ارائه رویکردی جدید برای حل مسائل برنامه‌ریزی خطی تمام‌فازی با استفاده از مفهوم رتبه‌بندی فازی

منصور مؤمنی[1*]، مهناز حسین‌زاده[2]

۱- دانشیار گروه مدیریت صنعتی، دانشکده مدیریت، دانشگاه تهران، تهران، ایران
۲- دانشجوی دکتری مدیریت تحقیق در عملیات، دانشکده مدیریت، دانشگاه تهران، تهران ،ایران

دریافت: ۸۹/۱۲/۱ پذیرش: ۹۰/۵/۵

چکیده

مسائل برنامه‌ریزی خطی تمام فازی، مسائلی هستند که تمامی پارامترها اعم از ضرایب متغیرها در توابع هدف، ضرایب متغیرها در محدودیت‌ها، اعداد سمت راست محدودیت‌ها و هم‌چنین متغیرهای تصمیم در آن‌ها فازی می‌باشند. در طی چند سال گذشته، چندین روش برای حل این مدل‌ها و تعیین جواب بهینه آن‌ها ارائه شده است که هر یک مزایا و معایبی را به همراه دارند.

در این پژوهش با نقد روش‌های پیشین، روشی جدید به‌منظور حل این قبیل مسائل با فرض این‌که تمامی پارامترها و متغیرهای مدل از توزیع امکان مثلثی برخوردارند، ارائه شده است. برای سنجش کارایی مدل پیشنهادی در عمل، چندین مثال عددی با در نظر گرفتن حالت‌های مختلف حل شده است. نتایج حاصل نشان‌دهنده قابلیت تعیین جواب به‌وسیله مدل پیشنهادی در تمامی مواردی است که مدل‌های پیشین در آن نارسایی دارند و مزیت اصلی آن سادگی محاسباتی است.

کلیدواژه‌ها: مسائل برنامه‌ریزی خطی تمام فازی، عدد فازی مثلثی، رتبه‌بندی فازی، متغیر تصمیم فازی.

۱- مقدمه

بیش‌تر مسائل نیازمند تصمیم‌گیری در شرایط واقعی و در محیطی نادقیق رخ می‌دهند، بنابراین بسیاری از ضرایب، اهداف و محدودیت‌ها را نمی‌توان به‌صورت قطعی و بدون ابهام

* نویسندۀ مسؤول مقاله: E-mail: mmomeni@ut.ac.ir

براورد کرد. در عمل، دسترسی نداشتن به نمونه‌های کافی و یا دردست نداشتن یک مدل آماری زیربنایی موجب براوردهای آماری ناکارآمد خواهد شد. در نتیجه استفاده از یک مدل تصمیم قطعی در این شرایط منجر به دستیابی به جواب‌هایی غیر واقعی خواهد شد [۱، صص ۱۹۶۱–۱۹۷۸]. در این شرایط تئوری فازی چارچوبی تئوریک و مفهومی را برای اداره و مدیریت چنین وضعیت نادقیقی فراهم می‌کند.

تئوری مجموعه‌های فازی نخستین بار به‌وسیله بلمن و زاده [۲]، در فرایند تصمیم‌گیری به کار گرفته شد و مفهوم برنامه‌ریزی ریاضی فازی به‌صورت کلی نخستین بار به‌وسیله تاناکا و همکاران [۳] مطرح شد [۲، صص۳۳۸–۳۵۳؛۳، صص۳۷–۴۶].

زیمرمن[۴] برای بار اول مسئلهٔ برنامه‌ریزی خطی فازی را فرموله کرد [۴، صص۴۵–۵۵]. از آن پس تکنیک‌های بسیاری برای حل مسائل برنامه‌ریزی خطی فازی توسعه یافتند که در قالب دو دسته کلی برنامه‌ریزی خطی فازی[۱] [۶؛ ۷؛ ۸؛ ۹؛ ۱۰؛ ۱۱] و برنامه‌ریزی خطی مبتنی بر تئوری امکان[۲] [۱۳؛ ۱۴؛ ۱۵؛ ۱۶؛ ۱۷؛ ۱۸] قرار گرفته‌اند [۵، صص۲۳۱–۲۳۶؛۶، صص۳۴۲–۳۴۹؛۷، صص۲۰۹–۲۱۶؛۸، صص۲۴۳–۲۵۱؛۹، صص۱۳۱–۱۴۱؛۱۰، صص۲۲۹–۲۳۹؛۱۱، صص۱۷–۳۰؛۱۲، صص۱۲۳–۱۳۸؛۱۳، صص۱۸۶–۱۹۴؛۱۴؛ ۱۵، صص۳۱–۴۸؛۱۶، صص۱۵۹–۱۷۴].

در هر گروه از این مدل‌ها، برخی از قسمت‌های مسئله به‌صورت فازی یا نادقیق در نظر گرفته شد. راه‌کارهایی نیز به منظور حل آن‌ها ارائه شد [۱۷]. بسیاری از مدل‌های ارائه شده برای سادگی بیش‌تر جواب نهایی مسئله را به‌صورت قطعی در نظر گرفته‌اند [۲۰]، به این معنا که در یک محیط فازی، تصمیم‌های به‌صورت قطعی اتخاذ شده است. بنابراین در این فرایند تصمیم‌گیری، جنبه فازی مسئله به‌طور عملی نادیده گرفته می‌شود [۱۸، صص۳۲۳–۳۳۲]. از آن پس چندین مدل برای حل مسائل برنامه‌ریزی خطی فازی یا امکانی با متغیرهای تصمیم فازی ارائه شدند که هر یک مزایا و معایبی دارند. عده‌ای با استفاده از مفهوم سیمپلکس ثانویه برای حل مسائل از برنامه‌ریزی خطی فازی با متغیرهای تصمیم فازی استفاده کرده‌اند. درواقع مفهوم ثانویه برای پارامترهای فازی یک مسئله برنامه‌ریزی خطی، نخستین بار به‌وسیله رودر و زیمرمن مطرح شد. وردگی مسئله [۹] ثانویه فازی را با استفاده از برنامه‌ریزی خطی پارامتریک توسعه داد و نشان داد که مسئله اولیه و ثانویه فازی هر دو یک جواب دارند. عده‌ای نیز مدل‌هایی را با عنوان مدل‌های تمام‌فازی ارائه کردند [۲۱؛ ۲۲؛ ۲۳؛

۲۴؛ ۲۵؛ ۲۶؛ ۲۷] که در این دسته از مدل‌ها تمامی پارامترهای مسئله و متغیرهای تصمیم هم‌زمان فازی فرض می‌شوند. این مسائل را دراصطلاح "مسائل برنامه‌ریزی خطی تمام‌فازی[۳]"می‌نامند [۱۹، صص۲۱-۳۳؛ ۲۰، صص۳۵-۵۳؛۲۱، صص۲۵۳-۲۶۱؛۲۲، صص۱۹-۳۲؛۲۳، صص۸۱۷-۸۲۳؛۲۴، صص۳۲۸-۳۴۳؛۲۵، صص ۳۱۵۱-۳۱۵۶].

