# تعیین تحلیلی و عددی تنش‌های پسماند در کامپوزیت‌های ضخیم به روش سوراخکاری عمیق

احمدرضا قاسمی[۱]، حسام الدین مشهدی[۲]
Ghasemi @ kashanu.ac.ir

دریافت مقاله:۱۳۸۹/۰۹/۲۴ پذیرش مقاله:۱۳۸۹/۱۲/۱۹



## چکیده

در این تحقیق روش سوراخکاری عمیق برای تعیین تنش‌های پسماند در چند لایه‌های ضخیم به روش‌های تحلیلی و عددی مورد مطالعه قرار گرفته است. برای توسعه روش سوراخکاری عمیق در کامپوزیت‌های ضخیم، دو روش تحلیلی و یک روش عددی انتخاب شده است. روش‌های تحلیلی مورد مطالعه بر پایه معادلات ارائه شده توسط لیخینسکی و ساوین می‌باشند. برای حل عددی نیز از نرم افزار المان محدود ANSYS 11 استفاده شده است. در روش سوراخکاری عمیق، نخست یک سوراخ کوچک به صورت عمود بر سطح ایجاد شده و قطر آن با دقت زیاد اندازه‌گیری می‌شود. آنگاه پس از اعمال تنش‌های پسماند و تغییر قطر سوراخ، تغییرات قطر با دقت زیاد اندازه‌گیری و ثبت خواهند شد. مقادیر تنش‌های پسماند با توجه به تغییرات قطر تعیین می‌شوند. به منظور شبیه‌سازی روش سوراخکاری عمیق (SDHD)، یک مدل سه بعدی تحت تاثیر سه نوع بارگذاری مختلف در جهت الیاف، عمود بر الیاف و بارگذاری برشی قرار خواهد گرفت. در روش تحلیلی لیخینسکی، جابجایی در زوایای ۰ ، ۹۰ و ۱۸۰ درجه تحت تأثیر بارگذاری عمودی مطالعه شده است. در روش تحلیلی ساوین، تغییر شکل سوراخ در حضور تنش‌های پسماند عمودی و برشی به‌صورت پیوسته مطالعه شده است. نتایج دو روش تحلیلی با نتایج تحلیل عددی تطابق مناسبی را نشان می‌دهند.

**کلید واژه:**
سوراخکاری عمیق - چند لایه‌های کامپوزیتی ضخیم - تنش‌های پسماند - روش المان محدود

---

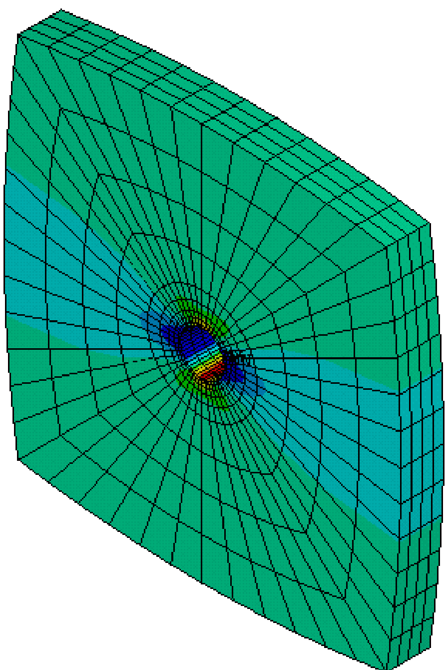
[۱]- استادیار، دانشگاه کاشان،دانشکده مهندسی مکانیک، کاشان، ایران Ghasemi@kashanu.ac.ir
[۲]- دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشگاه کاشان،دانشکده مهندسی مکانیک، کاشان، ایران hesamkaz@gmail.com

## ۱- مقدمه

برای اندازه‌گیری تنش‌های پسماند روش‌های مختلفی وجود دارد، که به سه دسته مخرب، غیرمخرب و نیمه‌مخرب تقسیم می‌شوند. از روش‌های نیمه مخرب می‌توان به روش سوراخکاری کور، سوراخکاری مرحله‌ای، سوراخکاری مرکزی و سوراخکاری عمیق اشاره نمود. اکثر روش‌هایی که اکنون برای اندازه‌گیری تنش‌های پسماند در کامپوزیت‌ها مورد استفاده قرار می‌گیرند، روش‌هایی می‌باشند که در گذشته برای فلزات به کار می‌رفتند. با توسعه این روش‌ها می‌توان از آنها برای اندازه‌گیری تنش‌های پسماند در سازه‌های کامپوزیتی استفاده نمود. تعیین توزیع تنش در اطراف یک سوراخ دایره‌ای، مبنای بعضی از روش‌های اندازه‌گیری تنش‌های پسماند مانند روش سوراخکاری عمیق، می‌باشد. روش سوراخکاری عمیق، یک روش شناخته شده برای اندازه‌گیری تنش‌های پسماند در صفحات ضخیم همگن می‌باشد. در روش سوراخکاری عمیق به دلیل آسیب کمی که به نمونه تحت آزمایش وارد می‌شود، این روش را جزء روش‌های نیمه مخرب دسته‌بندی می‌نمایند.

در این روش، تنش پسماند در قطعات، به وسیله اندازه‌گیری تغییر شکل سوراخ مرجع تعیین می‌شود. یک مدل المان محدود برای شبیه‌سازی روش سوراخکاری عمیق در شکل (۱) نشان داده است [۱]. در مرحله اول روش سوراخکاری عمیق یک سوراخ کوچک در قطعه ایجاد می‌شود. در مرحله دوم قطر سوراخ به دقت به وسیله قطر سنج اندازه‌گیری می‌شود. اندازه‌گیری قطر سوراخ می‌بایست در زوایای مختلف و نیز در عمق‌های مختلف انجام شود. در مرحله سوم به طور هم محور با سوراخ مرجع، عملیات دایره‌سازی انجام می‌شود. عملیات دایره‌سازی شامل هر عملیاتی مانند سوراخکاری، اره‌کاری یا عملیات پخت می‌باشد که باعث بوجود آمدن تنش‌های اضافی در ماده شود. در نهایت در مرحله چهارم دوباره قطر سوراخ در همان زوایا و عمق‌های قبل اندازه‌گیری می‌شود. تغییرات قطر سوراخ بیانگر مقادیر تنش‌های پسماند ایجاد شده در نمونه می‌باشد.

