

## کاربرد روش معکوس انتقال حرارت در شناسایی حفره درون مواد

سید محمد مهدی میزان عدل<sup>۱</sup>، محسن دشتی اردکانی<sup>۲</sup> و محمود خداداد<sup>۳</sup>  
Mehdi\_mizanadi@yahoo.com

### چکیده

در تحقیق حاضر مساله معکوس در شناسایی حفره درون یک جسم الاستیک دو بعدی با انجام انتقال حرارت مورد بررسی قرار گرفته شده است. بدین منظور از تلفیق روش‌های المان مرزی، الگوریتم ژنتیک و گرادیان مزدوج استفاده شده است. اساس روش بر مبنای مینیمم سازی تابع هدفی است که به صورت مجموع مربعات تفاضل دماهای محاسبه شده و دماهای اندازه گیری شده از آزمایش انتقال حرارت بر روی مرز خارجی جسم تعریف می‌گردد. مینیمم سازی تابع هدف با استفاده از روش گرادیان مزدوج صورت می‌گیرد. با توجه به بد وضع بودن مساله معکوس و نیاز به حدس اولیه مناسب در روش‌های بهینه سازی محلی، در این مقاله مدلی ابتکاری بر پایه الگوریتم ژنتیک برای تعیین حدس اولیه مناسب ارائه می‌شود. با تعیین حدس اولیه مناسب، ادامه کار به روش گرادیان مزدوج واگذار شده، موقعیت و هندسه حفره بدرستی مشخص می‌شود. از عمده موارد کاربرد این تحقیق در صنایع ریخته گری است.

### کلیدواژه:

روش المان‌های مرزی - الگوریتم ژنتیک - روش گرادیان مزدوج - حفره

۱- عضو هیات علمی دانشگاه آزاد اسلامی واحد بافق

۲- کارشناس ارشد طراحی کاربردی، نیروگاه حرارتی خورشیدی یزد

۳- استادیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه یزد

## ۱- مقدمه

در این مقاله تخمین پارامترهای مربوط به حفره درون مواد جامد با استفاده از اندازه گیری های سطحی مورد بررسی قرار گرفته است. تخمین این پارامترها را می توان به عنوان یک مساله معکوس مورد مطالعه قرار داد. در مسایل مستقیم، معادلات دیفرانسیل حاکم همراه با شرایط مرزی و اولیه و مقادیر ثابت موجود در معادلات حاکم، یا شرایط مرزی و اولیه مشخص می باشند و پس از حل مساله در یک دامنه معین توابع متغیر وابسته محاسبه می شوند. در مساله معکوس یک یا چند پارامتر که مربوط به مقادیر ثابت در شرایط مرزی یا اولیه و یا فیزیک مساله است، مجهول هستند و در عوض متغیر وابسته دما در نقاط مشخصی روی مرزهای خارجی دامنه مساله که شار حرارتی به عنوان شرط مرزی مشخص گردیده، اندازه گیری شده، با استفاده از آنها مقادیر پارامترهای مجهول تخمین زده می شود. از کاربردهای روش معکوس حرارتی می توان به تخمین شار حرارتی [۱] و تخمین هندسه [۲] اشاره نمود. در این مساله غیر خطی که متغیر وابسته دما رابطه غیر خطی با پارامترهای مجهول هندسه حفره دارد، روش تکرار برای تخمین پارامترهای موجود، نیاز است. بنابراین روش المانهای مرزی به دلیل اینکه فقط به شبکه بندی مرزهای خارجی دامنه مساله نیاز دارد، می تواند بسیار موثر واقع شود. قطعاً در این مقاله که حفره موجود دارای اندازه و مکان مشخص نبوده و بعد از حدس اولیه این پارامترها با هر تکرار مکان و اندازه آن عوض می شود، در صورت استفاده از دیگر روش های عددی همچون اجزاء محدود باید در هر تکرار کل دامنه مساله دوباره شبکه بندی شود. شبکه بندی دوباره دامنه مساله بسیار زمانبر و مشکل می باشد. در نتیجه می توان از روش المانهای مرزی به عنوان تنها روش موثر نام برد [۳]. روش های بهینه سازی متعددی برای حل مسایل معکوس وجود دارد. از رایج ترین و قدیمی ترین روش های بهینه سازی، روش های محلی است که عمدتاً بر مبنای گرادیان تابع هدف کار می کنند. با توجه به سرعت همگرایی بالا و تخمین خوب مقادیر مجهول عیب اصلی این روش ها گیر افتادن در نقاط بهینه محلی و عدم حرکت این الگوریتم هاست. معمولاً حدس اولیه مناسب و نزدیک به جواب راهکار مناسبی برای حل این مشکل می باشد. علاوه بر این در مسایل معکوس طراحی که به منظور تخمین هندسه انجام می شود، بد وضع بوده و به شدت به خطاهای ورودی حساس می باشند که برای رفع این مشکل از توابع تنظیم استفاده می شود. روش های تنظیم متعددی برای حل مسایل معکوس وجود دارد که از مهم ترین آنها می توان روش تنظیم تیخونوف [۴] و روش تنظیم بک [۵] را نام برد. گر چه

هر کدام از این روش ها دارای مزایایی است، ولی هیچ یک به طور قطعی موثر واقع نشده است.

