

## ناپایداری جریان تیلور-کوئت در یاتاقان‌های ژورنال

احمد صداقت<sup>۱</sup>، سعید جعفری<sup>۲</sup>، ایمان روح الامین<sup>۳</sup>  
sedaghat@cc.iut.ac.ir

پذیرش مقاله: ۸۹/۰۶/۱۸

دریافت مقاله: ۸۹/۰۴/۲۳

### چکیده

در صنعت، ناپایداری جریان در یاتاقان‌های ژورنال و در سرعت‌های دورانی بالا از اهمیت زیادی برخوردار است. معیار ناپایداری برای جریان غیر لزج بین دو استوانه هم محور دوار توسط تیلور-کوئت ارائه شده است هر چند که لزجت در یک سیال می‌تواند نقش پایدارکننده و یا ناپایدارکننده داشته باشد. در کار حاضر، تئوری‌های پایداری جریان بین دو استوانه هم محور دوار بررسی شده است و سپس الگوهای ناپایداری جریان، میدان سرعت، میدان فشار، و میدان ورتیسیتته در فاصله بین دو استوانه توسط نرم‌افزار فلوئنت شبیه‌سازی شده است. در این روش، در ابتدا جریان به صورت آرام در نظر گرفته می‌شود و سپس با افزایش تدریجی سرعت نسبی بین استوانه‌ها عدد تیلور بحرانی محاسبه و با رابطه تحلیلی تیلور مقایسه می‌شود. از نتایج عددی مشاهده می‌شود که با افزایش عدد تیلور به تدریج گردابه‌ها در جریان قدرت بیشتری یافته و لزجت نقش ناپایدارکننده را بازی می‌کند. با ناپایدار شدن جریان، الگوهای سلولی مربعی و ویژگی‌های آن در جریان قابل مشاهده و تحلیل است.

### کلید واژه:

ناپایداری جریان - یاتاقان‌های ژورنال - جریان کوئت- تیلور - استوانه‌های دوار هم محور

۱- استادیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی اصفهان

۲- کارشناس ارشد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی اصفهان

۳- کارشناس ارشد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی اصفهان

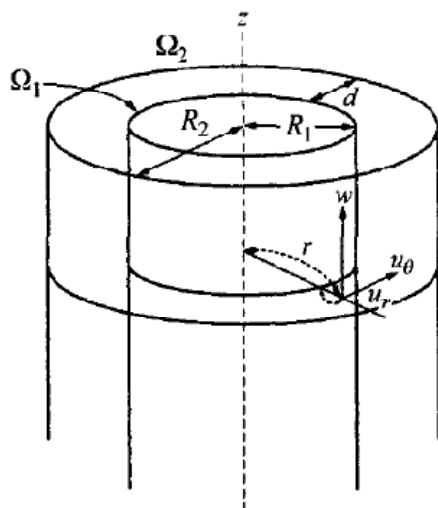
## ۱- مقدمه

سپس مالکوک (۱۸۹۶) به طور تجربی مورد بررسی قرار گرفت [۳ و ۴]. بدین سبب مسئله فوق، شکل (۱)، به مسئله جریان کوئت-تیلور مشهور شده است. کوئت مشاهده نمود که برای یک مقدار حدی سرعت چرخش استوانه‌ها شکل جریان نه آرام و نه مغشوش است. شکل حاصل که در مرز پایداری سیال مشاهده می‌شود به افتخار تیلور به گردابه‌های تیلور (۱۹۲۳) نامیده شدند [۵]. تیلور به صورت تجربی و تئوری نشان داد که جریان سیال بین دو استوانه وقتی ناپایدار می‌شود که سرعت نسبی سیلندر داخلی نسبت به سیلندر خارجی از یک مقدار بحرانی بالاتر رود. تیلور به کمک فرضیات ساده کننده نشان داد که برای سیال لزج پایداری تنها وابسته به  $\Omega_o/\Omega_i$  و عدد بدون بعد تیلور ( $Ta$ ) مطابق زیر است:

$$Ta = \frac{r_i c^3 (\Omega_i^2 - \Omega_o^2)}{v^2} \quad (۳)$$

که  $c = r_o - r_i$  است.

بر اساس مشاهدات تجربی تیلور، جریان ثانویه‌ای به شکل یک سری سلول‌های پایدار به طور منظم در امتداد طولی استوانه شکل می‌گیرند (شکل (۲)). اندرک و دیگران [۶] رژیم‌های متعدد و پیچیده جریان بین دو استوانه دوار هم محور شامل ۲۶ رژیم پایدار را به طور تجربی مطابق شکل (۳) طبقه‌بندی نمودند و ورلی و لویتا [۷ و ۸] به طور تجربی الگوهای جریان شامل گردابه آرام غیرموجی، گردابه موجی، گردابه هذلولی غیرموجی، گردابه موجی هذلولی و گردابه موجی اتفاقی و رژیم‌های جهشی و زیر و فرا بحرانی در فاز گذار را در این مسئله بررسی کردند.



شکل (۱): هندسه مورد مطالعه

جریان سیال بین دو استوانه هم محور (شکل (۱)) به جریان تیلور-کوئت شناخته می‌شود که یکی از مسایل کلاسیک مکانیک سیالات است که توسط محققین زیادی مورد بررسی قرار گرفته است [۱]. این مسئله همچنان به علت کاربردهای وسیع آن در مهندسی از وسایل فیلترسازی پزشکی تا احتراق در رژیم کاملاً آشفته و همینطور در مطالعه گذار جریان از رژیم آرام به رژیم آشفته و همینطور رژیم جریان آشفته کاملاً توسعه یافته بر روی سطوح انحنادار حائز اهمیت است [۲].