پیش‌بینی رفتار چند لایه‌های کامپوزیتی و چگونگی توزیع تنش در آنها به پارامترهای گوناگونی بستگی دارند. حل‌های تحلیلی مختلفی موجود می‌باشند، که از تعدادی از آنها می‌توان برای بدست آوردن توزیع تنش در اطراف سوراخ با شکل‌های مختلف و تحت بارهای مختلف استفاده نمود. چگونگی توزیع تنش در اطراف سوراخ به درجات آزادی، هندسه سوراخ، خواص مواد، بارگذاری و چیدمان چندلایه بستگی دارد. در حل‌های تحلیلی انجام شده، شکل‌های مختلف سوراخ و بارگذاری‌های مختلف مطالعه شده است. اسمیت (Smith) [۱]، تغییر مکان‌ها در اطراف یک سوراخ دایره‌ای در یک ورق ارتوتروپ تحت تنش را تعیین نموده است. در این حل از رابطه بین تنش و کرنش برای بدست آوردن تنش‌های پسماند استفاده شده است. از این روش در مواردی می‌توان استفاده نمود که مدول برشی مواد نسبت به مدول یانگ، دارای مقدار کمتری باشد. لیخینسکی(Lekhnitskii) [۲] با روش سری‌ها، حل‌هایی را برای تنش در اطراف سوراخ با شکل‌های مختلف ارائه نموده است که البته بیشتر این حل‌ها تقریبی می‌باشند. ساوین (Savin) [۳]، با استفاده از نگاشت کانفرمال و فرمول شوارتز که بسیار ساده‌ترند، این مسائل را حل نموده است.



شکل (۱): مدل المان محدود برای شبیه‌سازی روش سوراخکاری عمیق

در تحقیقات انجام شده در چندلایه‌های نازک کامپوزیتی روش سوراخکاری مرکزی [۶-۴] استفاده می‌شود. در این روش کرنش‌سنج در فاصله مشخصی از مرکز سوراخ قرار دارد. با انجام عملیات سوراخکاری کرنش‌های رها شده توسط کرنش‌سنج روزت ثبت می‌شوند. روش سوراخکاری مرکزی در چندلایه‌های نازک توسط یکی از محققین این مقاله توسعه و ارائه شده است. لیکن روش سوراخکاری مرکزی برای چند لایه های ضخیم مناسب نبوده و لازم است روش سوراخکاری عمیق توسعه داده شود. مطابق استاندارد ASTM روش سوراخکاری مرکزی برای قطر مساوی عمق سوراخ قابل استفاده می‌باشد که با توجه به محدودیت ابعادی

کرنش‌سنج روزت، این روش حداکثر تا ضخامت ۲/۵ میلیمتر قابل استفاده است. در روش سوراخکاری عمیق، از کرنش‌سنج برای اندازه‌گیری کرنش استفاده نمی‌شود. در این روش، تغییرات قطر مدنظر قرار گرفته و جابجایی‌ها در لبه سوراخ محاسبه می‌شوند.

در این تحقیق، میدان تنش روی مرز سوراخ در یک چندلایه کامپوزیتی با استفاده از روش تحلیلی ساوین و روش تحلیلی لیخینسکی مطالعه و برای توسعه روش سوراخکاری عمیق عملیاتی شده است. با بنا نهادن شبیه‌سازی روش سوراخکاری عمیق (Simulated Deep Hole Drilling = SDHD)، نتایج عددی نیز مورد مطالعه قرار گرفته است. در نهایت نتایج دو روش تحلیلی ساوین و لیخینسکی با نتایج عددی SCHD مقایسه شده و صحت مطالعات انجام گرفته مورد ارزیابی قرار گرفته است.

## ۲- تحلیل روش سوراخکاری عمیق برای مواد ایزوترپ

برای مواد همگن، محاسبه تنش‌های پس‌ماند از تغییر شکل سوراخ بر اساس تئوری الاستیسیته بدست می‌آیند. در این روش جابجایی‌های شعاعی و مماسی در اطراف یک سوراخ در یک صفحه نامحدود تحت تنش صفحه‌ای به صورت زیر ارائه شده است [۲]:

$$u_r=\frac{1}{E}\sigma_0 a\left\{\left[(1+\nu)\frac{a}{2r}\right]+\left[(1-\nu)\frac{r}{2a}\right]+\left[(1+\nu)\frac{r}{2a}\left(1-\frac{a^4}{r^4}\right)+\frac{2a}{r}\right]\cos 2\theta\right\} \quad (۱)$$

$$u_\theta=\frac{\sigma_0 r}{2E}\left[(1+\frac{a^2}{r^2})^2+\nu(1-\frac{a^2}{r^2})^2\right]\sin 2\theta \quad (۲)$$

پارامتر $\sigma_0$ تنش، E مدول یانگ و $\upsilon$ ضریب پواسون است. در روش سوراخکاری عمیق، جابجایی شعاعی در لبه سوراخ به صورت زیر بیان می‌شود:

$$u_r|_{r=a}=\frac{\sigma_0 a}{E}(1+2\cos 2\theta) \quad (۳)$$

پارامتر $\overline{u}_r$ نشان دهنده تغییر شکل شعاعی بدون بعد در لبه سوراخ می‌باشد.

$$\overline{u}_r=\frac{\sigma_0}{E}(1+2\cos 2\theta) \quad (۴)$$

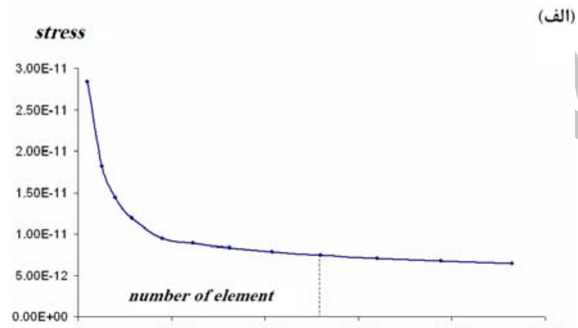
رابطه (۴) برای ترکیب تنش‌های عمودی و برش صفحه‌ای به صورت زیر توسعه می‌یابد.

