انجمن فناوری اطلاعات و ارتباطات ایران

سال دوازدهم، شماره‌های ۴۳ و ۴۴، بهار و تابستان ۱۳۹۹
صفحات: ۱۴۳-۱۵۴

دو فصلنامه علمی
فناوری اطلاعات و ارتباطات ایران

الگوریتم ژنتیکِ آگاه از بهترین عضو با کاربرد در رنگ‌آمیزی و بعدمتریک گراف

محمود امین طوسی[*] هاشم عزتی[**]
[*] استادیار، دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر، دانشگاه حکیم سبزواری، سبزوار.
[**] دانشجوی دکتری، دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، تهران.

تاریخ دریافت:۱۳۹۸/۱۲/۲۶ تاریخ پذیرش:۱۳۹۹/۸/۳
نوع مقاله: پژوهشی

چکیده

الگوریتم ژنتیک از معروف ترین روش های حل مسائل بهینه سازی ترکیبیاتی است که کاربردهای متعددی در حوزه های گوناگونی همچون برق، کامپیوتر و ریاضی داشته و دارد. نسل بعد در این الگوریتم با انتخاب اعضای جمعیت بر اساس میزان برازندگی آنها صورت می پذیرد. ارتباط اعضا از طریق عملگر ترکیب می باشد و برخی از بهترین اعضا مستقیماً به نسل بعد منتقل می شوند. به صورت معمول اعضای ضعیف جمعیت نیز امکان مشارکت در ایجاد نسل بعد را دارند و حذف نمی شوند. در این مقاله، عملگرهای تولید فرزند، از بهترین عضو نسل جاری آگاه هستند و تنها فرزندانی مرتبط با بهترین عضو، تولید شده و در نسل بعد قرار می گیرند. شیوه ی پیشنهادی در دو کاربرد رنگ آمیزی و بعدمتریک گراف با روش معمول الگوریتم ژنتیک مورد مقایسه قرار گرفته و برتری آن در حالت متوسط هم از نظر کیفیت و هم سرعت اجرا نسبت به الگوریتم ژنتیک مرسوم، نشان داده شده است.

واژگان کلیدی: الگوریتم ژنتیک، الگوریتم های فراابتکاری، بعدمتریک گراف، رنگ آمیزی گراف

۱- مقدمه

مسائل بسیاری در حوزه‌های گوناگون وجود دارند که از دسته مسائل ان پی-سخت [1] می‌باشند و الگوریتم‌های فراابتکاری عموماً جواب‌های مناسبی در زمان‌های معقولی برای آنها بدست می‌دهند. دسته‌هایی از الگوریتم‌های فراابتکاری همچون الگوریتم ژنتیک، ازدحام ذرات، خفاش، کرم شب‌تاب، قورباغه و زنبور عسل جزو رده‌ی هوش جمعی محسوب می‌شوند که از طریق تعامل با اعضا، در پی یافتن جواب بهینه‌ی سراسری هستند. در همه این الگوریتم‌ها، جواب‌های بهتر، شانس بیشتری برای حضور در تکرارهای بعدی یا تولید نسل بعد دارند. شرط پایان الگوریتم نیز در تمام این شیوه‌ها مشابه هم می‌باشد، رسیدن به حداکثر تعداد تکرار از پیش تعیین شده، عدم بهبود جواب در چند تکرار پیاپی و رسیدن به جواب از جمله مرسوم‌ترین شروط توقف الگوریتم‌های تکراری می‌باشند.

در برخی مسائل همچون مسئله چند وزیر[2] مقدار تابع هدف در نقطه جواب (بهینه‌ی سراسری) مشخص است، اما در مسائلی همچون رنگ‌آمیزی گراف (حالت کلی)، مقدار جواب بهینه سراسری مشخص نیست و تعامل اعضای جمعیت در جهت بهتر شدن جواب‌هاست. در همه‌ی این روش‌های هوش جمعی، در جمعیت جواب‌های ممکن، پاسخ‌های نامناسب نیز در بین اعضا هستند. در این الگوریتم‌ها پاسخ‌های با کیفیت کم حذف نمی‌شوند اما شانس کمتری برای حضور در ادامه الگوریتم دارند. ایده اصلی این نوشتار حذف جواب‌های بدتر از بهترین پاسخ

نویسنده مسئول: محمود امین‌طوسی m.amintoosi@hsu.ac.ir

[1] NP-hard

[2] N-Queen Problem

پیدا شده فعلی و اجازه تولید جواب‌هایی خارج از محدوده‌ی پاسخ‌های ممکن است. برای نمایش کارایی شیوه‌ی پیشنهادی، از بین الگوریتم‌های فراابتکاری، الگوریتم ژنتیک انتخاب شده است. حذف جواب‌هایی با کیفیت پایین در روش‌هایی همچون الگوریتم زنبورعسل هم انجام می‌شود، اما شیوه پیشنهادی هم با روش مورد استفاده در الگوریتم زنبورعسل متفاوت است و هم تا آنجا که نگارندگان مطلع هستند تاکنون در الگوریتم ژنتیک بکار برده نشده است.

در الگوریتم ژنتیک تبادل اطلاعات بین اعضای جمعیت از طریق عملگر بازترکیب[۳] انجام می‌شود. در ایده‌ی پیشنهادی به اعضای جمعیت اجازه داده می‌شود از وضعیت دیگر اعضا آگاه باشند و در صورت لزوم، اعضایی که منجر به جواب بهتری نخواهند شد، با جواب دیگری جایگزین شوند. در جایگزینی یک چنین جواب‌هایی، به صورت موقت قیدهای مسئله لحاظ نمی‌شوند. این روش برای دسته‌ای از مسائل همچون بدست آوردن بعد متریک گراف نسبت به شیوه‌ی مرسوم الگوریتم ژنتیک، نتایج بهتری بدست داده است که در بخش نتایج آزمایشات مشاهده خواهد شد.

علت انتخاب الگوریتم ژنتیک، قابلیت‌های مناسب و کاربرد گسترده این روش در حوزه‌های مختلف، همچون زمانبندی کلاسی، مسائل برش و بسته‌بندی، مسائل متنوع در حوزه گراف، یادگیری شبکه‌های عصبی و ... می‌باشد [۱، ۲، ۳، ۴]. نسخه‌های گوناگونی از الگوریتم ژنتیک معرفی شده اند [۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲] که هر یک به نحوی سعی در بهبود کارایی الگوریتم ژنتیک در حالت کلی یا در حالات خاص داشته‌اند. انواع روش‌های نمایش جواب‌ها و گونه‌های مختلف بازترکیب و جهش ابداع شده، در همین راستا درنظر گرفته می‌شوند. در مدل الگوریتم ژنتیک جزیره‌ای [۸، ۹، ۱۰، ۷] با ایجاد چند جمعیت متفاوت و تعامل بین چند نسخه از الگوریتم ژنتیک، جواب‌های بهتری حاصل شده است. روش‌های بازترکیب مرتبه‌ی یک[۴]، PMX[۵] و Cycle Cross-over برای مسائل جایگشتی مطرح شده‌اند. در [۱۳] روش EIX[۶] ارائه شده است که مقادیر ژن‌های فرزندان ترکیبی از مقادیر ژن‌های والدین می‌باشد و به صورت گسترده در پیاده‌سازی‌های الگوریتم ژنتیک مورد استفاده می‌باشد. روش UNDX[۷] در [۱۴] ارائه شده است که اطلاعات والدین را در تولید فرزندان مخلوط [۸] می‌کند.

ایده‌ی اصلی این مقاله، جایگزینی اعضای غیرامیدبخش با اعضای جدید ثمربخش، در عملگرهای الگوریتم ژنتیک است. شیوه‌ی پیشنهادی قابل استفاده در آن دسته از مسائل بهینه‌سازی است که نسخه‌ی تصمیم [۹] آنها موجود است. در اثبات NP-کامل بودن[۱۰] یک مسئله، نسخه تصمیم آن ملاک قرار می‌گیرد. نسخه تصمیم مسائل مشهوری همچون مسئله یکریختی گراف[۱۱] و مسائل رنگ‌آمیزی و بعد متریک گراف[۱۲] در این رده قرار می‌گیرند. به لحاظ آنکه در ادامه مقاله با این دو مسئله سروکار داریم، مرور مختصری بر آنها خواهیم داشت.

۱-۱- مسئله رنگ‌آمیزی گراف

فرض کنید گراف $G = (V, E)$ داده شده باشد، تعداد کمترین رنگی که بتوان با آن رئوس گراف G را رنگ آمیزی کرد به گونه ای هیچ دو رأس مجزای مجاوری از گراف G دارای رنگ مشابه نباشند را عدد رنگی گراف G می گوییم [۱۵].

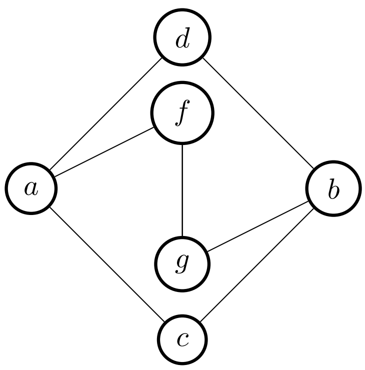
مسئله k-رنگ‌آمیزی گراف مفروضات: گراف بدون جهت $G = (V, E)$. هدف: یافتن تابع $c : V \to \{۱, ۲, \ldots, k\}$ به نحوی که: $c(u) \neq c(v), \forall (u, v) \in E$ [۱۶].

مسئله بهینه‌سازی رنگ‌آمیزی گراف مفروضات: گراف بدون جهت $G = (V, E)$. هدف: یافتن کمینه مقدار k به نحوی که گراف G، k-رنگ‌پذیر باشد.

