

## تحلیل کماتش ورق مستطیلی ارتوتروپیک و غیر ایزوتروپیک به روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم یافته ( GDQM )

منصور درویره<sup>۳</sup>

فاطمه فرهت نیا<sup>۲\*</sup>

محسن فتاحی<sup>۱</sup>

نویسنده مسئول : Farhatnia@iaukhsh.ac.ir\*

### چکیده

در این مقاله، کماتش ورق‌های مستطیلی ارتوتروپیک و غیر ایزوتروپیک تحت توزیع مختلفی از بارگذاری‌های فشاری محوری مورد بررسی قرار گرفته است. بدین منظور ابتدا معادلات حاکم بر کماتش ورق ایزوتروپیک اعمال و سپس با استفاده از روابط مربوط به رفتار مکانیکی مواد مرکب، معادلات حاکم کماتش بر ورق غیر ایزوتروپیک به دست آورده می‌شود. با اعمال روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم یافته (GDQM) بر معادلات کماتش تحت شرایط مرزی مورد نظر، یک مجموعه معادلات مقدار ویژه حاصل گردیده که به منظور بدست آوردن ضریب نیروی کماتشی یک برنامه کامپیوتری در نرم افزار MATLAB به نحوی که تأثیر پارامترهایی مانند جنس ورق کامپوزیتی، نسبت طول به عرض ورق، تعداد لایه‌ها، زاویه چیدن لایه‌ها، نوع بارگذاری و شرایط مرزی به صورت تکیه گاه گیردار و ساده در آن لحاظ شده باشد، نوشته شده است. در این تحقیق بارگذاری‌های متفاوت یکنواخت تک محوری و دو محوری، خطی و سهمی شکل متغیر در راستای طولی و عرضی ورق اعمال شده است. همچنین مقایسه رفتار کماتش برای ورق ارتوتروپیک و غیر ایزوتروپیک نیز صورت گرفته است. نتایج حاصل از روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم یافته (GDQM) با نتایج گزارش شده از حل رایلی-ریتز و حل اجزای محدود به کمک نرم افزار ANSYS 8.0 مقایسه و تایید شده است.

**واژه های کلیدی:** کماتش- ورق ارتوتروپیک- غیر ایزوتروپیک- روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم یافته

۱- کارشناس ارشد، مهندسی مکانیک دانشگاه آزاد اسلامی واحد خمینی شهر

۲- استادیار، دانشگاه آزاد اسلامی واحد خمینی شهر

۳- استاد، دانشگاه گیلان

## ۱- مقدمه

به طور کلی از شکل و ضخامت ورق به عنوان دو پارامتر اساسی در طراحی آن یاد می شود و بر همین اساس نیز تئوری های مختلف در زمینه تحلیل مسائل مرتبط با آن بنا نهاده شده است. در این تحقیق ورق نازک با خیز کم مورد تحلیل قرار می گیرد. معمولاً ورق های نازک به ورق هایی اطلاق می شود که نسبت ضخامت آن ها به ضلع کوچکتر کمتر از ۱ به ۲۰ باشد. در میان انواع بارگذاری های مختلفی که بر روی ورق های کامپوزیتی اعمال می گردد، بارهای فشاری صفحه ای از اهمیت بسیار زیادی برخوردار بوده و سازه را مظنون به وقوع پدیده کمانشی می کند. کمانش ورق های کامپوزیت لایه ای تحت بارگذاری نامی، عمدتاً تراکم تک محوری / دو محوری یکنواخت- و وابستگی آن به پارامترهای لایه ای، زاویه الیاف و مواردی از این دست، به خوبی مشخص شده است. در طول حیات سازه های ورقی شکل، فرض شرایط بارگذاری برای المان ورق تحت تراکم جزئی، به طوری که نیرو در آن از یک لبه تحت بار به لبه دیگر به طور خطی تغییر کند، دور از ذهن نبوده است. به طور کلی تعیین بارهای کمانشی ورق نقش و وصف ناپذیری در طراحی ورق داشته و معمولاً طراحان از این بار به عنوان حد مجاز بارفشاری استفاده می کنند. امروزه حل عددی سیستم معادلات، امکان تحلیل دقیق تر را با در نظر گرفتن تمام و یا قسمتی از داده ها فراهم می سازد. با فرموله شدن قاعده «مربع سازی» برای یک مشتق، مشابه با بسط مربع سازی برای انتگرال ها، نخستین جرقه های ایجاد روش «مربع سازی (مربعات) دیفرانسیلی» به عنوان یک تکنیک جدید در حل عددی مسائل مقدار اولیه معادلات با مشتقات جزئی و معمولی زده شد. امروزه روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم یافته، به عنوان یکی از روش های حل معادلات دیفرانسیل شناخته می شود. هدف در این مقاله، تحلیل کمانش ورق های کامپوزیتی متقارن مستطیلی ارتوتروپیک و غیر ایزوتروپیک به روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم یافته (GDQM) تحت بارگذاری مورد نظر، شرایط تکیه گاهی گیردار و ساده با تعداد لایه ها و زاویه های مختلف الیاف در آن می باشد.

