JMRA

مجله پژوهش و کاربرد در مکانیک،
سال اول، شماره اول، بهار ۸۸، ۱۰ـ۱

تحلیل دینامیکی ربات هیبرید 3PRS-RRP

علیرضا رمضانی فر[۱]، حسن ظهور[۲]، سید علی اکبر موسویان[۳]

(تاریخ دریافت: ۸۷/۳/۶- تاریخ پذیرش: ۸۷/۹/۲۵)

چکیده: در این مقاله با استفاده از ماتریس انتقال دناویت- هارتنبرگ و جبر ماتریسها روش جدید و دقیقی برای تحلیل سینماتیک و دینامیک ربات موازی 3PRS و هیبرید (موازی-سری) 3PRS-RRP ارائه شده است. در ابتدا، خواص انواع رباتها مقایسه شده‌اند. در ادامه، پس از معرفی پارامترهای دناویت- هارتنبرگ و جدولهای مربوط به پارامترها، با استفاده از جبر برداری و ماتریسی روش حل سینماتیک مستقیم و معکوس و نقاط تکین توضیح داده شده و با استفاده از روش لاگرانژ معادلات دینامیک بدست آمده‌اند. در پایان برای اندازه‌های مشخص و با فرض یک حرکت دورانی برای نقطه وسط سکوی متحرک ربات موازی و دو ورودی سینماتیکی برای ربات سری، چند منحنی سینماتیکی و دینامیکی برای بررسی نقاط تکین رسم شده‌اند. به طور کلی حل سینماتیک مستقیم رباتهای موازی و حل سینماتیک معکوس رباتهای سری مشکل می باشند. برای راحتی کار با این گونه رباتهای هیبرید بهتر است در حالت سینماتیک مستقیم از ربات موازیی استفاده شود که سکوی متحرک حرکت خطی داشته و در جهت فضا دهی و استحکام بخشی بکار رود و یا اینکه کارکرد سری و موازی از نظر زمانی استقلال داشته باشند.

واژه‌های کلیدی: ربات هیبرید، ربات صنعتی، حل سینماتیک

Dynamic Analysis of Hybrid Robot 3PRS-RRP

Alireza Ramezanifar, Hassan Zohoor, Aliakbar Moosavian

Abstract: In this article a new and an accurate method for kinematic and dynamic analysis of a parallel robot 3PRS and a hybrid robot (parallel and serial) 3PRS-RRP are presented, which is based on the Denavit-Hartenberg transformation matrix algebra. First, basic properties of various kinds of robots are compared, and then the Denavit-Hartenberg parameters and their table are introduced. Next, the methods of forward and inverse kinematic are explained and system dynamic equations are obtained by Lagrange method. Finally for defined sizes and with imagination of a rotational movement for the center point of the moving plate of parallel robot and two input kinematic for serial robot, a few kinematic and dynamic results for parallel and serial robot by Newton and Lagrange methods are presented for singularity consideration. Generally, the forward kinematic solution of parallel robots and inverse kinematic solution of serial robots are difficult. For these hybrid robots, it would be better to use parallel robots, which have linear movement on the moving plate in the forward mode to increase the space and strength, or the two robots be time independent.

Keywords: Hybrid Robot, Industrial Robot, Kinematic Solution

---

۱. کارشناس، دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب (ramezanifar@yahoo.com)

۲. استاد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه شریف (zohoor@sharif.edu)

۳. دانشیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه خواجه نصیرالدین طوسی (moosavian@kntu.ac.ir)

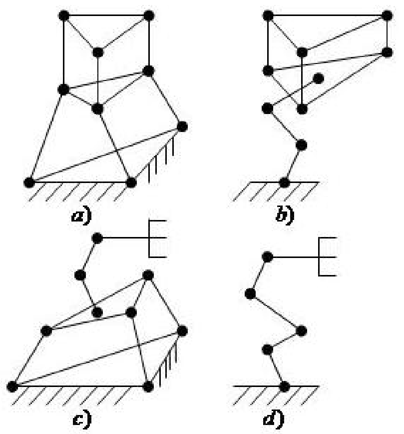
۱. مقدمه

رباتهای صنعتی به دو صورت عمده رواج یافته‌اند:

۱- زنجیره ای یا سری ۲- موازی

در ربات سری، رابطها به دنبال هم با اتصالات از زمین تا نقطه انتهایی به هم وصل می شوند مانند رباتهای PUMA، در حالی که در ربات موازی رابط انتهایی با دو یا چند زنجیره سینماتیکی مستقل به زمین متصل است و یک یا چند حلقه بسته سینماتیکی تشکیل می دهند مانند رباتهای Stewart [۱]. رباتهای موازی نسبت به رباتهای سری دارای سفتی، دقت، سرعت کاری، تکرار پذیری و نسبت بار به وزن بیشتر و مناسبتری بوده، ولی در عوض دارای فضای کاری وچابکی [1] کمتری هستند [۱].

البته طراحی ربات موازی و تحلیل تکینگی [2] آن مشکل تر از ربات سری و تحلیل سینماتیک مستقیم ربات موازی به مشکلی تحلیل سینماتیک معکوس ربات سری است. پژوهشگران در تلاش بوده‌اند که با ترکیب این دو نوع ربات مزیتهای هر دو را بدست آورند. این ساختارهای ترکیبی (هیبرید) در چهار نوع کلی وجود دارند [۲]:



شکل۱. انواع ربات هیبرید

۱- موازی- موازی: شکل (1-a) که سفتی و وزن کم را بهبود داده و سرعت کاری را بالا می برد [۳].

۲- سری- موازی: شکل (1-b) که برای سیستمهای کوچک، پهنای باند و دقت عملکرد را بهتر می کند [۴].

۳- موازی- سری: شکل (1-c) پایداری و استحکام قسمت سری افزایش می یابد.

۴- سری- سری: شکل (1-d)که همان ربات سری محسوب می شود. البته می توان رباتهای هیبرید با ساختار متغیر با زمان مانند رباتهای راه رونده را به آنها اضافه کرد.

S. Lee و S. Kim سینماتیک معکوس سرعت برای انواع رباتهای هیبرید را با استفاده از تصویر بردار سرعت ارائه کرده‌اند [۲]. ربات موازی 3PRS [3] رباتی شناخته شده است که در دستگاههای CNC [4]، CMM [5] و CPR [6] کاربرد دارد. Y. Li و Q. Xu تحلیل سینماتیکی ربات 3PRS در حالت پایه هرمی با روش پیچشی را ارائه و با حل سینماتیک مستقیم با استفاده از روش نیوتن-رافسون ، فضای کاری و چابکی را محاسبه کرده‌اند [۵]. برای ربات 3PRS ماتریس سفتی در [۶]، حل برداری برای پایه ستونی بدون نیاز به بررسی و حذف جوابها در [۷]، حساسیت سکوی متحرک نسبت به تمام پارامترهای ساختاری برای حالت پایه ستونی در [۸]، بهینه‌سازی برای سه حالت ساختاری در [۹]، کنترل به وسیله نرم‌افزار JAVA 3D در [۱۰] و فضای کاری در [۱۱] بررسی شده است. در مقایسهٔ ساختارهای سری، از نظر طراحی هندسی بین روباتهای RRP-RPR-PRR ، نوع RRP در حالتی که مفصلهای R بر هم عمود ومتقاطع باشند با سه نقطه دلخواه انتهایی قابل ساخت است، در صورتی که برای بقیه به چهار نقطه نیاز است که به آن T-jointیا U-joint گفته می شود و در شانه ربات بکار می رود [۱۲]. در اکثر مقالات از روش برداری پیچشی و ماتریسهای ژاکوبین ۶*۶ برای تحلیل سینماتیکی استفاده شده است ولی در اینجا از پارامترها و ماتریسهای دناویت- هارتنبرگ ۴*۴ برای تحلیل سینماتیکی و دینامیکی بدون استفاده از ماتریسهای ژاکوبی استفاده می‌شود و قابل تعمیم به همه رباتها می باشد.

در این پژوهش ربات هیبریدی مورد نظر است که ۶ درجه آزادی داشته باشد، لذا از **3PRS** به عنوان ربات موازی و از **RRP** در حالت T-joint برای ربات سری استفاده شده است. در ادامه، پس از معرفی پارامترهای دناویت- هارتنبرگ و جدولهای پارامترهای مربوطه، با استفاده از جبر برداری و ماتریسی روش حل سینماتیک مستقیم و معکوس و نقاط تکین ارائه شده اند. برای بررسی دینامیک سیستم، با استفاده از روش لاگرانژ معادلات دینامیک بدست آمده‌اند. در پایان برای اندازه‌های مشخص با فرض یک ورودی دورانی برای نقطه وسط سکوی متحرک ربات موازی و دو ورودی سینماتیکی برای ربات سری، منحنی های دینامیکی رسم و نیز دو نقطه تکین مشخص شده‌اند.در این مقاله برای رسم شکلها از از نرم افزار MATLAB7 و برای رسم شکل ربات از نرم افزار SOLIDWORKS استفاده شده است.

