درجه ۴۹ با ضرایب ثابت می‌باشد که با طراحی کد مناسب توسط نرم افزار MATLAB، و محاسبه  $L$  های مختلف، فرکانس ارتعاشات هر مود بدست می‌آید. فرکانس‌های طبیعی و فرکانس‌های بی بعد متناظر، از روابط زیر حاصل می‌شوند [۱۵، ۱۴، ۱۲]:

$$\omega_{mn} = \frac{64}{a^2} \left( \sqrt{\frac{D}{I_0}} \right) (\sqrt{L_i}) \quad (33)$$

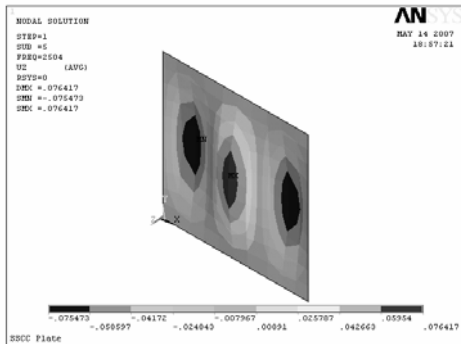
$$\bar{\omega}_{mn} = \frac{64}{\pi^2} (\sqrt{L_i}) = 6.4845 \sqrt{L_i} \quad (34)$$

#### ب) استفاده از روش تفاضل مرکزی با مرتبه خطای ۴

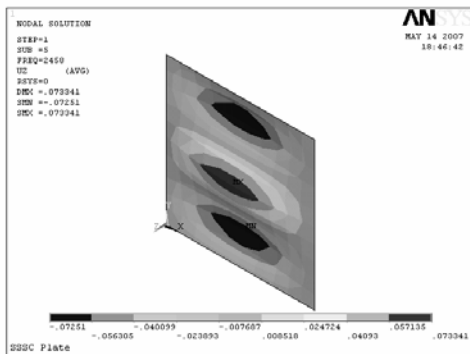
در ادامه، ورق مربع شکل با اضلاع خطی  $a$  را که هر چهار طرف آن بر روی تکیه گاه ساده قرار دارد، مطابق شکل (۹) در نظر گرفته می‌شود:



شکل (۹): شبکه بندی ورق مربع شکل به طول  $a$  - تفاضل مرتبه ۴



شکل(۱۲): مود پنجم - ورق مستطیل شکل SSSC



شکل(۱۳): مود پنجم - ورق مستطیل شکل SSSC

از سوی دیگر در جداول (۲) تا (۵) مقایسه جامعی بین نتایج حل تحلیلی، حل عددی و شبیه سازی انجام شده با نرم افزار آورده شده است:

جدول(۲): مقایسه فرکانسهای بی بعد - شرایط مرزی چهار طرف تکیه گاه ساده

شماره مود	حل تحلیلی [۲]	تفاضل مرتبه ۲	تفاضل مرتبه ۴	ANSYS
۱	۹	۱/۹۷۴۴	۱/۹۹۹۴	۱/۹۹۱۱
۲	۵	۴/۱۷۸۵۷	۴/۹۸۰۳	۴/۹۶۲۶
۳	۵	۴/۱۷۸۵۷	۴/۹۸۰۳	۴/۹۶۲۶
۴	۸	۷/۵۹۷۱	۷/۹۶۳۷	۷/۸۷۵۹
۵	۱۰	۸/۹۹۳۲	۹/۷۹۴۹	۹/۹۱۶۶

