سنجش کارایی در تحلیل پوششی داده‌ها با استفاده از مرزهای کارا و ناکارا

حسین عزیزی*

کارشناس ارشد ریاضی کاربردی، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد پارس‌آباد مغان، اردبیل، ایران

دریافت: ۸۹/۱۱/۹ پذیرش: ۹۰/۱۱/۲۶

چکیده

تحلیل پوششی داده‌ها (DEA) یک رویکرد داده‌ای برای ارزیابی عملکرد مجموعه‌ای از موجودیت‌های متجانس به نام واحدهای تصمیم‌گیری (DMUها) است که عملکرد آن‌ها براساس اندازه‌های متعدد مشخص می‌شود. DEA سنتی که مبتنی بر مفهوم مرز کارایی است، بهترین نمره کارایی را تعیین می‌کند که می‌توان به هریک از DMUها اختصاص داد. DMUها براساس این نمرات به‌عنوان کارای DEA (کارای خوشبینانه) یا غیرکارای DEA (غیرکارای خوشبینانه) تقسیم‌بندی می‌شوند و DMUهای کارای DEA، مرز کارایی را مشخص می‌کنند. رویکرد مشابهی وجود دارد که از مفهوم مرز ناکارایی برای تعیین بدترین نمره‌ی کارایی نسبی که می‌توان به هر DMU اختصاص داد، استفاده می‌کند. DMUهای واقع روی مرز ناکارایی به‌عنوان ناکارای DEA یا ناکارای بدبینانه تعیین می‌شوند و آن‌هایی که روی مرز ناکارا نیستند، به‌عنوان غیرناکارای DEA یا غیرناکارای بدبینانه اعلام می‌شوند.

در مقاله حاضر این بحث مطرح می‌شود که هر دو کارایی نسبی را باید با هم در نظر گرفت و هر رویکردی که فقط یکی از آن‌ها را در نظر گرفته باشد، دچار سوگیری خواهد بود. برای اندازه‌گیری عملکرد کلی DMUها، پیشنهاد می‌شود که هر دو کارایی در قالب یک بازه ادغام شود که در این صورت مدل‌های DEA پیشنهادی برای اندازه‌گیری کارایی را مدل‌های DEA کراندار می‌نامیم. به این ترتیب بازه کارایی تمام مقادیر ممکن کارایی را که منعکس‌کننده دیدگاه‌های مختلف هستند، در اختیار تصمیم‌گیرنده قرار می‌دهد. یک مثال عددی در مورد شرکت‌های گاز ایران با استفاده از مدل‌های DEA پیشنهادی بررسی می‌شود تا سادگی و سودمندی آن را نشان دهند.

کلیدواژه‌ها: تحلیل پوششی داده‌ها (DEA)، عملکرد کلی، کارایی بازه‌ای، مدل‌های DEAی کراندار، رتبه‌بندی بازه‌ای.

* نویسنده مسؤول مقاله: E-mail: hazizi@iaupmogan.ac.ir

۱- مقدمه

با توجه به این‌که سازمان‌ها همواره تلاش می‌کنند بهره‌وری خود را بهبود بخشند، از ایـن رو اندازه‌گیری کارایی موضوعی است که به‌شدت مورد توجه قرار دارد. دلایل این توجه پنجاه و پنج سال پیش به بهترین وجهی به‌وسیله فارل[۱] در مقاله کلاسیکش درباره اندازه‌گیری کارایی تولیدی بیان شده است [۱، صص۲۵۳-۲۸۱].

«مسئله اندازه‌گیری کارایی تولیدی یک صنعت هم بـرای نظریـه‌پـردازان اقتـصادی و هـم برای سیاست‌گذاران اقتصادی حایز اهمیت است. اگر بخواهیم بحـث‌هـای نظـری مربـوط بـه کارایی نـسبی سیـستم‌هـای اقتـصادی مختلـف را در معـرض آزمـایش تجربـی قـرار دهـیم، ضروری است که بتوانیم کارایی را به‌طور عملی اندازه‌گیری کنیم. به همین ترتیـب اگـر قـرار باشد برنامه‌ریزی اقتصادی بر صنعت خاصی اعمال شود، باید معلوم شود که صنعت مـورد نظر تا چه حد می‌تواند با تکیه بر افزایش کـارایی خـود بـدون افـزایش دادن منـابع مـصرفی، خروجی خود را افزایش دهد.»

بیست سال بعد از کار اولیه فارل [۱، صص۲۵۳-۲۸۱] و براساس عقایـد او، چـارنز[۲] و د. [۲، صص۴۲۹-۴۴۴]، در پاسخ به نیاز برای روش‌های رضایت‌بخـش جهـت سـنجش کـارایی واحدهای تولیدی با ورودی‌های متعـدد و خروجـی‌هـای متعـدد، روش قدرتمنـدی را معرفـی کردند که بعدها تحلیل پوششی داده‌ها (DEA)[۳] نامیده شد. ایده اصلی در DEA، ارائه روشـی بود که در داخل مجموعه‌ای از واحدهای تصمیم‌گیری (DMUها)[۴] قابل مقایسه بتوان آن‌هایی را که بهترین عملکرد را دارند و یک مرز کارایی را تشکیل می‌دهند، شناسایی کرد.

DEA ابداع شده به وسیله چارنز و د. [۲، صص ۴۲۹-۴۴۴]، عملکرد DMUها را از دیدگاه خوشبینانه اندازه‌گیری می‌کند. کارایی اندازه‌گیری شده در این رویکرد، *بهترین کارایی نـسبی* یا *کارایی خوشبینانه* نامیده می‌شود و مقدار آن در ماهیت خروجی محدود به مقادیر بزرگ‌تر یا مساوی یک است. اگر بهترین کارایی نسبی یک DMU برابر با یک باشد، گفته می‌شـود کـه کارای DEA یا کارای خوشبینانه است؛ در غیر این صـورت غیرکـارای[۵] DEA یـا غیرکـارای خوشبینانه گفته می‌شود. معمولاً تصور بر این است که DMUهای کارای خوشبینانه عملکـرد بهتری نسبت به DMUهای غیرکارای خوشبینانه دارند.

از طرف دیگر، عملکرد DMUهـا را از دیـدگاه بدبینانـه نیـز مـی‌تـوان انـدازه‌گیـری کـرد. کارایی‌های اندازه‌گیری شده از دیدگاه بدبینانه را می‌توان با عنوان *بـدترین کـارایی نـسبی* یـا *کارایی بدبینانه* نامگذاری کرد که مقادیر آن در ماهیت خروجی شامل مقادیر کمتر یا مـساوی یک است. در صورتی که مقدار بدترین کارایی نسبی یک DMU یک باشد، گفته می‌شود که آن DMU ناکـارای DEA یـا ناکـارای بدبینانـه اسـت؛ در غیـر ایـن صـورت گفتـه مـی‌شـود کـه غیرناکارای DEA [۶] یا غیرناکارای بدبینانه است. معمولاً تصور بـر ایـن اسـت کـه DMUهـای ناکارای بدبینانه عملکرد بدتری نسبت به DMUهای غیرناکارای بدبینانه دارند.

انتانی [۷] و د. عملکرد DMUها را از هر دو دیدگاه خوشبینانه و بدبینانه بررسی کردنـد [۳، صص۳۲-۴۵]. بر این اساس مدل‌های DEA آن‌ها در محاسبه کـارایی‌هـای بـازه‌ای DMUهـا عیب مهمی دارد؛ یعنی برای محاسبه‌ی کارایی خوشبینانه هـر DMU، صـرف نظـر از ایـن‌کـه چند ورودی و خروجی داشته باشد، فقط از یـک ورودی و یـک خروجـی اسـتفاده مـی‌شـود. به‌علاوه مدل‌های DEA آن‌ها نمی‌توانند DMUهایی را کـه کـارای DEA هـستند، بـه صـورت مُکفی شناسایی کنند. به‌تازگی عزیزی و فتحی اجیرلو نارسایی‌هـای مـدل‌هـای DEA بـازه‌ای انتانی و د. را در ماهیت ورودی بهبود بخشیده‌اند [۳، صص۳۲-۴۵؛ ۴، صص۴۱۱-۴۱۸].