مسئله تصمیم رنگ‌آمیزی گراف مفروضات: گرافِ بدون جهت $G = (V, E)$ و عدد k. هدف: آیا گراف G، k-رنگ‌پذیر است؟

در مسائلی که در این نوشتار مورد بررسی قرار خواهد گرفت، از جواب‌های نسخه تصمیم مسئله در حل نسخه بهینه‌سازی کمک گرفته خواهد شد. مسائل رنگ‌آمیزی و بعدمتریک گراف کاربردهایی هستند که شیوه پیشنهادی بر روی آن‌ها آزمایش و کارایی آن نشان داده شده است. به این منظور گراف‌هایی از دو دسته مشهور تولید شده و شیوه پیشنهادی بر روی آنها اعمال شده است. همان‌گونه که در بخش نتایج به تفصیل بیان خواهد شد، در هر دو دسته گراف تولید شده، در حالت میانگین، روش پیشنهادی نتایج بهتری نسبت به الگوریتم ژنتیک تولید کرده است. مسئله رنگ‌آمیزی گراف تعریف شد، در ادامه به صورت مختصر مسئله بعد متریک گراف را بیان می‌کنیم.

[۳] Crossover
[۴] Order-1 Crossover
[۵] Partially Mapped Crossover
[۶] Extended Intermediate Recombination
[۷] Unimodal Normal Distribution Crossover (UNDX)
[۸] Mix
[۹] Decision Problem
[۱۰] NP-Complete
[۱۱] Subgraph Isomorphism Problem
[۱۲] Metric Dimension



شکل ۱: گراف ساده، همبند و بدون جهت G_1

۱-۲- مسئله بعد متریک گراف

فرض کنید $S = \{v_1, v_2, ..., v_k\}$ یک مجموعه **مرتب** از رئوس گراف همبند، ساده و بدون جهت $G(V,E)$ باشد. نمایش متریک رأس v نسبت به مجموعه S، بردار k تایی $r(v|S) = (d(v,v_1), d(v,v_2), ..., d(v,v_k))$ می‌باشد که در آن $d(v,v_i)$ کوتاهترین فاصله بین دو رأس v و v_i می‌باشد. همچنین i عددی بین ۱ تا k می‌باشد. S **مجموعه تفکیک کننده** رئوس گراف G نامیده می‌شود، هرگاه برای هر دو رأس متمایز u و v متعلق به $V(G)$ داشته باشیم $r(u|S) \neq r(v|S)$. تعداد اعضای کوچکترین مجموعه تفکیک کننده گراف G **بعد متریک گراف** نامیده شده و با $dim(G)$ نشان داده می‌شود [۱۷].

عموم کارهایی که در این حوزه انجام شده، یا مرتبط با محاسبه بعد متریک گراف‌های خاص است و یا به بررسی تئوری حدود بالا و پایین بعد متریک گراف‌های مشخصی پرداخته شده است [۱۸، ۱۹، ۲۰، ۲۱، ۲۲]. اما روش پیشنهادی در این مقاله برای هر گرافی قابل اجراست، البته هدف این نوشتار نمایش برتری این شیوه در مقایسه با سایر روش‌های محاسبه‌ی بعد متریک گراف نیست؛ بلکه به عنوان یک کاربرد از روش پیشنهادی است که می‌تواند نتایج بهتری نسبت به الگوریتم ژنتیک مرسوم داشته باشد.

مسئله بهینه سازی بعد متریک گراف: مفروضات: گرافِ ساده، همبند و بدون جهت $G = (V,E)$. هدف: یافتن کوچکترین مجموعه تفکیک کننده S.

مسئله تصمیم بعد متریک گراف: مفروضات: گرافِ ساده، همبند و بدون جهت $G = (V,E)$ و مجموعه S با k رأس. هدف: آیا مجموعه S یک مجموعه تفکیک کننده گراف G می‌باشد.

مثال ۱-۱. در شکل ۱ یک گراف همبند، ساده و بدون جهت داده شده است. که آن را G_1 می نامیم. مجموعه $S = \{a,b,c\}$ یک مجموعه تفکیک کننده برای G_1 می‌باشد. برای اثبات این موضوع کافیست $r(v|S)$ را برای همه رئوس گراف مذکور بدست آورد. هماگونه که ذکر شد $r(v|S)$ برداری است که فاصله رأس v با هر یک از عناصر S را نشان می‌دهد. به عنوان نمونه $r(a|S) = (0,2,1)$ بیانگر فاصله‌ی رأس a تا هر یک از رئوس مجموعه S می‌باشد. فاصله رأس a با اولین عضو S که خود a هست، صفر و فاصله‌ی آن با دو رأس b و c،به ترتیب ۲و ۱ است. سایر موارد نیز به صورت مشابه محاسبه شده‌اند. بردارهای $r(a|S)$ تا $r(g|S)$ که در (۱) آمده‌اند، متمایز می‌باشند.

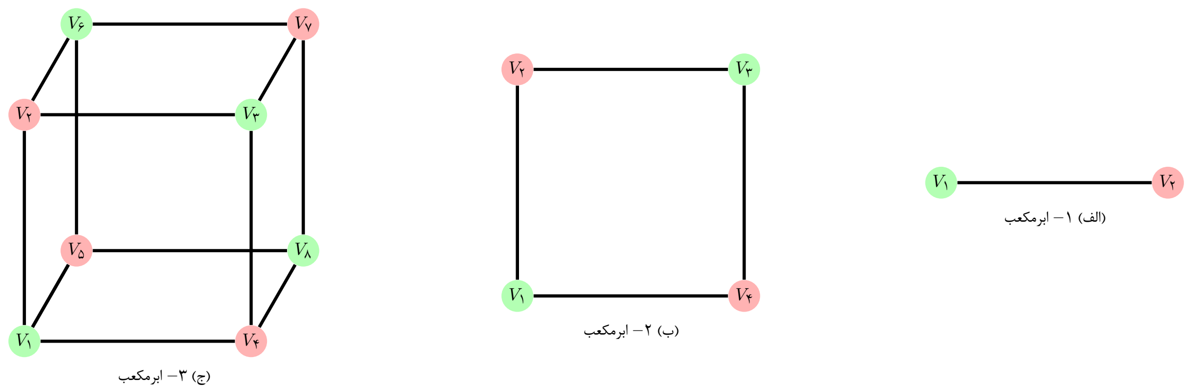
$$\begin{aligned} r(a|S) &= (0,2,1) \\ r(b|S) &= (2,0,1) \\ r(c|S) &= (1,1,0) \\ r(d|S) &= (1,1,2) \\ r(f|S) &= (1,2,2) \\ r(g|S) &= (2,1,2) \end{aligned} \tag{1}$$

همان‌گونه که ملاحظه می‌شود هر ۶ بردار سه مؤلفه‌ای فوق متمایز از هم هستند و لذا مطابق تعریف مجموعه‌ی تفکیک‌کننده، S یک مجموعه‌ی تفکیک کننده محسوب می‌شود.

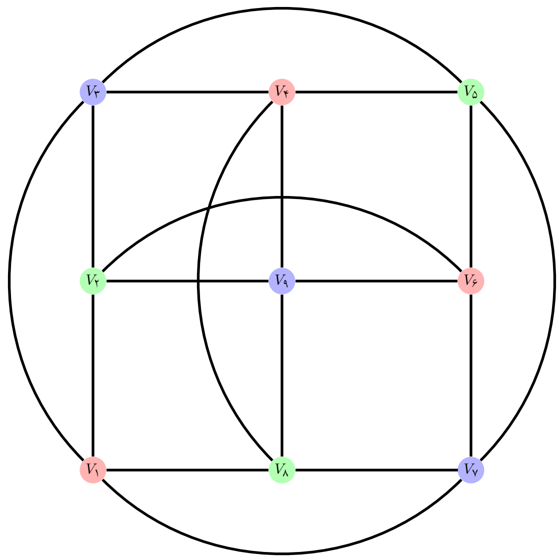
روش پیشنهادی روی هر گرافی قابل اجراست اما در ادامه از دو دسته گراف مشهور ابرمکعب و همینگ [13] استفاده خواهیم کرد. در شکل‌های ۲ و ۳ تعدادی ابر مکعب و یک گراف همینگ و نحوه‌ی رنگ‌آمیزی بهینه‌ی آنها نمایش داده شده است. در شکل‌های ۴ و ۵ نیز بعد متریک گراف‌های مذکور نشان داده شده است. تعریف این دو گروه از گرافها در بخش ۳ خواهد آمد.

در بخش ۲ ابتدا مرور مختصری بر الگوریتم ژنتیک داشته و سپس شیوه پیشنهادی بیان خواهد شد. در بخش ۳ کارایی شیوه پیشنهادی در چند مسئله نشان داده شده است. در نهایت در بخش ۴ همگرایی روش پیشنهادی مورد بررسی قرار گرفته است.

[13] Hamming



شکل:۲ سه ابرمکعب و نحوه ی رنگ آمیزی آنها با کمترین تعداد رنگ.(تعریف ابر-مکعب در بخش ۳ آمده است).



شکل ۳: گراف $H_{2,3}$ با ۹ رأس و ۱۸ یال. رنگ رئوس، یکی از حالات رنگ‌آمیزی آن با ۳ رنگ را نشان می‌دهد. (این گراف از دسته‌ی همینگ‌گراف‌ها می‌باشد، تعریف همینگ-گراف در بخش ۳ آمده است).

۲- روش پیشنهادی

در این بخش ابتدا توضیحی درباره الگوریتم ژنتیک و نحوه انجام عملگرهای ترکیب [۱۴] و جهش [۱۵] خواهیم داشت و در ادامه روش پیشنهادی (الگوریتم ۷) بیان خواهد شد.

