

## بررسی ارتعاشات آزاد سه بعدی ورق دایروی FGM به روش نیمه تحلیلی

محمد مهدی نجفی زاده<sup>۱</sup>، پیمان شوقی<sup>۲</sup>  
Payman.shoughi@gmail.com

### چکیده

در این مقاله به بررسی ارتعاشات آزاد سه بعدی صفحات دایروی توپر FGM با شرایط مرزی مختلف در لبه ها پرداخته می شود. با استفاده از روش نیمه تحلیلی که ترکیبی از روش فضای حالت (SSM) و مربعات دیفرانسیلی (DQM) می باشد، مسئله حل شده و فرکانس های طبیعی و مدهای ارتعاشی در حالت ارتعاشات آزاد به دست می آیند و در ادامه با نوشتن برنامه کامپیوتری به کمک نرم افزار MATLAB، جواب نهایی که همان فرکانس طبیعی ورق می باشد بدست می آید و تاثیر پارامترهای مختلف بر مقدار فرکانس طبیعی در شرایط مرزی مختلف بررسی می شود. در انتها با حل مسئله نمونه عددی و در نظر گرفتن شرایط مرزی، حالات مختلف را مورد بررسی قرار داده و نتایج بدست آمده در جداولی با نتایج مشابه در مرجع [۱۸] و ANSYS مقایسه می شود.

### کلیدواژه:

ارتعاشات آزاد- ورق دایره ای-FGM- روش نیمه تحلیلی- روش فضای حالت- روش مربعات دیفرانسیلی

۱- دانشیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد اراک، m-najafizadeh@iau-arak.ac.ir

۲- کارشناس ارشد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد اراک

## ۱- مقدمه

مواد FGM<sup>۱</sup> و کاربرد آنها در صنعت در سال های اخیر مورد توجه زیادی قرار گرفته اند. تعداد زیادی از کاربردهای این مواد در مراجع [۱ و ۲] آورده شده است. تحلیل دینامیکی اجزای سازنده ی مواد FGM در طراحی آنها اهمیت دارد. در مرجع [۳] یانگ شن<sup>۲</sup> به بررسی واکنش های دینامیکی ورق های نازک چهارگوش FGM با در نظر گرفتن بارگذاری جانبی ضربه ای توزیع شده در سطح ورق پرداخته اند. باترا و ول<sup>۳</sup> در مرجع [۴] یک حل دقیق از ارتعاشات آزاد و اجباری صفحات چهارگوش FGM بیان کردند. کیتی پرنجای<sup>۴</sup> در مرجع [۵] به مطالعه ارتعاشات غیر خطی صفحات چهارگوش چند لایه با یک لایه همگن و دو لایه از مواد FGM پرداخته است. چن<sup>۵</sup> در مرجع [۶] به بررسی ارتعاشات غیر خطی صفحات FGM با تنش های دلخواه و تاثیر آن بر روی دامنه ارتعاش پرداخته است. راکی<sup>۶</sup> در مرجع [۷] تحلیل ارتعاش آزاد صفحات دایروی FGM با شعاع های مختلف را با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه بالا مورد بررسی قرار می دهد. سرجه<sup>۷</sup> در مرجع [۸] مسائل ارتعاش آزاد و کمانش و خیز صفحات FGM با خصوصیات مختلف در مواد تشکیل دهنده و ضخامت های مختلف مورد بررسی قرار داده است. فریرا<sup>۸</sup> در مرجع [۹] از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سوم در مواد همگن استفاده کرده است. وو<sup>۹</sup> در مرجع [۱۰] یک روش تحلیلی را برای بررسی رفتار ارتعاش آزاد غیر خطی صفحات FGM ارائه داده است. پارک و کیم<sup>۱۰</sup> در مرجع [۱۱] تحقیقی در زمینه ی کمانش حرارتی و ارتعاشات صفحات FGM با خصوصیات گوناگون و در دماهای مختلف انجام داده اند.

بررسی ارتعاشات سه بعدی صفحات دایروی از جنس FGM بسیار کم مورد بررسی قرار گرفته است. پراکاش و گاناپاتی<sup>۱۱</sup> در مرجع [۱۲] ارتعاشات متقارن و ترموالاستیک ورق های دایروی FGM را به کمک روش FEM<sup>۱۲</sup> بررسی کرده اند. افرایم و ایزنبرگر<sup>۱۲</sup> در مرجع [۱۳] تحلیل ارتعاشات ورق های حلقوی ضخیم با ضخامت غیر یکنواخت ساخته شده از مواد ایزوتروپ FGM را به کمک روش المان دقیق مورد بررسی قرار داده اند.

در این مقاله ابتدا مقادیر به دست آمده ی جابجایی و مشتقات آنها در n نقطه مشخص در مسئله، با استفاده از روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم یافته بدست می آید. سپس با بی بعد کردن معادلات و جایگذاری آنها در فرم ماتریسی فضای حالت و تبدیل فرم کلی آن به یک معادله جبری با استفاده از روابط مربوطه در تئوری ماتریس ها، به حل مسئله منجر می گردد که همان رسیدن به فرکانس های طبیعی سیستم در حالت ارتعاش آزاد ورق می باشد. در پایان با مقایسه نتایج بدست آمده از روش فوق به کمک نرم افزار MATLAB و نتایج مشابه در مرجع [۱۸] و ANSYS صحت و دقت آن، مورد بررسی قرار می گیرد.