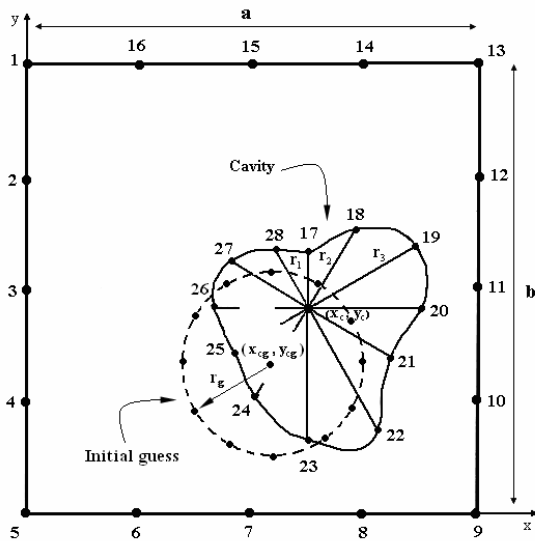
روش گرادیان مزدوج در زمره روش های بهینه سازی محلی است که می توان برای تخمین پارامترها، هم برای مسائل خطی و هم برای مسائل غیر خطی بکار برد. روش گرادیان مزدوج همراه با استفاده از معیار همگرایی در رده روش های تنظیم تکرار پذیر قرار می گیرد که این قابلیت در مسائل غیر خطی بدو وضع امتیاز ویژه ای به شمار آمده، از نوسانات شدید و واگرایی مقادیر جلوگیری می کند. همچنین این قابلیت، مساله را از نیاز به توابع تنظیم مستثنی می دارد. این روش دارای نسخه است که تفاوت آنها در نوع محاسبه جهت های مزدوج است [۶]. در کارهایی مشابه، مقالات زیادی در زمینه روش های معکوس برای یافتن اندازه مناسب، شکل و محل مسیره های خنک کاری داخلی پره های توربین به چاپ رسیده است. در [۷] از توابع بیضی گون برای تعریف هندسه مسیره های خنک کاری و محاسبات حرارتی معکوس استفاده شده است. در [۸] تخمین مرز مسیره های خنک کاری در پره توربین گاز بر مبنای نسخه فلچر-ریوز روش گرادیان مزدوج و استفاده از معادله الحاقی برای محاسبه گرادیان انجام گرفته است.

از دیگر روش های بهینه سازی روش های همگانی هستند که معمولاً تصادفی بوده و با مقدار مستقیم تابع هدف سرو کار دارند. الگوریتم ژنتیک در زمره روش های همگانی و تصادفی بوده که برای تخمین پارامترهای مجهول چه برای مسائل خطی و چه برای مسائل غیر خطی به کار می رود. در [۹] هندسه و موقعیت حفره درون یک قاب دوبعدی بوسیله تلفیق سه روش المان مرزی، الگوریتم ژنتیک و گرادیان مزدوج، با آزمایش کشش بررسی شده است. در این تحقیق سازگاری روش های الگوریتم ژنتیک و گرادیان مزدوج با روش المان های مرزی کاملاً مشهود است. مقاله حاضر یک جسم دو بعدی با یک حفره را مورد بررسی قرار داده، ولی روش بطور کلی محدودیتی ندارد. بسط به مسایل سه بعدی و سازه های داخلی پیچیده تر قابل بررسی می باشد. همچنین روش مطرح شده می تواند در زمینه انجام آزمایشات غیر مخرب<sup>۱</sup> کاربردی موثر داشته باشد.

## ۲- مساله مستقیم

معادله دیفرانسیل حاکم بر مساله انتقال حرارت دایم در یک ماده همگن دوبعدی عبارت است از:

$$k \nabla^2 T = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (1)$$



شکل (۱): نحوه‌ی المان بندی و مدل کردن حفره درون جسم

$[x]$ : ماتریس ستونی شامل  $N$  پارامتر مجهول که باید در مساله معکوس تخمین زده شوند.

$$[x] = [x_c, y_c, r_1, \dots, r_n] \quad (5)$$

مختصه اول مختصات  $x$  مرکز هندسه حفره، مختصه دوم مختصات  $y$  مرکز هندسه حفره و بقیه متغیرها تعداد  $n$  شعاع تخمینی تا مرکز حفره تحت زاویه  $\theta = \frac{2\pi i}{n}$   $i = 1, \dots, n$  است. به این ترتیب می توان مساله معکوس را تخمین مقادیر  $[x]$  با داشتن دمای  $Y_m$  دانست. برای این منظور تابع هدفی به صورت مجموع مربعات تفاضل دماهای مطلوب اندازه گیری شده و دماهای محاسبه شده با استفاده از حل مساله مستقیم تعریف می شود:

$$f(\hat{x}) = \sum_{m=1}^M [T_m - Y_m]^2 \quad (6)$$

$M$  تعداد نقاط اندازه گیری است. از علامت « $\wedge$ » برای مقادیر محاسبه شده از الگوریتم معکوس استفاده می شود.