۲. معرفی ربات و روش کار

ربات 3PRS-RRP از یک ربات موازی هرمی متصل به زمین 3PRS و در نقطه مرکزی سکو یک ربات سری RRP تشکیل می‌یابد (شکل ۲)، که اتصال کشویی با P، لولایی با R و کروی با S نشان داده می‌شود. طبق معیار گروبلر درجهٔ آزادی روبات برابر است با:

$$DOF = \eta(n-i-1)+\sum_{i=1}^{g} f_i \qquad (۱)$$

DOF : درجه آزادی ربات n : تعداد لینکها

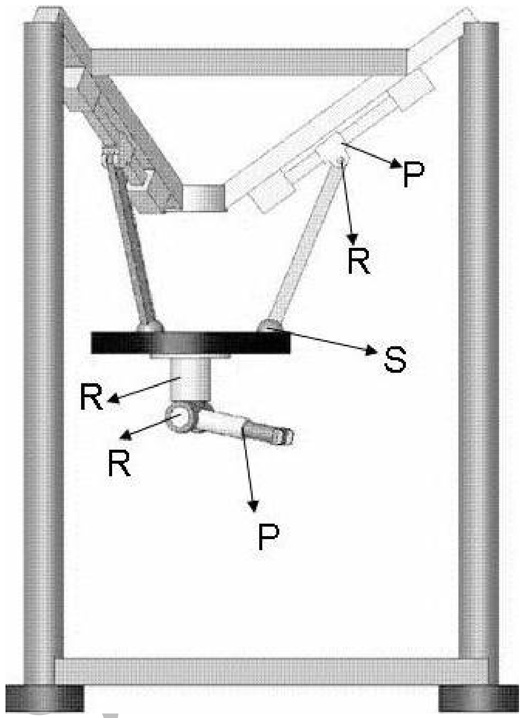
i: تعداد اتصالات $\eta = 6$: درجه فضا

f_i : درجه آزادی هر مفصل برای ربات موازی

DOF1=6 (8-9-1) +15=3

برای ربات سری DOF2=3 بنابراین درجه آزادی کل روبات هیبرید برابر است با: DOF=DOF1+DOF2=6

1. dexterity
2. singularity
3. Prismatic, Revolute, Spherical
4. Computer Numerical Control
5. Coordinate Measuring Machines
6. Cardio Pulmonary Resuscitation



شکل ۲. ربات هیبرید 3PRS-RRP

۳. ماتریس انتقال

برای توصیف حرکت هر نقطه ازمیله ها یک دستگاه مختصات بـه آن متصل می شود بطوریکه محـور Z از چهـار چـوب $\{i\}$ کـه Z_i نامیـده می‌شـود، منطبـق برمحـور مفـصلی i و محـور X_i از چهـارچوب $\{i\}$ در راستای عمود مشترک Z_i و Z_{i+1} قرار می گیرد و جهت آن از رابط i به سوی رابط i+1 باشد. T_i^{i-1} ماتریس تبدیلی است که مختصات مفـصل i را به i-1 تبدیل می کند و می‌توان نوشت:

$$T_i^{i-1}.[X_i]=[X_{i-1}] \quad (۲)$$

$$T_N^0=T_1^0.T_2^1......T_N^{N-1} \quad (۳)$$

که می‌توان بدست آورد [۱۳]:

$$T_i^{i-1}=\begin{bmatrix} C\theta_i & -S\theta_i & 0 & a_{i-1} \\ S\theta_i C\alpha_{i-1} & C\theta_i C\alpha_{i-1} & -S\alpha_{i-1} & -d_i S\alpha_{i-1} \\ S\theta_i S\alpha_{i-1} & C\theta_i S\alpha_{i-1} & C\alpha_{i-1} & d_i C\alpha_{i-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (۴)$$

C:Cos
S:Sin

فاصله بین Z_i و Z_{i+1} در راستای X_i : a_i

زاویه بین Z_i و Z_{i+1} حول X_i : α_i

فاصله بین X_{i-1} و X_i در راستای Z_i : d_i

زاویه بین X_{i-1} و X_i حول Z_i : θ_i

برای بررسی بهتر ربات را بصورت وارونه در نظر گرفته و مفصل کروی سه مفصل کشویی فرض می‌شود. جدول (۱) پارامترهای دناویت-هارتنبرگ را برای روبات مورد نظر نشان می‌دهد. همانگونه که در جدول(۱) و شکل (۳) دیده می‌شود، برای آنکه بتوانیم ماتریس انتقال سکوی متحرک را با ماتریس زاویه های اویلر منطبق کنیم ماتریس انتقال را تا موازی شدن نظیر به نظیر دستگاه با مبدا پیش می بریم.

جدول ۱. پارامترهای دناویت-هارتنبرگ ربات موازی

I	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i	θ_i
1	0	0	0	120(k-1)
2	0	r_1	0	0
3	0	0	0	-90
4	$90-\psi$	0	0	0
5	0	a_5	d_{k5}	90
6	-90	a_6	0	$\theta_{k6}-90$
7	0	0	0	θ_{k7}
8	-90	0	0	$\theta_{k8}+90$
9	90	0	0	θ_{k9}
10	0	r_2	0	0
11	-90	0	0	0
12	0	0	0	-120(k-1)+90

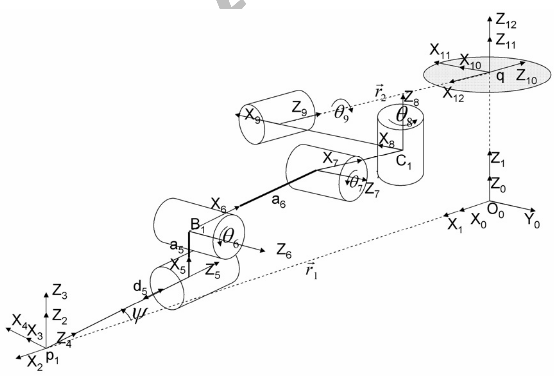
۴. قیدهای هندسی

اگر ماتریس دوران سکو و نقطه q نسبت به O_0 و زاویه های اویلر را با محورهای ثابت در نظر بگیریم:

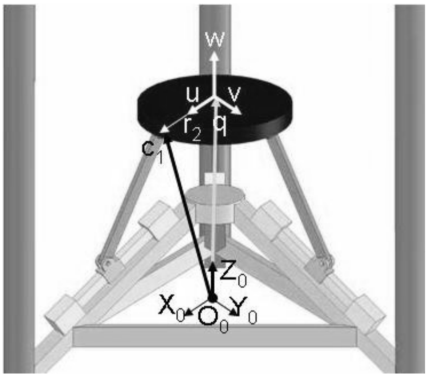
$${}_q^{O}T_{ZXY}(\gamma,\beta,\alpha)=$$
$$\begin{bmatrix} C\alpha C\gamma+S\alpha S\beta S\gamma & S\alpha S\beta C\gamma-C\alpha S\gamma & C\beta S\alpha & q_x \\ C\beta S\gamma & C\beta C\alpha & -S\beta & q_y \\ -S\alpha C\beta+C\alpha S\beta S\gamma & C\alpha S\beta C\gamma+S\alpha S\gamma & C\beta C\alpha & q_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (۵)$$

اگر دستگاه uvw متـصل بـه سـکو و مطـابق شـکل (۴) مـوازی بـا $X_0Y_0Z_0$ متصل به زمین در نظر گرفته شود، داریم:

$$T_{ZXY}(\gamma,\beta,\alpha)=\begin{bmatrix} u_x & v_x & w_x & q_x \\ u_y & v_y & w_y & q_y \\ u_z & v_z & w_z & q_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (۶)$$