## ۲- معادلات حاکم

یک ورق دایره ای ایزوتروپیک عرضی از جنس مواد FGM با شعاع a و ضخامت h در نظر گرفته شده است. سیستم مختصات استوانه ای (r, θ, z) با مرکز مختصات 0 می باشد. معادلات تعادل الاستیک در مختصات استوانه ای بدون در نظر گرفتن نیروهای جسمی به صورت زیر می باشد: [۲۱]، [۲۶]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} &= \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} \\ \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} &= \rho \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2} \\ \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} &= \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (1)$$

روابط کرنش در مختصات استوانه ای به صورت زیر می باشد: [۲۱]

$$\begin{aligned} \epsilon_r &= \frac{\partial u_r}{\partial r} & \gamma_{\theta z} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \\ \epsilon_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} & \gamma_{rz} &= \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \\ \epsilon_z &= \frac{\partial u_z}{\partial z} & \gamma_{r\theta} &= \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} \end{aligned} \quad (2)$$

که در روابط فوق  $u_r, u_\theta, u_z$  جابجایی ها در جهات r, θ, z می باشند. معادلات تنش-کرنش برای مواد ایزوتروپ عرضی از جنس FGM به شکل زیر می باشند: [۲۶]

$$\begin{aligned} \sigma_r &= c_{11}\epsilon_r + c_{12}\epsilon_\theta + c_{13}\epsilon_z, & \tau_{\theta z} &= c_{44}\gamma_{\theta z} \\ \sigma_\theta &= c_{12}\epsilon_r + c_{11}\epsilon_\theta + c_{13}\epsilon_z, & \tau_{rz} &= c_{44}\gamma_{rz} \\ \sigma_z &= c_{13}\epsilon_r + c_{13}\epsilon_\theta + c_{33}\epsilon_z, & \tau_{r\theta} &= \frac{c_{11} - c_{12}}{2} \gamma_{r\theta} \end{aligned} \quad (3)$$

- 1- Functionally Graded Material
- 2- Yang, Shen
- 3- Batra, Vel
- 4- Kitipornchai
- 5- Chen
- 6- Roque
- 7- Serge
- 8- Ferreira
- 9- Woo
- 10- Park, Kim
- 11- Prakash, Ganapathi
- 12- Finite Element Method
- 13- Eftaim, Eisenberger

$$u_{\theta}(r, \theta, z, t) = \bar{u}_{\theta}(r, z) \cdot \sin(m\theta) \cdot e^{i\omega t} \quad (6)$$

$u_z(r, \theta, z, t) = \bar{u}_z(r, z) \cdot \cos(m\theta) \cdot e^{i\omega t}$   
 حالت  $m = 0, \dots, \infty$  تعداد موج محیطی است. حالت  $m = 0$  ارتعاش متقارن محوری است. حال مقادیر  $u$  جدید را از معادلات بالا در معادلات تعادل جدید (برحسب  $u$ ) قرار داده و معادلات در حالت بی بعد بدست می آیند که برای رسیدن به این منظور پارامترهای بدون بعد زیر تعریف شده است:

$$z = \frac{z}{h}, \quad R = \frac{r}{a}, \quad \Omega = \omega h \sqrt{\frac{\rho}{c_{11}}} \quad (7)$$

$$U_R = \frac{\bar{u}_r}{h}, \quad U_{\theta} = \frac{\bar{u}_{\theta}}{h}, \quad U_z = \frac{\bar{u}_z}{h}, \quad \bar{c}_{ij} = \frac{c_{ij}}{c_{11}}$$

حال با جایگذاری معادلات (۶) در (۵) و استفاده از پارامترهای فوق و رسیدن به روابط بی بعد شده در معادله کلی، به رابطه زیر می توان رسید:

$$\frac{\partial}{\partial z} \begin{bmatrix} \pi \\ \Gamma \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & D_1 \\ D_2 & D_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi \\ \Gamma \end{pmatrix} \quad (8)$$

که در آن:

$$\pi = [u_r \quad u_{\theta} \quad u_z]^T$$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_r}{\partial z} & \frac{\partial u_{\theta}}{\partial z} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix}^T$$

#### ۴-روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم یافته (GDQ)

روش مربعات دیفرانسیلی به صورت یک روش عددی موثر و ساده برای حل معادلات دیفرانسیل جزئی خطی و غیر خطی از مقدار مرزی مسائل چند بعدی نیز قابل تعمیم می باشد. این روش مبتنی بر تقریب و تخمین مشتقات جزئی از یک تابع نسبت به یک متغیر در هر نقطه مجزا است. به طوری که جمع خطی وزن تابع مقادیر در تمام نقاط مجزا در میدان وسیعی از متغیرها انتخاب می شود. بر طبق این روش کلی می توان یک مساله دو بعدی با متغیرهای اصلی را در یک میدان حل کرد. براساس این روش مشتق مرتبه اول تابع  $f$  در نقطه  $X_i$  به شکل زیر تعریف می گردد: [۲۲]

$$f_x(X_{i,t}) = \sum_{j=1}^n c_{ij}^{(1)} \cdot f(X_{j,t}) \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (9)$$

به طور آشکار راهنمای روند در این تکنیک تعیین ضرایب وزنی  $c_{ij}^{(1)}$  است. در رابطه (۹)  $f_x(X_{i,t})$  مشتق مرتبه اول  $f(x,t)$  نسبت به  $X$  در

در جایی که  $c_{11}$  و  $c_{12}$  و  $c_{13}$  و  $c_{33}$  و  $c_{44}$  ثابت های الاستیک در مواد FGM می باشند. این پارامترها تابعی از مختصات  $r, \theta, z$  می باشند و در اغلب حالت ها به طور پیوسته فقط در یک جهت تغییر می کنند. خصوصیات مختلف ماده FGM در مقاله، با ضخامت ورق رابطه ای نمایی دارند و به شکل معادله زیر تغییر می کنند. که در آن  $k^0$  خصوصیات ماده در صفحه پایینی ورق ( $z=0$ ) می باشد.

$$k = k^0 \cdot e^{\lambda(z/h)} \quad (4)$$

در واقع ضریب  $k$  در روابط کرنش  $r, \theta$  را به  $Z$  مربوط می سازد.  $\lambda$  مربوط به خاصیت مواد FGM می باشد و  $\frac{z}{h}$  لایه های مختلف از ورق را در ضخامت های مختلف نشان می دهد.