#### ۴- الگوریتم ژنتیک

الگوریتم های ژنتیکی [۱۱] روش های عملی حل مسایل تحقیقی تصادفی بر مبنای اصول انتخاب و ژنتیک طبیعی هستند که برای فضاهای بزرگ، غیر خطی، گسسته و کمتر شناخته شده طراحی می شوند و جایی که اطلاعات کافی در اختیار نباشد یا مدل سازی مشکل باشد و همچنین در جاهایی که روش های بهینه سازی سنتی جوابگو نیستند، بکار می رود. عیب اصلی روش الگوریتم ژنتیک عدم قطعیت آن در رسیدن به جواب صحیح و زمان بر بودن

که  $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$  عملگر لاپلاس است. شرایط مرزی برای

معادلات بالا بدین صورت است که همواره بر روی قسمتی از مرز شارها و بر روی قسمت دیگر دماها معلوم می باشد.

$$T = T_0(s) \quad \text{on } \Gamma_q$$

$$q = k \frac{\partial T}{\partial n} = q_0(s) \quad \text{on } \Gamma_T \quad (2)$$

$\Gamma_T$  قسمتی از مرز که دما و  $\Gamma_q$  قسمتی از مرز که شار حرارتی روی آن مشخص است. جداسازی و حل معادلات فوق با روش المان های مرزی خطی انجام می گیرد. با انتگرال گیری از (۱) بدون وجود ترم حرارتی بر روی ناحیه  $\Omega$  و روابط انتگرال گیری حول نقاط تکین می توان نوشت:

$$\omega^i T^i - \int_{\Gamma} T \frac{\rho_1 n_1 + \rho_2 n_2}{r} ds = \frac{1}{k} \int_{\Gamma} q_n \ln\left(\frac{1}{r}\right) ds \quad (3)$$

هنگامی که حفره ای در درون جسم وجود داشته باشد، شارها بر روی مرز حفره صفر در نظر گرفته می شود. در فرم ماتریسی، با اعمال شرایط در مرز خارجی و داخلی و آوردن مجهولات در یک طرف تساوی می توان رابطه (۳) را به صورت زیر نوشت:

$$[A] \{X\} = [B] \quad (4)$$

ماتریس مجهولات  $\{X\}$  شامل مقادیر مجهول دماها و شارها بر روی مرز خارجی و کلیه دماها بر روی مرز داخلی است. حل دستگاه معادلات فوق با روش تجزیه مقادیر منفرد<sup>۳</sup> (SVD) انجام می گیرد. چگونگی بدست آمدن این معادلات به طور کامل در [۱۰] آمده است.

#### ۳- مساله معکوس

در مساله معکوس هندسه و موقعیت حفره مجهول بوده و در عوض سایر شرایط مرزی در مرزهای خارجی معلوم است. برای آنکه پیوستگی هندسه حفره حفظ شود، مطابق شکل (۱) حفره با یک مرکز و شعاعهایی با زوایای مساوی از مرکز تخمین زده می شوند. یافتن مختصات المان های مرزی مجهول بر مبنای دماهایی صورت می گیرد که بر اساس شرایط مساله مستقیم تعیین می شود. بنابراین در مساله معکوس مورد بحث ماتریس های زیر تعریف می شود:

$[Y_m]$ : ماتریس ستونی شامل  $M$  دمای اندازه گیری شده روی مرز خارجی

$[T_m]$ : ماتریس ستونی شامل  $M$  دما در همان نقاط مرز خارجی که به وسیله روش المان مرزی محاسبه شده اند.

نظر به صورت قاب مستطیلی با ابعاد  $a$  و  $b$  در نظر گرفته شود، بزرگی شعاع را بایستی به صورت زیر تعیین کرد:

$$\begin{cases} 0 < x_{cg} + r_g \sin \theta_i < a \\ 0 < y_{cg} + r_g \cos \theta_i < b \end{cases} \quad (8)$$

بنابراین در تعیین جمعیت اولیه اگر شعاع تخمین زده شده این شرایط را داشته باشد، به عنوان یک شعاع مناسب برگزیده می‌شود. در غیر این صورت مقدار تصادفی دیگری انتخاب شده مراحل تکرار می‌شود. بدین ترتیب کروموزومی با صلاحیت یک جواب موجه بدست می‌آید.