جدول(۳): مقایسه فرکانسهای بی بعد - شرایط مرزی چهار طرف تکیه گاه درگیر

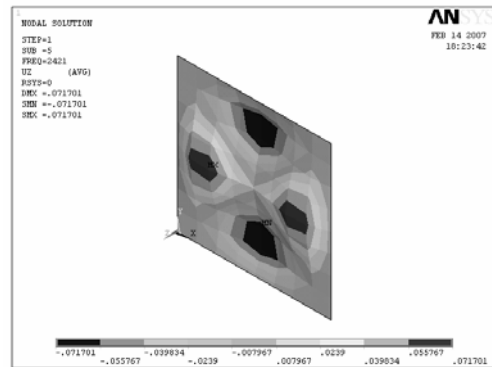
شماره مود	حل تحلیلی [۲]	تفاضل مرتبه ۲	تفاضل مرتبه ۴	ANSYS
۱	۳۶	۳۳/۶۲۲۶	۳۵/۶۰۲۳	۳۵/۶۰۶۳
۲	۷۴/۲۹۶	۶۴/۹۵۹۵	۷۱/۴۰۰۸	۷۲/۳۲۶۳
۳	۷۴/۲۹۶	۶۴/۹۵۹۵	۷۱/۴۰۰۸	۷۲/۳۲۶۳
۴	۱۰۸/۵۹۲	۹۴/۵۰۵۰	۱۰۴/۸۸۵۵	۱۰۵/۳۳۳۵
۵	۱۳۰/۱۲۶	۱۰۷/۱۰۲۲۷	۱۲۳/۰۹۸۳	۱۲۹/۵۲۵۸

محاسبه فرکانسهای طبیعی سیستمهای مهندسی می باشد. برای بررسی صحت نتایج بدست آمده در بخش های قبلی، شبیه سازی به شرح جدول(۱) برای ورق مستطیل شکل با شرایط مرزی مختلف نظیر چهار طرف ساده (SSSS)، چهار طرف درگی (CCCC)، ۲ طرف ساده، ۲ طرف درگیر (SSCC) و ۳ طرف ساده، ۱ طرف درگیر (SSSC) انجام شده است:

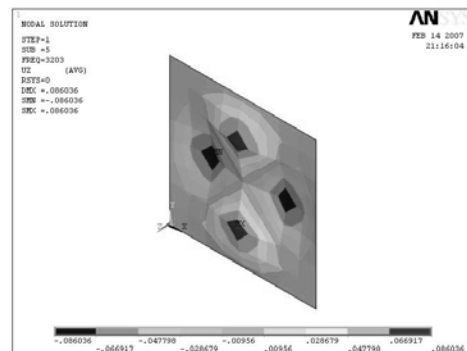
جدول(۱): مشخصات ورق تحت شبیه سازی با نرم افزار ANSYS

جنس	Steel
شرایط مرزی <td>SSSS - CCCC - SSCC - SSSC</td>	SSSS - CCCC - SSCC - SSSC
ابعاد <td>1×1 m<sup>2</sup></td>	1×1 m <sup>2</sup>
ضخامت <td>0.002 m</td>	0.002 m
چگالی <td><math>\rho=7810 \text{ kg/m}^3</math></td>	$\rho=7810 \text{ kg/m}^3$
مدول الاستیسیته <td>E=207 GPa</td>	E=207 GPa
ضریب پواسون <td><math>\nu=0.292</math></td>	$\nu=0.292$
نوع تحلیل <td>Modal (Reduced)</td>	Modal (Reduced)
نوع المان <td>Shell63</td>	Shell63
تعداد مود تحلیل شده <td>5</td>	5

در شکل های (۱۰) الی (۱۳)، وضعیت مود ارتعاشی پنجم ورق های با شرایط مرزی یاد شده در بالا، برای مقایسه آورده شده است:



شکل(۱۰): مود پنجم - ورق مستطیل شکل SSSS



شکل(۱۱): مود پنجم - ورق مستطیل شکل CCCC

• در جداول (۴) و (۵)، از نظر دقت پاسخ‌های بدست آمده، رتبه‌بندی روش‌های حل به صورت نرم افزار ANSYS رتبه اول، روش تفاضل مرکزی مرتبه چهارم در رتبه دوم و همچنان روش تفاضل مرکزی مرتبه دو در رتبه سوم قرار می‌گیرند. علت این امر را می‌توان در وضعیت شرایط تکیه-گاهی جستجو نمود، بدین صورت که با توجه به صفر بودن تغییر مکان و شیب در لبه‌های گیردار، برای تبدیل شرایط مرزی به معادلات تفاضل می‌بایست از تعریف تقریبی مشتق استفاده نمود که این امر خود باعث افزایش خطای گرد کردن در محاسبات مربوطه می‌شود، چنانچه در لبه های تکیه گاهی ساده به دلیل عدم وجود شرط مرزی صفر بودن شیب، پاسخها از دقت چشمگیری برخوردار می‌باشند.