#### ۳-روش نیمه تحلیلی

روش نیمه تحلیلی ترکیبی از دو روش فضای حالت و مربعات دیفرانسیلی یک بعدی برای بدست آوردن فرکانس های ارتعاش و واکنش های دینامیکی صفحات دایره ای می باشد. روش فضای حالت در جهت  $Z$  (ضخامت) صفحات و روش دوم در جهت شعاعی ورق اعمال می شوند [۵]. با در نظر گرفتن معادلات (۱) تا (۴) و داشتن مقادیر جابجایی ها و مشتقات مرتبه اولشان معادله کلی روش فضای حالت به شکل زیر می باشد:

$$\frac{\partial}{\partial z} \begin{bmatrix} u_r \\ u_{\theta} \\ u_z \\ \frac{\partial u_r}{\partial z} \\ \frac{\partial u_{\theta}}{\partial z} \\ \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} & d_{15} & d_{16} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{24} & d_{25} & d_{26} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & d_{34} & d_{35} & d_{36} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_r \\ u_{\theta} \\ u_z \\ \frac{\partial u_r}{\partial z} \\ \frac{\partial u_{\theta}}{\partial z} \\ \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (5)$$

که مقادیر مربوط به درایه های  $d$  به شکل ماتریسی در قسمت ضمیمه موجود می باشند.

در حالتی که ارتعاش صفحه دایره ای با فرکانس  $\omega$  مد نظر باشد تفکیک معادلات وابسته به زمان و مختصات جنبی  $\theta$  برای انواع معینی از ارتعاش در غالب جابه جایی ها به صورت زیر بدست می آیند:

$$u_r(r, \theta, z, t) = \bar{u}_r(r, z) \cdot \cos(m\theta) \cdot e^{i\omega t}$$

که در آن مقادیر  $F_i(0)$  و  $F_i(Z)$  به ترتیب مقادیر متغیرهای حالت در صفحه دلخواه  $Z$  و صفحه پایینی  $Z=0$  می باشند:

$$F_i(Z) = \left[ U_k^i(Z) U_\theta^i(Z) U_z^i(Z) \frac{\partial \bar{U}_k^i(Z)}{\partial z} \frac{\partial \bar{U}_\theta^i(Z)}{\partial z} \frac{\partial \bar{U}_z^i(Z)}{\partial z} \right]^T \quad (15)$$

$$F_i(0) = \left[ U_k^i(0) U_\theta^i(0) U_z^i(0) \frac{\partial \bar{U}_k^i(0)}{\partial z} \frac{\partial \bar{U}_\theta^i(0)}{\partial z} \frac{\partial \bar{U}_z^i(0)}{\partial z} \right]^T$$

حال می توان از معادله (۱۴) به معادله زیر رسید که در آن مقادیر  $F_i(0)$  و  $F_i(Z)$  به ترتیب در بالا و پائین صفحه در نظر گرفته شده اند: [۲۱] و [۲۷]

$$F_i(1) = e^{A_i} \cdot F_i(0) \quad (16)$$

### ۵- شرایط مرزی

برای یک صفحه دایره ای توپر (Solid) شرایط مرزی به صورت زیر در نظر گرفته می شود:

Clamped :

$$r = a, \quad u_r = 0, \quad u_\theta = 0, \quad u_z = 0 \quad \text{در}$$

Simply supported :

$$r = a, \quad \sigma_r = 0, \quad u_\theta = 0, \quad u_z = 0 \quad \text{در}$$

در مرکز صفحه دایره ای نیز داریم :

$$r = 0, \quad u_r = 0, \quad u_\theta = 0, \quad \frac{\partial u_z}{\partial r} = 0 \quad \text{در}$$

حال اگر شرایط مرزی فوق به صورت بی بعد بدست آید: صفحه دایره ای توپر (solid):

Clamped :

$$R = 1, \quad U_{RN} = 0, \quad U_{\theta N} = 0, \quad U_{ZN} = 0 \quad \text{در}$$

Simply supported :

$$R = 1, \quad \sigma_{RN} = 0, \quad U_{\theta N} = 0, \quad U_{ZN} = 0 \quad \text{در}$$

در مرکز صفحه دایره ای :

$$R = 0, \quad U_{R1} = 0, \quad U_{\theta 1} = 0, \quad U_{Z1} = - \sum_{j=2}^N \frac{A_{1j}^{(1)}}{A_{11}^{(1)}} \cdot U_{zj}$$

$$R = \frac{b}{a}, \quad \sigma_{R1} = 0, \quad Z_{\theta 1} = 0, \quad \tau_{RZ1} = 0 \quad \text{در}$$

### ۶- ارتعاش آزاد

حال به مسایل مربوط به ارتعاش آزاد ورق می پردازیم و شرایط مرزی در صفحات بالایی و پایینی ورق در این حالت بیان می شود. در  $(z=0)$ ,  $(z=h)$

$X_i$  است و  $N$  نیز نقاط مجزای شبکه می باشد. به منظور پیدا کردن رابطه جبری ساده در تعیین ضرایب وزنی به نحوی که هیچ محدودیتی نسبت به انتخاب نقاط شبکه وجود نداشته باشد چند جمله ای درون یابی لاگرانژ به عنوان مجموعه  $g(x)$  به جای چند جمله ایهای توانی و یا چندجمله ایهای لژاندر انتخاب می شود:

$$r_k(x) = \frac{M(x_k)}{(x-x_k) \cdot M^{(1)}(x_k)}$$

$$M(x) = (x-x_1)(x-x_2) \dots (x-x_n) \quad (10)$$

$$M^{(1)}(x_k) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n (x_k - x_j)$$

$x_1, \dots, x_n$  مختصات نقاط شبکه هستند و ممکن است به طور دلخواه انتخاب شوند. می توان ضرایب وزنی مرتبه اول را با جایگذاری معادله (۱۰) در (۹) بدین شکل به دست آورد [۲۲].

$$c_{ij}^{(1)} = \frac{M^{(1)}(x_j)}{(x_i - x_j) \cdot M^{(1)}(x_j)}, \quad i \neq j \quad (11)$$

$$c_{ii}^{(1)} = - \sum_{j=1, j \neq i}^n c_{ij}^{(1)}$$

معادلات فوق روابط ساده برای محاسبه (1)  $c_{ij}$  بدون هیچ محدودیتی نسبت به انتخاب نقاط شبکه ای  $X_i$  می باشد. ضرایب وزنی برای مشتقات مرتبه دوم و بالاتر به طور مشابه بدست می آید. با به کارگیری چندجمله ای درون یابی لاگرانژ یک رابطه باز گشتی برای ضرایب وزنی مرتبه  $m$  و  $c_{ij}(m)$  بدست می آید [۱۴].