وانگ [۸] و لوئو [۹] [۵، صـص۹۰۲-۹۱۵] کـارایی‌هـای خوشـبینانه و بدبینانـه DMUهـا را بـا معرفی کردن دو DMU مجازی اندازه‌گیری می‌کنند: DMU ایـده‌آل و DMU آنتـی‌ایـده‌آل بـا ادغام این دو کارایی، یک شاخص نزدیکی نسبی به دست می‌آورند که به‌عنـوان مبنـایی بـرای رتبه‌بندی DMUها به کار می‌رود. ولی در بیش‌تر موارد، مـدل‌هـای DEA آن‌هـا بـرای تمـام DMUها از وزن‌های ثابتی استفاده می‌کنند.

امیرتیموری [۶، صص ۱۰-۱۶] با استفاده از دو شاخص ایده‌آل و آنتی‌ایده‌آل که براساس مرزهای کارا و ناکارا تشکیل می‌شود، یک اندازه کارایی معرفی کرد. فلسفه ایـن دو شـاخص ماکسیمم کردن فاصله L_1 وزنی یک DMU خاص نسبت به مرزهای کارا و ناکارا است.

وانگ و د. یک اندازه کارایی متوسط هندسـی را بـرای ارزیـابی عملکـرد کلـی هـر DMU پیشنهاد کردند. [۷، صص ۹۲۹-۹۳۷] کارایی متوسط هندسی هر دو اندازه کارایی خوشـبینانه و کارایی بدبینانه هر DMU را با هم ادغام می‌کند، بنابراین نسبت به هر کدام از این دو اندازه جـامع‌تـر اسـت. وانـگ و لان [۱۰]؛ چـین [۱۱] و د. ایـن رویکـرد را بـه‌تـازگی بـسط داده‌انـد [۸، صص۲۷۶۰-۲۷۷۱؛ ۹، صص۲۴۶-۲۵۶].

وانگ و چین یک اندازه عملکرد کلی جدید را برای نمره‌دهی DMUها پیشنهاد کردند [۱۰، صص۶۶۶۳-۶۶۷۹]. رویکرد DEA پیشنهادی آن‌ها کارایی‌های خوشبینانه و بدبینانه DMUها را هم‌زمان در نظر می‌گیرد. اندازه عملکرد کلی تعریف شده به‌وسیله آن‌ها نه فقط بزرگیِ دو کارایی مختلف را در نظر می‌گیرد، بلکه راستای آن‌ها را نیز در نظر می‌گیرد. بنابراین تصور می‌شود که نسبت به اندازه کارایی متوسط هندسی وانگ و د. جامع‌تر است [۷، صص۹۲۹-۹۳۷].

در این مقاله پیشنهاد می‌شود که دو کارایی خوشبینانه و بدبینانه به‌صورت یک بازه با هم ادغام شوند، تا این‌که بتوان کارایی‌های خوشبینانه و بدبینانه را از یک زوج مدل DEA یکپارچه به‌دست آورد که در این‌جا کارایی‌های خوشبینانه و بدبینانه هر کدام با وزن‌های متغیری اندازه‌گیری می‌شوند. کارایی بازه‌ای را می‌توان به‌عنوان یک اندازه عملکرد کلی هر DMU تلقی کرد. مهم‌تر این‌که در سنجش کارایی بازه‌ای با استفاده از مدل‌های DEA پیشنهادی ما، کارایی خوشبینانه هر DMU نسبت به همه DMUهای دیگر اندازه‌گیری می‌شود و با استفاده از تمام اطلاعات ورودی و خروجی محاسبه می‌شود، نه فقط یک ورودی و یک خروجی.

ادامه این مقاله به‌صورت زیر سازمان‌دهی شده است: در بخش ۲ به‌طور خلاصه مدل‌های اساسی DEA برای اندازه‌گیری بهترین و بدترین کارایی‌های نسبی DMUها معرفی می‌شود. در بخش ۳ نیز در آغاز مدل‌های DEA کراندار ارائه شده سپس نشان داده می‌شود که مدل‌های DEA کراندار می‌توانند اطلاعات ترجیح ارزیاب را بر وزن‌های ورودی و خروجی دخیل دهند. بخش ۴ به‌طور خلاصه شاخص $\mathscr{A}$ را معرفی می‌کند که کارایی‌های بازه‌ای DMUها را مقایسه و رتبه‌بندی می‌کند. در بخش ۵، یک مثال عددی برای مدل‌های DEA کراندار ارائه شده است تا کاربردهای بالقوه آن برای اندازه‌گیری عملکرد مشخص شود. نتیجه‌گیری مقاله در بخش ۶ ارائه می‌شود.

۲- مدل‌های DEA برای اندازه‌گیری بهترین و بدترین کارایی‌های نسبی

۲-۱- مدل DEA برای اندازه‌گیری بهترین کارایی‌های نسبی DMUها

فرض کنید n تعداد DMU برای ارزیابی وجود دارد که هر DMU نیز با m ورودی و s خروجی تشکیل شده است. x_{ij} $(i=۱,\dots,m)$ و y_{rj} $(r=۱,\dots,s)$ را مقدار ورودی و خروجی DMU_j $(j=۱,\mathrm{K},n)$ تعریف می‌کنیم که همه آن‌ها معلوم و مثبت می‌باشند و براساس مفهوم کارایی، کارایی DMU_j $(j=۱,\mathrm{K},n)$ چنین تعریف می‌شود.

$$\theta_j = \frac{\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj}}{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}}, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{1}$$

که در این‌جا v_i $(i = 1, \ldots, m)$ و u_r $(r = 1, \ldots, s)$ به‌ترتیب وزن‌های ورودی و خروجی اختصاص داده شده به m ورودی و s خروجی هستند. چارنز و د. برای تعیین وزن‌های ورودی و خروجی مدل CCR مشهور زیر را ابداع کردند که نام آن از مخفف اسامی آن‌ها گرفته شده است [۲، صص۴۲۹-۴۴۴]:

$$\begin{aligned} min \quad & \theta_o = \frac{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{io}}{\sum_{r=1}^{s} u_r y_{ro}} \\ \text{s.t.} \quad & \theta_j = \frac{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}}{\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj}} \geq 1, \quad j = 1, \ldots, n, \\ & u_r, v_i \geq \varepsilon, \quad r = 1, \ldots, s; \quad i = 1, \ldots, m, \end{aligned} \tag{2}$$

در مدل (۲) زیرنویس o نشان‌دهنده DMU تحت ارزیابی است و v_i و u_r متغیرهای تصمیم‌گیری و ε بسیار کوچک غیرارشمیدسی است. با استفاده از تبدیل چارنز و کوپر[۱۲]، مدل برنامه‌ریزی کسری (۲) را می‌توان برای حل تبدیل به مسئله برنامه‌ریزی خطی زیر این‌گونه اندازه‌گیری کرد [۱۱، صص۱۸۱-۱۸۶]:

$$\begin{aligned} min \quad & \theta_o = \sum_{i=1}^{m} v_i x_{io} \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} \leq 0, \quad j = 1, \ldots, n, \\ & \sum_{r=1}^{s} u_r y_{ro} = 1, \\ & u_r, v_i \geq \varepsilon, \quad r = 1, \ldots, s; \quad i = 1, \ldots, m. \end{aligned} \tag{3}$$

اگر یک مجموعه از وزن‌های مثبت در مدل (۳) وجود داشته باشد که باعث شود $\theta_o^* = 1$، در آن صورت DMU_o کارای DEA یا کارای خوشبینانه خواهد بود. در غیر این صورت می‌توان آن را غیرکارای DEA یا غیرکارای خوشبینانه نامید تا ناکارای DEA برای این‌که غیرکارای DEA به‌طور لزوم به‌معنای ناکارای DEA نیست.