برای تمام جریان‌های آرام یک مقدار حدی رینولدز وجود دارد که به ازای آن رژیم آرام جریان دستخوش اغتشاشات می‌گردد. در رینولدزهای بالاتر جریان همیشه مغشوش یعنی بی‌نظم، تصادفی و ناپایدار است. مفهوم ناپایداری توسط کانینگهام بدین نحو ارائه می‌شود که اگر یک حالت فیزیکی بتواند در مقابل یک اختلال مقاومت کرده و حالت اصلی خود را حفظ کند پایدار خواهد ماند و در غیر این صورت ناپایدار می‌شود.

ناپایداری که در تحقیق حاضر مورد توجه قرار می‌گیرد ناشی از اثرات دینامیکی چرخش در یک سیال همگن است. اینگونه ناپایداری در کاربردهای مختلف مکانیک سیالات به ویژه در باتاقان‌های ژورنال مهم می‌شود. ناپایداری سیال‌های چرخان برای اولین بار توسط ریلی در سال ۱۸۸۰ مورد مطالعه قرار گرفت [۳ و ۴]. ریلی معیاری برای ناپایداری یک جریان چرخشی غیر لزج بدین نحو ارائه کرد که اگر مربع گردش (سیرکولاسیون) جریان به طرف شعاع‌های خارجی کم شود آنگاه جریان ناپایدار می‌شود. به عبارت دیگر پایداری در صورتی برقرار خواهد بود که نامساوی زیر برقرار باشد:

$$\frac{d}{dr} (rV_\theta)^2 > 0 \quad (۱)$$

که این معیار برای جریان بین استوانه‌های هم محور به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\Omega_o r_o^2 \geq \Omega_i r_i^2 \quad (۲)$$

که زیرنویس‌های  $i$  و  $o$  معرف سطوح استوانه‌های داخل و خارج هستند. بنابراین می‌توان سه حالت زیر را برای پایداری جریان بین دو استوانه انتظار داشت:

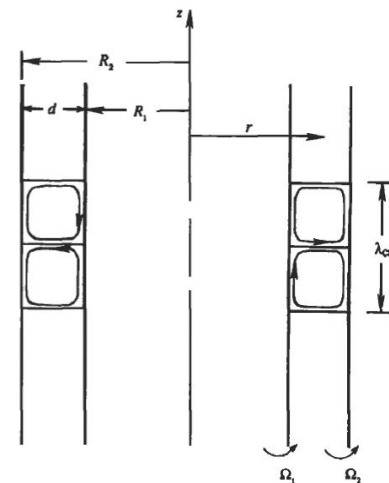
- ۱- استوانه داخلی چرخان و استوانه خارجی ساکن: جریان ناپایدار
  - ۲- استوانه داخلی ساکن و استوانه خارجی چرخان: جریان پایدار.
  - ۳- چرخش دو استوانه در خلاف جهت هم: ناپایدار.
- جریان سیال بین دو استوانه هم محور دوار توسط کوئت (۱۸۹۰) و

فوق توجه خاص مبذول داشتند و دو و دیگران [۱۱] به ناپایداری جریان بین دو استوانه هم محور دوار به کمک نظریه گرادیان انرژی پرداختند.

در این کار تحقیقی هدف حل دقیق جریان لزج بین دو استوانه دوار تحت حالت‌های هندسی و جریان گوناگون برای یاتاقان‌های ژورنال بوده است. برای این کار از نرم‌افزار فلونت حرکت سیال بین دو استوانه شبیه‌سازی شده است. در ابتدا به کمک معادلات حاکم برای جریان‌های تراکم‌ناپذیر لزج و غیرلزج، تئوری خطی ناپایداری هیدرودینامیکی [۱ و ۲] مسئله فوق بررسی می‌شود. در ادامه نتایج کار عددی حاضر با نتایج تحلیلی تیلور مقایسه می‌شود و بر روی الگوهای سلولی جریان بحث می‌شود.