#### ۴-۲- عملگر تقاطع

عملگر تقاطع یکی از مهم ترین ابزارهای الگوریتم ژنتیک برای تولید جواب‌های جدید می‌باشد. این عملگر از ترکیب یا اعمال تغییراتی بر روی دو والد، دو فرزند جدید پدید می‌آورد. در این مساله اگر فرزندان تولید شده شرایط مربوط به هندسه حفره را در بازه خواسته شده نداشته باشند، به عنوان یک جواب نامربوط تلقی شده از دور محاسبات خارج می‌شوند. بنابراین برای پرهیز از این کار عملگر تقاطع بصورت زیر انتخاب شده است:

$$\text{Child} = \text{parent1} + \mathbf{R} \times (\text{parent2} - \text{parent1})$$

$$\text{for } numGen = 3 \Rightarrow \begin{cases} 0 < x_{cg} + r_g \sin \theta_i < a \\ 0 < y_{cg} + r_g \cos \theta_i < b \end{cases} \quad (9)$$

مقصود از این عملگر این است که برای تولید فرزند، از دو کروموزوم والد با حدس یک بردار تصادفی ( $R$ ) ژن‌ها به طور تک تک تولید می‌شوند. برای تولید دو ژن اول محدودیتی در ایجاد این اعداد تصادفی در بازه  $[0, 1]$  وجود ندارد. اما برای ژن سوم یعنی تخمین شعاع، این عدد تصادفی به گونه‌ای انتخاب می‌شود که شرایط را ارضاء کند، یعنی شعاع مورد نظر در گستره خواسته شده باشد، در غیر این صورت عدد تصادفی دیگری انتخاب و مراحل تکرار می‌شود. نرخ تقاطعی ( $p_c$ ) مقدار ثابت  $0.8$  را بر می‌گزیند.

#### ۴-۳- عملگر جهش

عملگر جهش یک فرآیند تصادفی برای تولید ساختار جدید ژنتیک است. این عملگر به عنوان یکی از موثرترین عملگرها در پیدا کردن نقطه بهینه مطلق و فرار از نقاط بهینه محلی بایستی درست سازماندهی شود. با انتخاب یک عملگر جهش خوب می‌توان روند محاسبات را بهبود بخشید. با توجه به شرایط مساله عملگر جهش به صورت عملگر جهش یکنواخت در نظر گرفته شده است. با این تفاوت که برای ژن سوم بایستی شرایط زیر ارضا شود:

آنست [۱۲]. اما این روش می‌تواند به عنوان تعیین بهترین موقعیت حضور جواب مناسب بکار رود.

در این تحقیق با توجه به بد وضع بودن مساله معکوس روشی فراابتکاری بر پایه الگوریتم ژنتیک در تعیین حدس اولیه ارائه می‌شود. روش کار بدین صورت است که با توجه به تابع هدف و دماهای اندازه گیری شده، حفره به شکل دایره در نظر گرفته می‌شود. چون می‌توان دایره را حداقل با سه پارامتر به صورت مختصات مرکز و شعاع تعریف کرد بطوریکه تمام المان‌های داخلی را در بر بگیرد. بنابراین کار الگوریتم ژنتیک پیدا کردن حفره دایره‌ای شکلی است که بتواند تابع هدف (۶) را حداقل کند. اما نکته جالب اینکه نتایج تجربی نشان داد که با اضافه کردن  $50\%$  به شعاع دایره تخمین زده شده با ژنتیک، این حفره دایره‌ای شکل جدید، می‌تواند به عنوان بهترین حدس اولیه در شروع روش گزاردیان مزدوج بکار می‌رود. بنابراین ماتریس  $[xG]$  تخمین زده شده توسط الگوریتم ژنتیک به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$[xG] = [x_{cg}, y_{cg}, r_g]^T \quad (7)$$

مطابق شکل (۱) مختصه اول مختصات  $x$  مرکز هندسه حفره دایره‌ای شکل، مختصه دوم مختصات  $y$  مرکز هندسه حفره دایره‌ای شکل و  $r_g$  شعاع حفره دایره‌ای شکل می‌باشد. گره‌های داخلی بر روی مرز دایره تحت زوایای مساوی  $\theta$  از مرکز تخمین زده می‌شوند. در این تحقیق بنا به ماهیت مساله تعیین شکل جواب‌ها (کروموزوم‌ها) برای الگوریتم ژنتیک به صورت بردار (۷) اما نرمال شده در نظر گرفته می‌شود. با توجه به نحوه انتخاب هندسه حفره نمی‌توان کروموزوم‌های مربوطه و فرزندان حاصل از آنها را بطور کاملاً تصادفی تولید کرد. چرا که در این صورت هیچ تضمینی وجود ندارد که جواب‌ها موجه باشند. منظور از جواب موجه این است که هندسه مربوطه شرایط یک حفره داخلی را داشته باشد و مرزهای جسم را قطع نکند. این کار علاوه بر زمان زیاد، همگرایی نتایج را نیز مختل می‌کند. بنابراین عملگرهایی که نقش تولید را به عهده دارند، متناسب با شرایط مساله شبیه سازی می‌شوند.