در این پژوهش برخی از روش‌های ارائه شده برای حل مسائل برنامه‌ریزی خطی تمام‌فازی بررسی شده و برخی کاستی‌های آن‌ها ذکر شده است، سپس مدلی برای حل این مسائل پیشنهاد شده است که درنهایت به‌منظور سنجش کارایی مدل پیشنهادی در عمل، چندین مثال عددی با در نظر گرفتن حالت‌های مختلف ارائه می‌شود.

۲- مبانی نظری پژوهش

۲-۱- نظریه فازی

نظریه فازی در سال ۱۹۶۵ به‌وسیله پروفسور لطفعلی عسگرزاده عرضه شد. این نظریه، نظریه‌ای است برای اقدام در شرایط عدم اطمینان که نظریه قادر است بسیاری از مفاهیم، متغیرها و سیستم‌هایی را که نادقیق و مبهم هستند، چنان‌چه در عالم واقع در بیش‌تر موارد چنین است، به شکل ریاضی درآورد و زمینه را برای استدلال، استنتاج، کنترل و تصمیم‌گیری در شرایط عدم اطمینان فراهم کرد.

۲-۲- مجموعه‌های قطعی[۴]

گردآیه‌ای معین از اشیا را مجموعه (قطعی) می‌نامیم. مجموعه‌ها را با حروف بزرگ A،B و ... و اعضای آن‌ها را با حروف کوچک a، b و ... نشان می‌دهیم. چنان‌چه a عضوی از مجموعه A باشد، می‌نویسیم $a \in A$ و می‌خوانیم، a عضو A است و در صورتی که a عضوی از A نباشد، می‌نویسیم $a \notin A$ و می‌خوانیم a عضو A نیست.

۲-۳- تابع عضویت و مجموعه‌های فازی

تابع نشانگر، هر زیر مجموعه x از مجموعه A را به یک مجموعه دوعضوی {۱و۰} مربوط می‌کند؛ یعنی:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} ۱ & \text{اگر} \quad x \in A \\ ۰ & \text{اگر} \quad x \notin A \end{cases} \qquad (۱)$$

به‌عبارتی اگر عنصری عضو مجموعه A باشد، به آن مقدار ۱ و در غیر این صورت، صفر می‌دهد؛ یعنی در نظریه مجموعه‌های قطعی یا عنصری متعلق به آن مجموعه وجود دارد یا نیست. حال اگر برد تابع عضویت را از مجموعه دوعضوی {۱و۰} به بازهٔ [۱و۰] توسعه دهیم، یک تابع خواهیم داشت که به هر عضو x از مجموعه A عددی را از بازهٔ [۱و۰] نسبت می‌دهد که به آن تابع عضویت می‌گوییم و با $A(x)$ نمایش می‌دهیم. در این صورت مجموعه قطعی به مجموعه فازی تبدیل می‌شود. بنابراین در مجموعه‌های فازی، هر عنصری ممکن است تا درجه‌ای در بازه [۱و۰] به آن مجموعه تعلق داشته باشد [۲۶، صص۱۸۷–۲۰۰].

۲-۴- اعداد فازی

اعداد فازی تعمیم اعداد معمولی (قطعی) هستند و با استفاده از اصل گسترش می‌توان عملگرهای جبری را برای آن‌ها تعریف کرد. انجام محاسبات با اعداد فازی مشکلات و پیچیدگی‌های بسیاری دارد، از این رو دوبوا و پراد نوع خاصی از اعداد فازی را پیشنهاد کرند که اعداد فازی LR[۵] نامیده می‌شوند. کاربرد این اعداد، باعث افزایش کارایی محاسباتی، بدون محدود کردن کلیت آن می‌شود. اعمال جبری با این نوع اعداد بسیار ساده بوده و یک الگوی مشخص دارد [۲۷].

تعریف ۲-۱: براساس تعریف عدد فازی A از نوع LR است، اگر و فقط اگر تابع عضویت آن به شکل رابطه ۲ باشد.

$$A(x) = \begin{cases} L\left(\frac{m_A - x}{w_A}\right) & -\infty < x \le m_A \\ R\left(\frac{x - m_A}{\acute{w}_A}\right) & m_A \le x < +\infty \end{cases} \qquad w_A, \acute{w}_A \ge ۰ \qquad (۲)$$

به طوری که L و R توابع مرجع‌اند و چند خاصیت دارند:

۱- متقارن هستند؛

۲- $L(۰) = ۱$ و $R(۰) = ۱$؛

۳- توابعی هستند که در فاصله $[\cdot,+\infty)$ ناصعودی و در فاصله $(-\infty,\cdot]$ غیرنزولی هستند.

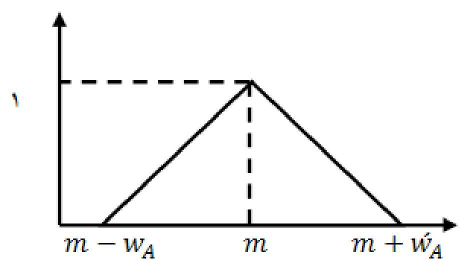
m_A مقدار میانگین عدد فازی A است و دو عدد $w_A, \acute{w}_A$ میزان عرض باندهای چپ و راست A را اندازه می‌گیرند . این یک فرم پارامتریک از عدد فازی A است، به همین خاطر می‌توان A را با یک سه‌تایی به شکل زیر نمایش داد:

$$\widetilde{A} \equiv (m, w_A, \acute{w}_A)_{LR}$$

و می‌گوییم یک عدد فازی از نوع LR یک عدد فازی مثلثی است، اگر تابع عضویت آن به‌صورت تابع ۳ باشد:

$$A(x) = \begin{cases} ۱ - \frac{m_A - x}{w_A} & m_A - w_A < x \leq m_A \\ ۱ - \frac{x - m_A}{\acute{w}_A} & m_A \leq x < m_A + \acute{w}_A \\ \cdot & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \qquad (۳)$$

که نمایش آن به صورت شکل ۱ است:



شکل ۱ نمایش عدد فازی مثلثی [۲۸، صص۲۷-۵۳]

تعریف ۲-۲: عملگرهای ریاضی: برای دو عدد فازی A و B که در فاصلهٔ $[\cdot,\infty)$، توابع L و R آن‌ها کاهشی است؛ عملگرهای اصلی به‌صورت روابط ۴، ۵، ۶، ۷ و ۸ تعریف شده است:

$$A = (a, w_A, \acute{w}_A)_{LR} \quad , \; B = (b, w_B, \acute{w}_{\boldsymbol{B}})_{LR}$$

$$A + B = \left(a + b, w_A + w_B, w_A \acute{+} \acute{w}_{\boldsymbol{B}}\right)_{LR} \qquad (۴)$$

$$A - B = (a - b, w_A + \acute{w}_{\boldsymbol{B}}, w_A \acute{+} w_{\boldsymbol{B}})_{LR} \qquad (۵)$$