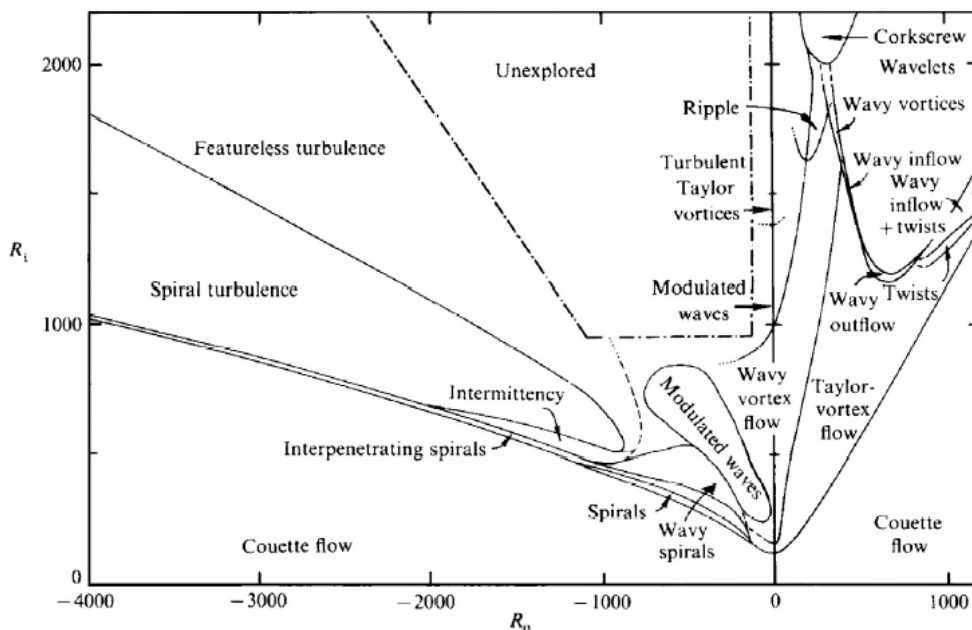
تئوری و معادلات حاکم بر حل

مطابق شکل (۲) و به کمک مشاهدات تجربی، مسئله تیلور-کوئت به صورت یک مسئله تقارن محوری ( $\frac{\partial}{\partial \theta} = 0$ ) در نظر گرفته می‌شود. در اینجا، ابتدا با فرض جریان غیر لزج به تحلیل پایداری خطی جریان می‌پردازیم و در ادامه اثرات لزجت که به مسئله تیلور معروف است در تحلیل فوق لحاظ می‌گردد.



شکل (۲): ورتکس‌های تیلور

در سال‌های اخیر مجدداً مسئله تیلور-کوئت بواسطه شگفتی‌ها و ناشناخته‌های موجود در آن در کارهای عددی توجه جدیدی را به خود اختصاص داده است. هوانگ و یانگ [۹] به بررسی عددی نتایج تجربی ورلی و لوپتا [۷ و ۸] پرداختند. پیرو و کوادریو [۱۰] به روش شبیه‌سازی عددی مستقیم (DNS) به رژیم جریان آشفته مسئله



شکل (۳): رژیم‌های رفتار جریان در فاصله بین دو استوانه هم محور دوار برحسب  $R_0$  و  $R_i$  که به ترتیب اعداد رینولدز برحسب سرعت دورانی استوانه‌های بیرونی و داخلی هستند (بر گرفته شده از کار اندرک و دیگران [۶]).

سیال غیرلزج

معادلات حاکم بر حرکت سیال تراکم ناپذیر و غیرلزج با توجه به شرایط تقارن محوری به صورت زیر بیان می‌شود:

پیوستگی:

$$\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \quad (۴)$$

ممنتوم:

$$\frac{Du_r}{Dt} - \frac{u_\theta^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \quad (۱-۵)$$

$$\frac{Du_\theta}{Dt} + \frac{u_r u_\theta}{r} = 0 \quad (۲-۵)$$

$$\frac{Du_z}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \quad (۳-۵)$$

شرایط مرزی برحسب تقارن و شرایط فیزیکی عبارتند از:

$$u_r = u_z = 0, u_\theta = v_r, p = p(r) \quad (۶)$$

بنابراین می‌توان رابطه (۲-۵) را به صورت زیر نوشت:

$$\frac{D(ru_\theta)}{Dt} = 0 \quad (۷)$$

با توجه به اینکه در در جریان پایا و برای سیال ایده‌آل بنا بر تئوری کلونین چرخش،  $\Gamma = 2\pi r u_\theta$ ، در راستای شعاع تغییر نمی‌کند. رابطه (۷) را به کمک تعریف ممنتوم زاویه‌ای،  $H = ru_\theta$ ، می‌توان به صورت زیر به انرژی جنبشی  $E$  مربوط ساخت:

$$E = \frac{u_\theta^2}{2} = \frac{1}{2} \frac{H^2}{r^2} \quad (۸)$$

بنابراین اگر در حلقه‌ای از سیال به شعاع داخلی  $r_1$  و شعاع خارجی  $r_2$  که تبادل انرژی صورت می‌گیرد، تئوری کلونین الزام می‌دارد که چرخش در طی این تبادل ثابت باقی بماند. این بدین معنی است که بعد از تبادل انرژی، سیال واقع شده در  $r_2$  باید دارای چرخشی  $\Gamma$  برابر میزان چرخش در شعاع  $r_1$  باشد. بنابراین، با نوشتن روابط انرژی در قبل و بعد از تبادل داریم [۱۲]:

$$E_{initial} = \frac{1}{2} \left[ \frac{H_1^2}{r_1^2} + \frac{H_2^2}{r_2^2} \right] + \frac{1}{8\pi^2} \left[ \frac{\Gamma_1^2}{r_1^2} + \frac{\Gamma_2^2}{r_2^2} \right] \quad (۹)$$

$$E_{final} = \frac{1}{2} \left[ \frac{H_2^2}{r_1^2} + \frac{H_1^2}{r_2^2} \right] + \frac{1}{8\pi^2} \left[ \frac{\Gamma_2^2}{r_1^2} + \frac{\Gamma_1^2}{r_2^2} \right] \quad (۱۰)$$

و اختلاف انرژی جنبشی به‌ازای واحد جرم پس از تبادل برابر می‌شود با:

$$\begin{aligned} \Delta E &= E_{final} - E_{initial} = \\ &= \frac{1}{2} [H_2^2 - H_1^2] (r_1^{-2} - r_2^{-2}) = \\ &= \frac{1}{8\pi^2} [\Gamma_2^2 - \Gamma_1^2] (r_1^{-2} - r_2^{-2}) \end{aligned} \quad (۱۱)$$