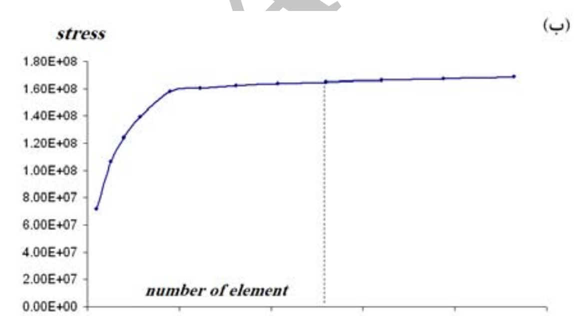
$$\overline{u}_r=\frac{1}{E}[(1+2\cos 2\theta)\sigma_x+(1-2\cos 2\theta)\sigma_y+(4\sin 2\theta)\tau_{xy}] \quad (۵)$$

روش سوراخکاری عمیق، مقادیر تغییر شکل‌های شعاعی را برای محاسبه مؤلفه‌های تنش پس‌ماند دور از سوراخ استفاده می‌شود.

## ۳- شبیه‌سازی روش سوراخکاری عمیق برای مواد ایزوتروپ

برای شبیه‌سازی روش سوراخکاری عمیق، از نرم افزار Ansys 11. استفاده شده است. یک مدل سه بعدی با ابعاد $10^{cm}\times10^{cm}\times2^{cm}$ و با سوراخی به قطر $1^{cm}$ ساخته شده است. جنس ورق از فولاد بوده و قطر سوراخ در مقایسه با ابعاد ورق کوچک می‌باشد، به‌صورتیکه ابعاد ورق نسبت به سوراخ، معادل یک ورق بی‌نهایت فرض شود. برای انتخاب درست تعداد و نوع المان متناسب با شرایط فیزیکی و هندسه مساله، همگرایی مدل مورد مطالعه قرار گرفته است. برای بررسی همگرایی مدل، با توجه به فیزیک سه بعدی مساله، المان سه‌بعدی Solid brick 45 انتخاب شده است. تست همگرایی برای ۱۲ حالت انجام شده است، که تعداد المان مدل از ۱۰۰۰ المان شروع شده و تحت بارگذاری مشخص، با افزایش تعداد المان، تغییر شکل و تنش برای چندین گره خاص از مدل ترسیم شده است. نتایج تنش و جابجایی برای یک گره در نمودار (۱) نشان داده شده است. هنگامیکه تعداد المان به حدود ۲۶۰۰۰ المان می‌رسد، تعداد المان مدل مناسب است.

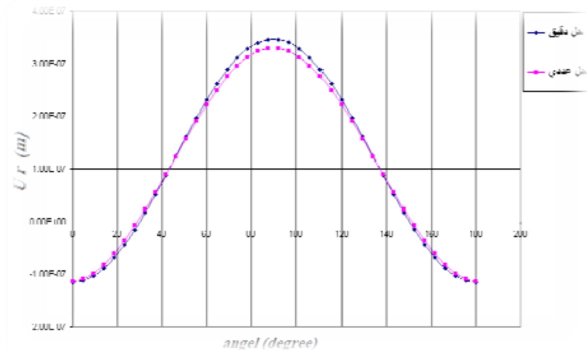


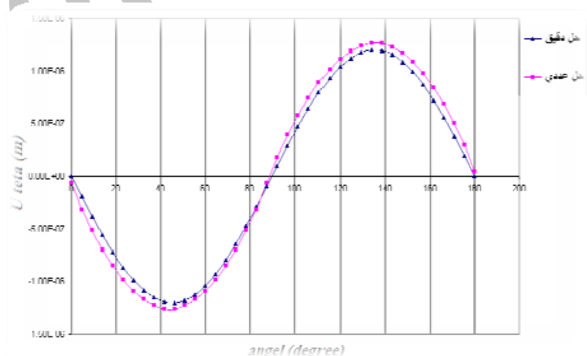

نمودار (۱): منحنی همگرایی المانها (الف) برای تغییر شکل (ب) برای تنش

برای یک ماده ایزوتروپ، مدل تحت دو بارگذاری تنش عمودی و تنش برشی در صفحه XY قرار گرفته است. نتایج حاصل از شبیه‌سازی روش سوراخکاری عمیق و حل تحلیلی با استفاده از

روابط فوق در نمودارهای (۲) و (۳) مقایسه شده‌اند. نمودارهای (۲) و (۳)، نشان دهنده منحنی‌های تغییر شکل شعاعی می‌باشند که از زاویه صفر تا ۱۸۰ درجه در لبه سوراخ ترسیم شده‌اند. مقایسه نتایج تحلیلی و عددی تطابق مناسبی را نشان می‌دهند و حداکثر خطای موجود در دو نمودار کمتر از ۵ درصد می‌باشد.




نمودار (۲): مقایسه حل عددی و حل تحلیلی برای حالت ایزوتروپ تحت تنش عمودی




نمودار (۳): مقایسه حل عددی و حل تحلیلی برای ماده ایزوتروپ تحت بارگذاری برشی

## ۴- تحلیل روش سوراخکاری عمیق برای مواد ارتوتروپ دارای سوراخ

حل تحلیلی روش سوراخکاری عمیق در مواد ارتوتروپیک را می‌توان مطابق مراحل نشان داده شده در شکل (۲)، توسعه داد. این شکل یک ساده‌سازی مفهومی از شکل (۱) و بیان کننده مراحل مختلف روش سوراخکاری عمیق برای مواد ارتوتروپ می‌باشد. با فرض رها شدن الاستیک کرنش‌ها، با محاسبه اختلاف مقادیر کرنش قبل و بعد از عملیات دایره‌سازی که به ترتیب در شکل‌های شماتیک (۲- ب) و (۲- الف) نشان داده شده است، مقادیر کرنش پس‌ماند بر روی مرز سوراخ تعیین می‌شود.