اولین مطالعات وسیع در زمینه تحلیل کمانش ورق ها توسط پری [۱] در مورد ورق های بیضوی و حل مسئله غیر خطی استاتیکی آن صورت گرفت. همچنین نش و کولی [۲] از روش اغتشاشات جهت حل مسئله استفاده نمودند. تیموشنکو و گیر [۳] در کتاب خود اطلاعات زیادی در مورد کمانش اشکال گوناگون ورق ها ارائه دادند. بلمن و کاستی [۴] در سال ۱۹۷۱، روش مربعات دیفرانسیلی را به عنوان یک تکنیک جدید برای حل عددی مسائل مقدار اولیه در معادلات دیفرانسیلی معمولی و پاره ای، مطرح کردند. هدف آن ها ارائه یک راه حل جدید برای فائق شدن بر مشکلات پایداری و حجم محاسبات مسائل عددی بود. در کنار بلمن، مینگل [۵] در مورد مطالعه مسأله پخش گذاری غیر خطی و تک بعدی به کار گرفته شد. نکته قابل تأمل در کار مینگل، یکپارچه سازی شرایط مرزی در ضرایب وزنی مربوط به مشتق های اول و دوم می باشد. بلمن [۶ و ۷] تحقیق کرد که روش مربعات دیفرانسیلی بر اساس تقریب مشتق توابع بصورت مجموع وزنی مقادیر تابع بنا نهاده شده است. او معتقد بود که مشتق جزئی یک تابع نسبت به یک متغیر را می توان بصورت یک ترکیب خطی وزن دار از مقادیر تابع، که در تعدادی نقاط داخل دامنه آن متغیر قرار دارند، تقریب زد. سیوان و اسلیسویچ [۸] برای اولین بار مسایل مقدار مرزی در حالت تک بعدی غیر خطی و دو بعدی خطی را با استفاده از روش مربعات دیفرانسیلی تحلیل نمودند به دنبال مقالات فوق، روش مربعات دیفرانسیلی برای حل خمش غیر خطی ورق های دایره ای تحت فشار یکنواخت و بار نقطه ای در مرکز، توسط استریز [۹ و ۱۰] به کار گرفته شد. تشریح دقت و همگرایی روش مربعات دیفرانسیلی در حل طیف وسیعی از معادلات دیفرانسیلی با ضرایب متغیر وابسته به مسایل پایداری تیرها و صفحات، توسط شربورن و پاندی [۱۱] صورت گرفت. کمانش صفحات ایزوتروپ با ضخامت متغیر تحت بار فشاری تک محوری و کمانش تیر تحت ممان خمشی در این مطالعه بررسی شده است. آن ها در تحلیل خود از تعداد متفاوتی نقاط دقت استفاده نمودند. شو و همکاران [۱۲-۱۷] طی تحقیقات خود کاربرد روش مربعات دیفرانسیلی را در حیطه حل مسائل سیالات و جامدات نشان دادند. در این

$$M^{(1)}(x) = \prod_{j=1, j \neq i}^N (x_i - x_j) \quad (5)$$

در روابط فوق  $x_i$  برای  $i = 1, 2, \dots, N$  مختصات نقاط دقت می باشند که می توان آن ها را به دلخواه انتخاب نمود. با جایگذاری معادله (۲) در (۱) بدست می آید:

$$C_{ij}^{(1)} = \frac{M^{(1)}(x_i)}{(x_i - x_j)M^{(1)}(x_j)} \quad (6)$$

$$i \neq j \quad i, j = 1, 2, \dots, N$$

$$C_{ii}^{(1)} = - \sum_{j=1, j \neq i}^N C_{ij}^{(1)} \quad i = j \quad i, j = 1, 2, \dots, N \quad (7)$$