#### ۴-۱- جمعیت اولیه

در تعیین جمعیت اولیه با استفاده از رابطه (۷) کروموزوم‌هایی شامل مختصات  $x$  و  $y$  مرکز حفره به همراه شعاع مورد نیاز جهت تخمین شکل حفره در نظر گرفته می‌شود. دو ژن اول محدودیتی در انتخاب ندارند و با نرمال سازی به طور تصادفی عددی بین صفر و یک اختیار می‌کنند. اما شعاع تخمینی بنا به موقعیت مرکز، بزرگی‌های متفاوتی را شامل می‌شود. این بزرگی در امتداد شعاع مربوطه از مرکز تا مرز جسم است. مانند شکل (۱) هرگاه جسم مورد

با بسط دادن جابه جایی  $T_m(\hat{x}^n + \beta^n p^n)$  با استفاده از چند جمله ای درجه اول تیلور:

$$f(\hat{x}^{n+1}) = \sum_{m=1}^2 \left[ T_m(\hat{x}^n) - \beta^n \Delta T_m(p^n) - Y_m \right] \quad (15)$$

که  $T_m(\hat{x}^n)$ ها از حل مساله مستقیم براساس متغیرهای تخمینی بدست می آیند. براساس این رابطه می توان  $f(\hat{x}^{n+1})$  را بر حسب  $\beta^n$  مینیمم کرد. با این کار مقدار زیر برای گام بهینه بدست می آید.

$$\beta^n = \frac{\sum_{m=1}^M (T_m - Y_m) \Delta T_m}{\sum_{m=1}^M (\Delta T_m)^2} \quad (16)$$

$\Delta T_m$ های مورد نیاز برای محاسبه طول گام را می توان به ازای  $\Delta \hat{x}^n = p^n$  از حل مستقیم برنامه بدست آورد.

#### ۵-۲- شرط توقف

در این مساله با دانایی نسبت به مشخصات حفره شرط توقف برای هر مرحله به صورت زیر تعریف می شود. با اجراهای مختلف از الگوریتم ژنتیک، به علت تعداد کم پارامترها، جمعیت اولیه نسبتاً زیاد و هندسه دایره ای شکل، شرط توقف تعداد نسل ۱۰۰ انتخاب شده است. یعنی اینکه برنامه برای داده های بی خطا و خطا دار بعد از ۱۰۰ نسل تقریباً به کمترین مقدار خود دست می یابد و متوقف می شود. اما در روش گرادیان مزدوج با توجه به بزرگی دماهای اندازه گیری شده، می توان معیار همگرایی را یکی از شروط زیر قرار داد:

$$\left| f(\hat{x}^{n+1}) \right| \leq \varepsilon_1 \quad (17)$$

$$1 \quad \left| f(\hat{x}^{n+1}) \right| \leq \varepsilon_1$$

$$2 \quad \left| g(\hat{x}^{n+1}) \right| \leq \varepsilon_2$$

$\varepsilon_1$  و  $\varepsilon_2$  به ترتیب  $10^{-10}$  و  $10^{-7}$  هستند. در صورت برقراری شرط اول تابع به مقدار حقیقی خود همگرا شده است و در صورت برقراری شرط دوم نشانه گیر افتادن تابع در بهینه محلی و صفر شدن تقریبی گرادیان تابع می باشد، که در هر دو صورت با تکرار الگوریتم امید بهبود چشمگیری در محاسبات نیست. جزئیات کامل در مورد نحوه انتخاب، مراحل عملکرد و چگونگی تطبیق عملگرهای ژنتیکی و گرادیان مزدوج با معادلات المان مرزی به تفصیل در [۱۳] آمده است.

if rand < p<sub>m</sub> P mutationChildren = rand

$$\text{for } numGen = 3 \Rightarrow \begin{cases} 0 < x_{cg} + r_g \sin \theta_i < a \\ 0 < y_{cg} + r_g \cos \theta_i < b \end{cases} \quad (10)$$

شرایط مطرح شده در معادله (۱۰) به این منظور است که هرگاه احتمال انتخاب ژن والدی از نرخ جهش کمتر شد، آن ژن به عنوان یک ژن جهش یافته پذیرفته می شود و عددی تصادفی به آن تعلق می گیرد. حال اگر این ژن انتخابی جزو شعاع تخمینی باشد، این عدد تصادفی بایستی شرایط شعاع مناسب را دارا باشد. نرخ جهش ( $p_m$ ) مقدار ثابت ۰/۰۱ را دارد.