۲-۲- مدل DEA برای اندازه‌گیری بدترین کارایی‌های نسبی DMUها

کارایی یک اندازه نسبی است و آن را در محدوده‌های مختلفی می‌توان اندازه‌گیری کرد. مدل CCR کارایی خوشبینانه هر DMU را با مینیمم‌سازی در محدوده بزرگ‌تر یا مساوی یک اندازه‌گیری می‌کند. در صورتی که کارایی یک DMU با ماکسیمم‌سازی در محدوده کم‌تر یا مساوی یک محاسبه شود، به آن اصطلاحاً کارایی بدبینانه و یا بدترین کارآیی نسبی می‌گویند. کارایی بدبینانه DMU_o را می‌توان با مدل DEA بدبینانه زیر اندازه‌گیری کرد [۴، صص۴۱۱-۴۱۸؛۱۲، صص۴۹۶-۵۰۵]:

$$\begin{aligned} & max \quad \varphi_o = \frac{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{io}}{\sum_{r=1}^{s} u_r y_{ro}} \\ & \text{s.t.} \quad \varphi_j = \frac{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}}{\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj}} \le 1, \quad j = 1,\dots,n, \\ & \qquad u_r, v_i \ge \varepsilon, \quad r = 1,\dots,s; \quad i = 1,\dots,m, \end{aligned} \tag{۴}$$

مدل (۴) با تغییری مجدد می‌تواند به مدل برنامه‌ریزی خطی زیر تبدیل شود:

$$\begin{aligned} & max \quad \varphi_o = \sum_{i=1}^{m} v_i x_{io} \\ & \text{s.t.} \quad \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} \ge 0, \quad j = 1,\dots,n, \\ & \qquad \sum_{r=1}^{s} u_r y_{ro} = 1, \\ & \qquad u_r, v_i \ge \varepsilon, \quad r = 1,\dots,s; \quad i = 1,\dots,m. \end{aligned} \tag{۵}$$

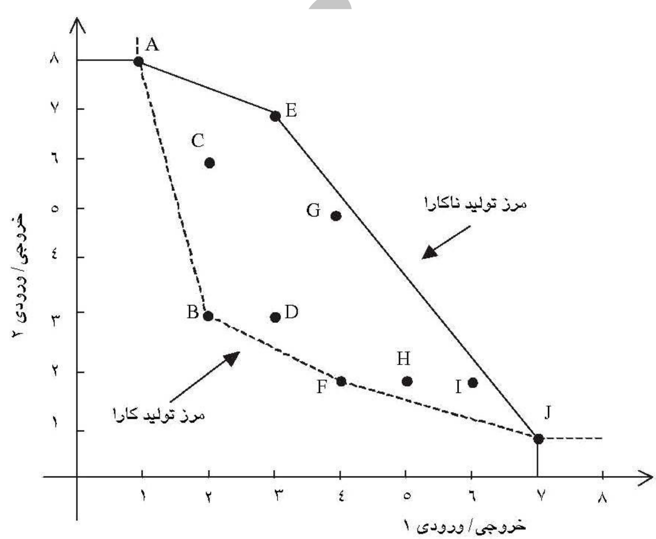
در صورتی مجموعه‌ای از وزن‌های مثبت وجود داشته باشد که سبب شود $\varphi_o^* = 1$ باشد، آن‌گاه گفته می‌شود که DMU_o ناکارای DEA یا ناکارای بدبینانه است؛ در غیر این صورت گفته می‌شود که غیرناکارآی DEA یا غیرناکارای بدبینانه است. واضح است که غیرناکارای بدبینانه لزوماً به معنای کارای خوشبینانه نیست. تمام واحدهای ناکارای بدبینانه یک مرز ناکارایی را تعیین می‌کنند. برخلاف مدل‌های CCR (۲) و (۳)- که می‌توان به آن‌ها مدل‌های DEA خوشبینانه گفت- مدل‌های DEA بدبینانه (۴) و (۵) در جستجوی مجموعه‌ای از *نامطلوب‌ترین وزن‌ها* برای هر DMU هستند.

برای نشان دادن تفاوت بین مرز کارا (مرز بهترین عملکرد) و مرز ناکارا (مرز بدترین عملکرد) از مثالی با داده‌های دو ورودی و یک خروجی که در جدول ۱ نشان داده شده است، استفاده می‌شود.

همه خروجی‌ها برای سادگی به ۱ نرمال‌سازی شده‌اند. مرزهای کارایی و ناکارایی این مثال در شکل ۱ نشان داده شده‌اند، به‌طوری که این شکل نشان می‌دهد، ۳تا از DMUها روی مرز ناکارا (خط ممتد) هستند که ما آن‌ها را ناکارای DEA یا ناکارای بدبینانه می‌نامیم و دیگر DMUها را نسبت به مرز ناکارایی، غیرناکارای DEA یا غیرناکارای بدبینانه می‌نامیم. همچنین ۴ تا از DMUها روی مرز کارا (خط مقطّع) واقع شده‌اند که ما آن‌ها را کارای DEA یا کارای خوش‌بینانه می‌نامیم و دیگر DMUها را نسبت به مرز کارایی، غیرکارای DEA یا غیرکارای خوش‌بینانه می‌نامیم که در این‌جا واحدهای کارای DEA و ناکارای DEA هم‌پوشانی، یعنی واحدهای مشترک نیز دارند.

جدول۱ داده‌ها برای ده DMU با دو ورودی و یک خروجی

DMU	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
ورودی ۱	۱	۲	۲	۳	۳	۴	۴	۵	۶	۷
ورودی ۲	۸	۳	۶	۳	۷	۲	۵	۲	۲	۱
خروجی	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱



شکل۱ مرزهای تولید کارا و ناکارا برای ده DMU

۳- مدل‌های DEA کراندار برای اندازه‌گیری کارایی‌های بازه‌ای DMUها

از نظر تئوری، کارایی‌های خوشبینانه و بدبینانه باید یک بازه را تشکیل دهند. برای این منظور، کارایی‌های خوشبینانه مدل‌های (۲) یا (۳) را باید تعدیل کرد. فرض کنید α ($0 < \alpha \le 1$) ضریب تعدیل باشد. در این صورت کارایی‌های خوشبینانه تعدیل شده را می‌توان به‌صورت $\tilde{\theta}_j^* = \alpha\theta_j^*$ ($j=1,\dots,n$) نوشت که باید شرط $\tilde{\theta}_j^* = \alpha\theta_j^* \le \varphi_j^*$ ($j=1,\dots,n$) را تأمین کنند؛ یعنی $\alpha \le min_{j=1,\dots,n}\{ \varphi_j^* / \theta_j^* \}$. بر این اساس بازه کارایی مربوط به DMU_j ($j=1,\dots,n$) را می‌توان به‌صورت $[\alpha\theta_j^*, \varphi_j^*]$ ($j=1,\dots,n$) بیان کرد.

اکنون پارامتر α را طوری تعیین می‌کنیم که برای تمام بازه‌های $[\alpha\theta_j^*, \varphi_j^*]$ ($j=1,\dots,n$)، شرط $\alpha\theta_j^* \le \varphi_j^*$ ($j=1,\dots,n$) برقرار باشد:

$$\min_{j=1,\dots,n}\{ \varphi_j^* / \theta_j^* \} \ge \frac{\min_{j=1,\dots,n}\{ \varphi_j^* \}}{\max_{j=1,\dots,n}\{ \theta_j^* \}} = \frac{\varphi_{min}^*}{\theta_{max}^*},$$

که در اینجا $\theta_{max}^* = \max_{j=1,\dots,n}\{ \theta_j^* \}$ و $\varphi_{\min}^* = \min_{j=1,\dots,n}\{\varphi_j^*\}$.

کافی است $\alpha = \varphi_{\min}^* / \theta_{\max}^*$ را قرار داد تا مشکل تعیین α حل شود. بنابراین کارایی‌های DMUها را می‌توان در محدوده‌ی بازه $[\alpha, 1]$ به‌دست آورد [۱۳].