برای اینکه  $\Delta E > 0$  باشد لازم است که  $\Gamma_2^2 > \Gamma_1^2$  ( $H_2^2 > H_1^2$ ) باشد (چون  $r_1 < r_2$  است). یعنی اینکه برای ایجاد تبادل بین دو سطح حلقه سیال، در حالتی که  $\Gamma_2^2 > \Gamma_1^2$ ، احتیاج به منبع خارجی است. بنابراین تبادل خود به خودی بین حلقه‌های سیال امکان‌پذیر نیست. از طرف دیگر اگر  $\Gamma^2$  با افزایش شعاع کاهش یابد، تبادل خود به خودی بین حلقه‌های سیال موجب آزاد شدن انرژی و ایجاد ناپایداری می‌گردد. به عبارت دیگر، عامل این ناپایداری وجود نیروی گریز از مرکز است که بر نیروی ناشی از گرادیان فشار غلبه می‌کند. بنابر این معیار ریلی در جریان کوئت برای ایجاد ناپایداری به صورت زیر قابل بیان است:

$$\frac{dH^2}{dr} < 0 \quad \text{or} \quad \frac{d\Gamma^2}{dr} < 0 \quad (۱۲)$$

برای مثال در حالتی که استوانه خارجی ساکن است و استوانه داخلی در حال چرخش است،  $\Gamma^2$  با افزایش شعاع کاهش می‌یابد و معیار ریلی بیانگر ناپایدار بودن سیال است. سینگ در سال (۱۹۲۳) به کمک آنالیز مودال مسئله فوق را مورد تحلیل قرار داد [۳ و ۴]. او با خطی‌سازی معادلات حاکم و تقریب اغتشاشات به صورت:

$$u'_r = u \exp(st + ikz) \quad (۱۳)$$

که  $i = \sqrt{-1}$  عدد موهومی،  $k$  عدد موج و  $s$  سرعت موج است به معادله زیر دست یافت که یک مسئله کلاسیک استورم-لیویل است:

$$(DD_* - k^2)u - \frac{k^2}{s^2} \Phi u = 0 \quad (۱۴)$$

اگر  $\Phi$  در فاصله  $r_1 < r < r_2$  بزرگتر از صفر باشد، مقادیر مشخصه معادله فوق منفی و در غیر این صورت مثبت می‌شوند. به هر حال با توجه به این تحلیل سینگ نتیجه گرفت که اگر  $\Phi$  در

در غیر این صورت نا پایدار است. معادلات حاکم در دستگاه استوانه‌ای در حالت ویسکوز و با شرط تقارن محوری بودن اغتشاشات بدین صورت قابل بیان است:

$$\frac{\partial \tilde{u}_r}{\partial r} + \frac{\tilde{u}_r}{r} + \frac{\partial \tilde{u}_z}{\partial z} = 0 \quad (20)$$

$$\frac{D\tilde{u}_r}{Dt} - \frac{\tilde{u}_\theta^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial r} + \nu \left( \nabla^2 \tilde{u}_r - \frac{\tilde{u}_r}{r^2} \right)$$

$$\frac{D\tilde{u}_\theta}{Dt} + \frac{\tilde{u}_r \tilde{u}_\theta}{r} = \nu \left( \nabla^2 \tilde{u}_\theta - \frac{\tilde{u}_\theta}{r^2} \right)$$

$$\frac{D\tilde{u}_z}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial z} + \nu \nabla^2 \tilde{u}_z$$

با فرض شرایط اولیه زیر که در جریان ویسکوز حاکم است:

$$u_r = u_z = 0, \quad u_\theta = V(r) = Ar + \frac{B}{r}, \quad (21)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dr} = \frac{V^2(r)}{r}$$

که:

$$A \equiv \frac{\Omega_2 r_2^2 - \Omega_1 r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \quad \text{و} \quad B \equiv \frac{(\Omega_1 - \Omega_2) r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}$$

با جایگزینی ترم‌های اغتشاشی:

$$\tilde{u} = \bar{u} + u' \quad \text{و} \quad \tilde{p} = \bar{p} + p' \quad (22)$$

و صرف نظر از ترم‌های غیر خطی به ترم‌های زیر می‌رسیم:

$$\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \quad (23)$$

$$\frac{\partial u_r}{\partial t} - \frac{2Vu_\theta}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left( \nabla^2 u_r - \frac{u_r}{r^2} \right) \quad (24)$$

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial t} + \left( \frac{dV}{dr} + \frac{V}{r} \right) u_r = \nu \left( \nabla^2 u_\theta - \frac{u_\theta}{r^2} \right) \quad (25)$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \nabla^2 u_z \quad (26)$$

چون ضرایب این معادلات تنها وابسته به شعاع هستند با جایگزینی مدهای نرمال به صورت:

جایی از سیال منفی شود، بنا بر معیار ریلی، سیال ناپایدار خواهد شد. ولی اگر  $\Phi$  همواره مثبت باشد، نمی‌توان با در نظر گرفتن اغتشاشات تقارن محوری پایداری سیال نتیجه گرفت. با در نظر گرفتن توزیع سرعت زاویه‌ای مطابق زیر برای سیال لزج:

$$\Omega(r) = A + \frac{B}{r^2} \quad (15)$$

که  $A = \Omega_1 \frac{\mu - \eta^2}{1 - \eta^2}$  و  $B = \Omega_1 r_1^2 \frac{1 - \mu}{1 - \eta^2}$  می‌باشند و استفاده از آن در معیار ریلی داریم:

$$\Phi = 4\mu\Omega = 4\Omega_1 \frac{(1-\mu)(\mu-\eta^2)}{(1-\eta^2)} \left( \frac{\eta^2}{r^2} + \frac{\mu-\eta^2}{1-\mu} \right) \quad (16)$$