۲-۱- الگوریتم ژنتیک

چارچوب کلی الگوریتم ژنتیک در الگوریتم ۱ آمده است. دو عملگر اصلی این الگوریتم، عملگرهای ترکیب (ادغام یا بازترکیب) و جهش می‌باشند.

الگوریتم ۱ روال کلی الگوریتم ژنتیک

ورودی: تعداد جمعیت اولیه (n)، نرخ ترکیب (p_c)، نرخ جهش (p_m)، شرط خاتمه، روش‌های انتخاب.

خروجی: جواب بهینه.

۱: جمعیت n کروموزومی به طور تصادفی ایجاد کنید.

۲: مراحل زیر را تا زمانیکه شرط خاتمه برقرار شود انجام دهید. (در هر دور جمعیت جدیدی ایجاد و جایگزین جمعیت قبل خواهد شد).

۳: برازندگی هر کروموزوم در جمعیت را ارزیابی کنید.

۴: والدین را از میان جمعیت متناسب با میزان شایستگی آنها انتخاب کنید و با توجه به احتمال ترکیب، برای تشکیل فرزندان جدید آن‌ها را ترکیب کنید.

۵: با توجه به احتمال جهش فرزندان را مورد جهش قرار دهید.

۶: فرزندان جدید را در جمعیت بگنجانید.

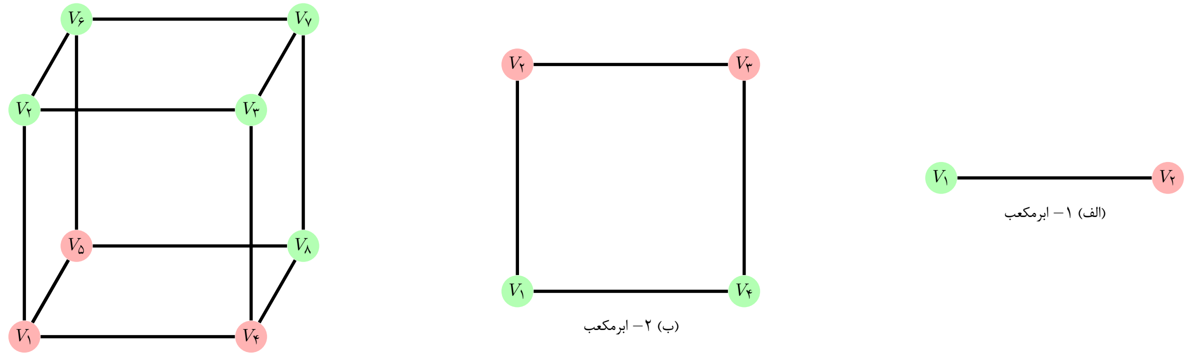
عملگر جهش: این عملگر باعث ایجاد تغییرات جزئی در برخی جواب‌های موجود در هر نسل می شود.

عملگر ترکیب: با استفاده از عملگر ترکیب، دو والد انتخاب شده بر اساس میزان برازندگی، با یکدیگر ترکیب شده و فرزندانی را تولید می‌کنند. دو عملگر معروف این حوزه، روش‌های بازترکیب تک نقطه ای [۱۶] و بازترکیب دو نقطه ای [۱۷] می‌باشند.

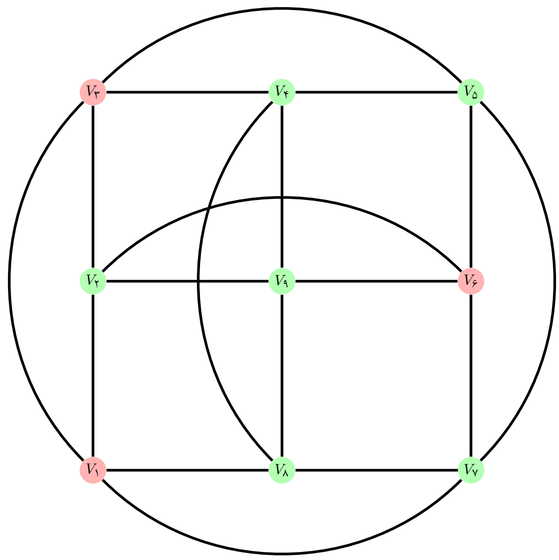
۲-۲- الگوریتم ژنتیکِ آگاه از بهترین عضو

در فرم معمول الگوریتم ژنتیک، فرض **شدنی** [۱۸] بودن جواب تولید شده را همیشه داریم. اگر فرزند تولید شده در قیود مسئله

[۱۴] Crossover
[۱۵] Mutation
[۱۶] Single Point Crossover
[۱۷] Two Point Crossover
[۱۸] FeasibleSolution



شکل:۴ سه ابرمکعب و رئوس مرتبط با بعد متریک آنها. رئوسی که دارای رنگ قرمز می باشند، تشکیل دهنده کوچکترین مجموعه تفکیک کننده(بعد متریک) هر گراف می باشند.



شکل ۵: گراف $H_{۲,۳}$ با ۹ رأس و ۱۸ یال، رئوسی که دارای رنگ قرمز می باشند، تشکیل دهنده کوچکترین مجموعه تفکیک کننده (بعد متریک) این گراف می باشند. توجه شود که احتمال وجود مجموعه تفکیک کننده دیگری با همین اندازه وجود دارد.

صادق نباشد و به عبارتی شدنی نباشد، آنقدر اصلاح می‌شود که تبدیل به یک جواب ممکن شود. در شیوه پیشنهادی، فرزندانی **احتمالاً شدنیِ** بهتر یا مساوی با بهترین عضو تولید می‌شوند. چارچوب کلی روش پیشنهادی در الگوریتم ۲ آمده است. روال کلی همان چارچوب الگوریتم ۱ است با این تفاوت که در روال تولید اعضای جدید در الگوریتم بهبود یافته، فرزندان تولیدی می‌توانند **شدنی** نباشند. منظور از **احتمالاً شدنیِ بهتر** فرزندی است که صرفنظر از قیود مسئله، مقدار تابع هدف بهتری داشته باشد.

جدا از اضافه شدن مفهوم **فرزند احتمالاً شدنی بهتر یا مساوی با بهترین عضو** که مستلزم دو موضوع می‌باشد، سایر

الگوریتم ۲ الگوریتم ژنتیکِ آگاه از بهترین عضو

ورودی: تعداد جمعیت اولیه (n)، نرخ ترکیب (p_c)، نرخ جهش (p_m)، شرط خاتمه، روش‌های انتخاب.

خروجی: جواب بهینه.

۱: جمعیت n کروموزومی به طور تصادفی ایجاد کنید.

۲: مراحل زیر را تا زمانیکه شرط خاتمه برقرار شود انجام دهید. (در هر دور جمعیت جدیدی ایجاد و جایگزین جمعیت قبل خواهد شد.)

۳: برازندگی هر کروموزوم در جمعیت را ارزیابی کنید.

۴: والدین را از میان جمعیت متناسب با میزان شایستگی آنها انتخاب کنید و با توجه به احتمال ترکیب، برای تشکیل فرزندان جدید آن‌ها را ترکیب کنید.

۵: با توجه به احتمال جهش فرزندان را مورد جهش قرار دهید.

۶: **اگر عضو جدید بهتر یا مساوی با بهترین عضو نسل جاری نیست، با یک عضو جدید احتمالاً شدنی بهتر یا مساوی با بهترین عضو جایگزین شود** (توضیح بیشتر در متن).

۷: فرزندان جدید را در جمعیت بگنجانید.

بخشهای الگوریتم پیشنهادی، همان الگوریتم اصلی ژنتیک است. دو موضوع مدنظر عبارتند از «آگاهی از بهترین عضو» در روال عملیات تولید نسل جدید و «پذیرش یا تولید فرزندانی که احتمالاً شدنی نیستند». در الگوریتم ژنتیک اصلی فرزندان هر نسل بدون آگاهی از وضعیت بهترین جواب نسل فعلی تولید می‌شوند، اما در الگوریتم پیشنهادی با داشتن چنین دانشی، سعی بر آن است که فرزندانی بهتر یا مساوی با بهترین جواب فعلی تولید شوند. منظور از **احتمالاً شدنی بهتر** را با یک مثال بیان خواهیم کرد. مسئله‌ای را درنظر بگیرید که زیرمجموعه‌ای از یک مجموعه‌ی اصلی یک جواب ممکن مسئله است و هدف،

کمینه بودن تعداد اعضای مجموعه جواب با رعایت قیودی خاص است. اگر در نسل جاری بهترین پاسخی که یافت شده است دارای ۱۰ عضو باشد، پس تولید فرزندانی با بیش از ۱۰ عضو خیلی ثمربخش نخواهد بود. منظور از تولید فرزند **احتمالاً شدنی بهتر**، در این حالت آن است که زیرمجموعه‌های با ۹ یا کمتر عضو را به عنوان فرزندان می‌پذیریم یا تولید می‌کنیم. مشکلی که وجود دارد آن است که این زیرمجموعه‌های ۹ عضوی ممکن است در قیود مسئله صدق نکنند و به اصطلاح شدنی نباشند. مثلاً در بعدمتریک گراف، اگر فرزند تولید شده‌ی ۹ عضوی یک مجموعه‌ی تفکیک‌کننده نباشد، مورد قبول نیست. در چنین وضعیتی با لحاظ کردن قیود مسئله، مقدار تابع هدف برای چنین فرزندی ۹ نخواهد شد. **اما اگر قیدهای مسئله را موقتاً نادیده بگیریم، مقدار تابع هدف برای این پاسخ برابر ۹ است که از بهترین پاسخ یافت شده بهتر است**. در الگوریتم پیشنهادی چنین فرزندان به ظاهر بهتری، پذیرفته می‌شوند به امید آنکه یا خودشان پاسخی شدنی باشند یا فرزندانی بهتر و شدنی تولید کنند. در فرآیند الگوریتم پیشنهادی مقدار تابع هدف برای چنین فرزندانی یک مقدار ماکزیمم درنظر گرفته شده و مطابق با سایر اعضا با آنها رفتار خواهد شد؛ فقط در حین تولید آنها موقتاً شدنی بودن آنها چک نمی‌شود. پس منظور از «بهتر» بودن در این بخش از الگوریتم پیشنهادی، برازنده‌تر بودن جواب، بدون رعایت قیود مسئله است. البته همان‌گونه که در مرحله ۶ الگوریتم پیشنهادی ذکر شده است، جواب‌های **احتمالاً شدنی بهتر یا مساوی** با بهترین جواب فعلی مد نظر هستند. از آنجا که شرط مساوی بودن را داریم، حداقل یک جواب با چنین خصوصیاتی - حتی با رعایت قیدهای مسئله - وجود دارد: بهترین جواب فعلی. لذا در بدترین شرایط مجموعه انتخاب‌های روش پیشنهادی تهی نخواهد بود.