شکل ۳ . نمایش مختصات پارامترهای دناویت-هارتنبرگ در ربات موازی



شکل ۴. دستگاه uvw متصل به سکو

مطابق شکل (۴) در دستگاه ثابت $X_0Y_0Z_0$ روابط برداری زیر قابل بهره‌برداری است:

$$\overrightarrow{O_0c_k} = \vec{r}_{2k/O} + \overrightarrow{O_0q} \tag{۷}$$

$$\vec{r}_{2k/O} = {}^{O}_{q}T_{ZXY}.\vec{r}_{2k/q} \tag{۸}$$

$$\vec{r}_{21/q} = \begin{bmatrix} r_2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \tag{۹}$$

$$\vec{r}_{22/q} = \begin{bmatrix} -r_2/2 & \sqrt{3}r_2/2 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \tag{۱۰}$$

$$\vec{r}_{23/q} = \begin{bmatrix} -r_2/2 & -\sqrt{3}r_2/2 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \tag{۱۱}$$

با توجه به رابطه ۱۵ و۱۶ بردارهای P بدست می آیند.

$$\overrightarrow{O_0c_1} = \begin{bmatrix} q_x + r_2u_x \\ q_y + r_2u_y \\ q_z + r_2u_z \end{bmatrix} \tag{۱۲}$$

$$\overrightarrow{O_0c_2} = \begin{bmatrix} q_x - \frac{r_2}{2}u_x + \frac{\sqrt{3}}{2}r_2v_x \\ q_y - \frac{r_2}{2}u_y + \frac{\sqrt{3}}{2}r_2v_y \\ q_z - \frac{r_2}{2}u_z + \frac{\sqrt{3}}{2}r_2v_z \end{bmatrix} \tag{۱۳}$$

$$\overrightarrow{O_0c_3} = \begin{bmatrix} q_x - \frac{r_2}{2}u_x - \frac{\sqrt{3}}{2}r_2v_x \\ q_y - \frac{r_2}{2}u_y - \frac{\sqrt{3}}{2}r_2v_y \\ q_z - \frac{r_2}{2}u_z - \frac{\sqrt{3}}{2}r_2v_z \end{bmatrix} \tag{۱۴}$$

قید اینگونه اعمال می شود که اتصال کروی تنها در صفحه پایه هرم حرکت کند:

$$c_{1y} = 0 \Rightarrow q_y + r_2u_y = 0 \tag{۱۵}$$

$$c_{2y} = -\sqrt{3}c_{2x} \Rightarrow$$

$$q_x - \frac{r_2}{2}u_x + \frac{\sqrt{3}}{2}r_2v_x = -\sqrt{3}(q_x - \frac{r_2}{2}u_x + \frac{\sqrt{3}}{2}r_2v_x) \tag{۱۶}$$

$$c_{3y} = \sqrt{3}c_{3x} \Rightarrow$$

$$q_x - \frac{r_2}{2}u_x - \frac{\sqrt{3}}{2}r_2v_x = \sqrt{3}(q_x - \frac{r_2}{2}u_x - \frac{\sqrt{3}}{2}r_2v_x) \tag{۱۷}$$

با حذف q از روابط ۱۵، ۱۶ و ۱۷ نتیجه می‌شود:

$$v_x = u_y \tag{۱۸}$$

در نتیجه:

$$-C\alpha S\gamma + S\beta S\alpha C\gamma = C\beta S\gamma \tag{۱۹}$$

از (۱۶+۱۷):

$$q_x = \frac{r_2}{2}(u_x - v_y) \tag{۲۰}$$

در نتیجه:

$$q_x = \frac{r_2}{2}(C\alpha C\gamma + S\beta S\gamma S\alpha - C\beta C\gamma) \tag{۲۱}$$

از (۱۵) بدست می آید:

$$q_y = -r_2u_y \tag{۲۲}$$

$$q_y = -r_2C\beta S\gamma \tag{۲۳}$$

۵. سینماتیک مستقیم

۱-۵. مکان

نقاط c_k یک مثلث تشکیل می‌دهند. از طول هر مثلث معادله زیر تشکیل می شود:

$$\left|c_kc_{k+1}\right| = f_k\left(\rho_{k,1}\sin(\theta_{k,6}), \rho_{k,2}\sin(\theta_{k+1,6}),\ldots \rho_{k,3}\cos(\theta_{k,6}), \rho_{k,4}\cos(\theta_{k+1,6})\right) = 3r_2^2 \tag{۲۴}$$

k=1,2,3

$\rho_{k,i}$ تابعی از پارامترهای طراحی می باشند.

با قرار دادن روابط تانژانت نصف قوس:

$$\sin(\theta_i) = \frac{2t_i}{1+t_i^2}$$

$$\cos(\theta_i) = \frac{1-t_i^2}{1+t_i^2}$$

$$t_i = \tan(\frac{\theta_i}{2})$$

بدست می آید:

$$\begin{cases} A(t_2)\ t_3^{\ 2} + B(t_2)\ t_3 + C(t_2) = 0 \\ D(t_1)\ t_3^{\ 2} + E(t_1)\ t_3 + F(t_1) = 0 \\ G(t_1)t_2^2 + H(t_1)t_2 + I(t_1) = 0 \end{cases} \tag{۲۵}$$

بعد از حل دستگاه (۲۶) با استفاده از (۳) مختصات نقاط c_1، c_2 و c_3 محاسبه می‌شوند.

$$q = \frac{c_1 + c_2 + c_3}{3} \quad (۲۶)$$

$$\vec{u} = \frac{c_1 - q}{r_2} \quad (۲۷)$$

$$\vec{v} = \frac{c_2 - c_3}{\sqrt{3}r_2} \quad (۲۸)$$

$$\alpha = A\tan 2(w_x, w_z) \quad (۲۹)$$

$$\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} \quad (۳۰)$$

$$\beta = A\tan 2(-w_y, \sqrt{u_x^2 + u_y^2}) \quad (۳۱)$$

$$\gamma = A\tan 2(u_y, v_y) \quad (۳۲)$$

برای محاسبه زاویه‌های θ_{k7}، θ_{k8} و θ_{k9} بدین صورت عمل می‌شود که از قیدهای هندسی (رابطه‌های ۱۹ و ۲۱)، یک دستگاه معادله بدست می‌آید:

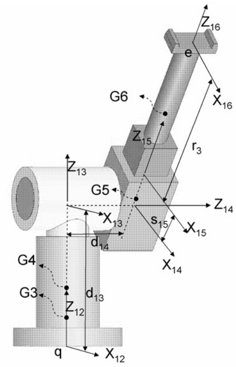
$$\begin{cases} {}^{0}_{12}T_k(1,4) = q_x \\ {}^{0}_{12}T_k(2,4) = q_y \end{cases} \quad (۳۳)$$

با حل عددی دستگاه، θ_{k7} و θ_{k8} بدست می‌آیند. قید هندسی (رابطه ۱۸) بدست می دهد:

$${}^{0}_{12}T_k(1,2) = {}^{0}_{12}T_k(2,1) \quad (۳۴)$$

که با حل عددی آن، θ_{k9} بدست می آید. پس از مشخص شدن زاویه‌های اویلر، ${}^{O}_{q}T_{ZXY}(\gamma, \beta, \alpha)$ و با ضرب آن در ماتریس انتقال ربات زنجیری، ${}^{q}_{e}T$، با استفاده از جدول (۲) و شکل (۵)، بردار مکان نقطه انتهایی e بدست می آیند:

$${}^{O}_{e}T = {}^{O}_{q}T \; {}^{q}_{e}T \Rightarrow {}^{O}_{e}T = {}^{O}_{q}T \; {}^{12}_{16}T \quad (۳۵)$$



شکل ۵. مختصات دناویت- هارتنبرگ رباتRRP

جدول ۲. پارامترهای دناویت- هارتنبرگ ربات سری

i	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i	θ_i
13	0	0	d_{13}	θ_{13}
14	0	-90	d_{14}	θ_{14}
15	0	90	$d_{15} = s_{15}$	0
16	0	0	r_3	0

۵-۲. سرعت

اگر از دو طرف رابطه (۳۶) نسبت به زمان مشتق گرفته شود :

$${}^{O}_{e}\dot{T} = {}^{O}_{q}\dot{T} \; {}^{12}_{16}T + {}^{O}_{q}T \; {}^{12}_{16}\dot{T} \quad (۳۶)$$

با داشتن ورودی‌های $\dot{d}_{15}$، $\dot{d}_{25}$ و $\dot{d}_{35}$:

$$\vec{V}_{C_k} = \frac{d}{dt}(c_k) \quad (۳۷)$$

از مشتق‌گیری نسبت به زمان طرفین رابطه (۸):

$$\vec{V}_{C_K} = \frac{d}{dt}({}^{O}_{q}T \, \vec{r}_{2k/q}) \quad (۳۸)$$

از رابطه‌های ۳۷ و ۳۸ نتیجه می شود:

$$\frac{d}{dt}(c_k) = \frac{d}{dt}({}^{O}_{q}T \, \vec{r}_{2k/q}) \quad (۳۹)$$

از مساوی قرار دادن مولفه‌های بردارهای رابطه ۳۹، ۹ معادله خطی با مجهولات $\dot{q}_x$، $\dot{q}_y$، $\dot{q}_z$، $\dot{\alpha}$، $\dot{\beta}$، $\dot{\gamma}$، $\dot{\theta}_{16}$، $\dot{\theta}_{26}$ و $\dot{\theta}_{36}$ داریم که با حل آنها سرعت نقطه انتهایی بدست می‌آید. برای محاسبه $\dot{\theta}_{k7}$ و $\dot{\theta}_{k8}$ از دو طرف دستگاه (۳۳) نسبت به زمان مشتق گرفته و با حل دستگاه بدست می‌آیند. برای محاسبه $\dot{\theta}_{k9}$ از دو طرف معادله (۳۴) نسبت به زمان مشتق می‌گیریم و معادله را حل می‌کنیم.