که  $\Gamma$  شعاع بدون بعد شده است که در فاصله  $1 \leq r \leq \eta$  تغییر می‌کند و  $\eta = \frac{r_1}{r_2}$  و  $\mu = \frac{\Omega_1}{\Omega_2}$  اعداد بدون بعد مشخصه هستند. با توجه به این نتایج، هنگامی که دو استوانه در یک جهت حرکت می‌کنند:

$$\begin{cases} \Phi > 0 & \text{if } \mu > \eta^2 \\ \Phi < 0 & \text{if } 0 < \mu < \eta^2 \end{cases} \quad (17)$$

لذا در این حالت مرز پایداری برای جریان کوئت، در سیال غیرلزج توسط خط ریلی  $\mu = \eta^2$  یا  $\Omega_1 r_1^2 = \Omega_2 r_2^2$  مشخص می‌شود. و هنگامی که استوانه‌ها در خلاف جهت هم می‌چرخند:

$$\begin{cases} \Phi > 0 & \text{if } \eta_0 < r \leq 1 \\ \Phi < 0 & \text{if } \eta \leq r < \eta_0 \end{cases} \quad (18)$$

که پارامتر  $\eta_0$  توسط رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$\eta_0 = \eta \left( \frac{1 + |\mu|}{\mu^2 + |\mu|} \right)^{1/2} \quad (19)$$

لذا وقتی که چرخش استوانه‌ها در خلاف جهت هم است، این معیار جریان را ناپایدار در نظر می‌گیرد.

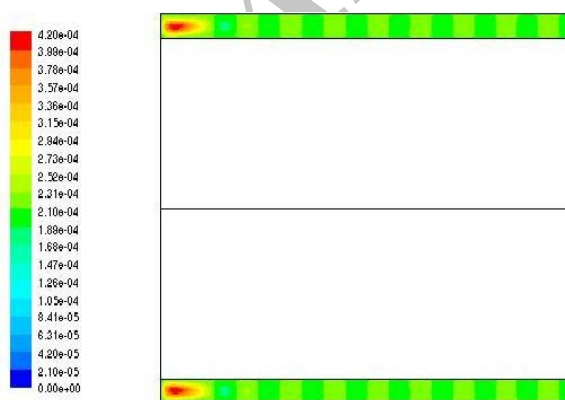
### ۱-۱- سیال لزج - مسئله تیلور

لزجت معمولاً نقش پایدارکننده در جریان‌های بین استوانه‌های دوار را ایفا می‌کند. تأثیر لزجت اغلب به وسیله عدد بدون بعد تیلور،  $Ta$ ، بیان می‌شود. عدد تیلور نسبت نیروی گریز از مرکز به ویسکوزیته است. اگر عدد تیلور کمتر از عدد تیلور بحرانی باشد، جریان پایدار و

تیلور بحرانی با عدد ریلی بحرانی برابر است. این موافقت قابل پیش‌بینی بود زیرا که در این حالت حدی  $\alpha = 0$  است و مسئله مقدار ویژه به مسئله بنارد کاهش می‌یابد. در استوانه‌هایی که در خلاف هم می‌چرخند حل ریلی جریان را ناپایدار پیش‌بینی می‌کند. این درحالی است که در حالت جریان لزج جریان می‌تواند پایدار باقی بماند.

## ۲- بررسی نتایج و نتیجه‌گیری

گسترش ورتکس‌های تیلور در فاصله بین سیلندرها در شکل شماتیک (۲) نشان داده شده است. ورتکس‌های تیلور به صورت گردابه‌هایی که در خلاف جهت هم می‌چرخند و مانند حلقه‌هایی در اطراف استوانه‌ها گسترش می‌یابند. تیلور در مشاهدات تجربی خود به کمک تزریق رنگی توانست عدد موج بحرانی،  $k_{cr} = \frac{2\pi d}{\lambda}$ ، در حدود  $3/12$  را در آغاز ناپایداری اندازه‌گیری کند. طول موج،  $\lambda$ ، در این رابطه بر اساس فاصله محوری اندازه‌گیری می‌شود که هر دو گردابه اشغال می‌کنند. بر این اساس در روش عددی حاضر طول موج  $k_{cr} = 3.05$  و  $\lambda_{cr} = 0.01(m)$  محاسبه شدند. برای بدست آوردن عدد تیلور بحرانی با نقطه‌ای که جریان پایدار بود تحلیل آغاز شد و بتدریج با افزایش عدد تیلور نتایج با یکدیگر مقایسه گردید (شکل‌های ۴ تا ۷). در حالت پایدار با اینکه در ابتدای سیلندرها ورتکس‌هایی تشکیل می‌گردد اما به علت آثار لزج در جلوگیری از ناپایداری این گردابه‌ها به داخل سیلندر گسترش نمی‌یابند. با افزایش سرعت نسبی بین سیلندرها نیروهای گریز از مرکز بر گرادیان فشار و نیروهای لزج به آرامی غلبه کرده و گردابه‌ها در جریان به سرعت گسترش می‌یابند.