$$c_{ij}^{(m)} = m \cdot \left[ c_{ij}^{(1)} \cdot c_{ii}^{(m-1)} - \frac{c_{ij}^{(m-1)}}{x_i - x_j} \right] \quad (i \neq j) \quad (12)$$

$$c_{ii}^{(m)} = - \sum_{j=1, j \neq i}^n c_{ij}^{(m)} \quad (i = j) \quad m = 2, \dots, n-1$$

حال با توجه به معادلات بالا و جایگذاری در معادله کلی فضای حالت نشان داده شده در معادله (۸) فرم جدید معادلات به فرم کلی زیر که در نقاط مجزای  $i$  می باشد بدست می آید:

$$\frac{\partial}{\partial z} \begin{bmatrix} \pi \\ \Gamma \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & D_1 \\ D_2 & D_3 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \pi \\ \Gamma \end{bmatrix} \quad (13)$$

که در آن مقادیر ماتریس هرکدام شامل  $N$  مقدار در نقاط مجزای  $i$  می باشند. حال برای حل معادله (۱۳) به شکل معادله زیر تبدیل می شود: [۱۷] و [۲۱] و [۲۷]

$$F_i(Z) = e^{A_i Z} \cdot F_i(0) \quad (14)$$

$$E = 380 \text{ Gpa}$$

$$\rho = 3800 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$\nu = 0.3$$

$$\frac{h}{a} = 0.2$$

همان گونه که قبلاً نیز گفته شد خصوصیات مواد برای ماده ی FG بر اساس تئوری  $k = k^0 \cdot e^{\lambda(z/h)}$  با ضخامت ورق رابطه دارند. تعداد نقاط مجزا در جهت شعاعی ورق ۹ نقطه در نظر گرفته شده است. با حل ماتریس B و رسیدن به فرکانس های طبیعی، ۵ فرکانس بی بعد اول را برای ورق بدست آورده و نتایج را با روش ANSYS و نتایج بدست آمده در [۱۸] که روش FEM برای ورق دایره ای می باشد با یکدیگر مقایسه می شود که جواب ها در جدول شماره (۱) بیان شده است.

در جدول (۱) مقدار  $\lambda$  مربوط به مواد را صفر در نظر گرفته و  $\frac{h}{a} = 0.2$  می باشد. ورق را با در نظر گرفتن ۹ نقطه مجزا در جهت شعاعی به ۱۰ لایه که ضخامت هر لایه کمتر از 0.1 a می باشد تقسیم کرده است. نتایج به کمک روش ANSYS با در نظر گرفتن المان Solid5 سه بعدی که دارای ۸ گره می باشد تحلیل می شود.

جدول (۱): مقایسه ۵ فرکانس اول روش مورد بررسی با روش های ANSYS, FEM

m	Method	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$
0	FEM	0.098	0.324	0.413	0.613	0.701
	ANSYS	0.098	0.327	0.417	0.625	0.703
	Present	0.121	0.335	0.421	0.636	0.714
1	FEM	0.195	0.402	0.426	0.604	0.771
	ANSYS	0.197	0.401	0.431	0.605	0.767
	Present	0.273	0.436	0.514	0.671	0.755

جدول (۲): مقادیر فرکانس برای مقادیر  $\lambda$  مختلف در دو روش

مورد بررسی و ANSYS

$\frac{h}{a} = 0.2$		$\lambda$				
m	Method	1	2	3	4	5
0	ANSYS	0.095	0.093	0.086	0.078	0.069
	Present	0.112	0.106	0.103	0.094	0.082
1	ANSYS	0.184	0.173	0.157	0.137	0.123
	Present	0.207	0.194	0.172	0.159	0.131
2	ANSYS	0.283	0.267	0.245	0.219	0.198
	Present	0.296	0.281	0.263	0.237	0.211

$$\tau_{rz} = 0, \quad \tau_{\theta z} = 0, \quad \sigma_z = 0 \quad \text{حال} \quad (17)$$

اگر مقادیر تنش بر حسب جابجایی ها را در معادلات فوق قرار گیرد می توان به روابط زیر رسید:

$$\left( \frac{\partial U_z}{\partial z} \right)_i + \frac{h \cdot \bar{c}_{13}}{a \cdot \bar{c}_{33}} \left[ \sum_{j=2}^{N-1} A_{ij} U_{Rj} + \frac{m}{R_i} U_{\theta i} + \frac{1}{R_i} U_{Ri} \right] = 0$$

$$\left( \frac{\partial U_{\theta}}{\partial z} \right)_i - \frac{mh}{R_i a} U_{zi} = 0 \quad (18)$$

$$\left( \frac{\partial U_R}{\partial z} \right)_i + \frac{h}{a} \cdot \left( \sum_{j=2}^{N-1} A_{ij} \cdot U_{zj} - \frac{A_{i1}}{A_{11}} \cdot \sum_{j=2}^{N-1} A_{1j} \cdot U_{zj} \right) = 0$$

حال برای رسیدن به جوابهای نهایی و بدست آوردن فرکانس های طبیعی معادله کلی (۱۶) را به معادله جبری زیر تبدیل کرده که در آن ماتریس T مشخص و ماتریس ضرایب B به کمک شرایط مرزی و نوشتن ۶ معادله از معادله کلی (۱۶) بدست می آید که با مساوی صفر قراردادن دترمینان ماتریس B در حالت ارتعاش آزاد و حل معادله دیفرانسیل نهایی، فرکانس های طبیعی بدست می آیند:

$$B \cdot T = 0 \quad (19)$$

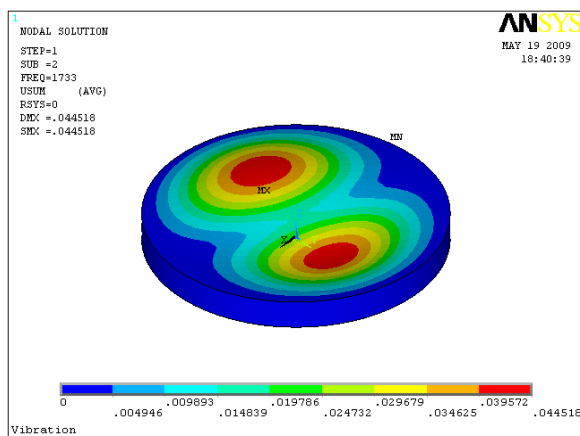
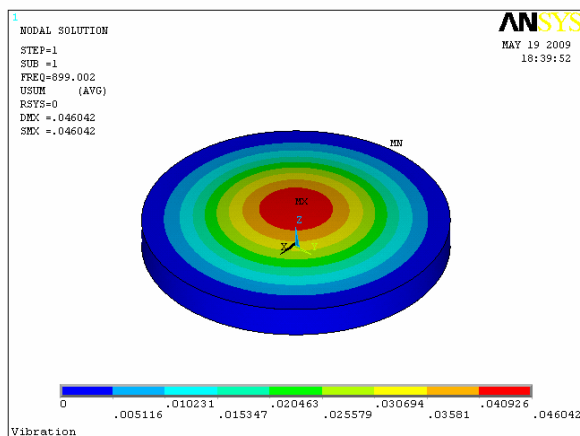
ماتریس ضرایب B یک ماتریس  $6(N-2) \times 6(N-2)$  می باشد.

$$T = \begin{bmatrix} \bar{U}_R^i(0) \\ \bar{U}_{\theta}^i(0) \\ \bar{U}_z^i(0) \\ \bar{U}_R^i(1) \\ \bar{U}_{\theta}^i(1) \\ \bar{U}_z^i(1) \end{bmatrix}$$

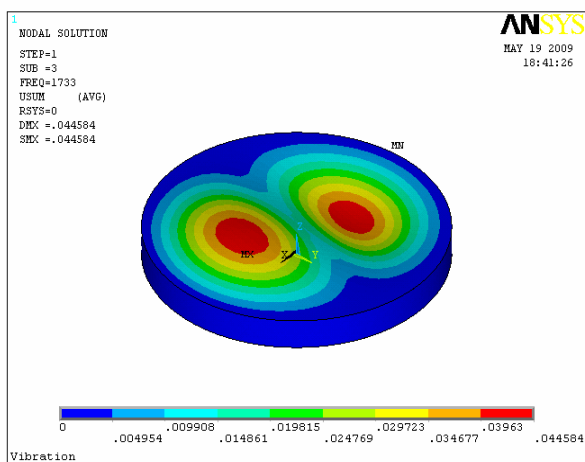
که در آن هریک از درایه های ماتریس مقادیر جابجایی در بالا و پایین ورق و در نقاط مجزا می باشند و شامل N-2 جمله است.

## ۸- مثال های عددی

(۱) برای مقایسه و رسیدن به نتایج برای یک ورق دایره ای از جنس FG با شرط مرزی clamped خصوصیات زیر را دارد، در  $z=0$ :



شکل (۱): تغییرات جابجایی ورق دایره ای FGM در فرکانس طبیعی اول و دوم



در جدول (۲) این بار مقدار فرکانس بی بعد را برای  $\lambda$  های مختلف از ۱ تا ۵ و مقدار عدد موج  $m$  در 0, 1, 2 بدست آورده و با نتایج روش ANSYS مقایسه شده است. با مقایسه نتایج مشخص است که با افزایش  $m$  مقدار  $\Omega$  در روش های مختلف افزایش می یابد.

با مقایسه نتایج مشخص است که با افزایش عدد موج  $m$  مقدار  $\Omega$  افزایش یافته، هم چنین با افزایش مقدار  $\lambda$  مربوط به خاصیت مواد مقدار فرکانس در دو روش کاهش می یابد.

یک ورق دایره ای از جنس FG با شعاع  $a$  و ضخامت  $h$  که در لبه ها clamped می باشد مورد بررسی قرار گرفته شده و خصوصیات ماده جسم همانند مثال قبل می باشد. در جدول (۳) کمترین فرکانس های بی بعد ورق را برای مقادیر مختلف  $\lambda$  و  $m$  و  $\frac{h}{a}$  آورده شده اند:

با مقایسه نتایج مشخص است که:

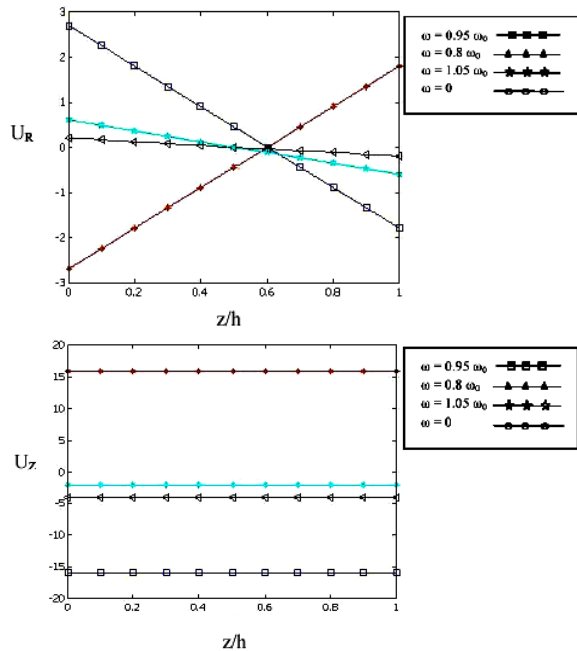
مقادیر فرکانس ها با افزایش نسبت  $\frac{h}{a}$  افزایش می یابند و همین طور با افزایش عدد موج  $m$  فرکانس ها افزایش می یابد و با افزایش مقدار  $\lambda$  مقدار فرکانس  $\Omega$  کاهش می یابد.

برای یک مقدار برابر  $m$  با افزایش مقدار  $\frac{h}{a}$  مقدار  $\Omega$  افزایش می یابد. هم چنین برای یک مقدار  $\frac{h}{a}$  یکسان با افزایش  $m$  مقدار  $\Omega$  افزایش می یابد.