در بخش بعد با اجرای الگوریتم ژنتیک، شیوه پیشنهادی و تبرید شبیه‌سازی شده بر روی دو مسئله معروف بعد متریک گرافها و مسئله رنگ آمیزی گرافها کارایی شیوه پیشنهادی نشان داده خواهد شد. سپس به بررسی همگرایی شیوه‌ی پیشنهادی پرداخته خواهد شد.

۳- کاربردها و نتایج آزمایشات

در این بخش نتایج شیوه پیشنهادی روی دو مسئله بعد متریک و رنگ آمیزی گراف نشان داده خواهد شد. نمایش و مقایسه نتایج روش پیشنهادی با الگوریتم ژنتیک و تبرید شبیه سازی شده در انتهای بخش خواهد آمد.

جدول:۱ مشخصات ابر-مکعب های مورد استفاده در آزمایشات.

ردیف	گراف	تعداد رئوس	تعداد یالها
۱	$Q_{۱}$	۲	۱
۲	$Q_{۲}$	۴	۴
۳	$Q_{۳}$	۸	۱۲
۴	$Q_{۴}$	۱۶	۳۲
۵	$Q_{۵}$	۳۲	۸۰
۶	$Q_{۶}$	۶۴	۱۹۲
۷	$Q_{۷}$	۱۲۸	۴۴۸
۸	$Q_{۸}$	۲۵۶	۱۰۲۴
۹	$Q_{۹}$	۵۱۲	۲۳۰۴
۱۰	$Q_{۱۰}$	۱۰۲۴	۵۱۲۰
۱۱	$Q_{۱۱}$	۲۰۴۸	۱۱۲۶۴
۱۲	$Q_{۱۲}$	۴۰۹۶	۲۴۵۷۶

گراف‌های ابر مکعب [۱۹] و همینگ گراف‌ها [۲۰] در آزمایشات بکار گرفته شده‌اند، گراف های دسته اول با Q_n و گراف های دسته دوم با $H_{r,k}$ نمایش داده می شوند.

گراف ابرمکعب Q_n گرافیست که مجموعه رئوس آن مشتمل بر ۲^n بردار دودویی n-تایی (بردارهایی با مختصات صفر و یک) می‌باشد که دو رأس در صورتی مجاورند که فقط در یک مؤلفه با هم متفاوت باشند [۲۳].

به منظور مقایسه روش پیشنهادی و الگوریتم ژنتیک، ۱۲ نمونه گراف ابرمکعب با ابعاد مختلف تولید شده است. مشخصات این گراف‌ها در جدول ۱ آمده است.

گراف همینگ $H_{r,k}$ به صورت $H_{r,k} = K_k\square K_k\square\ldots\square K_k$ ساخته می شود که در آن $\square$ عملگر ضرب کارتزین دو گراف است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

تعریف ۳-۱. ضرب کارتزین دو گراف $G_{۱} = (V_{۱}, E_{۱})$ و $G_{۲} = (V_{۲}, E_{۲})$ با نماد $G_{۱}\square G_{۲}$ نمایش داده می شود که در آن مجموعه $V_{۱} \times V_{۲} = \{(a, v)|a \in V_{۱}, v \in V_{۲}\}$ رئوس گراف و یال (a, v) با یال (b, w) مجاور می‌باشد اگر $a = b$ و $\{v, w\} \in E_{۲}$ یا $v = w$ و $\{a, b\} \in E_{۱}$ [۱۷].

۱۲ نمونه گراف همینگ با ابعاد مختلف تولید و در آزمایشات بکار گرفته شده‌اند. مشخصات این گراف‌ها در جدول ۲ آمده است.

۳-۱- نتایج آزمایشات

جداول ۳ و ۴ شامل نتایج اجرای الگوریتم ژنتیک، الگوریتم پیشنهادی (الگوریتم ژنتیک آگاه از بهترین عضو) و روش تبرید شبیه‌سازی شده در مسئله‌ی رنگ آمیزی گراف روی دو دسته

[۱۹] Hypercubes
[۲۰] Hamming

جدول:۲ مشخصات همینگ گراف های مورد استفاده در آزمایشات.

ردیف	گراف	تعداد رئوس	تعداد یالها
۱	$H_{۲,۳}$	۹	۱۸
۲	$H_{۳,۳}$	۲۷	۸۱
۳	$H_{۴,۳}$	۸۱	۳۲۴
۴	$H_{۵,۳}$	۲۴۳	۱۲۱۵
۵	$H_{۲,۴}$	۱۶	۴۸
۶	$H_{۳,۴}$	۶۴	۲۲۸
۷	$H_{۴,۴}$	۲۵۶	۱۵۳۶
۸	$H_{۵,۴}$	۱۰۲۴	۷۶۸۰
۹	$H_{۲,۵}$	۲۵	۱۰۰
۱۰	$H_{۳,۵}$	۱۲۵	۷۵۰
۱۱	$H_{۴,۵}$	۶۲۵	۵۰۰۰
۱۲	$H_{۵,۵}$	۳۱۲۵	۳۱۲۵۰

گراف مورد اشاره می‌باشند. جداول ۵ و ۶ نتایج حل مسئله‌ی بعد متریک گراف را نشان می‌دهند. در [۲۴] از تبرید شبیه‌سازی شده برای حل مسئله بعد متریک گراف استفاده شده بوده است که با روش پیشنهادی مورد مقایسه قرار گرفته است.

در هر سطر جدول، میانگین نتایجِ حاصل از ۳ بار اجرا روی هر گراف آمده است. ستون‌های GA و SA[۲۱] بیانگر روش‌های الگوریتم ژنتیک و تبرید شبیه‌سازی شده و ستون mGA[۲۲] مشخص کننده‌ی الگوریتم پیشنهادی است. از نمادهای T، K و GD به ترتیب برای نمایش معیارهای زمان اجرا، کمینه عدد رنگی گراف و بعد متریک گراف استفاده شده است. در هر سطر، مشخصات یک گراف و بهترین جواب پیدا شده و زمان اجرای الگوریتم موردنظر آمده است. سطر آخر هر جدول میانگین مقادیر ستون مربوطه را نشان می‌دهد. نتیجه روش با بهترین میانگین پاسخ با زمینه خاکستری مشخص شده است. بهترین زمان اجرا با خط زیر نمایش داده شده است.

در سه جدول از ۴ جدول مذکور (جدول‌های ۳، ۵ و ۶) روش پیشنهادی از هر دو روش دیگر عملکرد بهتری در پیدا کردن جواب داشته است. فقط در مسئله رنگ‌آمیزی گراف‌های همینگ (جدول ۴) روش الگوریتم ژنتیک پایه حدود یک درصد در حالت میانگین بهتر بوده است. اما در مسئله‌ی رنگ‌آمیزی گراف‌های ابرمکعب (جدول ۳) حدود ده درصد میانگین جواب بدست آمده توسط الگوریتم پیشنهادی از الگوریتم ژنتیک پایه بهینه‌تر بوده است. میزان بهبود پاسخ بدست آمده در مسئله‌ی بعد متریک گراف در شیوه پیشنهادی بسیار چشمگیر بوده است. مطابق جداول ۵ و ۶ روش پیشنهادی پاسخ‌ها را بیشتر از ۹۷ درصد کمینه‌تر کرده است. در جدول‌های ۵ و ۶ میانگین کمینه پاسخ یافت شده توسط الگوریتم ژنتیک به ترتیب ۳۰۳ و ۱۹۸

[۲۱] Simulated Annealing
[۲۲] modified GA

جدول:۳ نتایج بدست آمده برای مسئله رنگ آمیزی گراف بر روی گراف های ابرمکعب . هرچه تعداد رنگ بدست آمده کمتر باشد، عملکرد الگوریتم بهتر بوده است.