معادلات (۶) و (۷) روابط ساده برای محاسبه  $C_{ij}^{(1)}$  بدون هیچ محدودیتی نسبت به انتخاب نقاط شبکه ای  $x_i$  می باشد. ضرایب وزنی برای مشتقات مرتبه دوم و بالاتر به طور مشابه بدست می آید. این گونه با به کار گیری چند جمله ای درون یابی لاگرانژ بعنوان تابع آزمودنی، یک رابطه بازگشتی برای ضرایب وزنی مرتبه  $m$  و  $C_{ij}^{(m)}$  بدست می آید.

$$C_{ii}^{(m)} = m \left( C_{ii}^{(m-1)} C_{ij} - \frac{C_{ij}^{(m-1)}}{x_i - x_j} \right) \quad i \neq j \quad m = 2, 3, \dots, N-1 \quad (8)$$

$$i, j = 1, 2, \dots, N$$

که در آن  $C_{ij}^{(m)}$  ضرایب وزنی مشتق مرتبه  $m$  می باشد.  $C_{ii}^{(m)}$  می تواند از رابطه مشابه رابطه فوق بدست آید:

$$C_{ii}^{(m)} = - \sum_{j=1, j \neq i}^N C_{ij}^{(m)} \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (9)$$

بنابراین معادلات (۶) و (۷) با معادلات (۸) و (۹) یک شکل عمومی و ساده برای تعیین ضرایب وزنی مرتبه اول تا مرتبه  $(N-1)$  ام را می دهد که در آن هیچ محدودیتی برای انتخاب نقاط دقت وجود ندارد. معادلات دیفرانسیلی تعادل ورق بیان میکند:

$$M_{,x}x + M_{,xy}xy + M_{,y}yy + N_x W_{,xx} + N_y W_{,yy} + N_{,xy} W_{,xy} = 0 \quad (10)$$

$$\begin{cases} N_x x + N_{,xy} y = 0 \\ N_y y + N_{,xy} x = 0 \end{cases} \quad (11)$$

$M_x, M_y$  گشتاورهای اعمالی در صفحه و  $N_x, N_y$  نیروهای اعمالی در راستای  $x, y$  هستند. از جایگذاری روابط تنش - کرنش و کرنش - تغییر مکان در معادلات تعادل و با در نظر گرفتن روابط میان رفتار مکانیکی مواد مرکب و

تحقیق کمانش ورق ارتوتروپیک و غیر ایزوتروپیک مستطیلی تحت شرایط مختلفی از بارگذاری تک محوره و دو محوره فشاری با توزیع غیر یکنواخت با استفاده از روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم یافته مورد بررسی قرار می گیرد.

## ۲- روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم یافته (GDQM)

مشتق یک تابع نسبت به یک متغیر را می توان به صورت ترکیب خطی وزن دار از مقادیر تابع که در تعدادی نقاط دامنه محاسبه شده اند، تقریب زد [۱۵]:

$$f_x(x_i) = \sum_{j=1}^N a_{ij} f(x_j) \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (1)$$

معادله (۱) بر این عقیده استوار است که مشتق یک تابع نسبت به یک جهت مختصات، می تواند به صورت مجموع خطی وزنی مقادیر تابع در تمام نقاط داخل دامنه که متغیر در آن قرار دارد، بیان گردد. به عنوان مثال مشتق مرتبه اول تابع یک بعدی  $f(x, t)$  را در  $(i)$  امین نقطه مجزای شبکه محاسبه می کنیم. مشتقات جزئی مراتب بالاتر ضرورتاً به همان صورت خواهند داشت، بنابراین!!!!

$$f_x(x_i, t) = \sum_{j=1}^N C_{ij}^{(1)} f(x_j, t) \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2)$$