#### ۵- روش گرادیان مزدوج

اساس کار در روش معکوس حرارتی مینیمم کردن تابع هدف تعریف شده (۶) می باشد. حدس اولیه به صورت حفره ای دایره ای شکل توسط الگوریتم ژنتیک بدست می آید. در این مرحله هر شعاع به عنوان پارامتری مستقل عمل می کند. برای مینیمم کردن تابع هدف به محاسبه مسیر جستجوی  $p^n(\hat{x})$  و طول گام  $\beta^n$  نیاز است تا با استفاده از رابطه تکرار پذیر زیر بتوان مقادیر مینیمم کننده تابع هدف را یافت:

$$\hat{x}^{n+1} = \hat{x}^n + \beta^n p^n(\hat{x}) \quad (11)$$

که در آن:

$$p^n(\hat{x}) = -g^n(\hat{x}) + \gamma^n p^{n-1}(\hat{x}) \quad (12)$$

بر طبق نسخه پولاک-ریبیر ضریب مزدوج  $\gamma^n$ ، از رابطه زیر بدست می آید:

$$\gamma^n = \frac{(g^{n+1} - g^n)g^{n+1}}{(g^n)^T g^n} \quad (13)$$

که  $\gamma^0 = 0$  و همچنین در شروع مجدد، یعنی در مواردی که الگوریتم در N مرحله پایان نمی پذیرد، مقدار صفر را به خود می گیرد. برای محاسبه گرادیان تابع از روش تفاضلات متناهی<sup>۴</sup> استفاده شده است.

#### ۵-۱- طول گام بهینه

در محاسبه طول گام بهینه با استفاده از (۱۱) می توان تابع هدف را در تکرار  $m+1$  بصورت زیر نوشت:

$$f(\hat{x}^{n+1}) = \sum_{m=1}^2 \left[ T_m(\hat{x}^n + \beta^n p^n) - Y_m \right] \quad (14)$$

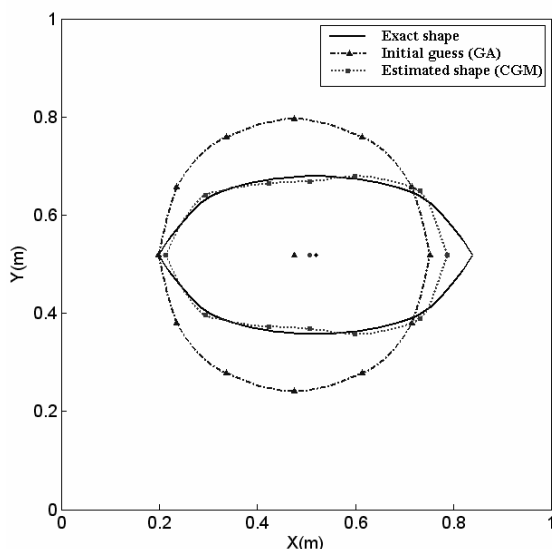
همراه عملگرهای ژنتیکی شبیه سازی شده با عملگر انتخاب چرخ گردان و تابع مقیاس رتبه استفاده می شود. این شرایط در کل بررسی های انجام شده ثابت است. در بررسی روند همگرایی با مشخصات واقعی ضریب خطایی به صورت زیر تعریف می شود:

$$err = \frac{\sum_{n=1}^N \left| \frac{x_{act}^n - x_{est}^n}{x_{act}^n} \right|}{N} \times 100 \quad (18)$$

در این ضریب خطا،  $x_{act}$  نمایانگر مقدار واقعی پارامترهای مجهول و  $x_{est}$  مشخصه مقدار تخمین زده شده نهایی در الگوریتم معکوس است. N تعداد پارامترهای مجهول در مساله معکوس است.

#### ۶-۲- شناسایی حفره بیضی شکل

در اولین مرحله تخمین موقعیت و هندسه حفره بیضی شکل مورد بررسی قرار می گیرد. حفره بیضی شکل به معادله  $9x^2 + 36y^2 = 1$  و موقعیتی به مرکز  $(0/5, 0/5)$  در نظر گرفته شده است. در این مساله ۱۴ پارامتر تخمین زده می شود. با استفاده از رابطه (۱۸) و ۱۰ اجرای مختلف، میانگین درستی محاسبات تا ۹۴٪ قابل قبول است. نمونه ای از روند همگرایی در شکل (۳) مشاهده می شود.



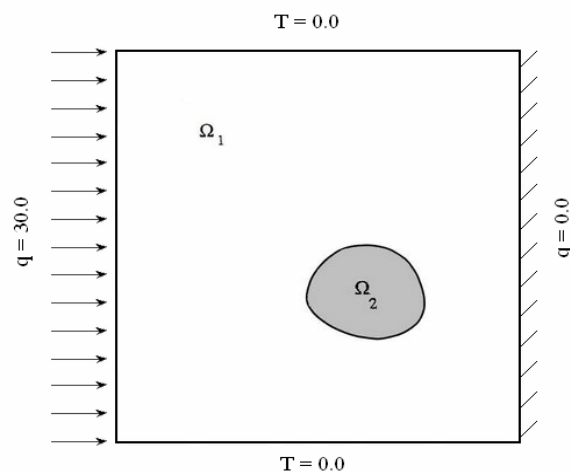
شکل (۳): تخمین هندسه و موقعیت حفره بیضی شکل در مرکز