دو مدل برنامه‌ریزی کسری زیر منعکس‌کننده این ایده است:

$$\begin{aligned} & max/min \quad \phi_o = \frac{\sum_{i=1}^m v_i x_{io}}{\sum_{r=1}^s u_r y_{ro}} \\ & \text{s.t.} \quad \alpha \le \frac{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}}{\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}} \le 1, \quad j=1,\dots,n, \\ & \quad u_r, v_i \ge \varepsilon, \quad r=1,\dots,s; \quad i=1,\dots,m. \end{aligned} \tag{۶}$$

مدل‌های بالا می‌توانند به دو مدل برنامه‌ریزی خطی زیر تبدیل شوند:

$$
\begin{aligned}
& max/min \quad \phi_o = \sum_{i=1}^{m} v_i x_{io} \\
& \text{s.t.} \quad \sum_{r=1}^{s} u_r(\alpha y_{rj}) - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} \le 0, \quad j = 1,\dots,n, \\
& \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} \ge 0, \quad j = 1,\dots,n, \\
& \sum_{r=1}^{s} u_r y_{ro} = 1, \\
& u_r, v_i \ge \varepsilon, \quad r = 1,\dots,s; \quad i = 1,\dots,m.
\end{aligned} \tag{7}
$$

هر کدام از مدل‌های (۶) و (۷) مدل‌های DEA کراندار نامیده می‌شوند. فرض کنید که ϕ_o^{U*} و ϕ_o^{L*} به‌ترتیب مقدار ماکسیمم و مینیمم تابع هدف مدل‌های (۷) باشند. در این صورت، آن‌ها با همدیگر تشکیل یک بازه کارایی را می‌دهند که با نماد $[\phi_o^{L*}, \phi_o^{U*}]$ مشخص می‌شود و محدوده کارایی DMU_o است. از طریق تکرار این راهکار می‌توان بدترین و بهترین کارایی‌های نسبی تمام DMUها و بازه کارایی آن‌ها را، یعنی $[\phi_j^{L*}, \phi_j^{U*}]$ $(j = 1,\dots,n)$ را پیدا کرد.

در رابطه با بازه کارایی $[\phi_o^{L*}, \phi_o^{U*}]$ تعاریف زیر وجود دارد:

تعریف ۱: DMU_o را ناکارای DEA یا ناکارای بدبینانه گوییم، اگر و تنها اگر $\phi_o^{U*} = 1$، در غیر این صورت آن را غیرناکارای DEA یا غیرناکارای بدبینانه گوییم.

تعریف ۲: DMU_o را کارای DEA یا کارای خوشبینانه گوییم، اگر و تنها اگر $\phi_o^{L*} = \alpha$، در غیر این صورت آن را غیرکارای DEA یا غیرکارای خوشبینانه گوییم.

تعریف ۳: DMU_o را نامعین DEA گوییم، اگر و تنها اگر نه کارای DEA و نه ناکارای DEA باشد.

تعریف ۴: DMU_o را یک واحد ویژه DEA گوییم، اگر و تنها اگر هم کارای DEA و هم ناکارای DEA باشد.

تمام DMUهای کارای DEA یک مرز تولید کارا را مشخص می‌کنند. در حالی که تمام DMUهای ناکارای DEA با همدیگر تعریفی از یک مرز تولید ناکارا دارند که به مرز ناکارایی نیز معروف است. اما در مورد آن دسته از واحدهای نامعین DEA می‌توان گفت که همیشه به‌وسیله دو مرز کارا و ناکارا احاطه شده‌اند. لازم به ذکر است که بعضی از DMUها احتمالاً هم کارای DEA و هم ناکارای DEA باشند. چنین DMUهایی از بازه کارایی وسیع $[\alpha, 1]$ برخوردار هستند (شکل ۱).

۳-۱- مدل‌های DEAی کراندار با اطلاعات ترجیح درباره وزن‌ها

به‌منظور محدود کردن وزن‌های ضریب u_r ($r=1,\ldots,s$) و/یا v_i ($i=1,\ldots,m$)، از رویکرد *ناحیه اطمینان* یا روش *نسبت مخروطی* استفاده می‌شود. جزئیات آن را می‌توان در منبع شماره ۱۴ مشاهده کرد [۱۴]. وانگ و د. چگونگی قرار دادن اطلاعات ترجیح ارزیابی‌کننده درباره وزن‌های ورودی و خروجی در مدل‌های DEA کراندار را مورد بحث قرار داده‌اند [۱۵، صص ۲۵۳-۲۶۷].

از آن‌جایی که u_r ($r=1,\ldots,s$) و v_i ($i=1,\ldots,m$) وزن‌های ضریب با بُعدهای متفاوتند، در این صورت معمولاً غیرقابل مقایسه هستند. می‌توان برای حذف بُعد هر ضریب ورودی و خروجی از تبدیل مقیاس استفاده کرد تا اطلاعات ترجیح ارزیابی‌کننده در نظر گرفته شود.

فرض کنید

$$\tilde{y}_{rj}=\frac{y_{rj}}{max_j\{y_{rj}\}}=\frac{y_{rj}}{y_r^{max}},\quad r=1,\ldots,s;\quad j=1,\ldots,n \tag{۸}$$

$$\tilde{x}_{ij}=\frac{x_{ij}}{max_j\{x_{ij}\}}=\frac{x_{ij}}{x_i^{max}},\quad i=1,\ldots,m;\quad j=1,\ldots,n \tag{۹}$$

از آن جایی که مدل DEA خاصیت تغییرناپذیری نسبت به واحد دارد، از این رو استفاده از تبدیل مقیاس برای داده‌های ورودی و خروجی، کارایی DMUها را تغییر نمی‌دهد، بنابراین

$$\phi_o=\frac{\sum_{i=1}^{m}v_i x_{io}}{\sum_{r=1}^{s}u_r y_{ro}}=\frac{\sum_{i=1}^{m}\tilde{v}_i\tilde{x}_{io}}{\sum_{r=1}^{s}\tilde{u}_r\tilde{y}_{ro}} \tag{۱۰}$$

که در این‌جا $\tilde{u}_r$ ($r=1,\ldots,s$) و $\tilde{v}_i$ ($i=1,\ldots,m$) وزن‌های ضریب متناظر با داده‌های مقیاس ورودی و خروجی هستند. این‌ها بُعد ندارند و قابل مقایسه هستند. می‌توان از آن‌ها برای بیان ترجیح ارزیابی‌کننده استفاده کرد. ارزیابی‌کننده ممکن است ترجیحات زیر را ارائه کند: $\tilde{u}_{r1}\geq\tilde{u}_{r2}$، $\tilde{v}_{i1}\geq\tilde{v}_{i2}$، $\tilde{u}_{r3}=\tilde{u}_{r4}$، $\tilde{v}_{i3}=\tilde{v}_{i4}$، $\alpha\leq\tilde{u}_{r5}/\tilde{u}_{r6}\leq\beta$، $\gamma\leq\tilde{v}_{i5}/\tilde{v}_{i6}\leq\delta$، و غیره. با جایگزینی (۸) و (۹) در (۱۰)، معادله زیر را می‌توان به دست آورد:

$$\phi_o=\frac{\sum_{i=1}^{m}v_i x_{io}}{\sum_{r=1}^{s}u_r y_{ro}}=\frac{\sum_{i=1}^{m}\tilde{v}_i\tilde{x}_{io}}{\sum_{r=1}^{s}\tilde{u}_r\tilde{y}_{ro}}=\frac{\sum_{i=1}^{m}(\tilde{v}_i/x_i^{max})x_{io}}{\sum_{r=1}^{s}(\tilde{u}_r/y_r^{max})y_{ro}} \tag{۱۱}$$

از این‌جا می‌دانیم که

$$\tilde{u}_r=u_r y_r^{max},\quad r=1,\ldots,s \tag{۱۲}$$

$$\tilde{v}_i = v_i x_i^{max}, \quad i = ۱,\ldots,m \qquad (۱۳)$$

نشان می‌دهد که از ضرایب وزنی u_r $(r = ۱,\ldots,s)$ و v_i $(i = ۱,\ldots,m)$ ضرب در بیشینه‌های داده‌های خروجی و ورودی می‌توان برای بیان ترجیح ارزیابی‌کننده استفاده کرد. بنابراین اطلاعات ترجیح ارزیابی‌کننده را که در بالا ذکر شده است، می‌توان به‌طور هم‌ارز به‌صورت $u_{r۱} y_{r۱}^{max} \ge u_{r۲} y_{r۲}^{max}$، $v_{i۱} x_{i۱}^{max} \ge v_{i۲} x_{i۲}^{max}$، $u_{r۳} y_{r۳}^{max} = u_{r۴} y_{r۴}^{max}$، $v_{i۳} x_{i۳}^{max} \ge v_{i۴} x_{i۴}^{max}$، $\alpha \le u_{r۵} y_{r۵}^{max} / u_{r۶} y_{r۶}^{max} \le \beta$، و $\gamma \le v_{i۵} x_{i۵}^{max} / v_{i۶} x_{i۶}^{max} \le \delta$ بیان کرد. این‌گونه اطلاعات در مورد وزن‌های ضریب را به آسانی می‌توان در مدل‌های DEA کراندار الحاق کرد.