۵-۳. شتاب

اگر از دو طرف رابطه ۳۵ نسبت به زمان دو بار مشتق گرفته شود با زاویه‌ها و سرعتهای معلوم و ورودی‌های $\ddot{d}_{k5}$، $\ddot{s}_{15}$، $\ddot{\theta}_{14}$، $\ddot{\theta}_{13}$، شتاب e:

$${}^{O}_{e}A = {}^{O}_{q}T \; {}^{12}_{16}\ddot{T} + 2 \; {}^{O}_{q}\dot{T} \; {}^{12}_{16}\dot{T} + {}^{O}_{q}\ddot{T} \; {}^{12}_{16}T \quad (۴۰)$$

برای بدست آوردن مجهولات شتاب مانند قسمت سرعت ولی با دو بار مشتق گیری عمل می کنیم.

۶. سینماتیک معکوس

در این بخش با مشخص بودن ماتریس مکان ${}^{O}_{e}T$ نقطه انتهایی، مقدار ورودیهای موقعیتی که شامل d_{k5}، s_{15}، θ_{13} و θ_{14} هستند محاسبه می‌شوند.

$${}^{0}_{e}R = {}^{O}_{q}R \; {}^{12}_{16}R \quad (۴۱)$$

در نتیجه:

$${}^{0}_{q}R = {}^{0}_{e}R \; {}^{12}_{16}R^{-1} \quad (۴۲)$$

در طرف چپ معادله ۴۲، هیچ متغیری معلوم نیست ولی قیدهای ۱۸، ۲۰ و ۲۲ در طرف راست معادله ۴۲ نیز باید صدق کنند در نتیجه :

$${}^{0}_{e}R \; {}^{12}_{16}R^{-1} = \Omega \quad (۴۳)$$

$$\begin{cases} \Omega(1,2) = \Omega(2,1) \\ e_x - r_{xe/q} = \dfrac{r_2}{2}(\Omega(1,1) - \Omega(2,2)) \\ e_y - r_{ye/q} = -r_2\Omega(2,1) \end{cases} \quad (۴۴)$$

با حل دستگاه ۴۴، متغیرهـای مجهـول θ_{13}، θ_{14} و s_{16} و پـس از آن q_x، q_y و q_z مشخص می‌شوند:

$$\vec{q} = \vec{e} - \vec{r}_{e/q} \qquad (۴۵)$$

اکنون که طرف راست معادله ۴۲ مشخص گردید، با نوشتن سه معادله قید برای طرف چپ آن معادله ${}^{0}_{q}R$ و با حـل سـه معادلـه سـه مجهـول متغیرهای مجهول α، β و γ که زاویه‌هـای اویلـر هـستند، محاسـبه می‌شوند.

با استفاده از رابطه‌های ۷ و ۸ مولفه‌هـای بردارهـای $\overrightarrow{O_0c_k}$ بدسـت مـی‌آینـد، از طرفـی بـا اسـتفاده از جـدول (۱) و رابطـه‌هـای ۲ و ۳، مختصات B_k بدست می‌آیند.

$$\left|O_0C_k\right|^2 + \left|\hat{B}_k\right|^2 = \left|C_kB_k\right|^2 = a_6^{\,2} \qquad (۴۶)$$

حل معادله درجه دو (رابطه ۴۶)، انـدازه و جهـت d_{k5} را مـی‌دهـد. بقیـه زاویه‌ها مانند حالت مستقیم بدست می‌آیند.

با مشخص بودن همـه مکانهـا و زاویـه‌هـا و مـاتریس سـرعت نقطـه انتهـایی e، ورودیهـای سـرعتی شـامل $\dot{d}_{k5}$، $\dot{s}_{15}$، $\dot{\theta}_{13}$ و $\dot{\theta}_{14}$ محاسبه می‌شوند. با مشتق گیری از رابطه ۴۱ نسبت به زمان:

$${}^{O}_{q}\dot{R} = ({}^{o}_{e}\dot{R} - {}^{O}_{q}R\,{}^{12}_{16}\dot{R})\,{}^{12}_{16}R^{-1} \qquad (۴۷)$$

با توجه به اینکه مشتق قیدها نسبت به زمان در طرف راست معادلـه ۴۷ برقرار است برای طرف چپ نیز بر قرار است و در نتیجه:

$$\begin{cases} {}^{O}_{q}\dot{R}(1,2) = {}^{O}_{q}\dot{R}(2,1) \\ \dot{q}_x = \dot{e}_x - \dot{r}_{xe/q} = \dfrac{r_2}{2}({}^{O}_{q}\dot{R}(1,1) - {}^{O}_{q}\dot{R}(2,2)) \\ \dot{q}_y = \dot{e}_y - \dot{r}_{ye/q} = -r_2\,{}^{O}_{q}\dot{R}(2,1) \end{cases} \qquad (۴۸)$$

دستگاه سه معادله خطـی ۴۸ بـا مجهـولات $\dot{s}_{15}$، $\dot{\theta}_{13}$ و $\dot{\theta}_{14}$ تـشکیل می‌شود که با محاسبه آنها، $\dot{q}_x$، $\dot{q}_y$ و $\dot{q}_z$ بدست، می‌آیند.

با نوشتن مشتق معادلات قید برای سمت چـپ معادلـه ۴۷، معـادلات قید ${}^{O}_{q}\dot{R}$ و حل آن دستگاه، $\dot{\alpha}$، $\dot{\beta}$ و $\dot{\gamma}$ سرعتهای زاویـه ای اویلـری بدست می آیند.

با توجه به رابطه ۳۹، داریم:

$${}^{O}_{q}V\, r_{2k/q} = \frac{d}{dt}(c_k) \qquad (۴۹)$$

برابری مولفه‌های اول و سوم معادله ۴۸ (چون استقلال خطی دارند) به مـا $\dot{d}_{k5}$ و $\dot{\theta}_{k6}$ را می‌دهند. بقیه سرعتهای زاویـه‌ای ماننـد حالـت مـستقیم بدست می آیند.

با مشخص بودن همه مکانها و زاویه‌هـا و سـرعتها و مـاتریس شـتاب نقطـه انتهـایی ${}^{O}_{e}A$، شـتاب‌هـای ورودی $\ddot{d}_{k5}$، $\ddot{s}_{15}$، $\ddot{\theta}_{14}$ و $\ddot{\theta}_{13}$ محاسبه می‌شوند. برای این کار از دو طرف رابطه ۳۸ نسبت به زمان دو بار مشتق می‌گیریم:

$${}^{O}_{q}\ddot{R} = ({}^{O}_{e}\ddot{R} - 2\,{}^{O}_{q}\dot{R}\,{}^{12}_{16}\dot{R} - {}^{O}_{q}R\,{}^{12}_{16}\ddot{R})\,{}^{12}_{16}R^{-1} \qquad (۵۰)$$

ادامه کار همانند حالت سرعت است بطوری که از معادلات قید و مکان دو بار مشتق می‌گیریم.

در پایان این بخش لازم به ذکر است کـه نقـاط تکـین داخلـی ربـات موازی ۴ نوع می‌باشد [۵]:

۱- وقتی رابطهای میله ای بر پایـه هرمـی عمـود باشـند کـه در حالـت $\theta_{k6} = 90$ اتفاق می افتد،

۲- وقتی رابطهای میله ای با سکوی متحرک در یک راستا قـرار بگیرنـد که در حالت $\theta_{k7} = 0$ اتفاق می‌افتد،

۳- وقتی حالتهای ۱ و ۲ با هم اتفاق بیافتند.