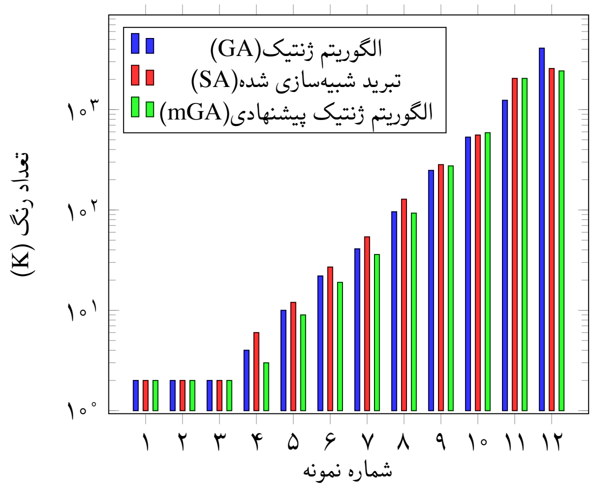
mGA		SA		GA		Spec		
K	T	K	T	K	T	N	Graph	No
۲	۰/۲۳	۲	۰/۰۷	۲	۰/۴۳	۲	$Q_{۱}$	۱
۲	۰/۴۱	۲	۰/۱۳	۲	۰/۴۱	۴	$Q_{۲}$	۲
۲	۰/۶۴	۲	۰/۲۷	۲	۰/۶۴	۸	$Q_{۳}$	۳
۳	۰/۷۶	۶	۰/۵۳	۴	۰/۸۹	۱۶	$Q_{۴}$	۴
۹	۱/۶۱	۱۲	۱/۰۷	۱۰	۱/۱۹	۳۲	$Q_{۵}$	۵
۱۹	۴/۱۱	۲۷	۲/۱۳	۲۲	۳/۳۶	۶۴	$Q_{۶}$	۶
۳۶	۱۲/۸۳	۵۴	۴/۲۷	۴۱	۱۲/۰۰	۱۲۸	$Q_{۷}$	۷
۹۳	۲۵/۷۱	۱۲۸	۸/۵۳	۹۶	۲۵/۶۶	۲۵۶	$Q_{۸}$	۸
۲۷۵	۵۱/۶۲	۲۸۳	۱۷/۰۷	۲۴۸	۵۱/۸۵	۵۱۲	$Q_{۹}$	۹
۵۸۹	۱۰۵/۲۴	۵۵۸	۳۴/۱۴	۵۳۲	۱۰۴/۲۵	۱۰۲۴	$Q_{۱۰}$	۱۰
۲۰۴۸	۲۳۱/۷۰	۲۰۴۸	۶۸/۳۳	۱۲۳۹	۲۲۱/۱۶	۲۰۴۸	$Q_{۱۱}$	۱۱
۲۴۳۲	۴۹۱/۴۶	۲۵۶۸	۱۳۶/۸۰	۴۰۹۶	۴۹۱/۴۵	۴۰۹۶	$Q_{۱۲}$	۱۲
۴۵۹	۷۷/۱۹	۴۷۴	۲۲/۷۸	۵۲۶	۷۶/۱۱	میانگین:		

بوده است که در هر دو مورد میانگین کمینه پاسخ پیدا شده توسط روش پیشنهادی ۶ بوده است؛ یعنی کاهشی بیش از ۹۷ درصد.

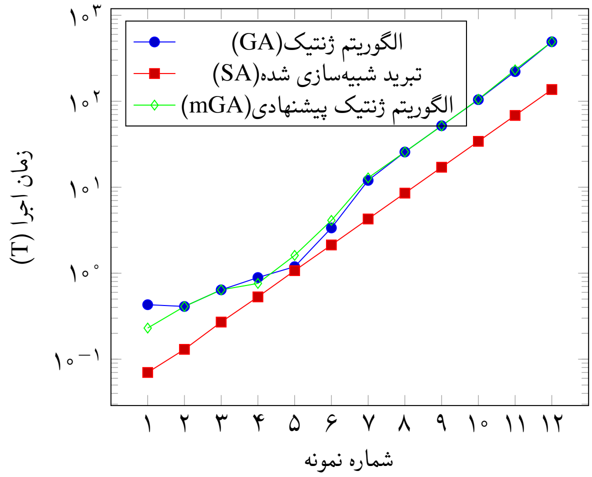
از آنجا که مقایسه اعداد در جدول‌های فوق‌الذکر ممکن است راحت نباشد، پاسخ‌های بدست آمده و زمان‌های اجرای مندرج در این جدول‌ها در قالب نمودارهایی در شکل‌های ۶، ۷، ۸، و ۹ نمایش داده شده‌اند. نمودار میله‌ای (الف) در هر شکل نمایش دهنده‌ی بهترین پاسخ یافت شده و نمودار خطی (ب) در هر شکل زمان اجرا را نشان می‌دهد. از آنجا که اعداد محور yها با افزایش ابعاد مسئله بسیار بزرگ می‌شوند، در هر دو نمودار محور yها لگاریتمی است. منظور از پاسخ، در مسائل رنگ‌آمیزی گراف تعداد رنگ کمینه‌ی یافت شده و در بعد متریک گراف، بعد متریک کمینه‌ی پیدا شده می‌باشد (ستون‌های K و GD در جداول مذکور در قبل). در نمودارهای (الف) در برخی موارد هر سه روش مقدار یکسانی را بدست آورده‌اند که توسط میله‌های هم ارتفاع در نمودارهای میله‌ای قابل مشاهده است. عموم این حالات، مربوط به وضعیت‌هایی است که روش‌های مدنظر موفق به پیدا کردن جواب مسئله نشده‌اند؛ مثل نمونه‌های ۱۱ و ۱۲ در شکل ۷(الف).

آزمایشات در نرم افزار متلب نسخه R2018 با تعداد جمعیت اولیه ۱۵۰، نرخ ترکیب ۰/۸۵، نرخ جهش ۰/۰۱، میزان نخبه گرایی ۳۰ و بر روی سیستمی با پردازنده Intel Core i7 2.4 GHz انجام شده است.

از آنجا که در گراف‌های بزرگ زمان اجرا بسیار طولانی می‌شد، برای همه روش‌ها حداکثر زمانی برابر با یک دهم تعداد رئوس گراف مورد اجرا درنظر گرفته شد. به عنوان نمونه در گراف $Q_{۱۰}$ که ۱۰۲۴ رأس دارد، زمان اجرا ۱۰۲ ثانیه درنظر گرفته شده است. با اینکه زمان اجرای همه روش‌های یکسان بوده است، اما هر روش در صورتی که بعد از چند تکرار متوالی موفق



(الف) مقایسه بهترین جواب



(ب) مقایسه زمان اجرا(لگاریتمی)

شکل:۶ مقایسه بهترین جواب و زمان اجرا برای رنگ آمیزی گراف های ابرمکعب

به بهبود بهترین جواب خود نمی شده است، متوقف می شده است. به علاوه در الگوریتم هایی مانند الگوریتم ژنتیک در متلب،اگر حداکثر زمان اجرا تمام شود اما هنوز عملیات نسل جاری به اتمام نرسیده باشد، اجرا تا تکمیل این نسل ادامه پیدا می کند. به این دلایل است که با اینکه حداکثر زمان تخصیص داده شده به همه روش ها یکسان بوده است اما زمان های اجرای آنها متفاوت شده است. در ادامه به همگرایی روش پیشنهادی پرداخته می شود.

۴- بررسی همگرایی الگوریتم پیشنهادی

الگوریتم پیشنهادی، مشتق شده از الگوریتم ژنتیک است؛ قواعد حاکم بر الگوریتم ژنتیک و همگرایی آن در اینجا نیز صادق است. تفاوت اصلی آن با الگوریتم ژنتیک، جایگزینی فرزندان بدتر از بهترین عضو نسل جاری با اعضایی ثمربخش‌تر است،

جدول:۴ نتایج بدست امده برای مسئله رنگ امیزی گراف بر روی گراف های همینگ. هرچه تعداد رنگ بدست آمده کمتر باشد، عملکرد الگوریتم بهتر بوده است.

mGA		SA		GA		Spec		
K	T	K	T	K	T	N	Graph	No
۳	۰/۷۲	۳	۰/۳۴	۳	۰/۷۹	۹	$H_{۲,۳}$	۱
۹	۱/۲۹	۱۲	۰/۹۳	۱۰	۱/۰۲	۲۷	$H_{۳,۳}$	۲
۲۷	۷/۴۳	۳۵	۲/۷۳	۲۹	۵/۵۱	۸۱	$H_{۴,۳}$	۳
۱۱۳	۲۰/۱۴	۱۳۲	۸/۱۳	۸۸	۲۴/۵۷	۲۴۳	$H_{۵,۳}$	۴
۷	۰/۷۵	۸	۰/۵۷	۵	۱/۱۱	۱۶	$H_{۲,۴}$	۵
۲۳	۴/۸۹	۳۰	۲/۱۷	۲۳	۳/۶۹	۶۴	$H_{۳,۴}$	۶
۱۲۵	۲۲/۱۰	۱۴۴	۸/۵۷	۱۰۳	۲۵/۸۸	۲۵۶	$H_{۴,۴}$	۷
۱۰۲۵	۱۰۳/۱۸	۱۰۲۵	۳۴/۱۷	۱۰۲۵	۱۰۵/۶۳	۱۰۲۴	$H_{۵,۴}$	۸
۱۱	۱/۱۷	۱۲	۰/۸۷	۱۰	۱/۵۹	۲۵	$H_{۲,۵}$	۹
۴۸	۱۲/۶۶	۶۷	۴/۲۰	۴۴	۹/۴۶	۱۲۵	$H_{۳,۵}$	۱۰
۶۲۶	۶۳/۵۳	۶۲۶	۲۰/۸۷	۶۲۶	۶۳/۲۲	۶۲۵	$H_{۴,۵}$	۱۱
۳۱۲۶	۳۳۶/۰۴	۳۱۲۶	۱۰۴/۲۱	۳۱۲۶	۳۳۸/۵۳	۳۱۲۵	$H_{۵,۵}$	۱۲
۴۲۹	۴۷/۸۳	۴۳۵	۱۵/۶۵	۴۲۴	۴۸/۴۲	میانگین:		

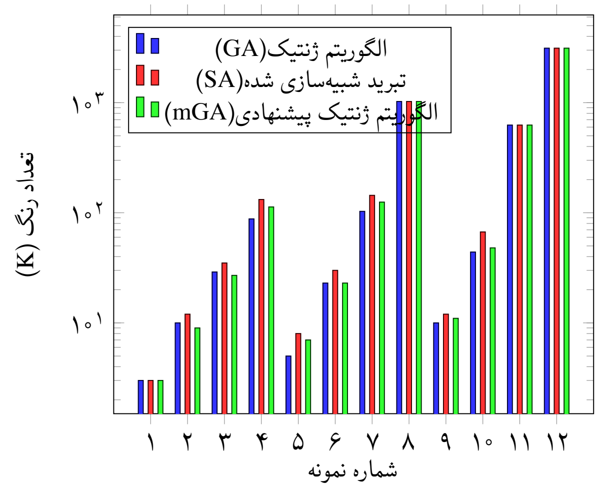
که این اعضای ممکن است شدنی نباشند. در بخش ۲ منظور از بهتر بودن توضیح داده شد: فرزندان صرفنظر از ارضا کردن قیود مسئله مورد ارزیابی قرار می‌گیرند.