برای $A > ۰$، $B > ۰$ داریم:

$$(a, w_A, \acute{w}_A)_{LR}.(b, w_B, \acute{w}_{\boldsymbol{B}})_{LR} \approx (a.b, aw_{\boldsymbol{B}} + bw_A, a\acute{w}_{\boldsymbol{B}} + b\acute{w}_A)_{LR} \quad (۶)$$

و برای $A<۰$، $B> ۰$ داریم:

$$(a, w_A, \acute{w}_A)_{LR}.(b, w_B, \acute{w}_{\boldsymbol{B}})_{LR} \approx (a.b, -a\acute{w}_{\boldsymbol{B}} + bw_A, -aw_{\boldsymbol{B}} + b\acute{w}_A)_{LR} (۷)$$

و برای هر $c\epsilon\mathbb{R}^+$ داریم:

$$c.(a, w_A, \acute{w}_A)_{LR} = (ca, cw_A, c\acute{w}_A)_{LR} \quad (۸)$$

تعریف ۲-۳: رتبه‌بندی **فازی**: عدد فازی B از عدد فازی A کوچک‌تر است اگر و فقط اگر [۲۹، صص۳۲۴-۳۲۹]:

$$B<A \longleftrightarrow ۱)\ b < a \quad \text{و} \quad ۲)\ w_B+\acute{w}_{\boldsymbol{B}} \geq w_A+\acute{w}_A \quad (۹)$$

۲-۵- مدل برنامه‌ریزی خطی تمام فازی

در یک مدل برنامه‌ریزی خطی تمام‌فازی، تمامی اجزای مدل، یعنی مقادیر کلیهٔ پارامترها شامل ضرایب تابع هدف، ضرایب متغیرها در محدودیت‌ها و مقادیر سمت راست و هم‌چنین مقادیر متغیرهای تصمیم و درنتیجه مقدار تابع هدف فازی هستند که فرم عمومی نمایش آن به‌صورت رابطه ۱۰ است:

$$\begin{aligned} &Max\ (or\ Min)\ \tilde{Z} = (\tilde{C}^T \otimes \tilde{x}) \\ &\text{Subject to: } \tilde{A} \otimes \tilde{x} \begin{pmatrix} \leq \\ = \\ \geq \end{pmatrix} \tilde{b} \\ &\tilde{x} \geq ۰ \end{aligned} \quad (۱۰)$$

برای حل این مسئله تاکنون چندین روش ارائه شده است که هر یک با انتقاداتی همراه است. در ادامه به بیان خلاصه‌ای از این روش‌ها خواهیم پرداخت:

دهقان و همکاران [۲۴]، مدلی را برای دستگاه معادلات تمام فازی اعدادفازی مثبت ارائه کردند. آن‌ها ماتریس ضرایب را به‌صورت $\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij})$ را که تمام مؤلفه‌های آن اعداد فازی از نوع LR را به‌صورت $\tilde{A} = (A, M, N)$ نمایش می‌دهند، به‌طوری که M و N ماتریس‌های قطعی با بعد **A** هستند و $\tilde{b} = (b, g, h)$ بردار فازی اعداد سمت راست باشد و در این‌جا **b** نشان‌دهنده مقدار حد وسط و **g** و **h** به‌ترتیب نشان‌دهندهٔ عرض باندهای راست و چپ

می‌باشند. همچنین فرض براین است که ماتریس$\tilde{A}$ و بردار مقادیر سمت راست $\tilde{b}$ به‌ترتیب ماتریس و بردارهای فازی نامنفی هستند [۲۴، صص۳۲۸-۳۴۳]. در این صورت $\tilde{x} = (x, y, z)$ بردار نامنفی جواب برای FFLP مثبت گفته شده است. در مدل آن‌ها $\tilde{x}$ جواب مسئله ذکر شده است، اگر و تنها اگر:

$$(Ax, Mx + Ay, Nx + Az) = (b, g, h) \qquad (۱۱)$$

یعنی:

$$\begin{cases} Ax = b \\ Mx + Ay = g \\ Nx + Az = h \end{cases} \qquad (۱۲)$$

و می‌توانیم بگوییم:

$$a_{i۱}x_۱ + a_{i۲}x_۲ + \cdots + a_{in}x_n = b_i$$

$$(a_{i۱}y_۱ + a_{i۲}y_۲ + \cdots + a_{in}y_n) + \left(m_{i۱}x_۱ + m_{i۲}x_۲ + \cdots + m_{in}x_n\right) = g_i \quad ۱ \le i \le n$$

$$(a_{i۱}z_۱ + a_{i۲}z_۲ + \cdots + a_{in}z_n) + \left(n_{i۱}x_۱ + n_{i۲}x_۲ + \cdots + n_{in}x_n\right) = h_i \qquad (۱۳)$$

و به عبارت دیگر:

$$\begin{cases} Ax = b \\ Ay = g - Mx \\ Az = h - Nx \end{cases} \qquad (۱۴)$$

و بنابراین:

$$\begin{aligned} &Ax = b \Rightarrow x = A^{-۱}b \\ &y = A^{-۱}h - A^{-۱}Mx \\ &z = A^{-۱}g - A^{-۱}Nx \end{aligned} \qquad (۱۵)$$

آن‌ها تابع هدف قطعی ۱۶ را تعریف کردند:

$$Min\ (Ax - b)^۲ + (Mx + Ay - g)^۲ + (Nx + Az - h)^۲ \qquad (۱۶)$$

وسپس آن‌ها برای حل این دستگاه، روش‌های مختلف حل مسائل غیرخطی را به کار گرفتند.

این مدل تنها زمانی قابل استفاده است که تمامی ضرایب متغیرها در محدودیت‌ها عدد فازی غیرمنفی باشند، بنابراین، این ویژگی دامنه کاربرد مدل آن‌ها را در عمل بسیار محدود می‌سازد. به‌علاوه تبدیل مسئله تمام فازی به یک مسئله غیرخطی پیچیده، فرایند حل را بسیار دشوار می‌سازد.