۴- وقتی سکوی متحرک بطور کامل وارونه شود که به این حالت نقطـه تکین قیدی می‌گویند.

۷. مدلسازی دینامیک به روش لاگرانژ

برای بررسـی دینامیـک سیـستم، بـا اسـتفاده از روش لاگرانـژ، ابتـدا لاگرانژین سیستم را می‌نویسیم:

$$\mathrm{L = K - U} \qquad (۵۱)$$

که در آن K انرژی جنشی کل:

$$K = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}\vec{\omega}_i^{\,T}\,[I]_{gi}\,\vec{\omega}_i + \frac{1}{2}\vec{V}_{gi}^{\,T} m_i \vec{V}_{gi} \qquad (۵۲)$$

و U انرژی پتانسیل کل:

$$U = -\sum_{j=1}^{n} m_j \vec{g}.\vec{r}_{g\,j} \qquad (۵۳)$$

$$\vec{g} = \begin{bmatrix}0 & 0 & 9.8\end{bmatrix}^T \qquad (۵۴)$$

n: تعداد رابط و در نتیجه معادله لاگرانژ:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_j} = \qquad (۵۵)$$

$$Q_j + \sum_{i=1}^{R} \lambda_i \frac{\partial \Gamma_i}{\partial q_j} \quad for \;\; j = 1 \;\; to \;\; n \qquad [۱۵و۱۶]$$

R: تعداد قیدهای غیرهلونومیک[1]، F: تابع استهلاک

Q: نیروی تعمیم یافته[2] و q: مختصات تعمیم[3] می‌باشند.

$$Q_j = \sum_{j=1}^{n} \vec{F}_i^{\circ} . \frac{\partial \vec{F}_j}{\partial q_j} \qquad (۵۶)$$

$\vec{F}_i^{\circ}$: نیروهای موثر بـر ذره i و $\vec{r}_i$: بـردار مختـصات تعمـیم‌یافتـه بـرای سیستم غیرهلونومیک [۱۶]

اگر اصطکاک از نوع ویسکوز باشد، تـابع اسـتهلاک رایلـی، [۱۵]، بـه صورت زیر خواهد بود:

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, \ldots, q_n) \qquad (۵۷)$$

D: ماتریس استهلاک خطی

H: ماتریس استهلاک دورانی

1. Nonholonomic
2. Generalized Forces
3. Generalized Coordinates

در حالت بدون اصطکاک ربات هیبرید ۱۲ مختصات تعمیم یافته و ۶ درجه آزادی دارد و در نتیجه R=۱۲-۶، معادله قید نیاز می‌باشد. در اینجا مختصات تعمیم یافته عبارتند از:

$$q_1 = d_{15},\ q_2 = d_{25},\ q_3 = d_{35},$$
$$q_4 = \alpha,\ q_5 = \beta,\ q_6 = \gamma,$$
$$q_7 = q_x,\ q_8 = q_y,\ q_9 = q_z,$$
$$q_{10} = \theta_{13},\ q_{11} = \theta_{14},\ q_{12} = s_{15}$$

معادلات قید اندازه:

$$\Gamma_k(d_{k5}, \alpha, \beta, \gamma, q_x, q_y, q_z) = \left|B_k C_k\right| \quad (۵۸)$$

معادلات قید مکان:

$$\Gamma_4 = -C\alpha S\gamma + S\beta S\alpha C\gamma - C\beta S\gamma \quad (۵۹)$$

$$\Gamma_5 = \frac{r_2}{2}(C\alpha C\gamma + S\beta S\gamma S\alpha - C\beta C\gamma) - q_x \quad (۶۰)$$

$$\Gamma_6 = r_2 C\beta S\gamma + q_y \quad (۶۱)$$

اگر نیروها و گشتاورهای اصطکاکی در مفصل‌های کروی و لولایی نیز لازم باشند، ۱۲ مختصات تعمیم یافته دیگر و در نتیجه ۱۲ معادله قید دیگر نیاز است.

$$\Gamma_{k+6}(\theta_{k+1,6}, d_{k+1,5}, \theta_{k6}, d_{k5}) = \left|C_k C_{k+1}\right| \quad (۶۲)$$

۹ معادله دیگر از معادلات۳۳ و ۳۴ بدست می‌آیند. اگر از اصطکاک چشم‌پوشی شود، معادلات دینامیکی حاصل از رابطه ۵۵ به صورت ارائه شده در پیوست خواهد بود، که در آن F: نیروی کار انداز و T: گشتاور راه‌انداز و $\vec{r}_g$: بردار مکان مرکز جرم هر رابط است.

۸. حرکت ربات در حالت تغییر α

در این حالت فرض می شود که ربات با اندازه‌های زیر داریم:

$$\psi = \frac{\pi}{6}, r_1 = 400mm, r_2 = 200mm$$
$$r_3 = 30mm, a_5 = 50mm, a_6 = 550mm$$
$$d_{13} = 50mm, d_{14} = 0, m_3 = 26.514kg$$
$$m_1 = 1.146kg, G_1 = 34mm$$
$$m_2 = 1.034kg, G_2 = 290mm$$
$$m_4 = 1.464kg, G_4 = 50mm$$
$$m_5 = 0.01kg, G_5 = 13mm$$
$$m_6 = 0.01kg, G_6 = 53mm$$

F_{11}، F_{21} و F_{31}: نیروی اعمالی به اتصال کشویی پایه‌ها

F_6: نیروی اعمالی به اتصال کشویی ۶ ربات سری

$\tau_{4,5}$: گشتاور اعمالی به اتصالات لولایی ۴ و ۵ ربات سری

نقطه q واقع در وسط سکو در یک ارتفاع ثابت حول محور v از صفر تا ۹۰ درجه و با سرعت ۱ درجه در ثانیه و شتاب زاویه‌ای صفر در حال دوران است. با استفاده از معادلات قید (۱۹، ۲۱ و ۲۳)، معادلات سینماتیکی به این صورت خواهد بود.

$$q_x = \frac{r_2}{2}(\cos(\alpha) - 1) \quad (۶۳)$$
$$\beta = \gamma = \dot{\beta} = \dot{\gamma} = \ddot{\beta} = \ddot{\gamma} = \ddot{\alpha} = 0$$
$$q_y = \dot{q}_y = \ddot{q}_y = \dot{q}_z = \ddot{q}_z = 0$$
$$\dot{\alpha} = 1\deg/\ s$$

$$\dot{q}_x = -\frac{r_2}{2}\sin(\alpha)\dot{\alpha} \quad (۶۴)$$

$$\ddot{q}_x = -\frac{r_2}{2}\cos(\alpha)\ddot{\alpha} \quad (۶۵)$$

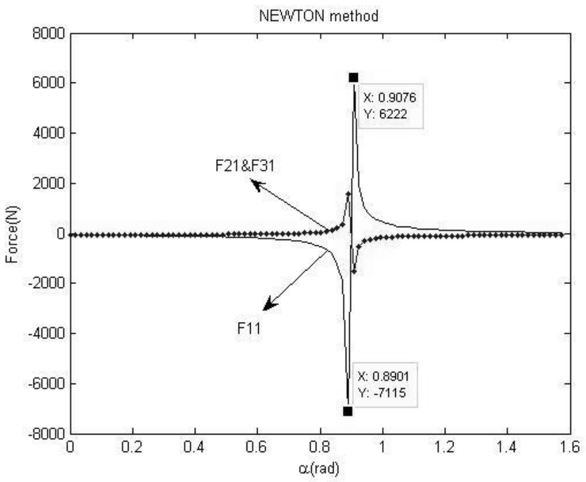
در ادامه فرض می‌کنیم که سکوی متحرک مانعی برای دوران نیست و همچنین:

$$\theta_{13} = \dot{\theta}_{13} = \ddot{\theta}_{13} = \ddot{\theta}_{14} = 0$$
$$\dot{\theta}_{14} = 5\deg/s$$

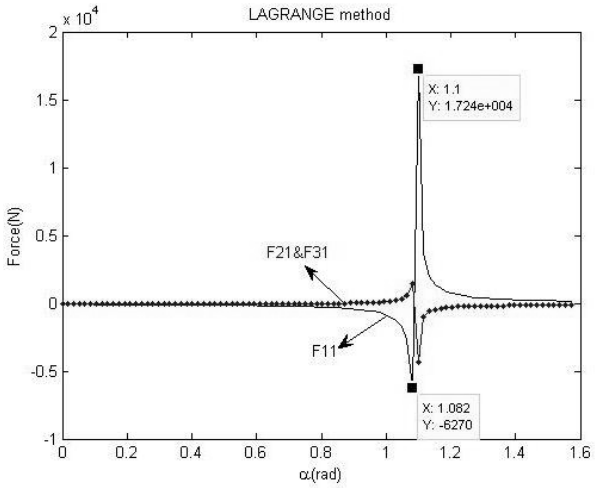
$\theta_{14} = \alpha$ از صفر تا ۹۰ درجه دوران می کند.