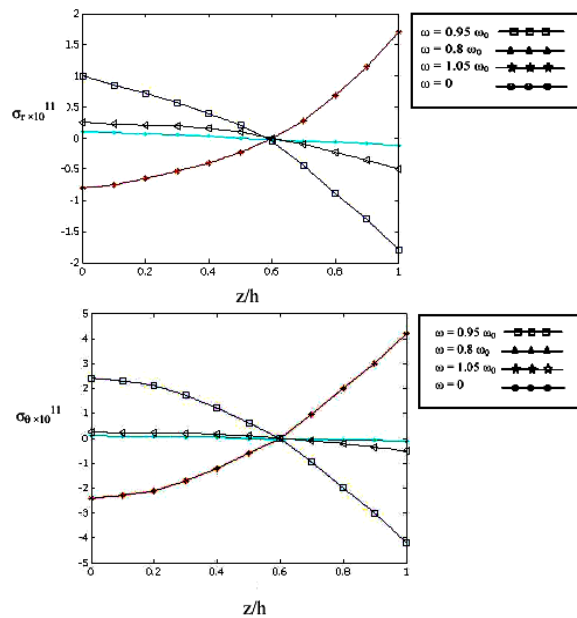
جدول (۳): مقایسه مقادیر فرکانس در  $\lambda$  و  $m$  و  $\frac{h}{a}$  مختلف

$\frac{h}{a}$	$m$	$\lambda$				
		1	2	3	4	5
0.1	0	0.052	0.047	0.044	0.038	0.035
	1	0.075	0.071	0.065	0.059	0.053
	2	0.089	0.081	0.073	0.067	0.061
0.2	0	0.095	0.091	0.086	0.078	0.069
	1	0.207	0.194	0.181	0.159	0.131
	2	0.296	0.281	0.263	0.237	0.211
0.3	0	0.198	0.190	0.181	0.174	0.165
	1	0.357	0.349	0.331	0.322	0.299
	2	0.515	0.496	0.488	0.480	0.469
0.4	0	0.332	0.325	0.317	0.309	0.287
	1	0.576	0.562	0.548	0.531	0.511
	2	0.780	0.763	0.741	0.683	0.631
0.5	0	0.501	0.483	0.461	0.433	0.406
	1	0.817	0.788	0.763	0.721	0.674
	2	1.201	1.186	1.121	0.988	0.917

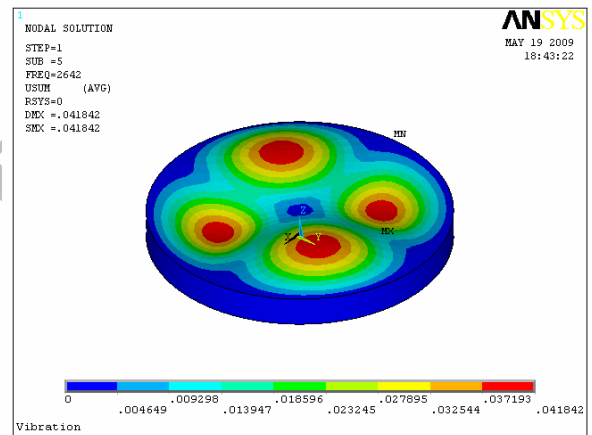
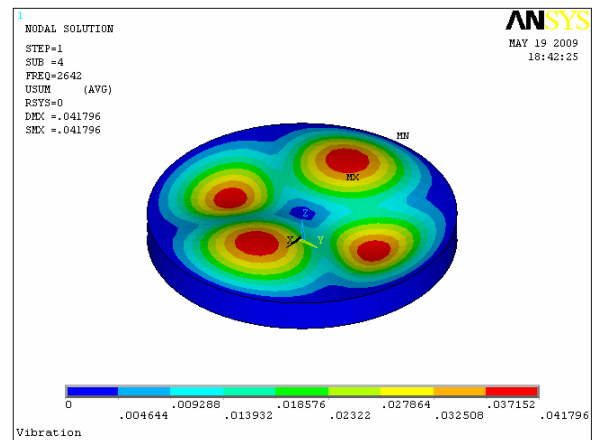
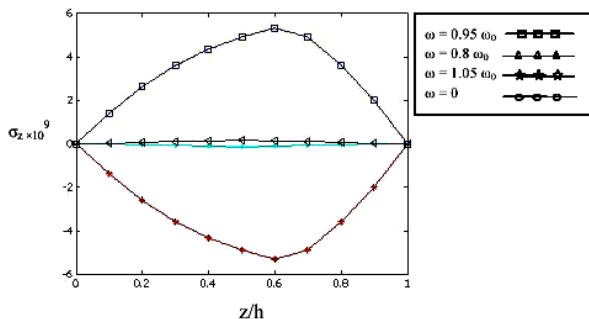
اشکال تغییرات جابجایی ها در ۵ فرکانس اول ورق دایره ای به کمک نرم افزار ANSYS بدین شکل آورده شده است :



نمودار (۱): تغییرات جابجایی ها با  $\omega$  های مختلف در ضخامت های مختلف از ورق



نمودار (۲): تغییرات تنش  $\sigma_r$ ،  $\sigma_\theta$  با  $\omega$  های مختلف در ضخامت های مختلف از ورق



شکل (۲): تغییرات جابجایی ورق دایره ای FGM در فرکانس طبیعی سوم و چهارم و پنجم

(۳) در این مثال ورق با خصوصیات مثال قبل در نظر گرفته شده ولی شرایط مرزی به شکل زیر می باشد. (ارتعاش اجباری)

$$\frac{h}{a} = 0.1$$

$$\lambda = 1$$

$$\frac{r}{a} = 0.5 \quad \theta = 45^\circ$$

$$z = 0 \rightarrow \sigma_z = \tau_{rz} = \tau_{r\theta} = 0$$

$$z = h \rightarrow \sigma_z = -10^9 \times e^{i\omega t}, \quad \tau_{rz} = \tau_{\theta z} = 0$$

در این حالت مقادیر  $\omega$  های مختلف با ضرایب مختلف  $\omega$  را تغییراتشان را با متغیرهای  $U_R$ ،  $U_z$ ،  $\sigma_r$ ،  $\sigma_\theta$  و  $\tau_{rz}$  در نمودارهایی نشان داده شده است:

## ۱۰- بحث و نتیجه گیری

در این مقاله همان طور که مشاهده شد سعی در استفاده از روشی ریاضی و محاسباتی می باشد که بتوان به کمک آن به مطلوب ما که همان فرکانس های طبیعی یک سیستم ارتعاشی می باشد رسید که در اینجا این کار توسط روش نیمه تحلیلی که روشی بر پایه ی استفاده از روش فضای حالت می باشد استفاده کردیم که در این روش که ترکیبی از روش فضای حالت در جهت ضخامت ورق و روش دیفرانسیل کوادراچر یک بعدی در جهت شعاعی ورق می باشد ورق را تحلیل کردیم . ورق مورد بررسی ما در اینجا ورقی دایره ای از جنس FGM می باشد که با مشاهده ی نتایج به دست آمده و مقایسه با روش FEM و تحلیل به کمک ANSYS به این نتیجه می رسیم که روش نیمه تحلیلی روشی مناسب جهت بدست آوردن فرکانس های طبیعی و تنش های نرمال ورق ها می باشد و مزیت اصلی آن در مقایسه با روش های دیگر انتخاب نقاط بسیار کمتری جهت تخمین زدن و حل مسئله می باشد ولی در دیگر روش ها نیاز به المان گیری و مش بندی مسئله در نقاط زیادی داریم که کاری دشوار می باشد و این موضوع باعث کاربرد بیشتر آن در سال های اخیر گشته است

## ۱۱- ضمیمه

$$d_{11} = -\frac{c_{11}}{c_{44}} \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{2r^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{c_{12}}{2r^2 \cdot c_{44}} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\rho}{c_{44}} \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

$$d_{12} = -\frac{c_{11}}{c_{44}} \left( \frac{1}{2r} \cdot \frac{\partial^2}{\partial r \cdot \partial \theta} - \frac{3}{2r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \right) - \frac{c_{12}}{2c_{44}} \left( \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2}{\partial r \cdot \partial \theta} \right)$$

$$d_{13} = -\frac{\lambda}{h} \cdot \frac{\partial}{\partial r}$$

$$d_{21} = -\frac{c_{11}}{2c_{44}} \left( \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2}{\partial r \cdot \partial \theta} + \frac{3}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \right) - \frac{c_{12}}{2c_{44}} \left( \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2}{\partial r \cdot \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \right)$$

$$d_{22} = -\frac{c_{11}}{2c_{44}} \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \right) - \frac{c_{12}}{2c_{44}} \left( -\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \right) + \frac{\rho}{c_{44}} \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

$$d_{23} = -\frac{\lambda}{h} \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta}$$

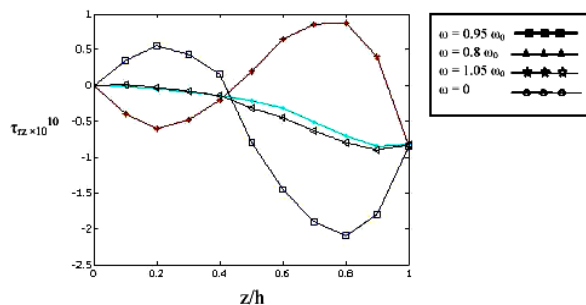
$$d_{31} = -\frac{\lambda}{h} \cdot \frac{c_{13}}{c_{33}} \cdot \left( \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right)$$

$$d_{32} = -\frac{\lambda}{hr} \cdot \frac{c_{13}}{c_{33}} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta}$$

$$d_{33} = -\frac{c_{44}}{c_{33}} \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\rho}{c_{33}} \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

$$d_{14} = -\frac{\lambda}{h} \quad d_{15} = 0 \quad d_{24} = 0$$

$$d_{25} = -\frac{\lambda}{h} \quad d_{26} = -\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{c_{13}}{rc_{44}} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta}$$



نمودار (۳): تغییرات تنش  $\tau_{rz}$ ،  $\sigma_z$  با  $\omega$  های مختلف در ضخامت های مختلف از ورق

## ۹- نتایج نمودارها

همان طور که دیده می شود در نمودارهای شماره (۱) مقادیر  $U_R$  مختلف برای  $\omega$  های مختلف در  $\frac{z}{h}$  (ارتفاع های مختلف) از ورق با هم رابطه ی خطی دارند در صورتی که در نمودار بعدی  $U_z$  با  $\omega$  های مختلف در  $\frac{z}{h}$  های مختلف ثابت باقی می ماند و تغییری نمی کند یعنی مقدار جابجایی در جهت شعاعی ورق در لایه های مختلف با هم برابر اند .

در نمودارهای شماره (۲) همان طور که دیده می شود مقادیر تنش  $\sigma_r$ ،  $\sigma_\theta$  با  $\omega$  های مختلف در ضخامت های مختلف از ورق با هم رابطه ی غیر خطی دارند و این تغییر به شکل نمایی در نمودارها بروز می کند که برای فرکانس مشخصی این تغییر به شکل افزایشی است و در حالتی دیگر با افزایش ضخامت مقدار تنش ها کاهش می یابند.

در نمودار های شماره (۳) نیز همانند قبل مقادیر  $\sigma_z$ ،  $\tau_{rz}$  که تنش ها در جهت ضخامت ورق هستند تغییرات به شکل نمایی است به این تفاوت که در این حالت همان طور که مشاهده می کنید مقادیر تنش  $\sigma_z$  در پایین و بالای ورق یکی می باشند در واقع مقدار تنش در ضخامت ورق تغییرات نمایی دارد ولی در ابتدا و انتها در  $\omega$  های مختلف در نظر گرفته شده مقدار تنش برابر صفر می باشد. در نمودار بعدی مقدار  $\tau_{rz}$  در ضخامت های مختلف از ورق تغییرات نمایی دارند و مقدارشان در  $\omega$  های مختلف در پایین ورق برابر صفر می باشد و در بالای ورق در  $\omega$  های مختلف مقداری برابر دارند که البته مقداری غیر صفر می باشد و در ضخامت های مختلف تغییرات نمایی دارند ولی همانند نمودار قبلی در پایین و بالای ورق مقدار تنش ها در  $\omega$  های مختلف مقداری برابر دارند.