در رابطه بالا  $f_x(x_i, t)$  مشتق مرتبه اول  $f(x, t)$  نسبت به  $x$  در  $x_i$  است و  $N$  نیز نقاط مجزای شبکه می باشد. نیز ضرایب وزنی برای تقریب مشتق مرتبه اول می باشد. به منظور پیدا کردن رابطه جبری ساده و صریح در تعیین ضرایب وزنی، به نحوی که هیچ محدودیتی نسبت به انتخاب نقاط شبکه وجود نداشته باشد، چند جمله ای درون یابی لاگرانژ به عنوان مجموعه توابع آزمودنی  $g(x)$  به جای چند جمله ای های توانی و یا چند جمله ای های لژاندر انتخاب می شود

$$g_i(x) = \frac{M(x)}{(x - x_i)M^{(1)}(x_i)} \quad (3)$$

$$M(x) = \prod_{j=1}^N (x - x_j) \quad (4)$$

$M^{(1)}(x)$  مشتق مرتبه اول  $M(x)$  است که بصورت زیر تعریف می شود!!:

لازم به ذکر است که در این مقاله با توجه به مقارن بودن ورق،  $B_{ij} = 0$  است، بنابراین مطابق رابطه (۱۶) ماتریس  $[D] = [\bar{D}]$  می باشد.

### ۳- اعمال GDQ بر معادلات حاکم بر کمانش و شرایط مرزی حاکم بر ورق

با اعمال روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم یافته (GDQM) بر معادله کلی کمانشی حاکم بر ورق ارتوتروپیک رابطه زیر بدست می آید [۱۸]:

$$(18) \quad D_n \sum_{k=1}^{n_x} A_{ik}^{(4)} W_{kj} + 4D_{16} \sum_{k=1}^{n_x} \sum_{m=1}^{n_y} A_{ik}^{(3)} B_{jm}^{(1)} W_{km} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \sum_{k=1}^{n_x} \sum_{m=1}^{n_y} A_{ik}^{(2)} B_{jm}^{(3)} W_{km} + 4D_{26} \sum_{k=1}^{n_x} \sum_{m=1}^{n_y} A_{ik}^{(1)} B_{jm}^{(3)} W_{km} + D_{22} \sum_{m=1}^{n_y} B_{jm}^{(4)} W_{im} + N_x \sum_{k=1}^{n_x} A_{ik}^{(2)} W_{kj} + N_y \sum_{m=1}^{n_y} B_{jm}^{(2)} W_{im} + 2N_{xy} \sum_{k=1}^{n_x} \sum_{m=1}^{n_y} A_{ik}^{(1)} B_{jm}^{(1)} W_{km} = 0$$

$i = 1, \dots, n_x$   
 $j = 1, \dots, n_y$

در رابطه فوق  $n_x, n_y$  به ترتیب تعداد نقاط دقت در جهت های  $x, y$  می باشد. ماتریس های  $A, B$  نیز به ترتیب ماتریس های ضرایب وزنی مشتق های مختلف در جهات بدون بعد  $X, Y$  می باشند.  $W_{ij}$  نیز خیز مربوط به گره ای است که در تقاطع  $i$  امین در جهت  $x$ ،  $j$  امین در جهت  $y$  قرار دارد. تحقیق حاضر برای دو شرط مرزی ساده و گیردار صورت گرفته است.

- شرط تکیه گاه ساده از چهار طرف (SSSS)

$$(19) \quad x = 0, a \Rightarrow W_{ij} = 0$$

$$-D_{11} \sum_{k=1}^{n_x} A_{ik}^{(2)} W_{kj} - D_{12} \sum_{m=1}^{n_y} B_{jm}^{(2)} W_{im} - \dots$$

$$2D_{16} \sum_{k=1}^{n_x} \sum_{m=1}^{n_y} A_{ik}^{(1)} B_{jm}^{(1)} W_{km} = 0$$

$i = 1, n_x, \quad j = 1, \dots, n_y$

$$(20) \quad y = 0, b \Rightarrow W_{ij} = 0$$

$$-D_n \sum_{k=1}^{n_x} A_{ik}^{(2)} W_{kj} - D_{22} \sum_{m=1}^{n_y} B_{jm}^{(2)} W_{im} - \dots$$

$$2D_{26} \sum_{k=1}^{n_x} \sum_{m=1}^{n_y} A_{ik}^{(1)} B_{jm}^{(1)} W_{km} = 0$$