$$\dot{s}_{15} = \alpha\, mm/s$$
$$\ddot{s}_{15} = 0\, mm/s^2$$
$$q_z = 525.6mm$$

شکل (۶) نشان می دهد که با استفاده از روش نیوتن در $\alpha \approx 52^\circ \approx 0.9rad$ نیروی F_{11} به سمت اعداد بزرگ میل می‌کند و در نتیجه یک نقطه تکین می باشد که در اثر هم راستایی میله و سکوی متحرک به وجود آمده است و دلیل آن هم شکل (۸) است که θ_{17} به صفر میل می کند. همچنین در این نقطه: $\alpha = \theta_{16} + \psi$. در شکل (۹) در نقطه مذکور شکل d_{15} در حال تغییر جهت است. اما در شکل (۷) که با استفاده از روش لاگرانژ بدست آمده نقطه تکین $\alpha \approx 63.1^\circ \approx 1.1rad$ است.

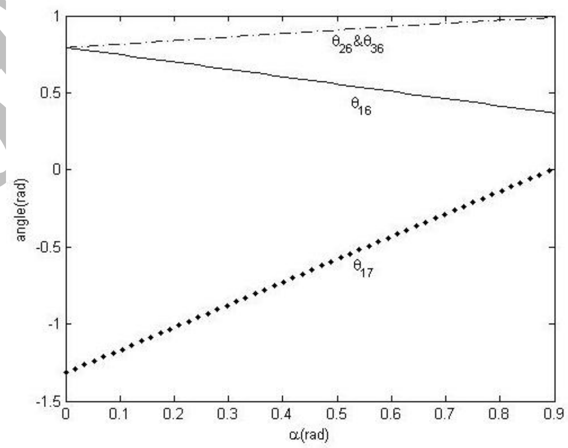


شکل ۶. تغییر نیروهای پایه نسبت به α با استفاده از روش نیوتن

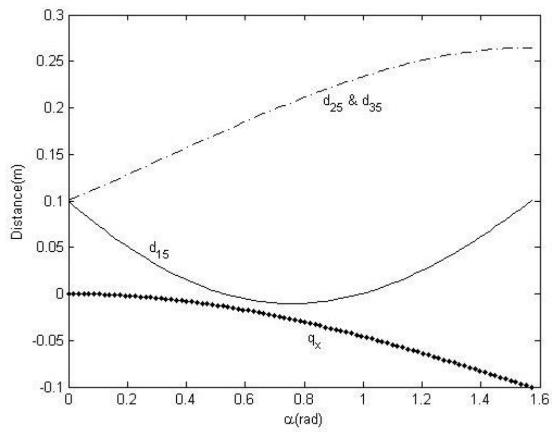


شکل ۷. تغییر نیروهای پایه نسبت به α با استفاده از روش لاگرانژ

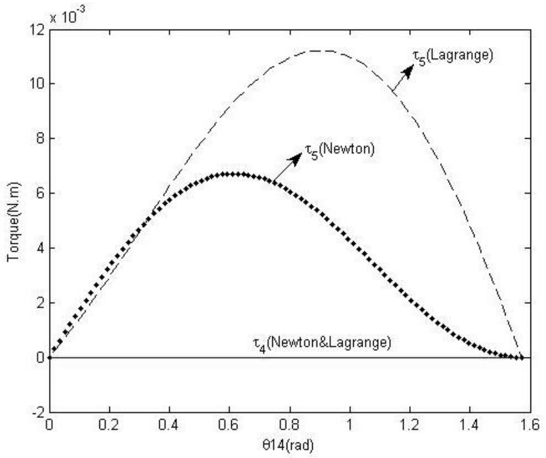
شکل‌های (۶)، (۷) و (۱۰) نشان دهنده اختلاف در مکان نقطه تکین و در مقدار نیروها در دو روش هستند، در حالی که در شکل (۱۱) هر دو روش بر هم منطبقند که علت آن خطای محاسباتی ناشی از توابع مثلثاتی در روش لاگرانژ، بویژه در ناحیه تکینگی است.



شکل ۸. تغییر زاویه پایه و نقطه q نسبت به α



شکل ۹. تغییر مکانهای پایه و نقطه q نسبت به α



شکل ۱۰. تغییر گشتاورها در ربات سری نسبت به θ_{14}

۹. حرکت ربات در حالت تغییر β

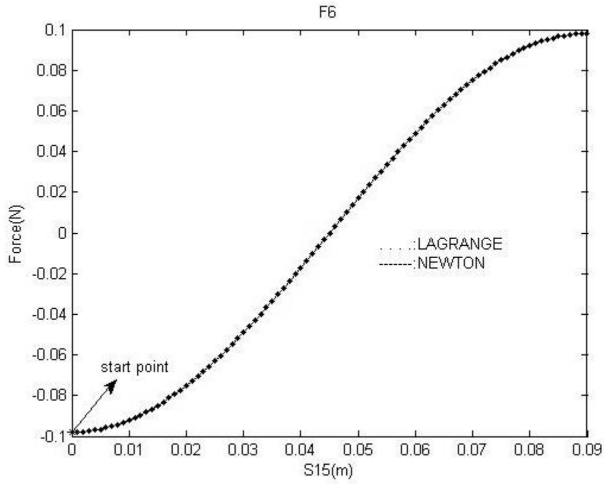
در این حالت فرض می شود که ربات با اندازه های قبلی است و نقطه q واقع در وسط سکو در یک ارتفاع ثابت حول محور u از صفر تا ۹۰ درجه و با سرعت ۱ درجه در ثانیه و شتاب زاویه ای صفر در حال دوران است. با استفاده از معادلات قید (۲۰، ۲۲ و۲۴)، معادلات سینماتیکی به این صورت خواهد بود.

$$q_x = \frac{r_2}{2}(1 - \cos(\beta)) \tag{۶۶}$$

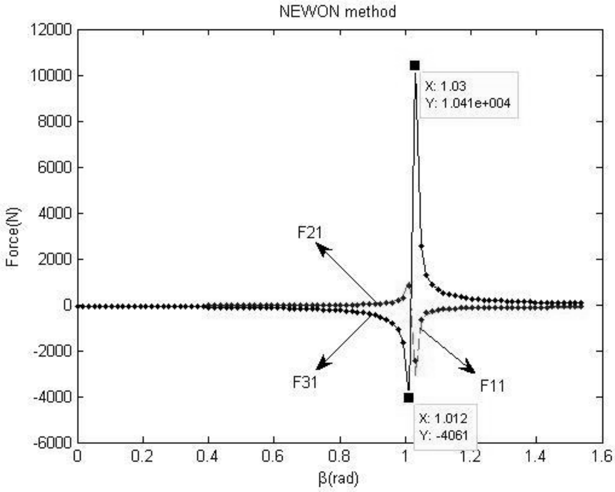
$$\alpha = \gamma = \dot{\alpha} = \dot{\gamma} = \ddot{\alpha} = \ddot{\gamma} = 0$$
$$\ddot{\beta} = 0$$
$$q_y = \dot{q}_y = \ddot{q}_y = \dot{q}_z = \ddot{q}_z = 0$$
$$\dot{\beta} = 1\deg/s$$

$$\dot{q}_x = \frac{r_2}{2}\sin(\beta)\dot{\beta} \tag{۶۷}$$

$$\ddot{q}_x = \frac{r_2}{2}\cos(\beta)\ddot{\beta} \tag{۶۸}$$



شکل ۱۱. نیروی نیوتنی و لاگرانژی F_6 نسبت به s_{15}



شکل ۱۲. تغییر نیروهای پایه نسبت به β با روش نیوتن

مانند قبل فرض می کنیم کـه سـکوی متحـرک مـانعی بـرای دوران نیست و همچنین:

$$\theta_{13}=\dot{\theta}_{13}=\ddot{\theta}_{13}=\dot{\theta}_{14}=0$$

$$\dot{\theta}_{14}=5\deg/s$$

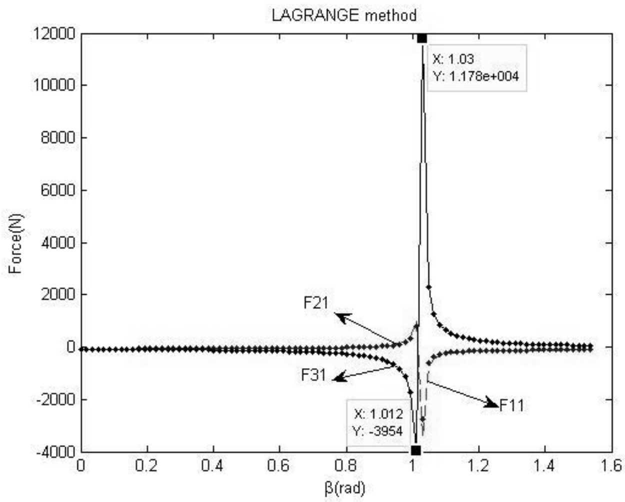
$\theta_{14}=\beta$ از صفر تا ۹۰ درجه دوران می کند.