در این بخش با بررسی فضای جواب مثال ۱-۱ و نمایش فضای جواب آن در شکل ۱۰ که نشان دهنده سیر نزولی اکید جواب های شدنی برای گراف G_1 (شکل ۱) درمسئله بعد متریک می‌باشد همگرایی الگوریتم پیشنهادی مورد بررسی قرار خواهد گرفت. در تاریخچه‌ی الگوریتم ژنتیک مرسوم این است که مسئله موردبحث در قالب یک مسئله‌ی بیشینه‌سازی مورد بررسی قرار گیرد که مقدار بیشتر تابع هدف در یک نقطه، به منزله برازندگی بیشتر آن نقطه باشد؛ اما در ادامه کمینه‌سازی تابع هدف را مفروض می‌گیریم. در این مثال چند مجموعه از رئوس گراف G_1 (شکل ۱) برای مسئله بعد متریک مورد بررسی قرار گرفته و فضای جواب گراف مذکور در شکل ۱۰ ترسیم شده است. شکل تابع هدف در فضای جواب نحوه عمل الگوریتم پیشنهادی را بهتر نشان می‌دهد. برای توضیح شکل مذکور ابتدا یک گزاره و سپس مثال‌هایی را خواهیم دید.

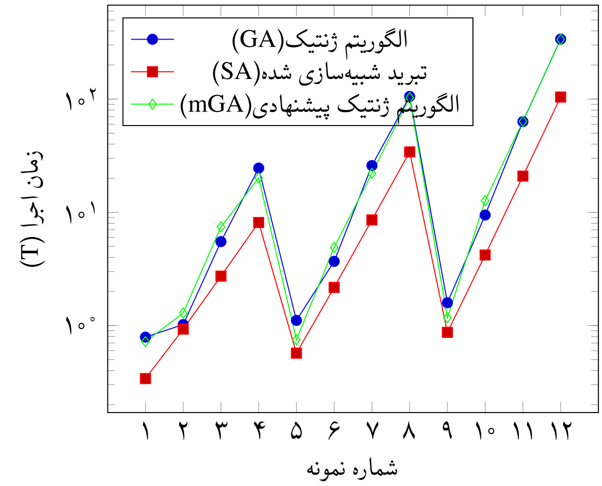
گزاره ۴-۱. برای هر گراف ساده، همبند و بدون جهت $G = (V, E)$ مجموعه $S = V$ بزرگترین مجموعه تفکیک کننده‌ی آن است.

اثبات. اندیس iام از بردار متناظر با هر رأس i، که فاصله این رأس با خودش را مشخص می‌کند، صفر است. با در نظر گرفتن دو رأس متمایز $u, v \in V$، بردارهای $r(u|S)$ و $r(v|S)$ حداقل در مؤلفه‌هایی که صفر هستند، با هم متفاوت می‌باشند. □

به عنوان نمونه، مجموعه $V = \{a, b, c, d, f, g\}$ بزرگترین مجموعه تفکیک کننده برای گراف G_1 شکل ۱ با بردارهای



(الف) مقایسه بهترین جواب



(ب) مقایسه زمان اجرا (لگاریتمی)

شکل:۷ مقایسه بهترین جواب و زمان اجرا برای رنگ آمیزی گراف های همینگ.

متمایز زیر می‌باشد:

$$
\begin{aligned}
r(a|V) &= (۰,۲,۱,۱,۱,۲)\\
r(b|V) &= (۲,۰,۱,۱,۲,۱)\\
r(c|V) &= (۱,۱,۰,۲,۲,۲)\\
r(d|V) &= (۱,۱,۲,۰,۲,۲)\\
r(f|V) &= (۱,۲,۲,۲,۰,۱)\\
r(g|V) &= (۲,۱,۲,۲,۱,۰)
\end{aligned} \tag{۲}
$$

همان‌گونه که مشاهده می‌شود هر دو بردار انتخابی حداقل در مؤلفه‌های با مقدار صفر با هم متفاوت هستند.

در مثال ۱-۱ ملاحظه شد که مجموعه $S=\{a,b,c\}$ یک مجموعه تفکیک کننده برای گراف $G_۱$ بود، اما کوچکترین مجموعه نیست. زیرا مجموعه $T=\{c,f\}$ با بردارهای متمایز

جدول:۵ نتایج بدست آمده برای مسئله بعدمتریک گراف بر روی گراف های ابرمکعب. هرچه عدد بدست آمده کمتر باشد،عملکرد الگوریتم بهتر بوده است.

mGA		SA		GA		Spec		
GD	T	GD	T	GD	T	N	Graph	No
۱	۰/۲۲	۱	۰/۰۷	۱	۰/۳۸	۲	$Q_۱$	۱
۲	۰/۴۱	۲	۰/۱۳	۲	۰/۴۱	۴	$Q_۲$	۲
۳	۰/۶۴	۳	۰/۲۷	۳	۰/۶۱	۸	$Q_۳$	۳
۴	۰/۷۹	۴	۰/۵۳	۴	۰/۸۲	۱۶	$Q_۴$	۴
۴	۱/۲۴	۴	۱/۰۷	۴	۱/۷۶	۳۲	$Q_۵$	۵
۵	۲/۶۳	۵	۲/۱۳	۵	۵/۴۷	۶۴	$Q_۶$	۶
۶	۶/۳۹	۶	۴/۲۷	۱۸	۱۲/۹۸	۱۲۸	$Q_۷$	۷
۶	۱۷/۹۳	۶	۸/۵۳	۷۵	۲۶/۴۳	۲۵۶	$Q_۸$	۸
۷	۵۱/۴۲	۱۵۲	۱۷/۰۷	۱۹۹	۵۷/۲۳	۵۱۲	$Q_۹$	۹
۸	۹۹/۸۹	۴۶۱	۳۴/۱۴	۴۵۶	۱۱۴/۸۷	۱۰۲۴	$Q_{۱۰}$	۱۰
۹	۵۰۰/۴۶	۹۷۹	۶۸/۳۷	۹۳۶	۵۴۱/۸۱	۲۰۴۸	$Q_{۱۱}$	۱۱
۱۶	۲۳۹۸/۲۵	۲۰۱۸	۱۳۷/۶۹	۱۹۳۳	۲۶۸۷/۰۱	۴۰۹۶	$Q_{۱۲}$	۱۲
۶	۲۵۶/۶۹	۳۰۳	۲۲/۸۶	۳۰۳	۲۸۷/۴۸	میانگین:		

زیر یک مجموعه تفکیک کننده با اندازه‌ای کوچکتر از اندازه S برای $G_۱$ می‌باشد:

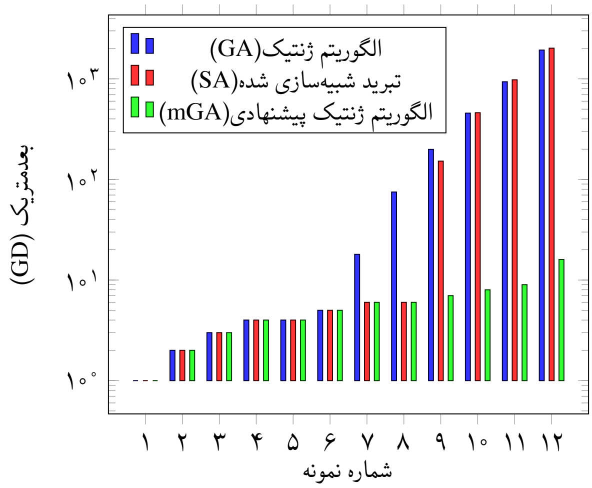
$$
\begin{aligned}
r(a|T) &= (۱,۱)\\
r(b|T) &= (۱,۲)\\
r(c|T) &= (۰,۲)\\
r(d|T) &= (۲,۲)\\
r(f|T) &= (۲,۱)\\
r(g|T) &= (۲,۰)
\end{aligned} \tag{۳}
$$

هر زیرمجموعه‌ی سه عضوی، ممکن است یک مجموعه‌ی تفکیک کننده نباشد، به عنوان نمونه مجموعه $S'=\{a,f,g\}$ با بردارهای زیر یک مجموعه تفکیک کننده برای $G_۱$ نمی‌باشد، چون دو بردار $r(c|S')$ و $r(d|S')$ متمایز نیستند.