• در جدول (۵)، اختلاف قابل توجه نتیجه حاصل از روش تفاضل مرتبه ۴ برای مود پنجم ارتعاشی بدین خاطر است که به دلیل نامتقارن بودن وضعیت تکیه گاهی، معادله متناظر با  $L$  های مختلف با سایر ورق‌ها متفاوت بوده و حل آن تعدادی پاسخ غیر حقیقی (بصورت مختلط) دارد که یکی از این پاسخ‌ها، همین مود پنجم ارتعاشی می‌باشد.

از آنجا که در روش‌های عددی که از روش تفاضل محدود مرتبه ۲ استفاده می‌شود، نتایج بدست آمده از فرمولاسیون تفاضل مرتبه ۴، نشان از دقت بالای روابط و سهولت بکارگیری آنها دارد که از این رو می‌توان از روابط فوق نیز برای بررسی جنبه‌های دیگر رفتار ارتعاشی بدون الزام بکارگیری نرم افزار تحلیلی خاص و تنها با یک برنامه نویسی ساده، استفاده نمود.

#### ۷- فهرست علائم

$D$	سختی خمشی ورق
$E$	مدول الاستیسیته
$h$	ضخامت ورق
$k$	سختی الاستیک تکیه گاه
$q$	بار گسترده اعمالی به ورق
$\nabla^2$	اپراتور لاپلاس
$\omega$	فرکانس طبیعی
$\rho$	جرم حجمی
$\nu$	نسبت پواسون

#### ۸- مراجع

- [1] A. C. Ugural, "Stresses in Plates and Shells", 2<sup>nd</sup> ed., McGraw-Hill, New York, 2000.

جدول(۴): مقایسه فرکانسهای بی بعد - شرایط مرزی دو طرف تکیه گاه ساده و دو طرف تکیه گاه درگیر

ANSYS	تفاضل مرتبه ۴	تفاضل مرتبه ۲	حل تحلیلی [۲]	شماره مود
۲۸/۷۴۱۱	۲۸/۷۲۵۲	۲۷/۴۶۰۱	۲۸/۹۵۱۰	۱
۵۴/۲۰۳۳	۵۴/۲۲۰۱	۵۱/۵۴۴۸	۵۴/۷۴۳۰	۲
۶۸/۵۸۲۰	۶۷/۴۵۶۶	۶۱/۵۷۷۳	۶۹/۳۲۷۴	۳
۹۲/۸۶۳۳	۹۲/۵۹۲۵	۸۵/۲۹۵۳	۹۴/۵۸۵۶	۴
۱۰۱/۲۳۷۴	۱۰۰/۰۱۰۳	۹۱/۳۶۶۶	۱۰۲/۲۱۶۶	۵

جدول(۵): مقایسه فرکانسهای بی بعد - شرایط مرزی سه طرف تکیه گاه ساده و یک طرف تکیه گاه درگیر

ANSYS	تفاضل مرتبه ۴	تفاضل مرتبه ۲	حل تحلیلی [۲]	شماره مود
۲۳/۵۲۱۱	۲۳/۵۷۶۴	۲۲/۹۷۴۸	۲۳/۶۴۶۴	۱
۵۱/۲۶۳۶	۵۱/۴۰۰۷	۴۹/۱۵۶۵	۵۱/۶۷۴۸	۲
۵۸/۱۴۹۷	۵۸/۲۵۹۸	۵۴/۲۱۹۲	۵۸/۶۴۶۹	۳
۸۴/۸۲۸۸	۸۵/۱۵۵۴	۷۹/۹۳۴۹	۸۶/۱۳۴۶	۴
۹۹/۳۹۷۶	۱۰۲/۱۲۵۳	۸۹/۹۶۲۴	۱۰۰/۲۷۶۹	۵

#### ۶- بحث و نتیجه گیری

تا کنون روش‌های تحلیلی و عددی مختلفی برای بررسی رفتار ارتعاشی ورق‌ها پیشنهاد شده است که هر یک با توجه به فرضیات و ساده سازی‌های در نظر گرفته شده، به گوشه‌هایی از پیچیدگی معادلات حاکم بر رفتار دینامیکی و ارتعاشی این سازه خاص پرداخته‌اند. در این مقاله نیز با بسط معادلات تفاضل مرکزی مرتبه ۲، معادلات تفاضل مرکزی مرتبه ۴ برای نخستین بار بدست آمده‌اند و از روابط بدست آمده برای تحلیل عددی رفتار ارتعاشی ورق‌های مستطیل شکل با شرایط مرزی مختلف (و ترکیبی) استفاده شده است.