$$\ddot{s}_{15}=0$$

$$\dot{s}_{15}=\beta\, mm/s$$

.$q_z=525.6mm$ و $\beta_{\max}\approx 57^\circ\approx 1rad$

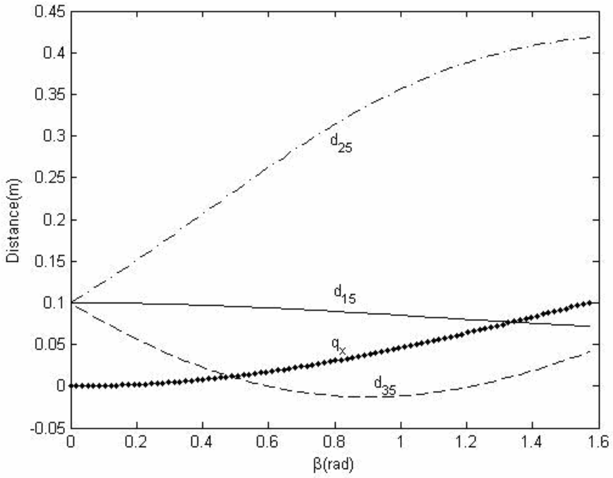
شکل نیروهای وارد بر عملگرها را برحسب β تا حدود ۹۰ درجـه بـا دو روش نیوتن و لاگرانژ رسم می کنیم.



شکل ۱۳. تغییر نیروهای پایه نسبت به β با روش لاگرانژ

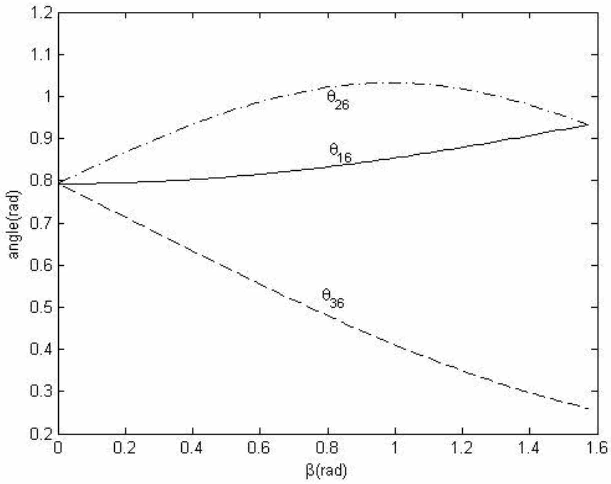
در این حالت شکل‌های (۱۲) و (۱۳) پرش ناگهانی نیرو و نقطه تکین را بـا دو روش نشان می‌دهند که هر دو روش بـرخلاف حالـت ۸ یـک نقطـه را برای مجانب شدن مشخص می‌کنند ولی به علت خطای محاسـباتی روش لاگرانژ دارای خطا بویژه در ناحیه تکین است.

شکل‌های (۱۴) و (۱۵) نشان می‌دهند که در این نقطه، شکل d_{35} و θ_{26}، تغییر جهت می‌دهند (نقطه اکسترمم).

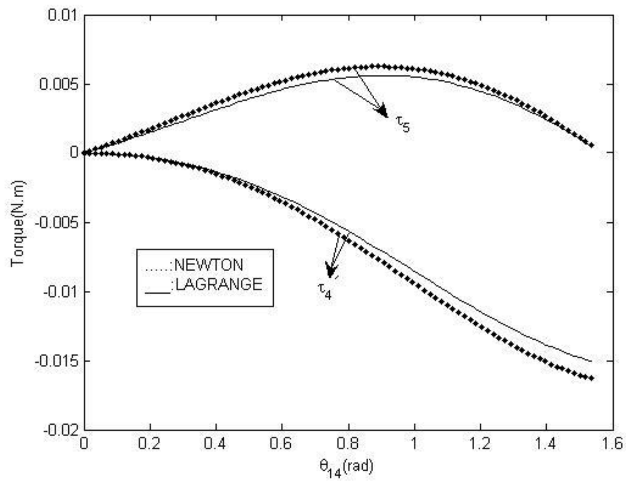


شکل ۱۴. تغییر مکانهای پایه و نقطه q نسبت به β

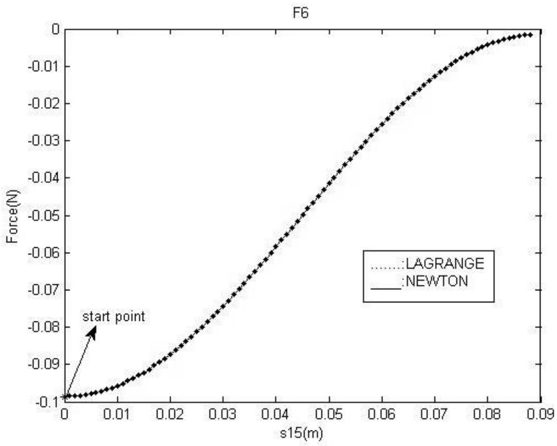
شکل‌های (۱۶) و (۱۷) بیانگر میزان نزدیکی نقاط روش نیوتن و لاگرانژ می‌باشند که برخلاف حالت ۸ مقادیر تکینگی اثر قابـل تـوجهی بـر اخـتلاف آنها ندارد و این به علت وضعیت هندسی حرکت می باشد. در هر دو حالت ۸ و ۹ میله‌ها به اندازه زاویه‌ای به مرکز اتصال کروی که نصف ضـخامت میلـه را در بر می‌گیرد قبل از رسیدن به نقطه تکین متوقف می‌شوند.



شکل ۱۵. تغییر زاویه های θ_{k6} نسبت به β



شکل ۱۶. تغییر گشتاورها در ربات سری نسبت به θ_{14}



شکل ۱۷. تغییر نیروی F_6 نسبت به s_{15}

۱۰. نتیجه‌گیری

۱. ماتریس دناویت هارتنبرگ می تواند ابزاری خوب برای درک و تحلیل حرکت هر نوع ربات باشد و درکنار رایانه با حافظـه و سـرعت بـالا و روشهای محاسبات عددی مناسب که بتوان جوابهای اضافی را حذف کرد، سینماتیک و دینامیک هر جزء را بدست می‌آورد.

۲. به علت مشکل بودن حل سینماتیک مستقیم ربات موازی و معکـوس ربات سری، برای راحتی کار با این گونه ربات هیبرید بهتـر اسـت از ربات موازیی استفاده شود که سکوی متحرک حرکت خطی داشـته و در جهت فضادهی واستحکام بخـشی بکـار رود و یـا اینکـه کـارکرد سری و موازی از نظر زمانی استقلال داشته باشند.

۳. شکلهای نیرو و گشتاور نشان مـی دهنـد کـه روش لاگرانـژ در پیـدا کردن نقاط تکین و مقدار نیرو دارای خطای زیاد می‌باشـد کـه علـت آن خطای محاسباتی است.

۴. در پایان روشی عمومی برای سینماتیک رباتهای مـوازی و هیبریـد بـا استفاده از روش لاگرانژ بدون استفاده از ماتریس ژاکوبین بدست آمد.