حسین‌زاده لطفی و همکاران [۲۵] نیز مدلی را برای حل FFLP پیشنهاد کردند که مدل آن‌ها تنها برای مواردی که ضرایب متغیرها در تابع هدف و محدودیت‌ها اعداد فازی مثلثی متقارن باشند، قابل استفاده است و در غیر این صورت باید مقدار این پارامترها را با نزدیک‌ترین عدد فازی مثلثی متقارن تخمین زد، در این صورت جواب مسئله تقریبی است. آن‌ها برای تقریب زدن هر عدد فازی مثلثی با نزدیک‌ترین عدد فازی متقارن به‌صورت زیر عمل می‌کنند:

اگر $\tilde{u}$ یک عددفازی و $(\bar{u}(r),\underline{u}(r))$ فرم پارامتریک آن باشند، برای تقریب زدن هر اعداد فازی مثلثی با نزدیک‌ترین عدد فازی متقارن به $\tilde{u}$ باید رابطه ۱۴ را حداقل کرد:

$$D^{2}(\tilde{u},S\left[x_0,\sigma\right]=\int_0^1\left(\underline{u}(r)-\underline{S\left[x_0,\sigma\right]}(r)\right)^2dr+\int_0^1\left(\bar{u}(r)-\overline{S\left[x_0,\sigma\right]}(r)\right)^2dr \qquad (17)$$

که با حداقل کردن رابطه بالا برحسب (x_0,σ) به رابطه ۱۸ می‌رسیم:

$$\sigma=\frac{3}{2}\int_0^1\left(\bar{u}(r)-\underline{u}(r)\right)\left(1-r\right)dr \qquad (18)$$

$$x_0=1\int_0^1\left(\bar{u}(r)+\underline{u}(r)\right)dr$$

بنابراین نزدیک‌ترین عدد فازی مثلثی متقارن به $\tilde{u}$، x_0 با فازیت σ است که به‌نوعی دیفازی کننده‌های $\tilde{u}$ به حساب می‌آیند.

سپس آن‌ها مسئله تمام فازی را به شکل رابطه ۱۹ تعریف کردند.

$$\begin{aligned}&Max\left(C_{\tilde{c}},w_{\tilde{c}}^L,w_{\tilde{c}}^R\right)\left(C_{\tilde{x}},w_{\tilde{x}}^L,w_{\tilde{x}}^R\right)\\&s.t.\left(C_{\tilde{A}},w_{\tilde{A}}^L,w_{\tilde{A}}^R\right)\left(C_{\tilde{x}},w_{\tilde{x}}^L,w_{\tilde{x}}^R\right)=\left(C_{\tilde{b}},w_{\tilde{b}}^L,w_{\tilde{b}}^R\right)\\&\qquad C_{\tilde{x}}-w_{\tilde{x}}^L\geq 0\end{aligned} \qquad (19)$$

به طوری که:

$\tilde{X} = (C_{\tilde{x}}, w^L_{\tilde{x}}, w^R_{\tilde{x}}), \tilde{b} = (C_{\tilde{b}}, w^L_{\tilde{b}}, w^R_{\tilde{b}}), \tilde{A} = (C_{\tilde{A}}, w^L_{\tilde{A}}, w^R_{\tilde{A}}), \tilde{C} = (C_{\tilde{c}}, w^L_{\tilde{c}}, w^R_{\tilde{c}})$
که ضرایب تابع هدف، متغیرهای تصمیم، ضرایب محدودیت‌ها و اعداد سمت راست با استفاده از تقریب بالا برای اعداد مثلثی نامتقارن به نزدیک‌ترین اعداد فازی مثلثی نزدیک به آن‌ها تقریب زده شده است. بنابراین مسئله برنامه‌ریزی خطی تمام فازی به‌صورت رابطه ۱۷ دیفازی می‌شود:

$$\begin{aligned}
&Max\ C_{\tilde{c}}C_{\tilde{x}} + ۱/۴C_{\tilde{c}}w^R_{\tilde{x}} + ۱/۴w^R_{\tilde{c}}C_{\tilde{x}} + ۱/۶w^R_{\tilde{c}}w^R_{\tilde{x}} - ۱/۴C_{\tilde{c}}w^L_{\tilde{x}} - ۱/۴w^L_{\tilde{c}}C_{\tilde{x}} + ۱/۶w^L_{\tilde{c}}w^L_{\tilde{x}}\\
&s.t.\ C_{\tilde{A}}C_{\tilde{x}} + ۱/۴C_{\tilde{A}}w^R_{\tilde{x}} + ۱/۴w^R_{\tilde{A}}C_{\tilde{x}} + ۱/۶w^R_{\tilde{A}}w^R_{\tilde{x}} - ۱/۴C_{\tilde{A}}w^L_{\tilde{x}} - ۱/۴w^L_{\tilde{A}}C_{\tilde{x}} + ۱/۶w^L_{\tilde{A}}w^L_{\tilde{x}} = C_{\tilde{b}} + ۱/۴w^R_{\tilde{b}} + ۱/۴w^L_{\tilde{b}}\\
&۱/۲C_{\tilde{A}}w^R_{\tilde{x}} + ۱/۲w^R_{\tilde{A}}C_{\tilde{x}} + ۳/۸w^R_{\tilde{A}}w^R_{\tilde{x}} + ۱/۲C_{\tilde{A}}w^L_{\tilde{x}} + ۱/۲w^L_{\tilde{A}}C_{\tilde{x}} - ۳/۸w^L_{\tilde{A}}w^L_{\tilde{x}} = ۱/۲w^R_{\tilde{b}} + ۱/۲w^L_{\tilde{b}}\\
&C_{\tilde{x}} - w^L_{\tilde{x}} \geq ۰\\
&w^L_{\tilde{x}} \geq ۰, w^R_{\tilde{x}} \geq ۰
\end{aligned} \qquad (۲۰)$$

کومار و همکاران [۲۳] انتقاد از مدل‌های ارائه شده پیشین، مدل جدیدی را پیشنهاد کردند که این مدل نیز تنها برای حالت تساوی محدودیت‌ها مناسب است [۲۳، صص۸۱۷–۸۲۳]. در مدل وی $\tilde{C}_j$، $\tilde{x}_j$ و $\tilde{a}_{ij}$ اعداد فازی مثلثی هستند که به‌ترتیب به‌صورت (p_j, q_j, r_j) ، (x_j, y_j, z_j) و (a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}) نمایش داده شده‌اند. در نتیجه مدل تمام فازی وی به‌صورت رابطه ۲۱ تغییر شکل یافته است:

$Max\ (or\ Min)\ \tilde{Z} = \sum_{j=۱}^{n}(p_j, q_j, r_j) \otimes (x_j, y_j, z_j)$

Subject to: $\sum_{j=۱}^{n}(a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}) \otimes (x_j, y_j, z_j) = (b_i, g_i, h_i) \quad \forall i = ۱,۲, \dots, m$

(x_j, y_j, z_j) غیر منفی (۲۱)

و با فرض اینکه $(a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}) \otimes (x_j, y_j, z_j) = (m_{ij}, n_{ij}, o_{ij})$ مسئله به شکل رابطه ۱۹ تبدیل شده است:

$Max\ (or\ Min)\ \tilde{Z} = \sum_{j=۱}^{n}(p_j, q_j, r_j) \otimes (x_j, y_j, z_j)$

Subject to: $\sum_{j=۱}^{n}(m_{ij}, n_{ij}, o_{ij}) = (b_i, g_i, h_i) \quad \forall i = ۱,۲, \dots, m$

(x_j, y_j, z_j) غیر منفی (۲۲)

وی تابع هدف را دیفازی کرده و محدودیت‌ها را به شکل رابطه ۲۰ به محدودیت‌های قطعی تبدیل کرده است:

$$\begin{aligned} & Max\ (or\ Min)\ \tilde{Z} = \tfrac{۱}{۴}\left(\textstyle\sum_{j=۱}^{n} p_j x_j + ۲\sum_{j=۱}^{n} q_j y_j + \sum_{j=۱}^{n} r_j z_j\right) \\ & \text{Subject to: } \textstyle\sum_{j=۱}^{n} m_{ij} = b_i \\ & \qquad \textstyle\sum_{j=۱}^{n} n_{ij} = g_i \\ & \qquad \textstyle\sum_{j=۱}^{n} o_{ij} = h_i \\ & \qquad y_j - x_j \geq ۰\ , \quad z_j - y_j \geq ۰ \end{aligned} \tag{۲۳}$$

بنابراین همان طور که گفته شد، این مدل تنها برای حالت تساوی محدودیت‌ها قابل استفاده است و البته وجود تعداد زیادی محدودیت با علامت مساوی در اغلب موارد، مسئله را فاقد منطقه موجه می‌سازد.