#### ۶-۳- تاثیر اندازه حفره در روند همگرایی

در بررسی این موضوع مساله معکوس به ازای ابعاد مختلف حفره بیضی شکل و شرایط اعمالی مورد تحلیل قرار گرفته است. معادله بیضی های مربوطه به صورت  $Ax^2 + By^2 = 1$  و مرکز  $(0/5, 0/5)$

#### ۶- بررسی نتایج

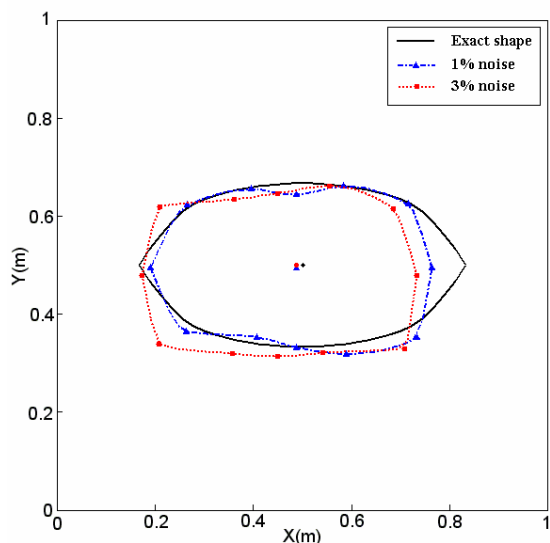
برنامه رایانه ای به منظور شبیه سازی عددی تخمین مشخصات حفره درون جسم بر اساس دماهای اندازه گیری شده بر روی مرز خارجی جسم، بدون داشتن هیچ گونه اطلاعاتی از مشخصات حفره درون آن تهیه شده است. اساس این برنامه مینیمم کردن تابع هدف تعریف شده با الگوریتم معکوس است. نتایج در دو قسمت ارائه می گردد. در قسمت اول بهترین حدس اولیه متناسب با دماهای اطراف به صورت دایره توسط الگوریتم ژنتیک بدست می آید. در قسمت دوم، روش گرادیان مزدوج با شروع از حدس اولیه مناسب به تخمین موقعیت و هندسه حفره می پردازد.



شکل (۲): مشخصات و شرایط مرزی

#### ۶-۱- تحلیل مدل

بررسی اعتبار برنامه عددی به این ترتیب انجام می گیرد که در ابتدا با استفاده از مقادیر دقیق هندسه، موقعیت حفره و شرایط مرزی، مساله مستقیم حل شده و مقادیر دماها در نقاط اطراف مرز خارجی محاسبه می شود. این مقادیر به عنوان دماهای مطلوب همراه با شرایط مرزی اعمالی ورودی های برنامه معکوس خواهند بود. دماهای مطلوب تنها از روی وجوه کناری برداشته می شود. بررسی های انجام شده بر روی جسم دوبعدی مربع شکل فولادی  $(K_s = 73W/m \cdot ^\circ C)$  به ابعاد  $1 \times 1 m^2$  و شرایط مرزی مطابق شکل (۲) صورت می گیرد، یعنی شار حرارتی بر وجهین کناری به مقدار ۰ و ۳۰ و بر وجوه بالا و پایین دمای ثابت  $0^\circ C$  اعمال می شود. حفره به شکل یک منحنی هموار در نظر گرفته می شود. مطابق شکل (۱) جسم به ۱۶ و حفره به ۱۲ المان خطی تقسیم می شود. در الگوریتم ژنتیک از تعداد جمعیت اولیه ۵۰، تعداد نسل ۱۰۰ به



شکل (۴): روند همگرایی حفرة بیضی شکل با داده های خطادار

#### ۷- نتیجه گیری

حل مساله معکوس حرارتی با استفاده از روش المان‌های مرزی خطی بر پایه روش الگوریتم ژنتیک ابتکاری ارائه شده با روش گرادیان مزدوج به خوبی می تواند برای شناسایی حفرة درون جسم الاستیک دو بعدی مورد استفاده قرار گیرد. از مجموع بحث های بیان شده می توان به مزایای زیر اشاره کرد:

- ۱- تعیین حدس اولیه دقیق برای مقادیر مجهول
- ۲- تخمین دقیق موقعیت و هندسه حفرة با سرعت همگرایی بالا و زمان کم محاسبات
- ۳- تاثیر ناپذیری و واگرایی الگوریتم در خطاهای غیر قابل اجتناب
- ۴- عدم نیاز به محاسبات پیچیده و توابع تنظیم

#### ۸- مراجع

- [1] C. H. Huang, S. P. Wang, , "A Three-dimensional inverse heat conduction problem in estimating surface heat flux by conjugate gradient method", International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 42, pp. 3387-3403, 1999.
- [2] A. Ellabib, A. Nachaoui, "On the numerical solution of a free boundary identification problem", Inverse Problems, Vol. 9(3), pp. 235-260, 2001.
- [3] D. Lesnic, L. Elliott, and B. Ingham, "Application of boundary element method to inverse heat conduction problems", International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 39, No. 7, pp. 1503-1517, 1996.
- [4] H. W. Engl, J. Zou, "A new approach to convergence rate analysis of Tikhonov regularization for parameter