- [13] Efraim, E. and Eisenberger, M., "Exact Vibration Analysis of Variable Thickness Thick Annular Isotropic and FGM Plates", *J. Sound Vib.* Vol. 299, 2007, pp. 720-738.
- [14] Bert, C. W. and Malik, M., "The Differential Quadrature Method in Computational Mechanics", a Review, *Appl. Mech. Rev.* Vol. 49, 1996, pp. 1-28.
- [15] Wang, X. and Wang, Y., "Free Vibration Analyses of Thin Sector Plates by the New Version of Differential Quadrature Method", *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* Vol. 193, 2004, pp. 3957-3971.
- [16] Gu, P. and Asaro, J., "Crack in Functionally Graded Materials", *Int. J. Solids Struct.* Vol. 34, 1997, pp. 1-17.
- [17] Gantmacher, F. R., "The Theory of Matrix", Chelsea, New York, 1960.
- [18] Liu, C. F. and Lee, Y. T., "Finite Element Analysis of Three-Dimensional Vibrations of Thick Circular and Annular Plates", *J. Sound Vib.* Vol. 233, No.1, 2000, pp. 63-80.
- [19] Tanigawa, Y., Matsumoto, M. and Akai, T., "Optimization of Material Composition to Minimize Thermal Stresses in Nonhomogeneous Plate Subjected to Unsteady Heat Supply", *JSME Int. Journal. Series A.* Vol. 40, No. 1, 1997, pp. 84-93.
- [20] Noda, N., "Thermal Stresses in Functionally Graded Materials", *Third Int. Congress on Thermal Stresses.* Poland, 1999, pp. 33-38.
- [21] Nie, G. J. and Zhong, Z., "Semi-Analytical Solution for Three-Dimensional Vibration of Functionally Graded Circular Plates", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 196, No. 49, 52, pp. 4901-4910.
- [22] Chang, shu., "Differential Quadrature and Its Application in Engineering", Eastern Michigan university.
- [23] Alpay, D. and Gohberg, I., "The State Space Method, Generalizations and Applications Operator Theory Advances and Applications", Vol. 161.
- [24] Nie, G. J. and Zhong, Z., "Vibration Analysis of Functionally Graded Annular Sectorial Plates with Simply Supported Radial Edges", *Composite Structures* Vol. 84, 2008, pp. 167-176.
- [25] Wang, X. and Wang, Y., "Re-Analysis of Free Vibration of Annular Plates by the New Version of Differential Quadrature Method", *Journal of Sound and Vibration* Vol. 278, 2004, pp. 685-689.
- [26] Valery, V., Vasiliev, E., Morozov, V., "Advanced Mechanics of Composite Materials".

[۲۷] طائری، ب.، "معادلات دیفرانسیل (همراه با آزمایشگاه های متمتیکا و میپل)"، انتشارات جهاد دانشگاهی دانشگاه صنعتی اصفهان، تابستان ۱۳۷۷.

$$d_{34} = -\frac{c_{13} + c_{44}}{c_{33}} \cdot \left( \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right)$$

$$d_{35} = -\frac{c_{13} + c_{44}}{c_{33}} \cdot \left( \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \quad d_{36} = -\frac{\lambda}{h}$$

## ۱۲- مراجع

- [1] Wu, C. M., Kahn, M. and Moy, W., "Piezoelectric Ceramics with Functional Gradients", a New Application in Material Design, *J. Am. Ceram. Soc.* Vol. 79, 1996, pp. 809-812.
- [2] Zhu, X. H. and Meng, Z. Y., "Operational Principle, Fabrication and Displacement Characteristics of a Functionally Gradient Piezoelectric Ceramic Actuator, Sensors" *Actuators A*, Vol. 48, 1996, pp. 169-173.
- [3] Yang, J. and Hui-Shen Sh., "Dynamic Response of Initially Stressed Functionally Graded Rectangular Thin Plates", *Compos. Struct.* Vol. 54, 2001, pp. 497-508.
- [4] Vel, S. S. and Batra, R. C., "Three-Dimensional Exact Solution For the Vibration of Functionally Graded Rectangular Plates", *J. Sound Vib.* Vol. 272, 2004, pp. 703-730.
- [5] Kitipornchai, S., Yang, J. and Liew, K. M., "Semi-Analytical Solution For Nonlinear Vibration of Laminated FGM Plates with Geometric Imperfections" *Int. J. Solids Struct.* Vol. 41, 2004, pp. 2235-2257.
- [6] Chen, C. S., "Nonlinear Vibration of a Shear Deformable Functionally Graded Plate", *Compos. Struct.* Vol. 68, 2005, pp. 295-302.
- [7] Roque, C. M. C., Ferreira, A. J. M. and Jorge, R. M. N., "A Radial Basis Function Approach For the Free Vibration Analysis of Functionally Graded Plates Using a Refined Theory", *J. Sound Vib.* Vol. 1, 2006, pp. 1-23.
- [8] Serge, A., "Free Vibration, Buckling, and Static Deflections of Functionally Graded Plates", *Compos. Sci. Technol.* Vol. 66, 2006, pp. 2383-2394.
- [9] Ferreira, A. J. M., Batra, R. C., Roque, C. M. C., Qian, L. F. and Jorge, R. M. N., "Natural Frequencies of Functionally Graded Plates by a Meshless Method", *Compos. Struct.* Vol. 75, 2006, pp. 593-600.
- [10] Woo, J., Meguid, S. A. and Ong, L. S., "Nonlinear Free Vibration Behavior of Functionally Graded Plates", *J. Sound Vib.* Vol. 289, 2006, pp. 595-611.
- [11] Park, J. S. and Kim, J. H., "Thermal Post Buckling and Vibration Analyses of Functionally Graded Plates", *J. Sound Vib.* Vol. 289, 2006, pp. 77-93.
- [12] Prakash, T. and Ganapathi, M., "Asymmetric Flexural Vibration and Thermoelastic Stability of FGM Circular Plates Using Finite Element Method", *Composites: Part B*, Vol. 37, 2006, pp. 642-649.