در شکل شماتیک (۲- ب)، برآیند تنش در مرز سوراخ صفر بوده و می‌توان این شکل را معادل با یک صفحه بدون سوراخ دانست. در این حالت مقدار کرنش با کرنش حول سوراخ فرضی در ورق ارتوتروپ برابر می‌باشد. تعیین مقدار کرنش در شکل (۲- ب) با استفاده از تئوری کلاسیک لایه‌ای امکان‌پذیر است. برای یک ورق ارتوتروپ تحت تنش صفحه‌ای، قانون عمومی هوک در حالت دو بعدی به صورت زیر می‌باشد:

$$\varepsilon_x=\frac{\sigma_x}{E_x}-\nu_{yx}\frac{\sigma_y}{E_y};\;\;\varepsilon_y=\frac{\sigma_y}{E_y}-\nu_{xy}\frac{\sigma_x}{E_x};\;\;\gamma_{xy}=\frac{\tau_{xy}}{G_{xy}} \qquad (۶)$$

برای بارگذاری تک‌محوره در راستای الیاف خواهیم داشت:

$$\varepsilon_x=\frac{p}{E_x};\;\;\varepsilon_y=-\nu_{xy}\frac{p}{E_x};\;\gamma_{xy}=0 \qquad (۷)$$

و هنگامیکه بارگذاری کششی در راستای عمود بر الیاف اعمال شود، خواهیم داشت:

$$\varepsilon_x=-\nu_{yx}\frac{p}{E_y};\;\;\varepsilon_y=\frac{p}{E_y};\;\;\gamma_{xy}=0 \qquad (۸)$$

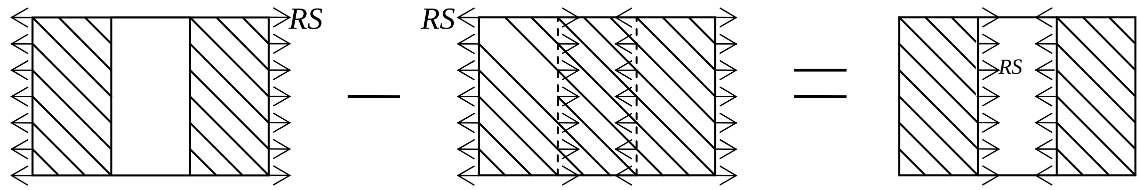
و برای بارگذاری برشی در صفحه XY خواهیم داشت:

$$\varepsilon_x=0;\;\;\varepsilon_y=0;\;\;\gamma_{xy}=\frac{p}{G_{xy}} \qquad (۹)$$

به این ترتیب مقادیر کرنش در جهات اصلی ماده تعیین می‌شوند. در روش سوراخکاری عمیق، جابجایی شعاعی در لبه سوراخ اهمیت می‌یابد. لذا با استفاده از ماتریس انتقال، پارامتر $\varepsilon_1$ که نشان‌دهنده کرنش شعاعی و پارامتر $\varepsilon_2$ که نشان‌دهنده کرنش محیطی در لبه سوراخ فرضی می‌باشد، تعیین خواهند شد. بنابراین داریم:

$$\begin{Bmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ \gamma_{12}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}m^2 & n^2 & -mn\\ n^2 & m^2 & mn\\ 2mn & -2mn & m^2-n^2\end{bmatrix}.\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix} \qquad (۱۰)$$

که در ماتریس فوق $m=\cos\theta$ و $n=\sin\theta$ می‌باشد. با استفاده از رابطه (۱۰) کرنش شعاعی در صفحه و در لبه سوراخ فرضی مورد مطالعه قرار گرفته است. در ادامه، توزیع تنش و کرنش در یک صفحه ارتوتروپ سوراخ‌دار که در شکل (۲-الف) نشان داده شده است، توسط روش‌های تحلیلی لیخینسکی و ساوین مورد مطالعه قرار می‌گیرد.




(ج): مقادیر کرنش پسماند (ب): مقادیر کرنش قبل از دایره‌سازی (الف): مقادیر کرنش بعد از دایره‌سازی

شکل (۲): مراحل حل تحلیلی برای تعیین مقادیر کرنش پس‌ماند در یک صفحه ارتوتروپ

## ۵- حل تحلیلی با استفاده از روش لیخینسکی

برای تعیین مولفه‌های تنش و کرنش در اطراف یک سوراخ دایره‌ای در یک صفحه ارتوتروپ، مؤلفه‌های تنش به صورت تابع تنش ایری $\varphi(x,y)$ بیان خواهند شد[۲]:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}; \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}; \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \qquad (۱۱)$$

با جاگذاری مؤلفه‌های کرنش در معادلات سازگاری، معادله بای‌هارمونیک برای مواد ارتوتروپ بر حسب تابع تنش $\varphi(x,y)$ بصورت رابطه (۱۲) بدست خواهد آمد:

$$\frac{1}{E_2}\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + \left(\frac{1}{G_{12}} - \frac{2\nu_{12}}{E_1}\right)\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{1}{E_1}\frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0 \qquad (۱۲)$$

در رابطه (۱۲) پارامترهای $E_2$، $E_1$ و $G_{12}$ مدول‌های یانگ و برشی در جهت‌های اصلی ماده می‌باشند و $\upsilon_{12}$ نیز نسبت پواسون اصلی ماده می‌باشد. حل معادله دیفرانسیل (۱۲)، وابسته به ریشه‌های معادله مشخصه آن می‌باشد که به صورت رابطه (۱۳) نشان داده شده است.