است. ملاحظه می شود که با استفاده از این الگوریتم همگرایی حفرة های مختلف در داخل جسم، به صورت قابل قبولی انجام می گیرد. اما نکته قابل توجه این که برای حفرة های خیلی بزرگ و خیلی کوچک همگرایی به شکل واقعی کاهش می یابد. علت این پدیده حساسیت دماهای سطحی نسبت به حفرة و جستجوی فضای غیر موثر با الگوریتم ژنتیک است که باعث همگرایی دیررس الگوریتم معکوس می شود. نتایج حاصله در جدول (۱) آمده است. مقادیر خطا، میانگین ۱۰ اجرای مختلف می باشد.

جدول (۱): تاثیر اندازه حفرة در روند همگرایی

| موارد | A  | B  | مساحت حفرة | میانگین خطا (err) |
|-------|----|----|------------|-------------------|
| ۱     | ۶  | ۲۵ | ٪ ۲۳/۴     | ٪ ۹/۰۱            |
| ۲     | ۹  | ۳۶ | ٪ ۱۷/۴۶    | ٪ ۵/۳۴            |
| ۳     | ۱۶ | ۴۹ | ٪ ۱۱/۲۲    | ٪ ۴/۳۶            |
| ۴     | ۲۵ | ۶۴ | ٪ ۷/۸۶     | ٪ ۵/۷۴            |
| ۵     | ۳۶ | ۸۱ | ٪ ۴/۸۴     | ٪ ۷/۷۶            |

#### ۶-۴- اثر خطا بر همگرایی

برای اعمال خطاهای غیر قابل اجتناب مقداری خطا به مقادیر اندازه گیری شده اضافه می شود:

$$[Y_m]_{err} = [Y_m]_{real} (1 \pm \mu) \quad (19)$$

$\mu$  درصد خطای اعمالی با توزیع نرمال را نشان می دهد. بررسی های انجام شده با خطاهای ۱٪، ۲٪ و ۳٪ صورت گرفته است. خوشبختانه چون الگوریتم ژنتیک جستجوی مستقیم است و با مقدار خود تابع رابطه دارد اعمال خطاهای ناچیز تاثیر چندانی در روند همگرایی به وجود نمی آورد و حدس های دایره ای شکل اولیه در داده های خطادار تفاوت چندانی با داده های بدون خطا ندارند. اما اعمال خطا به شدت بر روش گرادیان مزدوج تاثیر گذار است. مطابق شکل (۴) ملاحظه می شود که با افزایش خطا همگرایی پارامترها به مقادیر واقعی اشان کاهش می یابد. این پدیده امری طبیعی محسوب می شود، زیرا خطاهای غیر قابل اجتناب مدلی غیر واقعی از مساله ارائه می دهد که مسلماً موجب بروز خطا در نتایج بدست آمده خواهد شد بطوریکه با اعمال خطای ۳٪ هندسه حفرة به شکلی غیر واقعی همگرا شده است.

- [10] M. Khodadad-Saryazdi, "Characterization of the Interior of an Inhomogeneous Body Using Surface Measurements", Ph.D. Thesis, Michigan State University, East Lansing, Michigan, USA, 1990.
- [11] R. L. Haupt, S. E. Haupt, "Practical Genetic Algorithms", Second Edition, John Wiley and Sons, Inc, 2004.
- [12] G. Rudolph, "Convergence Analysis of Canonical Genetic Algorithms", IEEE Transaction on Neural Network Vol. 5, No. 1, pp. 96-101, 1994.
- [13] م. دشتی اردکانی، "حل مساله معکوس در شناسایی ناهمگنی درون مواد با استفاده از تلفیق روش المان مرزی با الگوریتم ژنتیک"، پایان نامه کارشناسی ارشد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه یزد، ۱۳۸۵.
- identification in heat conduction", Inverse Problems, Vol. 16(6), pp. 1907-1923, 2000.
- [5] W. Ring, "A First-order sequential predictor-corrector regularization method for ill-posed Volterra equations", SIAM J. Number. Anal, Vol. 38(6), pp.2079-2102, 2001.
- [6] D. G. Luenberger, "Linear and Nonlinear Programming", Second Edition, Addison Wesley, 1989.
- [7] G. S. Dulikravich, T. J. Martin, "Inverse design of super elliptic cooling passages in coated turbine blade airfoil", Journal of Thermophysics and Heat Transfer, Vol. 8, pp. 288-294, 1992.
- [8] C. H. Huang, T. Y. Suing, "An inverse design problem of estimating optimal shape of cooling passages in turbine blades", International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 42, pp. 4307-4319, 1999.
- [9] M. Dashti-Ardakani, "Nondestructive test for cavity identification inside materials", 2nd Tehran International Congress on Manufacturing Engineering, TICME2007, Iran University of Science and Technology, Tehran, Iran, December 10-13, 2007.

Archive of SID