فرض کنید

$$\mathscr{U} = \left\{ u = (u_r) \middle| \begin{array}{l} u_{r۱} y_{r۱}^{max} \ge u_{r۲} y_{r۲}^{max},\ u_{r۳} y_{r۳}^{max} = u_{r۴} y_{r۴}^{max}, \\ \alpha \le u_{r۵} y_{r۵}^{max} / u_{r۶} y_{r۶}^{max} \le \beta \end{array} \right\} \qquad (۱۴)$$

$$\mathscr{V} = \left\{ v = (v_i) \middle| \begin{array}{l} v_{i۱} x_{i۱}^{max} \ge v_{i۲} x_{i۲}^{max},\ v_{i۳} x_{i۳}^{max} \ge v_{i۴} x_{i۴}^{max}, \\ \gamma \le v_{i۵} x_{i۵}^{max} / v_{i۶} x_{i۶}^{max} \le \delta \end{array} \right\} \qquad (۱۵)$$

مدل‌های DEA کراندار (۷) با اطلاعات ترجیح درباره وزن‌ها را می‌توان به‌صورت زیر بیان کرد:

$$\begin{aligned}
\max/\min \quad & \phi_o = \sum_{i=1}^{m} v_i x_{io} \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{r=1}^{s} u_r (\alpha y_{rj}) - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} \le 0, \quad j = 1,\ldots,n, \\
& \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} \ge 0, \quad j = 1,\ldots,n, \\
& \sum_{r=1}^{s} u_r y_{ro} = 1, \\
& (u_r) \in \mathscr{U}, \\
& (v_i) \in \mathscr{V}, \\
& u_r, v_i \ge \varepsilon, \quad r = 1,\ldots,s; \quad i = 1,\ldots,m.
\end{aligned} \qquad (۱۶)$$

۴- شاخص $\mathscr{A}$ برای مقایسه و رتبه‌بندی بازه کارایی DMUها

در سنجش کارایی بازه‌ای، از آن جایی که نمره کارایی نهایی هر DMU با یک بازه مشخص می‌شود، لذا یک رویکرد رتبه‌بندی ساده ولی عملی برای مقایسه و رتبه‌بندی کارایی‌های DMUها مورد نیاز است. برای رتبه‌بندی اعداد بازه‌ای پیش از این چند رویکرد توسعه داده شده‌اند ولی همگی آن‌ها معایبی دارند، به‌خصوص وقتی که اعداد بازه‌ای مرکز یکسان ولی عرض‌های متفاوت دارند، همگی آن‌ها از افتراق دادن این اعداد عاجز هستند.

یک راه برای نشان دادن بازه $A=[a_L,a_R]$، به‌صورت $A=\langle m(A),w(A)\rangle$ است که در این‌جا $m(A)$ و $w(A)$ نقطه وسط و پهنای بازه A هستند؛ یعنی:

$$m(A)=\frac{۱}{۲}(a_L+a_R),\quad w(A)=\frac{۱}{۲}(a_R-a_L)$$

در این‌جا برخی از ویژگی‌های اساسی شاخص $\mathscr{A}$ را بیان می‌کنیم و قوت بالاتر آن را نسبت به روش‌های دیگر نشان می‌دهیم [۱۶، صص۲۸-۴۳].

۴-۱- شاخص مقبولیت: شاخص قضاوت مقدار

تعریف ۵: فرض کنید $\otimes$ یک رابطه ترتیب بسط یافته بین بازه‌های $A=[a_L,a_R]$ و $B=[b_L,b_R]$ روی خط حقیقی $\Re$ باشد. آن‌گاه برای $m(A)\le m(B)$، یک فرض ($A\otimes B$) می‌سازیم که معنای ضمنی آن این است که از نظر مقدار، A پایین‌تر از B (یا B بالاتر از A) است. در این‌جا اصطلاح «پایین‌تر» (یا «بالاتر») مشابه «کوچک‌تر» («بزرگ‌تر») است.

تعریف ۶: فرض کنید I مجموعه همه بازه‌های بسته روی خط حقیقی $\Re$ باشد. در این‌جا یک تابع مقبولیت $\mathscr{A}: I\times I\to[۰,\infty)$ تعریف می‌شود، به‌طوری که $\mathscr{A}(A\otimes B)$ یا $\mathscr{A}_{\otimes}(A,B)$ و یا به‌طور خلاصه $\mathscr{A}_{\otimes}$ از این فرمول به دست می‌آید:

$$\mathscr{A}_{\otimes}=\frac{m(B)-m(A)}{w(B)+w(A)}$$

$\mathscr{A}_{\otimes}$ را می‌توان به‌عنوان «*درجه مقبولیت این‌که بازه اول نسبت به بازه دوم پایین‌تر باشد*» تفسیر کرد.

درجه مقبولیت $A\otimes B$ را می‌توان باز براساس موقعیت نسبی میانگین و پهنای بازه B نسبت به میانگین و پهنای بازه A به‌صورت زیر تقسیم‌بندی کرد:

$$\mathscr{A}(A \oslash B)\begin{cases} =0 & \text{اگر } m(A)=m(B) \\ >0,<1 & \text{اگر } m(A)<m(B) \text{ و } a_R > b_L \\ \geq 1 & \text{اگر } m(A)<m(B) \text{ و } a_R \leq b_L \end{cases}$$

اگر $\mathscr{A}(A \oslash B)=0$، آن‌گاه فرض « A پایین‌تر از B است» پذیرفته نمی‌شود. اگر $0<\mathscr{A}(A \oslash B)<1$، آن‌گاه مفسر فرض $A \oslash B$ را با درجات مختلف رضایت از صفر تا یک (بدون احتساب صفر و یک) می‌پذیرد. اگر $\mathscr{A}(A \oslash B)\geq 1$، آن‌گاه مفسر مطلقاً از فرض $A \oslash B$ راضی می‌شود؛ یعنی به عبارت دیگر می‌پذیرد که $A \oslash B$ صحیح است.

ویژگی ۱: اگر $\mathscr{A}(A \oslash B)>0$، آن‌گاه برای یک مسئله بیشینه‌سازی (به‌طور مثال A و B دو بازه سود هستند و مسئله از ما می‌خواهد که سود بیشینه را انتخاب کنیم)، بازه B بر بازه A مرجح است و برای یک مسئله کمینه‌سازی (به‌طور مثال A و B دو بازه هزینه هستند)، A بر B از نظر مقدار ترجیح داده می‌شود.

ویژگی ۲: برای هر نوع قضاوت مقدار، شاخص $\mathscr{A}$ همواره تصمیم‌گیرنده را راضی می‌کند: برای هر دو بازه A و B روی $\Re$ داریم:

$\mathscr{A}(A \oslash B)>0$ یا،
$\mathscr{A}(B \oslash A)>0$ یا،
و یا هم $\mathscr{A}(A \oslash B)=\mathscr{A}(B \oslash A)=0$.

ویژگی ۳: این شاخص پیشنهادی تراگذر است: برای هر سه بازه A، B و C روی $\Re$ داریم:

اگر $\mathscr{A}(A \oslash B)\geq 0$ و $\mathscr{A}(B \oslash C)\geq 0$،
آن‌گاه $\mathscr{A}(A \oslash C)\geq 0$.

ولی معنای آن، این نیست که $\mathscr{A}(A \oslash C)\geq \max\{\mathscr{A}(A \oslash B), \mathscr{A}(B \oslash C)\}$.