$$\mu^4 + \left(\frac{E_1}{G_{12}} - 2\nu_{12}\right)\mu^2 + \frac{E_1}{E_2} = 0 \qquad (۱۳)$$

با یافتن ریشه‌های معادله مشخصه (۱۳) و تعریف $\varphi(x,y) = \sum_{i=1}^{4} \varphi_i(z_i)$، رابطه (۱۳) به رابطه زیر تبدیل خواهد شد. پارامتر $z_i$ بصورت رابطه $z_i = x + \mu_i y$ تعریف شده است.

$$\begin{cases} \sigma_x = 2\,\mathrm{Re}\left[\mu_1^2 \dfrac{\partial^2 \varphi_1(z_1)}{\partial z_1^2} + \mu_2^2 \dfrac{\partial^2 \varphi_2(z_2)}{\partial z_2^2}\right] \\ \sigma_y = 2\,\mathrm{Re}\left[\dfrac{\partial^2 \varphi_1(z_1)}{\partial z_1^2} + \dfrac{\partial^2 \varphi_2(z_2)}{\partial z_2^2}\right] \\ \tau_{xy} = -2\,\mathrm{Re}\left[\mu_1 \dfrac{\partial^2 \varphi_1(z_1)}{\partial z_1^2} + \mu_2 \dfrac{\partial^2 \varphi_2(z_2)}{\partial z_2^2}\right] \end{cases} \qquad (۱۴)$$

توابع تحلیلی $\varphi(z_1)$ و $\psi(z_2)$ و مزدوج آنها را می‌توان به صورت روابط (۱۵) معرفی نمود.

$$\begin{cases} \dfrac{d\varphi_1(z_1)}{dz_1} = \Phi(z_1) \quad , \quad \dfrac{d\varphi_2(z_2)}{dz_2} = \Psi(z_2) \\ \dfrac{d\overline{\varphi_1(z_1)}}{d\bar{z}_1} = \overline{\Phi(z_1)} \quad , \quad \dfrac{d\overline{\varphi_2(z_2)}}{d\bar{z}_2} = \overline{\Psi(z_2)} \end{cases} \qquad (۱۵)$$

و با جایگذاری معادلات فوق در توابع تنش، رابطه (۱۴) را می‌توان به صورت رابطه (۱۶) بازنویسی نمود.

$$\begin{cases} \sigma_x = 2\,\mathrm{Re}\left[\mu_1^2\, \Phi'(z_1) + \mu_2^2\, \Psi'(z_2)\right] \\ \sigma_y = 2\,\mathrm{Re}\left[\Phi'(z_1) + \Psi'(z_2)\right] \\ \tau_{xy} = -2\,\mathrm{Re}\left[\mu_1\, \Phi'(z_1) + \mu_2\, \Psi'(z_2)\right] \end{cases} \qquad (۱۶)$$

در روش تحلیلی لیخینسکی، توابع $\varphi(z_1)$ و $\psi(z_2)$ با استفاده از روش سری‌ها مورد مطالعه قرار گرفته‌اند[۶]. مقدار تنش محیطی در یک صفحه ارتوتروپ سوراخدار، هنگامیکه نیروی کششی P در فاصله نسبتاً زیاد از محل سوراخ و با زاویه $\varphi$ نسبت به جهت اصلی ماده بر آن اعمال شود، از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} \sigma_\theta = p\frac{E_\theta}{E_1}\{&[-\cos^2\varphi + (k+n)\sin^2\varphi]k\cos^2\theta + \\ &+ [(1+n)\cos^2\varphi - k\sin^2\varphi]\sin^2\theta - \\ &- n(1+k+n)\sin\varphi\cos\varphi\sin\theta\cos\theta\} \end{aligned} \qquad (۱۷)$$

n حاصل جمع و k حاصل ضرب ریشه‌های معادله (۱۳) می‌باشند. مقادیر n و k نسبت به اینکه کدام جهت در ماده ارتوتروپیک مورد نظر باشد، تغییر خواهد کرد. $\Theta$ زاویه نسبت به جهت اصلی ماده، $E_1$ مدول الاستیک در جهت الیاف و $E_\theta$ مدول الاستیک نسبت به جهت اصلی ماده می‌باشد. حال اگر نیروی p در جهت الیاف بر صفحه ارتوتروپ اعمال شود، $\varphi$ برابر با صفر بوده و داریم:

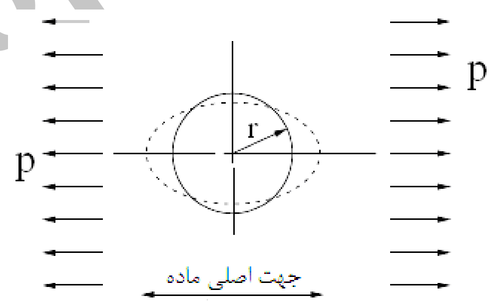
$$\sigma_\theta = p\frac{E_\theta}{E_1}[-k\cos^2\theta + (1+n)\sin^2\theta] \qquad (۱۸)$$

در این حالت مقادیر n و k از رابطه (۱۹) بدست می‌آیند.

$$k=\sqrt{\frac{E_1}{E_2}}\;;\qquad n=\sqrt{\left[2\left(\sqrt{\frac{E_1}{E_2}}-\nu_{12}\right)+\frac{E_1}{G_{12}}\right]} \qquad (۱۹)$$

همانگونه که در شکل (۳) نشان داده شده است، در شرایطی که ورق ارتوتروپ تحت نیروی کششی P قرار گرفته است، سوراخ دایره‌ای با شعاع r، تبدیل به یک بیضی با شعاع‌های بزرگ و کوچک a و b خواهد شد که مقادیر a و b از رابطه (۲۰) بدست خواهند آمد.

$$b=r\left[1-\frac{p}{\sqrt{E_1E_2}}\right]\;;\qquad a=r\left[1+\frac{p}{E_1}(1+n)\right] \qquad (۲۰)$$