شکل (۴): کانتورهای تابع جریان-جریان پایدار ( $Ta=500$ ).

$$\begin{pmatrix} u_r \\ u_\theta \\ u_z \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{u}_r(r) \\ \hat{u}_\theta(r) \\ \hat{u}_z(r) \\ \hat{P}(r) \end{pmatrix} \exp(\sigma t + ikz) \quad (27)$$

و با ساده‌سازی به یک سیستم کوپل شده به صورت توابعی از  $\hat{u}_r$  و  $\hat{u}_\theta$  می‌رسیم که با تقریب باریک بودن فاصله بین سیلندرها  $d = R_2 - R_1 \ll \frac{R_1 + R_2}{2}$  در نهایت معادلات زیر منتج می‌شود [۱۳]:

$$(D^2 - k^2 - \sigma)(D^2 - k^2)\hat{u}_r = (1 + \alpha x)\hat{u}_\theta \quad (28)$$

$$(D^2 - k^2 - \sigma)\hat{u}_\theta = -Ta \hat{k} \hat{u}_r \quad (29)$$

که:

$$\alpha = \frac{\Omega_2}{\Omega_1} - 1, D = \frac{d}{dr}, x = \frac{r_1}{d} \quad (1-30)$$

و

$$Ta = 4 \left( \frac{\Omega_1 r_1^2 - \Omega_2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \right) \frac{\Omega_1 d^4}{\nu^2} \quad (2-30)$$

البته لازم به ذکر است که در بعضی از مراجع عدد تیلور به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Ta = \frac{4\Omega_1^2 r_1^2 \eta^2 - \mu}{\nu^2} \left( \frac{1-\eta}{\eta} \right)^4 \quad (31)$$

که  $\mu = \frac{\Omega_2}{\Omega_1}$  و  $\eta = \frac{r_1}{r_2}$ . با استفاده از ساده‌سازی‌های مربوط به باریک بودن فاصله بین دو سیلندر، معادلات فوق به شکل کلی معادلات لاپلاس مطابق زیر درمی‌آید:

$$\begin{cases} (D^2 - a^2)u = f(x)V \\ (D^2 - a^2)V = Ta g(x)u \end{cases} \quad (32)$$

با حل این معادلات می‌توان عدد تیلور بحرانی را مطابق زیر بدست آورد [۱۴]:

$$Ta_{cr} = 1708 \times \frac{1-\eta^2}{\mu - \eta^2 + 2(1-\mu)\eta^2 \ln(1/\mu) / (1-\eta^2)} \quad (33)$$

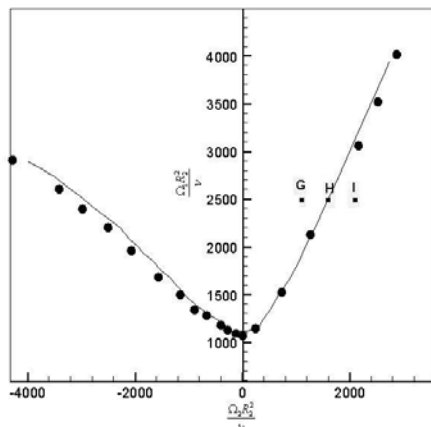
با تقریب باریک بودن فاصله بین سیلندرها، عدد موج محوری بدون بعد شده در آغاز ناپایداری برابر  $k_{cr} = 3.12$  محاسبه می‌شود.

طول موج مربوطه در آغاز ناپایداری برابر  $\lambda_{cr} = 2d$  است که دو برابر اندازه یک سلول مربعی است. در حالت حدی  $1 \rightarrow \frac{\Omega_2}{\Omega_1}$  عدد

همانطور که در شکل (۶) مشاهده می‌شود، به تدریج گردابه‌ها در جریان قدرت بیشتری یافته و تقریباً از شکل (۷) می‌توان جریان را به‌طور کامل ناپایدار در نظر گرفت. این فرآیند در نقاط مختلفی که در نمودار (۸) نشان داده شده است تکرار گردید و تیلور بحرانی حاصل بر حسب حل عددی جریان لزج با نمودار تیلور مقایسه گردید. در این نمودار نقاط واقع در سمت راست و چپ به ترتیب نماینده حالاتی است که دو استوانه در جهات یکسان و غیریکسان در حال چرخش می‌باشند.

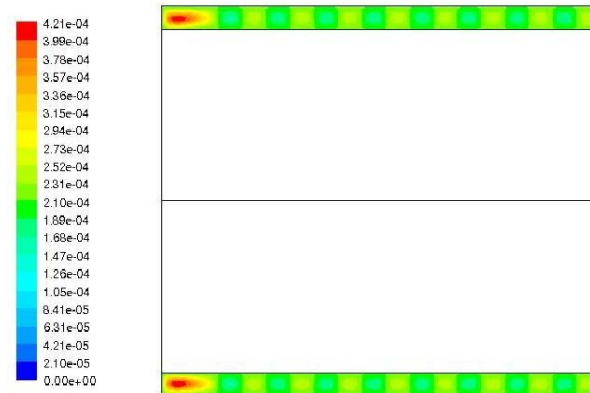
نقاط واقع بر محور عمودی نماینده حالاتی است که استوانه خارجی ساکن، و استوانه داخلی در حال چرخش می‌باشد. همانطور که در شکل (۸) مشاهده می‌شود نتایج حاضر اختلاف ناچیزی در حالت چرخش مختلف‌الجهت با نمودار تیلور دارد. برای مثال در حالتی که سیلندر داخلی با سرعت زاویه‌ای  $1/5$  رادیان بر ثانیه و سیلندر خارجی با سرعت زاویه‌ای  $1$  رادیان بر ثانیه می‌چرخند؛ بنا بر نمودار تیلور جریان در مرز ناپایداری بوده و عدد تیلور بحرانی برابر  $5062$  می‌شود. هر چند که در نتایج حاضر برای ناپایداری جریان، سرعت زاویه‌ای  $0/95$  رادیان بر ثانیه در سیلندر خارجی کفایت می‌کند.