۳- مدل پیشنهادی

در این قسمت به ارائه مدلی پرداخته می‌شود که نقایص مدل‌های پیشین را برطرف می‌کند. بنابراین این مدل برای تمامی انواع حالت‌های ضرایب متغیرها در تابع هدف و محدودیت‌ها از اعداد قطعی تا اعداد فازی از نوع LR متقارن، نامتقارن و هم‌چنین مثبت یا منفی قابلیت کاربرد دارد. هم‌چنین این مدل برای تمامی انواع محدودیت‌ها از نوع مساوی، کوچک‌تر مساوی و یا بزرگ‌تر مساوی قابل استفاده است. شکل عمومی مدل به‌صورت رابطه ۲۱ است:

$$\begin{aligned} & Max\ (or\ Min)\ \tilde{Z} = (\tilde{C}^T \otimes \tilde{x}) \\ & \text{Subject to: } \tilde{A} \otimes \tilde{x} \begin{pmatrix} \leq \\ = \\ \geq \end{pmatrix} \tilde{b} \\ & \qquad \tilde{x} \geq ۰ \end{aligned} \tag{۲۴}$$

در این مدل $\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij})$ نشان‌دهندهٔ ماتریس ضرایب است که $\tilde{a}_{ij} = (a_{ij}, w_{a_{ij}}, \acute{w}_{a_{ij}})$، $\tilde{C} = (\tilde{c}_j)$ بردار ضرایب متغیرها در تابع هدف است که $\tilde{c}_j = (c_j, w_{c_j}, \acute{w}_{c_j})$ ، $\tilde{b} = (\tilde{b_i})$ نشان‌دهندهٔ بردار اعداد سمت راست است که $\tilde{b}_i = \left(b_i, w_{b_i}, \acute{w}_{b_i}\right)$ و $\tilde{x} = (x_{mj}, w_j, \acute{w}_j)$ متغیرهای تصمیم فازی مسئله هستند که تمامی پارامترها و متغیرها، اعداد فازی از نوع

LR می‌باشند که به‌طور لزوم متقارن یا مثبت نیستند.

با جایگذاری موارد ذکر شده می‌توان مدل ۲۱ را به شکل رابطه ۲۲ بازنویسی کرد.

$$Max\ (or\ Min)\ \tilde{Z} = \sum_{j=1}^{n} (c_j, w_{c\,j}, \acute{w}_{c\,j}) \otimes (x_{mj}, w_j, \acute{w}_j)$$

$$\text{Subject to: } \sum_{j=1}^{n} \left(a_{ij}, w_{a\,ij}, \acute{w}_{a\,ij}\right) \otimes \left(x_{mj}, w_j, \acute{w}_j\right) \begin{pmatrix} \leq \\ = \\ \geq \end{pmatrix} \left(b_i, w_{b\,i}, \acute{w}_{b\,i}\right)$$

$$\forall i = 1,2,\dots,M\ (x_{mj}, w_j, \acute{w}_j)\ \text{غیر منفی} \qquad (25)$$

با استفاده از عملگرهای فازی تعریف۲-۲ می‌توان مدل ۲۲ را به مدل ۲۳ تبدیل کرد.

$$Max\ (Min) Z = [\sum_{j=1}^{n} c_j x_j\ , \sum_{j\epsilon C_p} \left(c_j w_j + x_{mj} w_{c\,j}\right) + \sum_{j\epsilon C_{\acute{p}}} \left(-c_j \acute{w}_j + x_{mj} w_{c\,j}\right),\ \sum_{j\epsilon C_p} \left(c_j \acute{w}_j + x_{mj} \acute{w}_{c\,j}\right) + \sum_{j\epsilon C_{\acute{p}}} \left(-c_j w_j + x_{mj} \acute{w}_{c\,j}\right)]$$

$$s.t. \left[\sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_{mj}, \sum_{a_{ij}\epsilon A_p} \left(a_{ij} w_j + x_{mj} w_{a\,ij}\right) + \sum_{a_{ij}\epsilon A_{\acute{p}}} \left(-a_{ij} \acute{w}_j + x_j w_{a\,ij}\right), \sum_{a_{ij}\epsilon A_p} \left(a_{ij} \acute{w}_j + x_{mj} \acute{w}_{a\,ij}\right) + \sum_{a_{ij}\epsilon A_{\acute{p}}} \left(-a_{ij} w_j + x_{mj} \acute{w}_{a\,ij}\right)\right] \begin{pmatrix} \leq \\ = \\ \geq \end{pmatrix} \left(b_i, w_{b\,i}, \acute{w}_{b\,i}\right)\ \ \forall i = 1,2,\dots,M\ , j = 1,\dots,n$$

$$\left(x_{mj}, w_j, \acute{w}_j\right)\ \text{غیر منفی}\ j = 1,\dots,n \quad (23)$$

به طوری که:

$$C_p = \left\{j \middle| \tilde{c}_j \ \text{غیر منفی است}\right\} \text{ و } C_{\acute{p}} = \left\{j \middle| \tilde{c}_j \ \text{منفی است}\right\}$$

$$A_p = \left\{j \middle| \tilde{a}_{ij} \ \text{غیر منفی است}\right\} \text{ و } A_{\acute{p}} = \left\{j \middle| \tilde{a}_{ij} \ \text{منفی است}\right\}$$

در مدل ۲۶ تابع هدف یک عدد فازی مثلثی است که میانگین (مرکز) و عرض باند چپ و راست آن به‌ترتیب و به‌صورت روابط ۲۷، ۲۸ و ۲۹ هستند.

$$Z_m = \sum_{j=1}^{n} c_{mj} x_j \qquad (27)$$

$$w_Z = \sum_{j\epsilon C_p} \left(c_j w_j + x_{mj} w_{c\,j}\right) + \sum_{j\epsilon C_{\acute{p}}} \left(-c_j \acute{w}_j + x_{mj} w_{c\,j}\right) \qquad (28)$$

$$\acute{w}_Z = \sum_{j\epsilon C_p} \left(c_j \acute{w}_j + x_{mj} \acute{w}_{c\,j}\right) + \sum_{j\epsilon C_{\acute{p}}} \left(-c_j w_j + x_{mj} \acute{w}_{c\,j}\right) \qquad (29)$$