شکل (۳) تغییر شکل سوراخ در یک ورق ارتوتروپیک تحت بارگذاری تک محوره

می‌توان تغییر شکل‌های شعاعی سوراخ را در زاویه صفر درجه به صورت رابطه (۲۱) بیان نمود.

$$u_r\mid_{\theta=0}=a-r=r\left[1+\frac{p}{E_1}(1+n)\right]-r=\frac{pr}{E_1}(1+n) \qquad (۲۱)$$

برای زاویه ۹۰ درجه نیز تغییر شکل های شعاعی بدون بعد سوراخ به صورت زیر می‌باشد.

$$\bar{u}_r\mid_{\theta=\pi/2}=-\frac{pr}{\sqrt{E_1E_2}} \qquad (۲۲)$$

برای حالتیکه بارگذاری در جهت عمود بر الیاف اعمال شود $(\varphi=\pi/2)$، مقدار تنش محیطی از رابطه زیر بدست می‌آید.

$$\sigma_\theta=p\frac{E_\theta}{E_1}k[(k+n)\cos^2\theta-\sin^2\theta] \qquad (۲۳)$$

حال برای بدست آوردن تغییر شکل های شعاعی در لبه سوراخ کافیست جای زیر نویس های "۱" و "۲" در روابط بالا عوض شوند. در این صورت مقدار تغییر شکل های شعاعی در زوایای صفر و ۹۰ درجه به صورت زیر خواهند بود.

$$\bar{u}_r\mid_{\theta=\pi/2}=\frac{pr}{E_2}(1+n');\qquad \bar{u}_r\mid_{\theta=0}=-\frac{pr}{\sqrt{E_1E_2}} \qquad (۲۴)$$

که در رابطه بالا داریم:

$$n'=\sqrt{\left[2\left(\sqrt{\frac{E_2}{E_1}}-\nu_{21}\right)+\frac{E_2}{G_{12}}\right]} \qquad (۲۵)$$

نتایج تحلیلی که با استفاده از روش لیخینسکی حاصل می‌شوند، در ادامه تحقیق با نتایج تحلیلی روش ساوین و نتایج عددی حاصل از شبیه سازی روش سوراخکاری عمیق (SDHD) مقایسه خواهند شد.

## ۶- حل تحلیلی با استفاده از روش ساوین

روابط تحلیلی ساوین برای اندازه‌گیری تنشهای پسماند در چندلایه‌های کامپوزیتی به روش سوراخکاری مرکزی توسعه داده شده است[۷]. لذا برای توسعه روش سوراخکاری عمیق در چند لایه‌های کامپوزیتی از بسط روابط میانی صرفنظر شده و نتایج مورد ارزیابی قرار گرفته‌اند. توزیع تنش در یک صفحه نامحدود که تحت اثر نیروی P بر واحد سطح و راستای $\alpha$ نسبت به محور x قرار دارد، توسط روابط زیر بیان می‌گردد [۳]:

$$\sigma_x^{(\infty)}=p\cos^2\alpha;\quad \sigma_y^{(\infty)}=p\sin^2\alpha;\quad \tau_{xy}^{(\infty)}=p\sin\alpha\cos\alpha \qquad (۲۶)$$

روش تحلیلی ساوین تا بدست آوردن رابطه (۱۶) مشابه روش تحلیلی لیخینسکی می‌باشد. اما در ر روش تحلیلی ساوین توابع تنش $\varphi(z_1)$ و $\psi(z_2)$ به صورت روابط زیر تعریف می‌شوند، که ۶ ثابت موجود در این روابط، در زوایای مختلف متغیر خواهند بود.

$$\begin{cases}\Phi(z_1)=[A\ln z_1+(B^*+iC^*)z_1+\varphi_0(z_1)]\\ \Psi(z_2)=[B\ln z_2+(B'^*+iC'^*)z_2+\psi_0(z_2)]\end{cases} \qquad (۲۷)$$

با اعمال شرایط مرزی و پس از عملیات ساده‌سازی، می‌توان مؤلفه‌های تنش را به صورت زیر تعیین نمود.

$$\begin{cases} \sigma_x = p\cos^2\alpha + 2\,\mathrm{Re}[\mu_1^{\,2}\varphi_0'(z_1) + \mu_2^{\,2}\psi_0'(z_2)] \\ \sigma_y = p\sin^2\alpha + 2\,\mathrm{Re}[\varphi_0'(z_1) + \psi_0'(z_2)] \\ \sigma_{xy} = p\sin\alpha\cos\alpha - 2\,\mathrm{Re}[\mu_1\varphi_0'(z_1) + \mu_2\psi_0'(z_2)] \end{cases} \qquad (۲۸)$$

در روابط فوق، مقادیر $\varphi_0(z_1)$ و $\psi_0(z_2)$ نسبت به نوع بارگذاری، متفاوت می‌باشند. در روش سوراخکاری مرکزی [۶-۵]، کرنش‌سنج در فاصله مشخصی از مرکز سوراخ قرار دارد. در روش سوراخکاری عمیق، از کرنش‌سنج برای اندازه‌گیری کرنش استفاده نمی‌شود. در این روش، تغییرات قطر مدنظر قرار گرفته و جابجایی‌ها در لبه سوراخ محاسبه می‌شوند. با قرار دادن $R=a$ در روابط ارائه شده برای روش سوراخکاری مرکزی [۱۰] مقادیر کرنش در لبه سوراخ برای سه حالت بارگذاری در جهت الیاف، بارگذاری در جهت عمود بر الیاف و بارگذاری برشی تعیین خواهند شد. با جایگذاری مؤلفه‌های کرنش در رابطه (۲۹) مقدار جابجایی بی‌بعد در لبه سوراخ تعیین می‌شوند.

$$\bar{u}_r = \cos^2\theta\ \varepsilon_x + \sin^2\theta\ \varepsilon_y + \sin\theta\cos\theta\ \varepsilon_{xy} \qquad (۲۹)$$

نتایج عددی مقادیر جابجایی روش تحلیلی ساوین در ادامه این تحقیق با روش تحلیلی لیخینسکی و شبیه‌سازی روش سوراخکاری عمیق (SDHD) در چندلایه‌های کامپوزیتی ضخیم مقایسه شده و مورد ارزیابی قرار گرفته است.