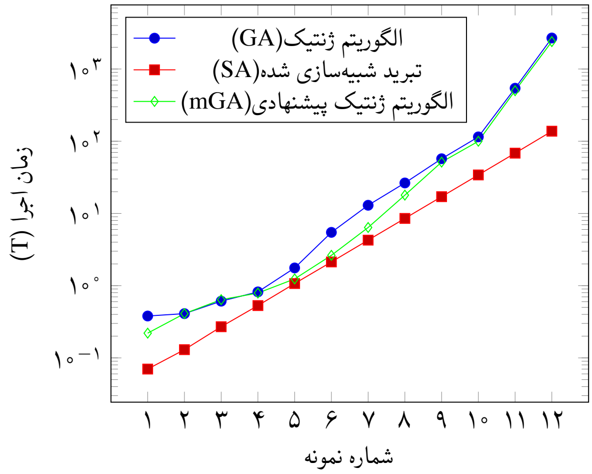
$$
\begin{aligned}
r(a|S') &= (۰,۱,۲)\\
r(b|S') &= (۲,۲,۱)\\
r(c|S') &= (۱,۲,۲)\\
r(d|S') &= (۱,۲,۲)\\
r(f|S') &= (۱,۰,۱)\\
r(g|S') &= (۲,۱,۰)
\end{aligned} \tag{۴}
$$

اگر یک زیر مجموعه k عضوی داشته باشیم، مقدار تابع هدف مسئله برای این جواب ممکن، کمتر از k نخواهد بود. مقدار تابع هدف را برای جواب‌هایی که زیرمجموعه‌هایی که تفکیک‌کننده نیستند (**شدنی** نیستند)، یکی بیشتر از تعداد رئوس گراف (در این مثال هفت) درنظر گرفته‌ایم.

نمودار تابع هدف در فضای جواب مسئله بعد متریک گراف



(الف) مقایسه بهترین جواب



(ب(مقایسه زمان اجرا)لگاریتمی(

شکل:۸ مقایسه بهترین جواب و زمان اجرا برای بعد متریک گراف های ابرمکعب.

در شکل ۱۰ نشان داده شده است. در این شکل S_i مجموعه ی همه ی مجموعه های i عضوی می باشد. با توجه به این که فقط یک مجموعه شش عضوی داریم)V، با یک تک نقطه با ارتفاع۶ نشان داده شده است؛ چرا که همان گونه که ذکر شد مجموعه ی۶ عضوی V یک مجموعه ی تفکیک کننده است. اندازه هر بخش متناسب با نسبت تعداد زیرمجموعه های i عضوی به تعداد کل زیرمجموعه هاست. به عنوان نمونه ناحیه مرتبط با زیرمجموعه های۳ عضوی S_3و نقطه چین قرمز مشخص شده است. این قسمت دارای دو سطح از تابع هدف است:(۱) سطح تابع هدف برابر با۳ برای زیر مجموعه های سه عضوی مانند $S = a, b, c$ که یک مجموعه تفکیک کننده)جواب شدنی(هستند و مقدار تابع هدف در آنها برابر۳ هست و(۲) سطح،۷ مانند $S' = a, f, g$ که یک مجموعه ی تفکیک کننده نیست و مقدار تابع هدف را۷ درنظر گرفته ایم.

جدول:۶ نتایج بدست آمده برای مسئله بعد متریک گراف های همینگ. هرچه عدد بدست آمده کمتر باشد، عملکرد الگوریتم بهتر بوده است.

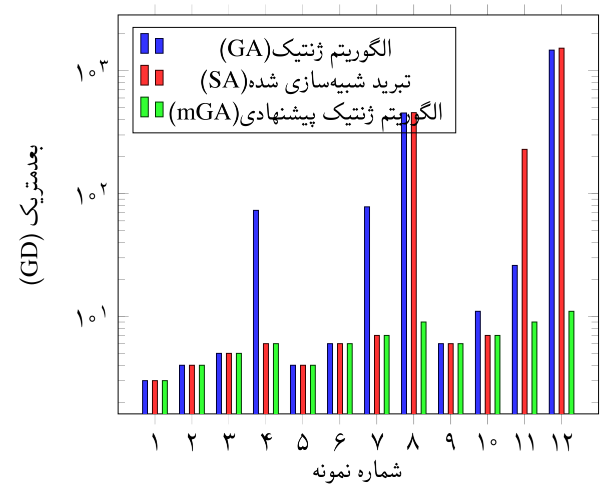
Spec			GA		SA		mGA	
No	Graph	N	T	GD	T	GD	T	GD
۱	$H_{۲,۳}$	۹	۰/۸۱	۳	۰/۳۰	۳	۰/۶۴	۳
۲	$H_{۳,۳}$	۲۷	۱/۰۹	۴	۰/۹۰	۴	۱/۰۳	۴
۳	$H_{۴,۳}$	۸۱	۷/۶۱	۵	۲/۷۰	۵	۳/۲۴	۵
۴	$H_{۵,۳}$	۲۴۳	۲۵/۳۵	۷۳	۸/۱۰	۶	۱۴/۷۴	۶
۵	$H_{۲,۴}$	۱۶	۰/۶۹	۴	۰/۵۳	۴	۰/۶۸	۴
۶	$H_{۳,۴}$	۶۴	۵/۰۰	۶	۲/۱۳	۶	۲/۸۲	۶
۷	$H_{۴,۴}$	۲۵۶	۲۶/۹۳	۷۸	۸/۵۳	۷	۱۷/۳۲	۷
۸	$H_{۵,۴}$	۱۰۲۴	۱۰۹/۷۲	۴۵۳	۳۴/۲۵	۴۵۶	۱۰۰/۳۷	۹
۹	$H_{۲,۵}$	۲۵	۱/۶۰	۶	۰/۸۳	۶	۱/۳۶	۶
۱۰	$H_{۳,۵}$	۱۲۵	۱۲/۷۵	۱۱	۴/۱۷	۷	۱۰/۷۷	۷
۱۱	$H_{۴,۵}$	۶۲۵	۶۴/۷۰	۲۶۴	۲۰/۸۳	۲۲۹	۶۲/۷۱	۹
۱۲	$H_{۵,۵}$	۳۱۲۵	۱۵۵۳/۱۵	۱۴۷۲	۱۰۵/۹۹	۱۵۲۶	۱۴۱۹/۸۷	۱۱
میانگین:			۱۵۰/۷۸	۱۹۸	۱۵/۷۷	۱۸۸	۱۳۶/۳۰	۶

نسبت بازه‌های تخصیص داده شده به هر دسته و نسبتی از هر بازه که متناسب با تعداد زیرمجموعه‌های i عضوی تفکیک‌کننده و غیر تفکیک کننده هستند با یک برنامه برای تمام حالات در این گراف کوچک محاسبه شده و بازه‌های مربوطه به همین نسبت‌ها ترسیم شده‌اند.

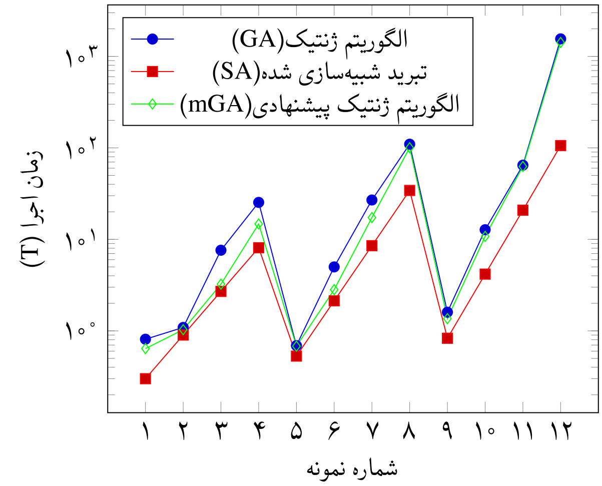
تمام مجموعه‌های پنج عضوی جواب شدنی می‌باشند که ارزشی معادل عدد ۵ به آنها داده شده است. بخشی از مجموعه‌های چهار، سه، دو و تمام مجموعه‌های یک عضوی در شرایط مسئله صادق نبوده‌اند که ارزشی معادل عدد ۷ گرفته‌اند.

اگر جوابی با مقدار تابع هدف برابر با ۳ پیدا شود، یعنی حداقل یک زیرمجموعه‌ی ۳ عضوی به عنوان جواب شدنی وجود دارد. لذا در تولید جواب‌های جدید، زیرمجموعه‌هایی با تعداد بیشتر از ۳ عضو تولید نخواهیم کرد. تولید جواب‌های با تعداد عضو بیشتر بی‌فایده خواهد بود. مثلاً در مسئله رنگ‌آمیزی گراف، به فرض گرافی با ۲ رنگ قابل رنگ‌آمیزی است و بهترین پاسخی که الان یافت شده ۳ رنگ باشد؛ جستجو و ترکیب جواب‌هایی که گراف را با چهار رنگ یا بیشتر رنگ‌آمیزی می‌کنند فایده‌ی بیشتری از جستجو در میان جواب‌های سه رنگی نخواهد داشت.

روش معمول مورد استفاده در الگوریتم‌های فراابتکاری برای تولید زیرمجموعه‌هایی از یک مجموعه‌ی جهانی، تولید یک بردار با اعضای فقط صفر و یک است که مقدار یک بیانگر حضور عنصر متناظر در جواب است. به عنوان مثال در مسئله‌ی بعد متریک گراف وقتی به پاسخی با سه عضو برسیم (به عنوان کمترین بعد یافت شده تاکنون)، مقدار تابع هدف برابر با ۳ است؛ هیچ جواب دیگری با تعداد بیشتر از ۳ عضو، مفید نخواهد بود. تولید جواب‌های تصادفی با تعداد ۴ یا بیشتر عضو، فقط زمان رسیدن به جواب نهایی را طولانی‌تر خواهد کرد. روال معمول الگوریتم ژنتیک در طی چند نسل چنین جواب‌های نامطلوبی را حدف خواهد کرد، اما با روش پیشنهادی، در نسل بعد، اصلاً



(الف) مقایسه بهترین جواب



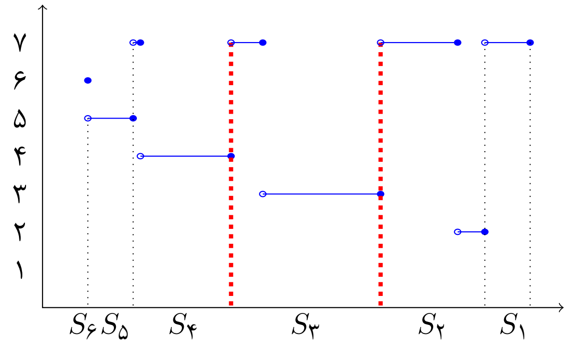
(ب) مقایسه زمان اجرا (لگاریتمی)

شکل:۹ مقایسه بهترین جواب و زمان اجرا برای بعد متریک گراف های همینگ.