بعلاوه عبارت‌های سمت چپ محدودیت‌ها نیز همانند مقادیر سمت راست آن اعداد فازی مثلثی هستند که میانگین (مرکز) و عرض باند چپ و راست آن به‌ترتیب و به‌صورت روابط

۳۰، ۳۱ و ۳۲ قابل تعریف هستند.

$$(AX)_m = \sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_{mj} \tag{۳۰}$$

$$(AX)_w = \sum_{a_{ij}\epsilon A_p}\left(a_{ij}w_j + x_{mj}w_{a_{ij}}\right) + \sum_{a_{ij}\epsilon A_{\acute{p}}}\left(-a_{ij}\acute{w}_j + x_{mj}w_{a_{ij}}\right) \tag{۳۱}$$

$$(AX)_{\acute{w}} = \sum_{a_{ij}\epsilon A_p}\left(a_{ij}\acute{w}_j + x_{mj}\acute{w}_{a_{ij}}\right) + \sum_{a_{ij}\epsilon A_{\acute{p}}}\left(-a_{ij}w_j + x_{mj}\acute{w}_{a_{ij}}\right) \tag{۳۲}$$

همان طور که پیش‌تر بیان شد، عدد فازی A از عدد فازی B بزرگ‌تر است اگر حدوسط A از حدوسط B بزرگ‌تر بوده و عرض باند A از عرض باند B کوچک‌تر باشد. از آن جایی که ضرایب تابع هدف و هم‌چنین متغیرهای تصمیم اعداد فازی هستند، حاصل‌ضرب آن‌ها نیز یک عدد فازی است که اگر تابع هدف (Z) به‌صورت حداکثر (حداقل) باشد، ازاین رو باید تا آن جا که ممکن است حدوسط Z را بزرگ کنیم (کوچک کنیم) و عرض باند آن را کوچک (بزرگ) کنیم. بنابراین هر تابع هدف فازی به‌شکل دو تابع هدف قطعی به‌صورت مدل ۳۰ تبدیل می‌شود:

$$ax\ (Min) Z_m = \sum_{j=1}^{n} c_j x_{mj}$$

$$Min\ (Max)(w_Z + \acute{w}_Z) = \sum_{j\epsilon C_p}\left(c_j w_j + x_{mj} w_{c_j}\right) + (c_j\acute{w}_j + x_{mj}\acute{w}_{c_j}) + \sum_{j\epsilon C_{\acute{p}}}\left(-c_j\acute{w}_j + x_{mj}w_{c_j}\right) + (-c_j w_j + x_{mj}\acute{w}_{c_j})$$

$$s.t.\ \sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_{mj} \begin{pmatrix}\le\\=\\\ge\end{pmatrix} b_i$$

$$\sum_{a_{ij}\epsilon A_p}\left(a_{ij}w_j + x_{mj}w_{a_{ij}}\right) + \left(a_{ij}\acute{w}_j + x_{mj}\acute{w}_{a_{ij}}\right) + \sum_{a_{ij}\epsilon A_{\acute{p}}}\left(-a_{ij}\acute{w}_j + x_{mj}w_{a_{ij}}\right) + (-a_{ij}w_j + x_{mj}\acute{w}_{a_{ij}}) \begin{pmatrix}\ge\\=\\\le\end{pmatrix} w_{b_i} + \acute{w}_{b_i} \quad \forall i = 1,2,\dots,M \tag{۳۰}$$

به طوری که:

$C_p = \{j \mid \tilde{c}_j$ غیر منفی است$\}$ و $C_{\acute{p}} = \{j \mid \tilde{c}_j$ منفی است$\}$

$A_p = \{j \mid \tilde{a}_{ij}$ غیر منفی است$\}$ و $A_{\acute{p}} = \{j \mid \tilde{a}_{ij}$ منفی است$\}$

با این تغییرات مسئله برنامه‌ریزی تمام‌فازی با یک تابع هدف فازی، n متغیر تصمیم و m محدودیت به یک مسئله برنامه‌ریزی دو هدفه قطعی با 3n متغیر تصمیم (به‌ازای هر $\tilde{x}_j$ فازی سه متغیر تصمیم قطعی x_{jm}، w_j و $\acute{w}_j$ اضافه می‌شود) و 2m محدودیت (به‌ازای هر

محدودیت فازی دو محدودیت قطعی مربوط به حدوسطها و عرض باندها اضافه می شود) تبدیل می‌شود. برای حل این مسئله دو هدفه می‌توان از هریک از روش‌های حل مسائل چندهدفه استفاده کرد، اما با توجه به اولویت تابع هدف مربوط به حداکثر کردن حد وسطها نسبت به تابع هدف تعریف شده برای حداقل کردن عرض باندها، روش برنامه‌ریزی آرمانی با در نظر گرفتن اولویت اول برای تابع هدف اول و اولویت دوم برای تابع هدف دوم پیشنهاد می‌شود.

۴- مثال عددی

مثال ۴-۱ : در این قسمت، مثال ارائه شده را در مقاله کومار با محدودیت‌های تساوی و $\tilde{a}_{ij} \geq ۰$، $i = ۱, \ldots, m$ و $j = ۱, \ldots, n$ به روش پیشنهادی حل کرده و قابلیت کاربرد روش ارائه شده (در حالتی که مدل کومار ادعای دستیابی به جواب دارد) بررسی می‌شود.

$$\mathrm{Max}\, Z_۱ = (۲,۱,۱) \otimes (x_{۱m}, w_۱, \acute{w}_۱) + (۳,۱,۱) \otimes (x_{۲m}, w_۲, \acute{w}_۲)$$

$$s.t.\quad (۱,۱,۱) \otimes (x_{۱m}, w_۱, \acute{w}_۱) + (۲,۱,۱) \otimes (x_{۲m}, w_۲, \acute{w}_۲) = (۱۰,۸,۱۴)$$

$$(۲,۱,۱) \otimes (x_{۱m}, w_۱, \acute{w}_۱) + (۱,۱,۱) \otimes (x_{۲m}, w_۲, \acute{w}_۲) = (۸,۷,۱۳)$$

که براساس مدل پیشنهادی مسأله بالا به‌صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\mathrm{Max}\ ۲x_{۱m} + ۳x_{۲m}$$

$$\mathrm{Min}\ ۲x_{۱m} + ۲x_{۲m} + ۲w_1 + ۲\acute{w}_۱ + ۳w_۲ + ۳\acute{w}_۲$$

Subject to:

$$x_{1m} + ۲x_{۲m} = ۱۰$$

$$x_{1m} + x_{۲m} + ۱w_۱ + ۲w_۲ = ۸$$

$$x_{۱m} + x_{۲m} + ۱\acute{w}_۱ + ۲\acute{w}_۲ = ۱۴$$

$$۲x_{۱m} + x_{۲m} = ۸$$

$$x_{۱m} + x_{۲m} + ۲w_۱ + w_۲ = ۷$$

$$x_{۱m} + x_{۲m} + ۲\acute{w}_۱ + \acute{w}_۲ = ۱۳$$

$$x_{۱m} - w_۱ \geq ۰ \quad , \quad x_{۲m} - w_۲ \geq ۰$$

که جواب بهینه حاصل از حل مدل به‌صورت جدول ۱ به‌دست خواهد آمد.