## ۷- شبیه‌سازی روش سوراخکاری عمیق برای مواد ارتوتروپ

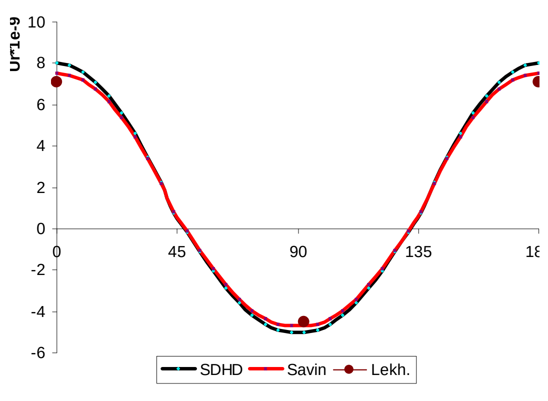
ایجاد یک سوراخ در یک صفحه که تنش‌های پسماند در آن محبوس است، سبب آزاد سازی تنش‌های پسماند در اطراف سوراخ می‌گردد. تنش‌های پسماند رهاشده توسط تفاوت بین توزیع تنش‌های پسماند در یک صفحه سوراخ‌دار و توزیع تنش‌های پسماند در صفحه قبل از ایجاد سوراخ بیان می‌گردند. لذا با فرض رها شدن الاستیک کرنش‌ها، تفاوت بین کرنش‌های صفحه پس از سوراخکاری و کرنش‌های صفحه قبل از سوراخکاری بیانگر کرنشه‌ای رها شده می‌باشد. با استفاده از اصل برهم‌نهی، با بکار بردن توزیع تنش مساوی و مخالف با توزیع تنشهای پسماند محبوس در نمونه، کرنش‌های رهاشده با کرنش‌های اندازه‌گیری شده از روش سوراخکاری یکسان خواهند بود [۶].

روش‌های ارایه شده در این تحقیق کلی بوده و برای هر ماده ارتوتروپیک قابل استفاده می‌باشد. لیکن برای مدلسازی المان محدود نیاز به خواص ماده بوده که کربن/ اپوکسی انتخاب شده است. برای نوع چیدمان نیر باید چند لایه ارتوتروپ انتخاب شود که برای سادگی کار از چیدمان متعامد استفاده شده است. برای شبیه‌سازی روش سوراخکاری عمیق (SDHD) با توجه به نتایج همگرایی مدل، چند لایه‌های کامپوزیتی ضخیم توسط المان سه‌بعدی لایه‌ای Solid 46 مدل شده و جهت اعمال فشار به دیواره‌های سوراخ، از المان سازه‌ای سه بعدی Surf 154 استفاده شده است.

خواص الاستیک کربن / اپوکسی AS/3501 در جدول (۱) بیان شده است. یکی از چیدمان‌های مورد مطالعه نیز $[0_{12}/90_{12}]$ به ضخامت تقریبی ۸ میلیمتر می‌باشد. سه نوع بارگذاری تنش در جهت الیاف، تنش در جهت عمود بر الیاف و تنش برشی بر روی مدل اعمال شده است. آنگاه نتایج جابجایی بر روی لبه سوراخ مورد مطالعه قرار گرفته و به همراه نتایج تحلیلی در نمودارهای (۴) (۵) و (۶) ترسیم شده است.

جدول (۱): ثوابت الاستیک ماده کربن/ اپوکسی AS/3501 [۲]

| $E_x$ (GPa) | $E_y$ | $E_z$ | $\nu_{xy}$ | $\nu_{xy}$ | $\nu_{xy}$ | $G_{xy}$ (GPa) | $G_{xy}$ | $G_{xy}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 138.00 | 8.96 | 8.96 | 0.30 | 0.55 | 0.30 | 7.10 | 5.00 | 7.10 |

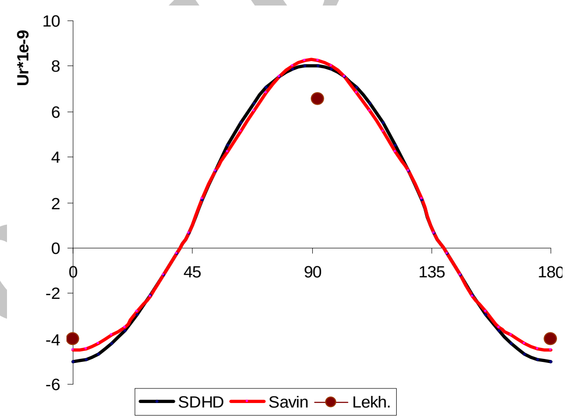



نمودار (۴): تغییر شکل شعاعی بر حسب زاویه برای حل‌های عددی و تحلیلی تحت بارگذاری در جهت محور X

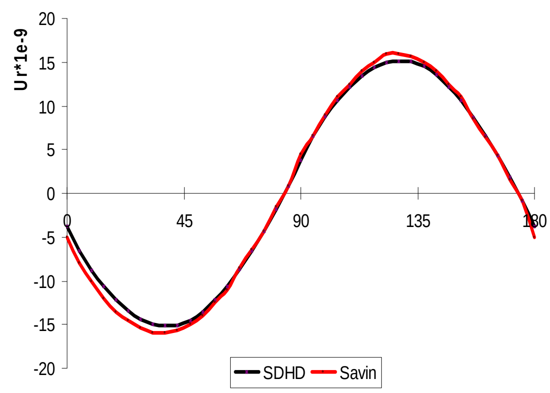
نمودار (۴) و (۵) تغییر شکل شعاعی لبه سوراخ را در یک چندلایه ضخیم کامپوزیتی بر حسب زاویه نشان می‌دهد. روابط ارائه شده توسط لیخینسکی که توسط Bateman و همکاران [۷ و ۸] نیز

مورد توجه قرار گرفته است، تنها سه نقطه در زوایای صفر، ۹۰ و ۱۸۰ درجه را نشان می‌دهد. لیکن شبیه‌سازی روش سوراخکاری عمیق (SDHD) و روش تحلیلی ساوین که هر دو روش در این تحقیق بیان شده است، تغییر شکل شعاعی لبه سوراخ را بصورت پیوسته در محیط دایره بیان می‌نماید.