ویژگی ۴: اگر $\mathscr{A}(B_1 \oslash B_2)=0$ و $w(B_1)=w(B_2)$، آن‌گاه $B_1 \equiv B_2$، یعنی B_1 با B_2 یکسان است.

حال اگر $\mathscr{A}(B_1 \oslash B_2)=0$ و $w(B_1)\neq w(B_2)$، آن‌گاه بدیهی است که $B_1 \not\equiv B_2$. ولی از راه شاخص $\mathscr{A}$، یک مقایسه مستقیم بین آن‌ها تفسیر می‌کند که B_1 و B_2 از یکدیگر پایین‌تر نیستند. در این صورت این سؤال مطرح می‌شود: چه طور گزینه ترجیحی (بیشینه) را انتخاب کنیم؟

ویژگی ۵: یک بازه $D=\langle m(D), w(D)\rangle$ را در نظر می‌گیریم که پایین‌تر از بازه‌های هم مرکز B_1 و B_2 است. آن‌گاه در مقایسه با D، درجه پذیرش برتری بازه‌ای که عدم اطمینان کم‌تری دارد، بالاتر از برتری بازه‌ای است که عدم اطمینان بالاتری دارد. به‌صورت نمادی، اگر

$$\mathscr{A}(D \otimes B_1) > 0$$
$$\mathscr{A}(D \otimes B_2) > 0$$

و داشته باشیم $\mathscr{A}(B_1 \otimes B_2) = 0$، ولی $B_1 \not\equiv B_2$، آن‌گاه

(i) $\mathscr{A}(D \otimes B_1) > \mathscr{A}(D \otimes B_2)$ اگر و تنها اگر $w(B_1) < w(B_2)$

(ii) $\mathscr{A}(D \otimes B_1) < \mathscr{A}(D \otimes B_2)$ اگر و تنها اگر $w(B_1) > w(B_2)$

در این‌جا شرط (i) نشان می‌دهد که در مقایسه با D، برتری B_1 باورپذیرتر از برتری B_2 است. از این رو B_1 به‌عنوان گزینه بیشینه‌ساز بر B_2 مرجح است. این نتیجه با دریافت شهودی خودمان کاملاً سازگار است: اگر بازه‌های B_1 و B_2 مقدار مورد انتظار یکسانی داشته باشند، ولی B_1 عدم اطمینان کم‌تری نسبت به B_2 داشته باشد، در آن صورت B_1 بر B_2 مرجح است.

حال اگر فرض کنیم که بازه مرجع $D^* = \langle m(D^*), w(D^*)\rangle$ برتر از بازه‌های هم‌مرکز B_1 و B_2 باشد، چه تصادفی می‌افتد؛ یعنی اگر

$$\mathscr{A}(B_1 \otimes D^*) > 0$$
$$\mathscr{A}(B_2 \otimes D^*) > 0$$

و داشته باشیم $\mathscr{A}(B_1 \otimes B_2) = 0$، ولی $B_1 \not\equiv B_2$، آن‌گاه

(i) $\mathscr{A}(B_1 \otimes D^*) > \mathscr{A}(B_2 \otimes D^*)$ اگر و تنها اگر $w(B_1) < w(B_2)$

(ii) $\mathscr{A}(B_1 \otimes D^*) < \mathscr{A}(B_2 \otimes D^*)$ اگر و تنها اگر $w(B_1) > w(B_2)$

در این‌جا، شرط (i) بیان می‌کند که در مقایسه با D^*، پایین‌تر بودن B_1 باورپذیرتر از پایین‌تر بودن B_2 است. بنابراین B_1 باید به‌عنوان گزینه کمینه‌کننده بهتر بر B_2 ترجیح داده شود. برعکس از این شرط نمی‌توان استنباط کرد که B_2 گزینه بیشینه‌ساز ترجیحی نسبت به B_1 است.

می‌توان درباره کارکرد شاخص $\mathscr{A}$ یک جمله کلی بیان کرد: موقعیت میانگین یک بازه نسبت به میانگین یک بازه مرجع دیگر بالاتر یا پایین‌تر بودن آن را مشخص می‌کند. در این صورت پهنای بازه‌های بالاتر (یا پایین‌تر) نسبت به بازه دیگر تعیین‌کننده میزان رضایت فرد تصمیم‌گیرنده از بالاتر یا پایین‌تر بودن آن بازه نسبت به بازه مرجع است.

۵- نمایش مدل‌های پیشنهادی: یک کاربرد در شرکت‌های گاز ایران

در این قسمت یک مثال عددی را با استفاده از کارایی‌های بازه‌ای مدل‌های DEA کراندار بررسی می‌کنیم تا مزایا و قدرت افتراق خوب آن را نشان دهیم. تمام مدل‌ها با استفاده از نرم‌افزار GAMS حل می‌شوند. برای این مثال عددی، مقدار بی‌نهایت کوچکِ غیرارشمیدسی $\varepsilon=10^{-10}$ منظور شده است.

مثال ۱: برای تأکید بر کاربرد عملی این روش، آن را برای مجموعه داده‌های متشکل از ۱۱ شرکت گاز (DMU) در ۱۱ منطقه‌ی ایران اعمال می‌کنیم. داده‌های این تحلیل از عملیات سال‌های ۲۰۰۳ و ۲۰۰۴ گرفته شده‌اند. ما از پنج متغیر از مجموعه داده‌ها به‌عنوان ورودی‌ها و خروجی‌ها استفاده می‌کنیم. ورودی‌ها شامل *تعداد کارکنان*[13] و *بودجه*[14] و خروجی‌ها شامل حجم *لوله‌ها*[15]، *تعداد مشتریان جدید*[16] و *میزان انشعابات*[17] است [۱۷، صص ۲۱–۲۸].

داده‌های ورودی و خروجی نرمال‌سازی شده دوره‌های شش ماهه که در این مثال استفاده شده‌اند، در جدول ۲ نشان داده شده است.

جدول ۲ مجموعه داده‌های نرمال‌سازی‌شده یازده DMU

شرکت‌ها	ورودی‌ها		خروجی‌ها		
	بودجه	تعداد کارکنان	حجم لوله‌ها	تعداد مشتریان جدید	تعداد انشعابات
A	۰/۸۹۷۳	۰/۹۶۹۸	۱/۰۰۰۰	۰/۳۰۷۷	۰/۴۷۴۰
B	۰/۳۸۸۴	۰/۹۹۴۳	۰/۵۳۲۵	۰/۴۹۷۸	۰/۳۹۵۳
C	۰/۷۸۶۴	۱/۰۰۰۰	۰/۲۵۵۵	۰/۲۹۳۵	۰/۳۵۴۰
D	۰/۶۸۷۹	۰/۷۹۲۶	۰/۹۱۳۰	۱/۰۰۰۰	۰/۹۹۱۹
E	۱/۰۰۰۰	۰/۷۰۸۲	۰/۹۳۸۵	۰/۸۲۲۶	۰/۵۷۶۳
F	۰/۹۶۶۲	۰/۶۰۰۸	۰/۲۶۵۶	۰/۳۴۷۳	۰/۲۱۳۷
G	۰/۸۲۶۱	۰/۶۱۳۱	۰/۵۶۵۸	۰/۵۹۱۷	۰/۵۹۲۲
H	۰/۹۱۶۹	۰/۹۴۱۶	۰/۴۶۱۴	۰/۴۸۶۳	۰/۴۹۱۲
I	۰/۶۲۲۳	۰/۴۴۷۷	۰,۳۴۰۸	۰/۶۶۲۸	۰/۳۲۰۸
J	۰/۸۸۱۳	۰/۷۶۳۹	۰/۸۸۱۹	۰/۹۷۹	۱/۰۰۰۰
K	۰/۸۸۷۶	۰/۹۸۷۰	۰/۷۹۴۵	۰/۶۱۰۵	۰/۵۹۹۴

از جدول ۳ می‌توان به‌روشنی دریافت که پنج تا از DMUها، یعنی DMU_B، DMU_D، DMU_E، DMU_I و DMU_J برحسب مدل خوشبینانه (۳)، کارای DEA شناسایی شده‌اند. این پنج واحد کارای DEA روی هم یک مرز کارایی BDEIJ را تعیین می‌کنند. به‌طور معمول تصور می‌شود که عملکرد پنج واحد کارای خوشبینانه باید بهتر از شش واحد دیگر باشد که غیرکارای خوشبینانه هستند. عملکرد یازده DMU برحسب کارایی خوشبینانه آن‌ها به‌صورت زیر رتبه‌بندی می‌شود:

$$DMU_B \sim DMU_D \sim DMU_E \sim DMU_I \sim DMU_J \ \phi \ DMU_G \ \phi$$
$$DMU_A \ \phi \ DMU_K \ \phi \ DMU_F \ \phi \ DMU_H \ \phi \ DMU_C$$

که در این‌جا نماد "~" نشان‌دهنده «بی‌تفاوت بودن» و نماد □ ϕ" نشان‌دهنده «برتر بودن» است.