جدول ۱ جواب بهینه مسئله با استفاده از روش پیشنهادی و روش کومار

جواب بهینه حل مدل	$(x_{۱m}, w_۱, \acute{w}_۱)$	$(x_{۲m}, w_۲, \acute{w}_۲)$	$\tilde{z}^*$ با قاعده ضرب اعداد فازی در روش کومار	$\tilde{z}^*$ باقاعده ضرب اعدادفازی در روش پیشنهادی
روش پیشنهادی	(۲,۰ ,۰)	(۴,۱ ,۰)	(۱۶,۸ ,۶)	(۱۶,۹ ,۶)
روش کومار	(۲,۱ ,۱)	(۴,۲ ,۲)	(۱۶,۱۱ ,۱۷)	(۱۶,۱۲ ,۱۷)

استدلال اصلی مقاله‌های تمام فازی نشان می‌دهد با توجه به این‌که تمامی پارامترها در مدل فازی هستند، تعیین مقادیر متغیرهای تصمیم به‌صورت یک عدد قطعی منطقی نیست و بنابراین مقادیر متغیرهای تصمیم باید فازی باشند. اما نکته این است که تعیین مقادیر متغیرها به‌صورت یک عدد فازی مثلثی به هر شکلی، به تصمیم‌گیرنده در جهت اتخاذ تصمیم درست کمک می‌کند؟ به بیان روشن‌تر اگر مقدار متغیرها به‌صورت یک عدد فازی تعیین شوند، اما عرض باندها آن‌قدر بزرگ باشد که بازهم تصمیم‌گیرنده به‌درستی نداند که حال چه مقداری را باید به‌عنوان تصمیم درست انتخاب کند، در این صورت حل مسأله کمک زیادی به او نکرده است. همان طور که در نتیجه حل مثال مشاهده می‌شود، با این‌که مقدار $x_{۱m}$ و $x_{۲m}$، یعنی مقادیر میانگین یا مرکزی در هر دو مدل یکسان به‌دست آمده اما روش پیشنهادی به مقداری دقیق‌تر (عرض باند کوچک‌تر و یا حتی صفر) دست پیدا کرده است که در این حالت تصمیم‌گیرنده در یک محیط فازی قادر است تا حد ممکن تصمیم دقیق‌تری را اتخاذ کند.

درواقع رویکرد پیشنهادی با تعریف تابع هدف قطعی دوم- که عرض باندها را حداقل می‌کند- به دنبال تصمیمی فازی است که با درنظرگفتن کلیه شرایط مسأله تا آن جا که ممکن است تصمیم دقیق‌تری اتخاذ کند (یعنی عرض باندها کوچک‌تر و عدد فازی به یک عدد قطعی نزدیک‌تر). از طرف دیگر براساس تعریف رتبه‌بندی فازی ارائه شده، با توجه به این‌که عرض باند مقدار $\tilde{z}^*$ در مدل پیشنهادی از مدل کومار کوچک‌تر است، بنابراین می‌توان گفت که مقدار جواب بهینه بزرگ‌تر است.

مثال ۴-۲: در این قسمت، مثال ارائه شده در مقاله کومار را با فرض وجود محدودیت‌هایی به صورت نامعادله (یعنی در شرایطی که مدل کومار قابلیت کاربرد ندارد)، با در نظر گرفتن پارامترها و متغیرهای تصمیم به‌صورت اعداد فازی مثلثی نامتقارن (یعنی در شرایطی که مدل حسین‌زاده لطفی و همکاران قابلیت استفاده ندارد) و با وجود برخی $\tilde{a}_{ij} \leq ۰$ (یعنی در شرایطی که مدل دهقان و همکاران قابلیت استفاده ندارد) حل می‌کنیم و قابلیت مدل پیشنهادی را در تمامی موارد نارسایی‌های مدل‌های پیشین ارائه شده در این زمینه نشان می‌دهیم:

$$\begin{aligned} &\operatorname{Max} Z_۱ = (۶,۵,۳) \otimes (x_{1m}, w_۱, \acute{w}_۱) + (۳,۱,۵) \otimes (x_{۲m}, w_۲, \acute{w}_۲) \\ &s.t. \quad (۳,۱,۱) \otimes (x_{۱m}, w_۱, \acute{w}_۱) + (۲,۱,۱) \otimes (x_{۲m}, w_۲, \acute{w}_۲) \tilde{\leq} (۱۶,۱۰,۱۴) \\ &\qquad (۱,۲,۱) \otimes (x_{۱m}, w_۱, \acute{w}_۱) + (۳,۲,۱) \otimes (x_{۲m}, w_۲, \acute{w}_۲) \tilde{\leq} (۱۷,۱۶,۱۳) \end{aligned}$$

که براساس مدل پیشنهادی مسئله بالا به‌صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned} &\operatorname{Max} ۶x_{۱m} + ۳x_{۲m} \\ &\operatorname{Min} ۸x_{۱m} + ۶x_{۲m} + ۶w_۱ + ۶\acute{w}_۱ + ۳w_۲ + ۳\acute{w}_۲ \\ &\text{Subject to:} \\ &۳x_{۱m} + ۲x_{۲m} \leq ۱۶ \\ &۲x_{۱m} + ۲x_{۲m} + ۳w_۱ + ۲w_۲ + ۳\acute{w}_۱ + ۲\acute{w}_۲ \geq ۲۴ \\ &x_{۱m} + ۳x_{۲m} \leq ۱۷ \\ &۳x_{1m} + ۳x_{۲m} - w_۱ + ۳w_۲ - \acute{w}_1 + ۳\acute{w}_۲ \geq ۲۹ \\ &x_{1m} - w_۱ \geq ۰ \quad , \quad x_{۲m} - w_۲ \geq ۰ \end{aligned}$$

نتایج حاصل از حل مدل با استفاده از روش برنامه‌ریزی آرمانی با در نظر گرفتن اولویت توابع هدف، به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned} &(x_{1m}, w_۱, w_۱) = \left(۵/۳۳ ,۰,۱/۲۷\right), (x_{۲m}, w_۲, w_۲) = \left(۰,۰۴/۷۶\right), \\ &\tilde{z}^* = (۳۱/۹۸ ,۲۶/۶۵ ,۳۷/۸۹) \end{aligned}$$

در نتیجه مدل پیشنهادی در کلیه نقاطی که مدل‌های قبلی نارسایی دارند، قابلیت تعیین جواب را دارد.