$i = 1, \dots, n_x, \quad j = 1, n_y$

نیروها و ممان های اعمالی بر ورق، شکل کلی این معادلات برای ورق چندلایه بصورت زیر خواهد شد [۱۸]:

$$(12) \quad A_{11} U, xx + 2A_{16} U, xy + A_{66} U, yy + A_{16} V, xx + (A_{12} + A_{66}) V, xy + A_{26} V, yy - B_{11} W, xxx - 3B_{16} W, xxy - (B_{12} + 2B_{66}) W, xyy - B_{26} W, yyy = 0$$

$$(13) \quad A_{16} U, xx + 2A_{26} V, xy + A_{66} V, xx + A_{22} V, yy + (A_{12} + A_{66}) U, xy + A_{26} U, yy - B_{16} W, xxx - 3B_{26} W, xxy - (B_{12} + 2B_{66}) W, xxy - B_{22} W, yyy = 0$$

$$(14) \quad D_{11} W, xxxx + 4D_{16} W, xxyy + 2(D_{12} + 2D_{66}) W, xxyy + 4D_{26} W, xyyy - B_{11} U, xxxx - 3B_{16} U, xxy - (B_{12} + 2B_{66}) U, xyy - B_{26} U, yyy - B_{16} V, xxx - (B_{11} + 2B_{66}) V, xxy - 3B_{26} V, xyy - B_{22} V, yyy + N_x W, xx + 2N_{xy} W, xy + N_y W, yy = 0$$

که در آن  $A$  ماتریس سختی کششی،  $B$  ماتریس سختی وابستگی و  $D$  ماتریس سختی خمشی هستند که از روابط زیر بدست می آیند:

$$(15) \quad A_{ij} = \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})(z_k - z_{k-1})$$

$$B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})(z_k^2 - z_{k-1}^2)$$

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})(z_k^3 - z_{k-1}^3)$$

اندیس  $k$  در روابط فوق، اشاره به لایه  $k$  ام دارد.  $z_{k-1}, z_k$  موقعیت صفحات بالا و پایین این لایه را نسبت به صفحه میانی ورق بیان می کنند. برخی از محققین استفاده از تقریب سختی خمشی کاهش یافته  $[\bar{D}]$  را توصیه نمودند. در این تقریب، اثر کوپل های  $B_{ij}$  بصورت ضمنی با کاهش ماتریس سختی خمشی به صورت زیر در نظر گرفته می شود:

$$(16) \quad [\bar{D}] = [D] - [B][A]^{-1}[B]$$

با قرار دادن رابطه (۱۶) در رابطه (۱۴)، معادلات کمانش ورق به صورت زیر بدست می آید:

$$(17) \quad \bar{D}_{11} W, xxxx + 4\bar{D}_{16} W, xxyy + 2(\bar{D}_{12} + 2\bar{D}_{66}) W, xxyy + 4\bar{D}_{26} W, xyyy + \bar{D}_{22} W, yyyy + N_x W, xx + 2N_{xy} W, xy + N_y W, yy = 0$$

$$N_x = N_0 \left(1 - 6\frac{x}{a} + 6\frac{x^2}{a^2}\right) \quad (24)$$

که در آن  $N_0$  نیروی منتهجه در دو لبه ورق است

$$N_x = -\frac{4N_0y}{b} \left(1 - \frac{y}{b}\right) \quad (25)$$

$N_0$  نیروی منتهجه در مرکز عرضی ورق است  
 $(y = \frac{b}{2})$

#### ۴- بحث بر روی شکل ها

مشخصات ورق کامپوزیتی از جنس گرافیت- اپوکسی در جدول (۱) آمده است.