عدد تیلور بحرانی در این حالت برابر  $5301$  محاسبه شده است که اختلافی حدود  $0/6$  درصد را نشان می‌دهد. برای دید مناسبتر نسبت به ناپایداری ایجاد شده در جریان، نمودارهای دیگری مانند فشار استاتیک، فشار دینامیک، سرعت محوری، سرعت شعاعی و ورتیسیتته در شکل‌های (۹) تا (۱۳) به تصویر کشیده شده است.

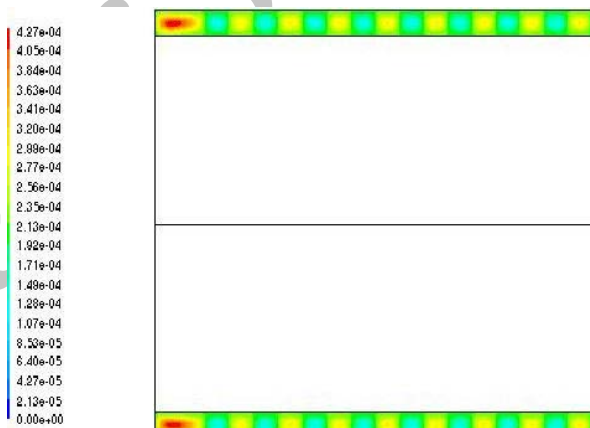


شکل (۸): مقایسه نتایج حاضر (سمبل‌ها) با تابع تیلور (منحنی پیوسته)

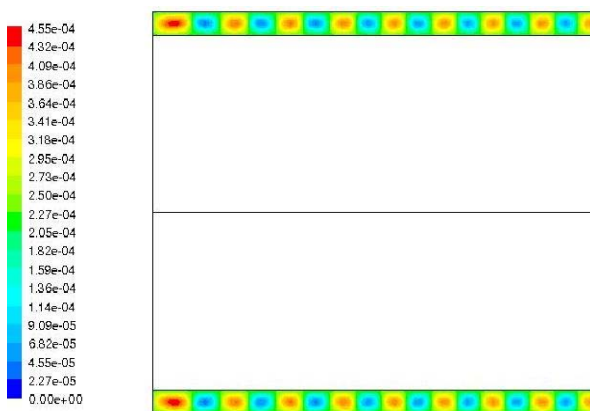
همانطور که از کانتورهای فشار استاتیکی در شکل (۹) مشخص است ناحیه پرفشار بر روی سیلندر بیرونی و ناحیه کم فشار بر روی سیلندر داخلی تغییر می‌کنند. درحالی‌که مطابق شکل (۱۰) فشار



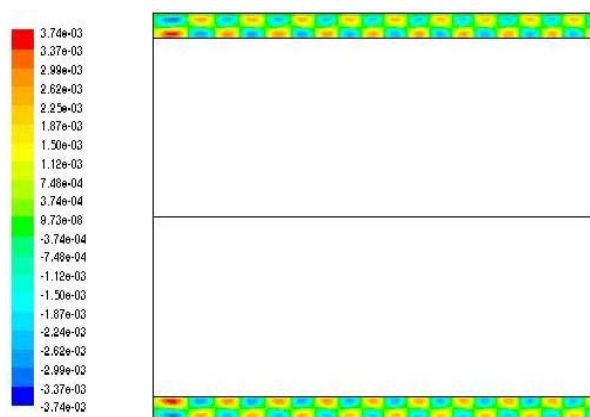
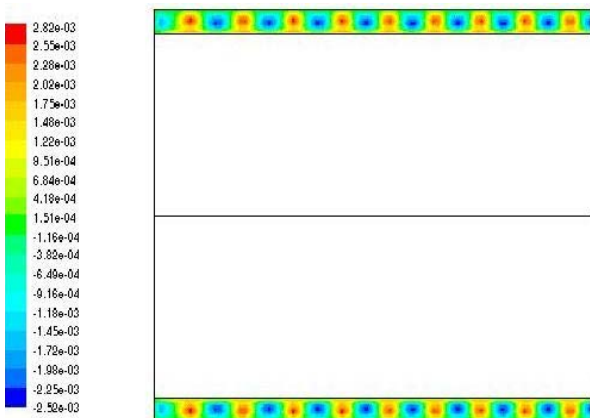
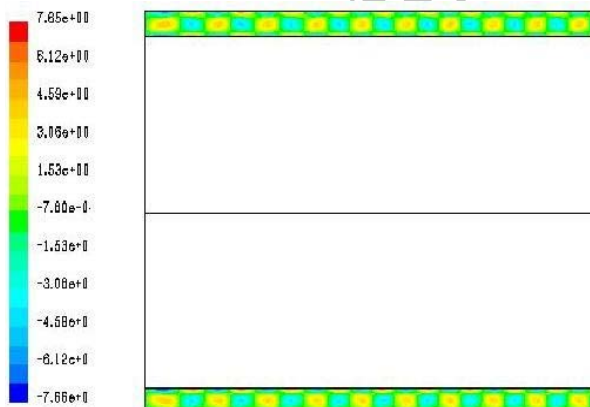
شکل (۵): کانتورهای تابع جریان-ورتنکس‌های محو شونده ( $Ta = 1000$ ).