۵- نتیجه‌گیری

بسیاری از مدل‌هایی که تاکنون برای حل مسائل برنامه‌ریزی خطی با پارامترهای فازی ارائه شده‌اند برای سادگی بیش‌تر جواب نهایی مسئله (متغیرهای تصمیم) را به‌صورت قطعی در نظر گرفته‌اند.

در این پژوهش رویکردی جدید به منظور حل مسائل برنامه‌ریزی خطی تمام‌فازی ارائه شده است. در ارائه مدل پیشنهادی تلاش شد تا نقایص مدل‌های پیشین برطرف شده و برای تمامی انواع ضرایب متغیرها در تابع هدف و محدودیت‌ها از اعداد قطعی تا اعداد فازی از نوع LR متقارن، نامتقارن و هم‌چنین مثبت یا منفی قابلیت استفاده داشته باشد. هم‌چنین این مدل برای تمامی انواع محدودیت‌ها از نوع مساوی، کوچک‌تر مساوی و بزرگ‌تر مساوی قابل استفاده می‌باشد و مهم‌ترین مزیت آن سادگی محاسباتی است. البته تأیید اعتبار مدل تنها با بررسی قابلیت کاربرد آن در مثال‌های مختلف موجود در دنیای واقعی امکان‌پذیر خواهد بود. بنابراین پیشنهاد می‌شود در پژوهش‌های آینده، مدل ارائه شده در این پژوهش و دیگر مدل‌های تمام‌فازی ارائه شده، در مسائل مختلف و در زمینه‌های مختلف آزمون شود تا به این وسیله اعتبار این مدل‌ها بیش‌تر بررسی شوند.

۶- پی‌نوشت‌ها

1. Fuzzy Linear programming
2. Possiblistic Linear Programming
3. Fully Fuzzy Linear Programming (FFLP)
4. Crisp
5. Left & Right

۷- منابع

[1] Mahdavi-Amiri N., Nasseri S.H.;"Duality results and a dual simplex method for linear programming problems with trapezoidal fuzzy variables"; *Fuzzy Sets and Systems*,Vol. 158 , 2007.

[2] Zadeh L.A.;"Fuzzy sets"; *Information and Control* ,Vol. 8 ,1965.

[3] Tanaka H., Okuda T., Asai K.;"On fuzzy mathematical programming", *Journal of Cybernetics Systems*,Vol. 3 ,1973.

[4] Zimmermann H.J.;" Fuzzy programming and linear programming with several objective functions"; *Fuzzy Sets and Systems,*Vol.1 ,1978.

[5] Verdegay J. L.;"Fuzzy mathematical programming"; in [BM15], 1982.

[6] WarnersB.;"Interactive multiple objective programming subject to flexible constraint; *European Journal of Operational Research*, Vol. 31, 1987.

[7] Zimmermann H. J.;"Describing an optimization of fuzzy systems"; *International Journal of General System*, Vol. 2 ,1976.

[1] Chanas S.; The use of parametric programming; in FLP, Fuzzy Sets and Systems,Vol. 11, 1983.

[2] Verdegay J.L.;"A dual approach to solve the fuzzy Linear Programming Problem"; *Fuzzy Sets and Systems*,Vol. 14 , 1984.

[3] Verdegay J. L.;"Application of fuzzy optimization in operational research"; *Control and Sybernetics* ,Vol. 13 ,1984.

[4] Carlsson C., Corhonen P.;"A parametric approach to fuzzy linear programming"; *Fuzzy Sets and Systems*,Vol. 20 ,1986.

[5] Ramik J., Rimanek J.;"Inequality relation between fuzzy numbers and its use in fuzzy optimization"; *Fuzzy Sets and Systems*,Vol. 16 ,1985.

[6] Tanaka H., Ichihashi H., Asai, K.;"A formulation of fuzzy linear programming problems based on comparison of fuzzy numbers"; *Control and cybernetics*,Vol. 13 ,1984.

[7] Lai Y.J., Hwang C.L.;"A new approach to some possibilistic linear programming problems"; *Fuzzy Sets and Systems*,Vol. 49 ,1992.

[8] Rommelfanger H., Hanuscheck R., Wolf J.; Linear programming with fuzzy objectives; *Fuzzy Sets and Systems*,Vol. 29, ,1989.

[9] Buckley J.J.; Possibilistic linear programming with triangular fuzzy numbers; *Fuzzy Sets and Systems*,Vol. 26 ,1988.

[10] Lai Y.J., Hwang C.L.;"Fuzzy mathematical programming: Methods and applications"; Springer, Berlin, 1992.

[11] Tanaka H., Guo P., Zimmermann H.J; Possibility distributions of fuzzy decision variables obtained from possibilistic linear programming problems;

Fuzzy Sets and Systems,Vol. 113 ,2000.

[12] Maleki H.R., Tata M., Mashinchi M.;"Linear programming with fuzzy variables"; *Fuzzy Sets and Systems*,Vol. 109 ,2000.

[13] Buckley J.J., Feuring T.; Evolutionary algorithm solution to fuzzy problems: Fuzzy linear programming; *Fuzzy Sets and Systems*, Vol.109 , 2000.

[14] Hashemi S.M., Modarres M., Nasrabadi E., Nasrabadi M.M.;" Fully fuzzified linear programming, solution and duality"; *J. Intell. Fuzzy Syst*,Vol. 17 ,2006.

[15] Allahviranloo T., Lotfi F.H., Kiasary M.K., Kiani N.A., Alizadeh L.;"Solving ful*l* fuzzy linear programming problem by the ranking function"; *Applied Mathematical Science*, Vol. 2 ,2008.

[16] Kumar A., Kaur J., Singh P.;"A new method for solving fully fuzzy linear programming problems"; *Applied Mathematical* Modeling,Vol. 35 , 2011.

[17] Dehghan M., Hashemi B., Ghatee M.;"Computational methods for solving fully fuzzy linear systems"; *Applied Mathematics and Computations*,Vol. 179, 2006.

[18] Lotfi F.H., Allahviranloo T., Jondabeha M.A., Alizadeh L.;" Solving a fully fuzzy linear programming using lexicography method and fuzzy approximate solution"; *Applied Mathematical Modeling*,Vol. 33, 2009.

[۱۹] مؤمنی م.؛ مباحث نوین تحقیق در عملیات؛ دانشکده مدیریت دانشگاه تهران، تهران، ۱۳۸۵.

[۲۰] آذر ع.، فرجی ح.؛ علم مدیریت فازی؛ مؤسسسه کتاب مهربان نشر، تهران: ۱۳۸۷.

[۲۱] جعفرنژاد ا.، اسماعیلیان م.؛ ربیعه م.؛ ارزیابی و انتخاب تأمین‌کنندگان در زنجیره تأمین در حالت منبع‌یابی منفرد با رویکرد فازی؛ *فصلنامه علمی – پژوهشی مدرس علوم انسانی- پژوهش‌های مدیریت در ایران*، ش ۵۹، ۱۳۸۷.

[۲۲] منهاج م.ب.؛ محاسبات فازی؛ تهران: دانش‌نگار،۱۳۸۶ .