مراجع

[1] Merlet J. P. ***"Parallel robots***", Springer publisher, 2006.
[2] Lee S., Kim S., ***"Efficient inverse kinematics for serial connections of serial and parallel manipulators"***, Proceedings of the IEEE/RSJ International conference on intelligent robots and systems Yokohama, Japan, 1993.
[3] Shahinpoor M. ***"Kinematics of a parallel-series (hybrid) manipulator"***, Jour. Rob. Sys, 9 (1992) 17-36.
[4] Waldron K. J., Raghavan M. and Roth B., ***"Kinematics of a hybrid series-parallel manipulator system"***, 1989, Trans. ASME J. Mech. Trans. and Auto. Des, 111 (1989) 211-215.
[5] Li Y., Xu Q., ***"Kinematic analysis of a 3-PRS parallel manipulator"***, Robotics and Computer-Integrated Manufacturing, 2006.
[6] Zhang D., Xi F., Mechefske C. M., Lang S. Y. T., ***"Analysis of parallel kinematic machine with kinetostatic modelling method"***, Robotics and Computer-Integrated Manufacturing, 20 (2004) 151–165.
[7] Tsai M. S., Shiau T. N., Tsai Y. J., Chang T. H., ***"Direct kinematic analysis of a 3-PRS parallel mechanism"***, Mechanism and Machine Theory, 38(2003)71–83.
[8] Fan K. C., Wang H., Zhao J. W., Chang T. H., ***"Sensitivity analysis of the 3-PRS parallel kinematic spindle platform of a serial-parallel machine tool"***, 2003, International Journal of Machine Tools & Manufacture, 43 (2003) 1561–1569.
[9] Pond G., Carretero J. A., ***"Architecture optimisation of three 3-PRS variants for parallel kinematic machining"***, Robotics and Computer-Integrated Manufacturing, 2007.
[10] Wang L., Xi F., Zhang D., ***"A parallel robotic attachment and its remote manipulation"***, Robotics and Computer-Integrated Manufacturing, 22 (2006) 515–525.
[11] Bi, Z. M., Lang S. Y. T., ***"Joint workspace of parallel kinematic machines"***, Robotics and Computer-Integrated Manufacturing, 2007.
[12] Perez A., McCarthy J. M., ***"Geometric design of RRP, RPR and PRR serial chains"***, Mechanism and machine theory, 40 (2005) 1294–1311.
[13] Craig J. J., ***"Introduction to robotics:Mechanics and control(Second Edition)"***, Addison Wesley Longman, 1989.
[14] D'souza A. F., Grag V. K., ***"Advanced Dynamics: Modeling and Analysis"***, Prentice Hall, 1984.
[15] Lung-Wen Tsai L. W., ***"Robot analysis:The mechanics of serial and parallel manipulators",*** John Wiley & Sons, INC. 1999.
[16] Baruh H., ***"Analytical dynamics"***, McGraw-Hill Publisher, 1999.

پی‌نوشت: فرم کلی معادلات دینامیکی

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial K}{\partial \dot{d}_{k5}} - (m_1 \frac{\partial \vec{r}_{gk1}}{\partial d_{k5}} + m_2 \frac{\partial \vec{r}_{gk2}}{\partial d_{k5}}).\vec{g} = F_{k1} + \lambda_k \frac{\partial \Gamma_k}{\partial d_{k5}}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_x} - (m_3\vec{g}.\frac{\partial \vec{r}_{g3}}{\partial q_x} + m_4\vec{g}.\frac{\partial \vec{r}_{g4}}{\partial q_x} + m_5\vec{g}.\frac{\partial \vec{r}_{g5}}{\partial q_x} + m_6\vec{g}.\frac{\partial \vec{r}_{g6}}{\partial q_x}) =$$
$$\lambda_1 \frac{\partial \Gamma_1}{\partial q_x} + \lambda_2 \frac{\partial \Gamma_2}{\partial q_x} + \lambda_3 \frac{\partial \Gamma_3}{\partial q_x} + \lambda_5 \frac{\partial \Gamma_5}{\partial q_x}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_y} - (m_3\vec{g}.\frac{\partial \vec{r}_{g3}}{\partial q_y} + m_4\vec{g}.\frac{\partial \vec{r}_{g4}}{\partial q_y} + m_5\vec{g}.\frac{\partial \vec{r}_{g5}}{\partial q_y} + m_6\vec{g}.\frac{\partial \vec{r}_{g6}}{\partial q_y}) =$$
$$\lambda_1 \frac{\partial \Gamma_1}{\partial q_y} + \lambda_2 \frac{\partial \Gamma_2}{\partial q_y} + \lambda_3 \frac{\partial \Gamma_3}{\partial q_y} + \lambda_6 \frac{\partial \Gamma_6}{\partial q_y}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_z} - (m_3\vec{g}.\frac{\partial \vec{r}_{g3}}{\partial q_z} + m_4\vec{g}.\frac{\partial \vec{r}_{g4}}{\partial q_z} + m_5\vec{g}.\frac{\partial \vec{r}_{g5}}{\partial q_z} + m_6\vec{g}.\frac{\partial \vec{r}_{g6}}{\partial q_z}) =$$
$$\lambda_1 \frac{\partial \Gamma_1}{\partial q_z} + \lambda_2 \frac{\partial \Gamma_2}{\partial q_z} + \lambda_3 \frac{\partial \Gamma_3}{\partial q_z} + \lambda_6 \frac{\partial \Gamma_6}{\partial q_z}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial K}{\partial \dot{\alpha}} - (m_3\vec{g}.\frac{\partial \vec{r}_{g3}}{\partial \alpha} + m_4\vec{g}.\frac{\partial \vec{r}_{g4}}{\partial \alpha} + m_5\vec{g}.\frac{\partial \vec{r}_{g5}}{\partial \alpha} + m_6\vec{g}.\frac{\partial \vec{r}_{g6}}{\partial \alpha}) =$$
$$\lambda_1 \frac{\partial \Gamma_1}{\partial \alpha} + \lambda_2 \frac{\partial \Gamma_2}{\partial \alpha} + \lambda_3 \frac{\partial \Gamma_3}{\partial \alpha} + \lambda_4 \frac{\partial \Gamma_4}{\partial \alpha} + \lambda_5 \frac{\partial \Gamma_5}{\partial \alpha}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial K}{\partial \dot{\beta}} - (m_3\vec{g}.\frac{\partial \vec{r}_{g3}}{\partial \beta} + m_4\vec{g}.\frac{\partial \vec{r}_{g4}}{\partial \beta} + m_5\vec{g}.\frac{\partial \vec{r}_{g5}}{\partial \beta} + m_6\vec{g}.\frac{\partial \vec{r}_{g6}}{\partial \beta}) =$$
$$\lambda_1 \frac{\partial \Gamma_1}{\partial \beta} + \lambda_2 \frac{\partial \Gamma_2}{\partial \beta} + \lambda_3 \frac{\partial \Gamma_3}{\partial \beta} + \lambda_4 \frac{\partial \Gamma_4}{\partial \beta} + \lambda_5 \frac{\partial \Gamma_5}{\partial \beta} + \lambda_6 \frac{\partial \Gamma_6}{\partial \beta}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial K}{\partial \dot{\gamma}} - (m_3\vec{g}.\frac{\partial \vec{r}_{g3}}{\partial \gamma} + m_4\vec{g}.\frac{\partial \vec{r}_{g4}}{\partial \gamma} + m_5\vec{g}.\frac{\partial \vec{r}_{g5}}{\partial \gamma} + m_6\vec{g}.\frac{\partial \vec{r}_{g6}}{\partial \gamma}) =$$
$$\lambda_1 \frac{\partial \Gamma_1}{\partial \gamma} + \lambda_2 \frac{\partial \Gamma_2}{\partial \gamma} + \lambda_3 \frac{\partial \Gamma_3}{\partial \gamma} + \lambda_4 \frac{\partial \Gamma_4}{\partial \gamma} + \lambda_5 \frac{\partial \Gamma_5}{\partial \gamma} + \lambda_6 \frac{\partial \Gamma_6}{\partial \gamma}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial K}{\partial \dot{\theta}_{13}} - (m_4\vec{g}.\frac{\partial \vec{r}_{g4}}{\partial \theta_{13}} + m_5\vec{g}.\frac{\partial \vec{r}_{g5}}{\partial \theta_{13}} + m_6\vec{g}.\frac{\partial \vec{r}_{g6}}{\partial \theta_{13}}) = T_4$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial K}{\partial \dot{\theta}_{14}} - (m_5\vec{g}.\frac{\partial \vec{r}_{g5}}{\partial \theta_{14}} + m_6\vec{g}.\frac{\partial \vec{r}_{g6}}{\partial \theta_{14}}) = T_5$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial K}{\partial \dot{s}_{15}} - m_6\vec{g}.\frac{\partial \vec{r}_{g6}}{\partial s_{15}} = F_6$$