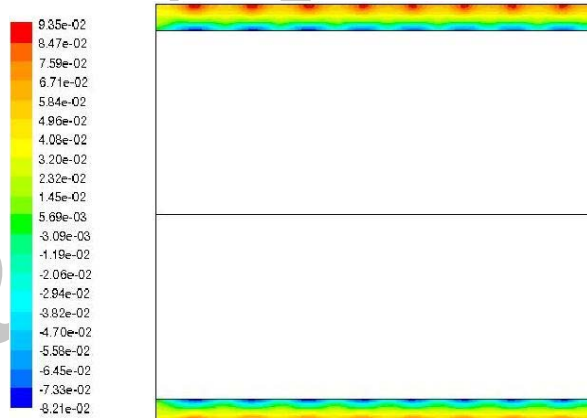
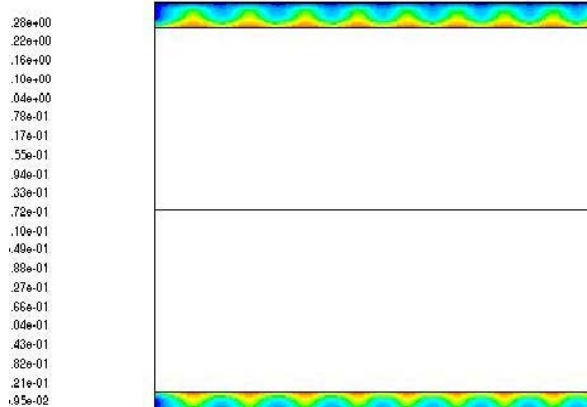
شکل (۶): کانتورهای تابع جریان-رشد ورتکس‌ها ( $Ta = 3000$ ).



شکل (۷): کانتورهای تابع جریان-جریان کاملاً ناپایدار ( $Ta = 5062$ ).

شکل (۱۱): کانتورهای سرعت محوری ( $Ta = 5062$ ).شکل (۱۲): کانتورهای سرعت شعاعی ( $Ta = 5062$ ).شکل (۱۳): کانتورهای ورتیسیتِه ( $Ta = 5062$ ).

دینامیکی بر روی سلیندر دوار داخلی بیشتر است. کانتورهای سرعت محوری در شکل (۱۱) رفتار پریودیک یکسان ولی معکوسی را بر روی هر دو سلیندر داخل و خارج نشان می‌دهد. حال آنکه کانتورهای سرعت شعاعی در شکل (۱۲) رفتار پریودیک یکسانی را بر روی هر دو سلیندر داخل و خارج ارائه می‌دهد. کانتورهای ورتیسیتِه در شکل (۱۳) هم توزیع ورتکس‌ها را در الگوهای مربعی به تصویر می‌کشد. این نتایج مطابقت خوبی را با نتایج تجربی نشان می‌دهد و در فهم شکل پیچیده جریان کمک شایانی می‌کند. از بررسی رفتار پریودیک میدان فشار می‌توان به مسایل خستگی و تمرکز تنش یاتاقان‌های ژورنال پرداخت که نیاز به تعمیم کار حاضر برای سایر رژیم‌های جریان شامل رژیم کاملاً آشفته می‌باشد.

شکل (۹): کانتورهای فشار استاتیکی ( $Ta = 5062$ ).شکل (۱۰): کانتورهای فشار دینامیکی ( $Ta = 5062$ ).



of Non- Wavy and Wavy Taylor-Couette Flow," J. Fluid Mech., Vol. 364, 1998, pp. 59-80.

۳- مراجع

- [8] Wereley, S.T., and Lueptow, R.M., "Velocity Field for Taylor-Couette Flow with an Axial Flow," Phys Fluids, Vol. 11, No. 12, 1999.
- [9] Hwang, J.Y., and Yang, K.S., "Numerical Study of Taylor-Couette Flow with an Axial Flow," Computers & Fluids, Vol. 33, 2004, pp. 97-118.
- [10] Pirro, D. and Quadrio, M., "Direct Numerical Simulation of Turbulent Taylor-Couette Flow," European J. of Mech. B/Fluids, Vol. 27, 2008, pp. 552-566.
- [11] Dou, H.S., Khoo, B.C., and Yeo, K.S., "Instability of Taylor-Couette Flow between Concentric Rotating Cylinders," Int. J. of Thermal Sci., Vol. 47, 2008, pp. 1422-1435.
- [12] Davey, A., "The Growth of Taylor Vortices in Flow between Rotating Cylinders," J. Fluid Mech., 1962.
- [13] Lucke, M., "Flow in Small Annulus between Concentric Cylinders," J. Fluid Mech., Vol. 140, 1984, pp. 343-353.
- [14] Benjamin, T., "Notes on Multiplicity of Flows in Taylor Experiment," J. Fluid Mech., Vol. 121, 1984, pp. 343-353.
- [1] Tagg, R., "The Couette-Taylor problem, Non Linear Science," Today, Vol. 4, No. 3, 1994, pp. 1-25.
- [2] Haim, D., and Pismen, L.M., "Performance of a Photochemical Reactor in the Regime of the Taylor-Görtler Vortical Flow," Chem. Eng. Sci., Vol. 49, No. 8, 1994, pp. 1119-1129.
- [3] Chandrasekhar, S., Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability, Dover Pub., Inc., New York, 1981, Chaps. 8, 10.
- [4] Drazin, P.G., and Reid, W.H., Hydrodynamic Stability, second ed., Cambridge University Press, Cambridge, England, 2004, Chap. 3.
- [5] Taylor, G. I., "Stability of a Viscous Liquid Contained Between Two Rotating Cylinders," Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Vol. 223, 1923, pp. 289-343.
- [6] Andereck, C. D., Liu, S. S., and Swinney H. L., "Flow Regimes in a Circular Couette System with Independently Rotating Cylinders," J. Fluid Mech., Vol. 164, 1986, pp. 183-155.
- [7] Wereley, S.T., and Lueptow, R.M., "Spatio-temporal Character

Archive of SID