جدول ۳ کارایی‌های نسبی برای یازده DMU به‌وسیله مدل‌های (۳) و (۵)

شرکت‌ها	کارایی خوشبینانه	کارایی بدبینانه
A	۱/۱۳۴۸	۱/۰۰۰۰
B	۱/۰۰۰۰	۰/۸۹۰۴
C	۳/۲۰۳۲	۱/۰۰۰۰
D	۱/۰۰۰۰	۰/۲۸۳۰
E	۱/۰۰۰۰	۰/۴۳۹۹
F	۲/۳۲۷۰	۱/۰۰۰۰
G	۱/۲۷۸۶	۰/۵۰۲۷
H	۲/۳۷۴۲	۰/۶۹۱۷
I	۱/۰۰۰۰	۰/۵۱۵۷
J	۱/۰۰۰۰	۰/۳۲۷۳
K	۱/۴۴۳۴	۰/۵۸۳۳

از دیدگاه کارایی بدبینانه، سه DMU، یعنی DMU_A، DMU_C و DMU_F ناکارای بدبینانه هستند. آن‌ها روی هم یک مرز ناکارایی ACF را تعریف می‌کنند. تصور می‌شود که عملکرد این سه واحد ناکارای بدبینانه ضعیف‌تر از هشت واحدی است که غیرناکارای بدبینانه ارزیابی شده‌اند. عملکرد یازده DMU برحسب کارایی بدبینانه آن‌ها به‌صورت زیر رتبه‌بندی می‌شود:

$$\mathrm{DMU_D}\ \phi\ \mathrm{DMU_J}\ \phi\ \mathrm{DMU_E}\ \phi\ \mathrm{DMU_G}\ \phi\ \mathrm{DMU_I}\ \phi\ \mathrm{DMU_K}\ \phi$$
$$\mathrm{DMU_H}\ \phi\ \mathrm{DMU_B}\ \phi\ \mathrm{DMU_A} \sim \mathrm{DMU_C} \sim \mathrm{DMU_D}$$

سنجش‌های فوق براساس دیدگاه‌های متفاوتی صورت گرفته‌اند. از این رو ممکن است نتایج متفاوتی نیز داشته باشند. هر نتیجه‌گیری ارزیابی که فقط یکی از این دو دیدگاه را در نظر بگیرد، بدون تردید یک‌طرفه، غیر واقع‌گرایانه، و غیر متقاعدکننده خواهد بود.

برای به دست آوردن بازه کارایی هر DMU با استفاده از مدل‌های DEA کراندار (۷)، نخست α را به دست می‌آوریم. با توجه به جدول ۳ داریم:

$$\theta^*_{max} = ۳/۲۰۳۲ \quad \text{و} \quad \varphi^*_{min} = ۰/۲۸۳۰ \quad \Rightarrow \alpha = \frac{۰/۲۸۳۰}{۳/۲۰۳۲} = ۰/۰۸۸۳$$

در نتیجه می‌توان بازه کارایی DMUها را حساب کرد که در جدول ۴ نشان داده شده است. به‌طور واضع دیده می‌شود که مدل‌های DEA کراندار نه تنها سه DMUی ناکارای بدبینانه را به‌طور دقیق مشخص می‌کنند بلکه پنج DMU کارای خوشبینانه را هم به‌طور کامل مشخص می‌کنند. $\mathrm{DMU_B}$، $\mathrm{DMU_D}$، $\mathrm{DMU_E}$، $\mathrm{DMU_I}$ و $\mathrm{DMU_J}$ واحدهای کارای DEA مشخص شده‌اند و $\mathrm{DMU_A}$، $\mathrm{DMU_C}$ و $\mathrm{DMU_F}$ سه واحد ناکارای DEA هستند. چنین نتایج ارزیابی، کاملاً با نتایج به دست آمده به‌وسیله مدل CCR سنتی (۳) و مدل بدترین کارایی نسبی (۵) سازگار هستند.

جدول ۴ بازه کارایی، مقدار شاخص $\mathscr{A}$ و ترتیب رتبه‌بندی برای یازده DMU

شرکت‌ها	بازه‌ی کارایی	$m(A_i)$	$w(A_i)$	مقدار شاخص $\mathscr{A}$	رتبه
A	[۰/۱۰۰۲, ۱/۰۰۰۰]	۰/۵۵۰۱	۰/۴۴۹۹	۰/۰۶۲۲	۹
B	[۰/۰۸۸۳, ۰/۸۹۰۴]	۰/۴۸۹۴	۰/۴۰۱۱	۰/۰۷۱۳	۸
C	[۰/۲۸۲۸, ۱/۰۰۰۰]	۰/۶۴۱۴	۰/۳۵۸۶	—	۱۱
D	[۰/۰۸۸۳, ۰/۲۸۳۰]	۰/۱۸۵۷	۰/۰۹۷۴	۰/۱۰۱۹	۱
E	[۰/۰۸۸۳, ۰/۴۳۹۹]	۰/۲۶۴۱	۰/۱۷۵۸	۰/۰۹۷۳	۳
F	[۰/۲۰۵۵, ۱/۰۰۰۰]	۰/۶۰۲۸	۰/۳۹۷۳	۰/۰۵۱۱	۱۰
G	[۰/۱۱۲۹, ۰/۵۰۲۷]	۰/۳۰۷۸	۰/۱۹۴۹	۰/۱۱۲۶	۵
H	[۰/۲۰۹۶, ۰/۶۹۱۷]	۰/۴۵۰۷	۰/۲۴۱۱	۰/۰۶۱۵	۷
I	[۰/۰۸۸۳, ۰/۵۱۵۷]	۰/۳۰۲۰	۰/۲۱۷۳	۰/۰۱۴۲	۴
J	[۰/۰۸۸۳, ۰/۳۲۷۳]	۰/۲۰۷۸	۰/۱۱۹۵	۰/۱۹۰۷	۲
K	[۰/۱۲۷۵, ۰/۵۸۳۳]	۰/۳۵۵۴	۰/۲۲۷۹	۰/۲۰۳۲	۶

جدول ۴ ترتیب رتبه‌بندی یازده شرکت گاز را برحسب نقطه وسط بازه کارایی نشان می‌دهد که براساس آن می‌توان دید مدل‌های DEA کراندار (۷) یک رتبه‌بندی کارایی یکتا برای یازده شرکت گاز ایجاد می‌کنند. معمولاً واحدهای کارای DEA عملکرد خوبی دارند، اما به این معنا نیست که هر واحد کارای DEA بهترین است. هم‌چنین واحدهای ناکارای DEA معمولاً ضعیف عمل می‌کنند، اما نه این‌که هر واحد ناکارای DEA بدترین کارکرد را انجام می‌دهد. بنابراین وقتی که یک DMU هم کارای DEA و هم ناکارای DEA باشد، به این مفهوم است که DMU نه بهترین است و نه بدترین.