بیشترین اختلاف روش تحلیلی لیخینسکی با شبیه‌سازی روش سوراخکاری عمیق (SDHD) در نمودار (۴) برابر ۱۱ درصد و در نمودار (۵) برابر ۱۵ درصد می‌باشد، در صورتیکه حداکثر اختلاف روش تحلیلی ساوین با روش SDHD در نمودار (۴) برابر ۶ درصد و در نمودار (۵) برابر ۹ درصد می‌باشد.




نمودار (۵): تغییر شکل شعاعی بر حسب زاویه برای حل‌های عددی و تحلیلی تحت بارگذاری در جهت محور Y




نمودار (۶): تغییر شکل شعاعی بر حسب زاویه برای حل‌های عددی و تحلیلی تحت بارگذاری برشی

نمودار (۶) تغییر شکل شعاعی لبه سوراخ را تحت بارگذاری برشی نشان می‌دهد. حل تحلیلی لیخینسکی [۲ و ۷]، معادلات مشخصی برای برش ارائه نمی‌دهد، لیکن هر دو روش مورد مطالعه در این تحقیق تغییر شکل شعاعی لبه سوراخ را بصورت پیوسته در محیط دایره بیان می‌نماید، که حداکثر اختلاف دو روش برابر ۱۲ درصد می‌باشد که در ناحیه نسبتاً گسترده ای نیز این اختلاف به شدت کاهش یافته است.

## ۸- نتیجه‌گیری

کرنش‌های رها شده اطراف یک سوراخ در یک ماده همگن، به فرم مثلثاتی است. تغییر شکل سوراخ نیز در یک ماده ایزوتروپیک، با استفاده از تئوری الاستیسیته بدست می‌آید که در مقایسه با شبیه‌سازی روش سوراخکاری عمیق (SDHD) خطایی کمتر از ۷ درصد دارد. در یک ماده ارتوتروپ کرنش‌های رها شده اطراف یک سوراخ به فرم مثلثاتی نمی‌باشند. برای توسعه روش سوراخکاری عمیق در چند لایه‌های کامپوزیتی دو روش تحلیلی لیخینسکی و ساوین برای مطالعه تغییر شکل سوراخ دایره‌ای در حضور تنش‌های پسماند استفاده شده و نتایج آنها با نتایج عددی SDHD مقایسه شده است. در حالیکه روش تحلیلی لیخینسکی فقط در سه زوایه مشخص و در دو حالت بارگذاری عمودی جابجایی را در اطراف سوراخ معین می‌نماید، روش تحلیلی ارائه شده در این تحقیق که بر پایه معادلات ساوین ارائه شده است جابجایی را بصورت پیوسته در محیط سوراخ و در سه حالت بارگذاری صفحه‌ای تعیین می‌نماید. مقایسه نتایج تحلیلی ساوین و لیخینسکی با نتایج عددی SDHD بیانگر اختلاف کمتر نتایج روش تحلیلی ساوین می‌باشد. نتایج ارائه شده نشان می‌دهد که روش سوراخکاری عمیق می تواند به نحو مطلوبی به وسیله روابط تحلیلی ارائه شده در این تحقیق بر پایه معادلات ساوین و شبیه‌سازی روش سوراخکاری عمیق (SDHD) که در این تحقیق بنا نهاده شده است، برای تعیین تعیین تنش‌های پسماند در کامپوزیت‌های پایه پلیمری ضخیم مورد استفاده قرار گیرد.

## ۹- مراجع

[1] D. George, D.J. Smith, “Through thickness measurement of residual stresses in a stainless steel cylinder containing shallow and deep weld repairs”, International Journal of Pressure Vessels and Piping, 82, pp.279–287, 2005.

[2] S. G. Lekhnitskii, Anisotropic Plates, 1956.

[3] Savin GN., Stress Concentration around Holes, New York, Pergamon Press, 1961.

[4] Shokrieh, M. M. and Ghasemi, A. R., “Determination of Calibration Factors of the Hole Drilling Method for Orthotropic Composites using an Exact Solution”,

Journal of Composite Materials, Vol 41, No. 19, pp.2293-2311, 2007.

[5] Shokrieh, M. M. and Ghasemi, A. R., “Simulation of Central Hole Drilling Process for Measurement of Residual Stresses in Isotropic, Orthotropic and Laminated Composites Plates”, Journal of Composite Materials, Vol 41, No. 4, pp.435-452, 2007.

[6] Ghasemi, A. R. and Shokrieh, M. M, “Development of an Integral Method for Determination of Non-uniform Residual Stresses in Laminated Composites”, Journal of International Polymer of Science and Technology, Vol. 21, No.4, pp.347-355, 2008.

[7] M.G. Bateman., O.H. Millera., T.J. Palmera, C.E.P. Breena and E.J. Kingston., “Measurement of Residual Stress in Thick Section Composite Laminates Using the Deep-hole Method”, International Journal of Mechanical Science, 47, pp.1718-1739, 2005.

[8] M.G. Bateman., O.H. Millera., T.J. Palmera, C.E.P. Breena and E.J. Kingston., “Measurement of Residual Stress in Thick Section Composite Laminates Using the Deep-hole Method”, International Journal of Mechanical Science, 47, pp.1718-1739, 2005.

[9] Antonio Baldi, “Full field methods and residual stress analysis in orthotropic material. II: Nonlinear approach”, International Journal of Solids and Structures, 44, pp.8244–8258, 2007.

[10] Ghasemi, A. R., “Determination of Residual Stresses in Composite laminates”, Ph. D Thesis, Iran University of Science and Technology, 2006.