بررسی نتایج لیست شده در جداول (۲) تا (۵) نشان می‌دهند:

- به دلیل تقارن کامل هندسه و شرایط مرزی در حالات هر چهار طرف تکیه گاه ساده و هر چهار طرف تکیه گاه درگیر دار، فرکانس برخی از مودهای ارتعاشی باهم برابر می‌باشند که صحت این امر در نرم افزار ANSYS و مرجع [۲] تایید گردیده است.
- نتایج بدست آمده در جدول (۲) نشان می‌دهد در مقایسه با حل تحلیلی، روش تفاضل مرکزی مرتبه چهارم در رتبه اول، نرم افزار ANSYS در رتبه دوم و روش تفاضل مرکزی مرتبه دو در رتبه سوم قرار داشته و درصد خطای نسبی چشمگیر و زیر ۵٪ می‌باشد.



- [10] R. Melosh, "Basis for Derivation of Matrices for the Direct Stiffness Method", Journal AIAA, Vol. 1, pp. 1631 – 1637, July 1963.
- [11] A. Khedir, "Free Vibration and Buckling of Symmetric Cross Ply Laminated Plates by an Exact Method", Journal of Sound and Vibration, Vol. 126, pp. 447 – 461, 1988.
- [12] S. S. Rao, "Numerical Method in Engineering Problem", 2<sup>nd</sup> ed., McGraw-Hill, New York, 2002.
- [۱۳] نیکخواه بهرامی، منصور، "تئوری ارتعاشات و کاربرد آن در مهندسی"، چاپ پنجم، انتشارات دانشگاه تهران، ۱۳۸۱.
- [۱۴] حسن زاده، حسن، "تحلیل عددی ارتعاش ورقهای با لبه های غیر خطی تحت شرایط مختلف مرزی"، پایان نامه کارشناسی مهندسی مکانیک گرایش طراحی جامدات، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکزی، زمستان ۱۳۸۵.
- [۱۵] کرباسچی، کسری و حسن زاده، حسن، "تحلیل عددی رفتار ارتعاشی ورقهای با لبه های غیر خطی تحت شرایط مختلف مرزی"، دومین همایش منطقه ای مهندسی مکانیک، آبان ۱۳۸۶، تهران، دانشگاه آزاد اسلامی واحد شهر ری.
- [2] J. N. Reddy, "Theory and Analysis of Elastic Plates", 3<sup>rd</sup> ed., John Wiley, New York, 1999.
- [3] S. P. Timoshenko, Woinowsky, A., "Theory of Plates and Shells", 2<sup>nd</sup> ed., McGraw-Hill, New York, 1959.
- [4] H. Marcus, "Die Thorie elastischen gewwbe und ihre answedung auf die berechung biegsamer platen", Springer Berlin, 1924.
- [5] Z. Szilard, , "Theory and Analysis of Plates – Classical and Numerical Methods", Prentice Hall, 1974.
- [6] N. Ishikawa, "Reduced Order non-linear Equations of Plates", Division of Mechanical Science, Graduate School of Engineering, Hokkaido University, Sapporo, 060-8628, Japan.
- [7] H. Dewey, "Foundations of the Theory of Membrane and Plate Vibration", School of Aerospace Engineering, Georgia Institute of Technology.
- [8] D. Young, , "Vibration of Rectangular Plate by Ritz Method", Journal of Applied Mechanics, Vol. 17, pp. 448 – 453, 1950.
- [9] S. T. Odman, "Studies of Boundary Value Problems", Part II. Characteristic Function of Rectangular Plates, Proc. NR 24, Swedish Cement and Concrete Research Institute, Royal Institute of Technology, Stockholm, Vol. 7, pp. 62, 1955.

Archive of SID