از آن جایی که DEA به دلیل کاربردها و مطالعات موردی موفق خود، از سوی محققان صنعتی و دانشگاهی مورد توجه بسیار زیادی قرار گرفته است. مدل‌های DEA کراندار پیشنهادی را می‌توان برای تحلیل شاخص بهره‌وری مالمکوئیست [۱۸، صص۱۳۷-۱۵۶]، بررسی کارایی بانک [۱۹، صص۱۳۷-۱۶۴؛ ۲۰، صص۹۳-۱۰۵]، سنجش عملکرد شعب بانک [۲۱، صص۸۷-۱۰۳]، اندازه‌گیری کارایی مؤسسات آموزش عالی [۲۲، صص۱-۲۳]، انتخاب تأمین‌کنندگان و غیره به کار برد [۲۳، صص۱۲۹-۱۵۰].

۶- نتیجه‌گیری

عملکرد DMUها را از دیدگاه‌های مختلفی می‌توان اندازه‌گیری کرد. در این صورت نتایج آن‌ها بسیار گمراه‌کننده و حتی متناقض است. لذا این ضرورت انکارناپذیر است که باید اندازه‌های مختلف عملکرد را ادغام کرد تا یک ارزیابی کلی از عملکرد هر DMU به دست آید. برای نیل به این مقصود، در این مقاله مدل‌های DEA کراندار برای ارزیابی عملکرد کلی هر DMU پیشنهاد شده است. مدل‌های DEAی کراندار که ما پیشنهاد کرده‌ایم، کران‌های کارآیی خود را از دیدگاه خوشبینانه و بدبینانه به دست می‌آورد. بازه‌ها عدم اطمینان داده‌های ورودی-خروجی و ارزیابی شهودی تصمیم گیرندگان را نشان می‌دهند. همچنین نشان داده شد که واحدهای کارای خوشبینانه، ناکارای بدبینانه و نیز مرزهای کارایی و ناکارایی را می‌توان به دقت با استفاده از مدل‌های DEA کراندار پیشنهادی شناسایی کرد. رویکرد DEA پیشنهادی با مرزهای کارا و ناکارا با یک مثال عددی برای نشان دادن سادگی و سودمندی آن در ارزیابی DMU بررسی شد. نشان داده شد که رویکرد DEA با مرزهای کارا و ناکارا مزیت قابل توجهی نسبت به روش‌های فعلی برای ارزیابی DMU دارد. این روش می‌تواند بهترین DMU را به آسانی و به درستی شناسایی کند.

۷- سپاسگزاری

مؤلف از یک بررسی‌کننده ناشناس به خاطر نظرها و پیشنهادهای سازنده‌اش که در بهبود مقاله مؤثر بود، تشکر می‌کند.

۸- پی‌نوشت‌ها

1. Farrell
2. Charnes
3. Data Envelopment Analysis (DEA)
4. Decision-Making Units (DMUs)
5. Non-efficient
6. Non-inefficient
7. Entani
8. Wang
9. Luo
10. Lan
11. Chin
12. Cooper
13. Number of staff
14. Budget
15. Amount of piping
16. Number of new customer
17. Amount of branch-line

۹- منابع

[1] Farrell M.J.; "The measurement of productive efficiency"; *Journal of the Royal Statistical Society, Series A*, General 120, 1957.

[2] Charnes A., Cooper W.W., Rhodes E.; "Measuring the efficiency of decision making units"; *European Journal of Operational Research*, 2, 1978.

[3] Entani T., Maeda Y., Tanaka H.; "Dual models of interval DEA and its extension to interval data"; *European Journal of Operational Research*, 136, 2002.

[4] Azizi H., Fathi Ajirlu S.; "Measurement of overall performances of decision-

making units using ideal and anti-ideal decision-making units"; *Computers & Industrial Engineering*, 59, 2010.

[5] Wang Y.M., Luo Y.; "DEA efficiency assessment using ideal and anti-ideal decision making units"; *Applied Mathematics and Computation*, 173, 2006.

[6] Amirteimoori A.; "DEA efficiency analysis: Efficient and anti-efficient frontier"; *Applied Mathematics and Computation*, 186, 2007.

[7] Wang Y.M., Chin K.S., Yang J.B.; "Measuring the performances of decision making units using geometric average efficiency"; *Journal of the Operational Research Society*, 58, 2007.

[8] Wang Y.M., Lan Y.X.; "Measuring malmquist productivity index: A new approach based on double frontiers data envelopment analysis"; *Mathematical and Computer Modelling*, 54, 2011.

[9] Chin K.S., Wang Y.M., Poon, G.K.K., Yang J.B.; "Failure mode and effects analysis by data envelopment analysis"; *Decision Support Systems*, 48, 2009.

[10] Wang Y.M., Chin K.S.; "A new approach for the selection of advanced manufacturing technologies: DEA with double frontiers"; *International Journal of Production Research*, 47, 2009.

[11] Charnes A., Cooper W.W.; "Programming with fractional function"; *Naval Research Logistics Quarterly*, 9, 1962.

[12] Liu F.F., Chen C.L.; "The worst-practice DEA model with slack-based measurement"; *Computers & Industrial Engineering*, 57, 2009.

[13] Azizi H., Wang Y.M.; "Improved DEA models for measuring interval efficiencies of decision making units"; *Measurement*, (submitted for publication).

[14] Cooper W.W., Seiford L.M., Tone K.; Data envelopment analysis: A comprehensive text with models, applications, references and DEA-solver software; Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, MA, 2006.

[15] Wang Y.M., Yang J.B.; "Measuring the performances of decision-making units using interval efficiencies"; *Journal of Computational and Applied Mathematics*,

198, 2007.

[16] Sengupta A., "Pal T.K.; On comparing interval numbers"; *European Journal of Operational Research*, 127, 2000.

[17] Amirteimoori A.; "Data envelopment analysis in dynamic framework"; *Applied Mathematics and Computation*, 181, 2006.

[۱۸] علیرضایی م.، افشاریان م.؛ «ارائه مدلی تلفیقی برای محاسبه رشد بهره‌وری کل عوامل از مدلهای تحلیل پوششی داده‌ها، شاخص تورنکوئیست و محاسبه رشد بهره‌وری شرکت ملی نفت ایران»؛ *فصلنامه علمی – پژوهشی مدرس علوم انسانی – پژوهش‌های مدیریت در ایران*، دوره یازدهم، شماره سوم، آذر ۱۳۸۶.

[۱۹] صفری س.، ابراهیمی شقاقی م.، شیخ م.؛ «مدیریت ریسک اعتباری مشتریان حقوقی در بانک‌های تجاری با رویکرد تحلیل پوششی داده‌ها (رتبه‌بندی اعتباری)»؛ *فصلنامه علمی – پژوهشی مدرس علوم انسانی – پژوهش‌های مدیریت در ایران*، دوره چهاردهم، زمستان ۱۳۸۹.

[۲۰] کردرستمی س.، امیرتیموری ع.، فاضلی سندیانی س؛ «تخصیص مجدد منابع با حفظ پایداری مرزهای کارا در مناطق»؛ *مجله تحقیق در عملیات و کاربردهای آن*، دوره هشتم، شماره چهارم، زمستان ۱۳۹۰.

[۲۱] حمیدی ن.، اکبری شمیرانی ر.، فضلی ص.؛ «شناسایی شعبه‌های ناکارای بانک ملت و استفاده از راهبرد ادغام به‌منظور افزایش کارایی آن»؛ *فصلنامه علمی – پژوهشی مدرس علوم انسانی – پژوهش‌های مدیریت در ایران*، دوره پانزدهم، شماره سوم، آبان ۱۳۹۰.

[۲۲] ترکاشوند ع.، آذر ع.؛ «ارزیابی عملکرد آموزشی و پژوهشی با استفاده از مدل تحلیل پوششی داده‌ها: گروههای آموزشی دانشکده علوم انسانی هر یک از مدلهای ارزیابی دانشگاه تربیت مدرس»؛ *فصلنامه علمی – پژوهشی مدرس علوم انسانی – پژوهش‌های مدیریت در ایران*، دوره دهم، شماره اول، فروردین ۱۳۸۵.

[۲۳] عزیزی ح.؛ «یک رویکرد جدید برای انتخاب تأمین کنندگان در حضور داده‌های نادقیق: DEA با مرزهای دوگانه»؛ *فصلنامه علمی – پژوهشی مدرس علوم انسانی پژوهش‌های مدیریت در ایران*، دوره شانزدهم، شماره دوم، تیر ۱۳۹۱.