پاسخ هایی با چهار عضو را نخواهیم داشت. به جای اینکه عمل اصلاح چنین اعضایی در طی چندین نسل انجام شود، در روش پیشنهادی این کار توسط عملگرهای الگوریتم انجام شده و نیاز به جستجوی کورکورانه الگوریتم ژنتیک برای این حالات خاص مرتفع می شود. به همین دلیل در نتایج آزمایشات ذکر شده، به صورت میانگین الگوریتم پیشنهادی سریع تر بوده است.

۵- نتیجه گیری

بسیاری از روش‌های فراابتکاری در حل مسائل بهینه‌سازی همچون الگوریتم ژنتیک، الگوریتم ازدحام ذرات، الگوریتم‌های مورچگان، الگوریتم زنبور عسل، فاخته، خفاش و کرم شب‌تاب، ملهم از پدیده‌های طبیعی هستند که عموماً نسخه‌ی مصنوعی این پدیده‌ها، حذف و اضافاتی نسبت به پدیده واقعی در خلقت دارند. به عنوان مثال در الگوریتم مورچگان، مورچه‌ها دارای



شکل:۱۰ نمایش فضای جواب گراف شکل۱ در مسئله ی بعد متریک گراف. S_i ها زیرمجموعه های i عضوی می باشند.

حافظه هستند، در الگوریتم ازدحام ذرات، از بهترین جواب خود و گروه مطلع هستند. در نوشتار حاضر به کروموزم ها در الگوریتم ژنتیک اجازه داده شده است که از دیگر کروموزم ها مطلع باشند و بقای کروموزوم ها وابسته به بهترین جواب های پیدا شده توسط دیگر اعضای جمعیت باشد. اعضایی که قدرت رقابت با بهترین عضو را ندارند با جواب هایی که با صرفنظر کردن از رعایت قیدهای مسئله، پاسخ های خوبی محسوب می شوند جایگزین می شوند. آزمایشات انجام شده بر روی دو مسئله مشهور در حوزه گراف: رنگ آمیزی و بعدمتریک گراف، کارایی شیوه پیشنهادی را نشان داده است. اعمال شیوه ی پیشنهادی روی دیگر مسائل حوزه بهینه سازی ترکیبیاتی از جمله کارهای آتی مدنظر نویسندگان است.

مراجع

[1] D. Beasley, D. R. Bull, and R. R. Martin, "An overview of genetic algorithms: Part 1, fundamentals," *University Computing*, vol.15, no.2, pp.58–69, 1993.

[۲] م. امین‌طوسی و ه. صدوقی‌یزدی، "کلاسه‌بندی فازی بهینه دانشجویان با استفاده از یک تابع فازی در حل مسئله برنامه‌ریزی ژنتیکی دروس هفتگی دانشگاه،" در نهمین کنفرانس سالانه انجمن کامپیوتر ایران، (تهران، ایران)، صفحات ۳۴۵-۳۵۲، دانشگاه صنعتی شریف، اسفند ۱۳۸۲.

[3] M. Amintoosi, H. SadoghiYazdi, M.Fathy, and R. Monsefi, "Using pattern matching for tiling and packing problems," *European Journal of Operational Research*, vol.183, pp.950–960, 2007.

[۴] ر. منصفی و م. امین‌طوسی، "جورچینی قطعات راست گوشه با استفاده از شبکه های عصبی و الگوریتم ژنتیک،" در پنجمین کنفرانس سالانه انجمن کامپیوتر ایران، (تهران، ایران)، صفحات ۲۹۸-۳۰۴، دانشگاه شهید بهشتی، بهمن ۱۳۷۸.

[5] J. Kratica, "Improving performances of the genetic algorithm by caching," *Computers and Artificial Intelligence*, vol.18, 01 1999.

[6] Z. Xin and X. Chunbo, "New genetic algorithm improved and its applications," in *2011 International Conference on Electronics, Communications and Control (ICECC)*, pp.926–928, Sept 2011.

[7] A. Shrestha and A. Mahmood, "Improving genetic algorithm with fine-tuned crossover and scaled architecture," *Journal of Mathematics*, vol.2016, p.10, Article ID 4015845 2016.

[8] R. Tanese, "Distributed genetic algorithms," in *Proceedings of the 3rd International Conference on Genetic Algorithms*, (San Francisco, CA, USA), pp.434–439, Morgan Kaufmann Publishers Inc., 1989.

[9] T. C. Belding, "The distributed genetic algorithm revisited," in *Proceedings of the 6th International Conference on Genetic Algorithms*, (San Francisco, CA, USA), pp.114–121, Morgan Kaufmann Publishers Inc., 1995.

[10] D. Whitley, S. Rana, and R. B. Heckendorn, "The island model genetic algorithm: On separability, population size and convergence," *Journal of Computing and Information Technology*, vol.7, pp.33–47, 1998.

[11] S. H. Ling and F. H. Leung, "An improved genetic algorithm with average-bound crossover and wavelet mutation operations," *Soft Comput.*, vol.11, pp.7–31, Jan. 2007.

[12] R.-L. Wang and K. Okazaki, "An improved genetic algorithm with conditional genetic operators and its application to set-covering problem," *Soft Comput.*, vol.11, pp.687–694, Feb. 2007.

[13] H. Mühlenbein and D. Schlierkamp-Voosen, "Predictive models for the breeder genetic algorithm i. continuous parameter optimization," *Evol. Comput.*, vol.1, pp.25–49, Mar. 1993.

[14] I. Ono, H. Kita, and S. Kobayashi, "Advances in evolutionary computing," chap. A Real-coded Genetic Algorithm Using the Unimodal Normal Distribution Crossover, pp.213–237, New York, NY, USA: Springer-Verlag New York, Inc., 2003.

[15] https://en.wikipedia.org/wiki/Graph-coloring, 2016.

[16] T. H. Cormen, C. E. Leiserson, R. L. Rivest, and C. Stein. *Introduction to Algorithms, Third Edition*. The MIT Press, 3rd ed. , 2009.

[17] J. Kratica, V. Kovačević-Vujčić, and M. Čangalović, "Computing the metric dimension of graphs by genetic algorithms," *Computational Optimization and Applications*, vol.44, pp.343–361, 01 2009.

[18] J. Bensmail, F. Mc Inerney, and N. Nisse, "Metric Dimension: from Graphs to Oriented Graphs," in *LAGOS 2019 - 10th Latin & American Algorithms, Graphs and Optimization Symposium*, vol.346 of *Electronic Notes in Theoretical Computer Science*, (Belo Horizonte, Brazil), pp.111–123, June 2019.

[19] J. Cáceres, C. Hernando, M. Mora, I. M. Pelayo, M. L. Puertas, C. Seara, and D. R. Wood, "On the metric dimension of cartesian products of graphs," *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, vol.21, no.2, pp.423–441, 2007.

[20] S. Farooq, Rashid; Akhter, "Metric dimension of fullerene graphs," *GTA Research Group, Univ. Newcastle, Indonesian Combinatorics Society and ITB*, vol.Vol 7, No 1 (2019): Electronic Journal of Graph Theory and Applications, 2019.

[21] Z. Shao, S. M. Sheikholeslami, P. Wu, and J.-B. Liu, "The Metric Dimension of Some Generalized Petersen Graphs," *Discrete Dynamics in Nature and Society*, vol.2018, pp.1–10, August 2018.

[22] A. Ahmad, M. Bača, and S. Sultan, "Computing the metric dimension of kayak paddles graph and cycles with chord," *Proyecciones (Antofagasta, On line)*, vol.39, pp.287–300, Apr. 2020.

[23] F. Harary, J. P. Hayes, and H.-J. Wu, "A survey of the theory of hypercube graphs," *Computers & Mathematics with Applications*, vol.15, no.4, pp.277 – 289, 1988.

[۲۴] هـ عزتی و م. امین‌طوسی، "محاسبه بعد متریک گراف با الگوریتم شبیه‌سازی تبریدی،" در سومین سمینار کنترل و بهینه‌سازی، (دانشگاه حکیم سبزواری)، صفحات ۴۲-۳۹، ۱۳۹۸.

The aware genetic algorithm of the best member, applied to graph coloring and metric-dimension of the graph problems

Abstract:
Genetic algorithm is one of the most famous methods for solving Combinatorial Optimization Problems. It had various applications in different field of studies such as Electronics, Computer Science and Mathematics and still has. In this algorithm, the population members which contribute for producing the next generation are selected according to their fitness values. The combination of the members is through Crossover Operator; And in some versions a few of the best members migrate to the next generation directly. Normally, the weak members of population may participate to the next generation. In this study, the combination operators are aware of the best member of generation; Only those child which are as good as the best member, are allowed to form the next generation. The proposed method is applied on graph coloring and finding metric-dimension of graph problems. The results are compared with the common genetic algorithm. Experimental results shows the superior performance of the proposed method in comparison to common genetic algorithm.

Keywords: Genetic Algorithm, Metaheuristic Algorithms, Metric Dimension of Graphs, Graph Coloring