جدول (۱) خصوصیات ورق گرافیت- اپوکسی مورد مطالعه

$E_{11}$	$1.41 \text{ e}11 \left(\frac{N}{m^2}\right)$
$E_{22}$	$9.65 \text{ e}11 \left(\frac{N}{m^2}\right)$
$E_{33}$	$9.65 \text{ e}11 \left(\frac{N}{m^2}\right)$
$\nu_{12}$	0.26
$\nu_{13}$	0
$\nu_{23}$	0.26
$G_{12}$	$4.07 \text{ e}11 \left(\frac{N}{m^2}\right)$
$G_{13}$	$4.07 \text{ e}11 \left(\frac{N}{m^2}\right)$
$G_{23}$	$4.07 \text{ e}11 \left(\frac{N}{m^2}\right)$

نمودار (۱)، ضریب بی بعد نیروی کمانشی ورق ارتوتروپیک عام ( $NP=3$ ) مستطیلی از جنس گرافیت- اپوکسی و با نسبت ابعادی  $\beta=2$  با تکیه گاه ساده را تحت بارگذاری های جانبی با توزیع خطی گوناگون ( $r=1$ ) (c) ؛  $r=0$  (b) ؛  $r=-0.5$  (a) بر حسب زاویه قرارگیری الیاف به روش عددی GDQ نشان می دهد. ورقی رابه ابعاد  $a, b$  (مطابق شکل (۱)) که تحت نیروی فشاری متغیری قرار دارد و در آن نیرو به طور خطی تغییر می کند، در نظر گرفته، اگر مقدار

نیرو در  $X = \frac{x}{a} = 0$  برابر  $N_{\min}$  و در  $X = \frac{x}{a} = 1$  برابر با

- شرط تکیه گاهی گیر دار از چهار طرف (cccc)

$$x = 0, a \Rightarrow W_{ij} = 0, A_{ik}^{(1)} W_{kj} = 0 \quad (21)$$

$$i = 1, n_x, \quad j = 1, \dots, n_y$$

$$y = 0, b \Rightarrow W_{ij} = 0, B_{im}^{(1)} W_{im} = 0 \quad (22)$$

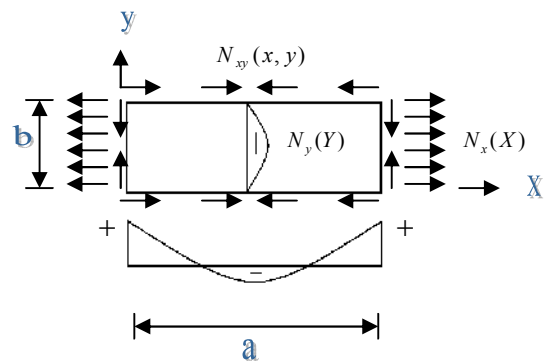
$$i = 1, \dots, n_x, \quad j = 1, n_y$$

با اعمال شرایط مرزی، تعدادی از معادلات (۱۸) حذف و ساده می شوند. سپس از ترکیب معادلات باقی مانده و شرایط مرزی، می توان به یک دستگاه معادلات با مقادیر ویژه به صورت زیر دست یافت [۱۸]:

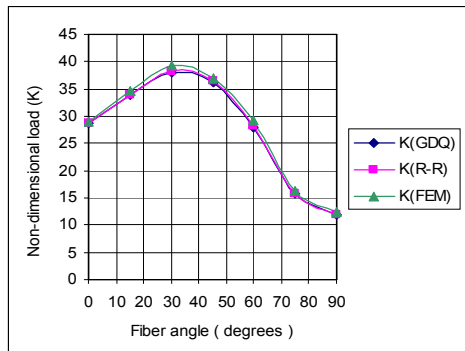
$$!! \begin{bmatrix} [S_{bb}] & [S_{bd}] \\ [S_{db}] & [S_{dd}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\Delta_b\} \\ \{\Delta_d\} \end{Bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ [B_{ab}] & [B_{ad}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\Delta_b\} \\ \{\Delta_d\} \end{Bmatrix} !!! \quad \text{çè!}$$

$\lambda = \frac{P_{cr} \cdot a^2}{E_{22} \cdot t^3}$  زیر نویس  $d, b$  به ترتیب نشان دهنده نقاط و نواحی مرزی و داخلی می باشند. بردارهای  $\{\Delta_d\}, \{\Delta_b\}$  بردارهای مربوط به خیزهای نقاط مرزی و داخلی می باشند.  $\lambda$  نیز بار کمانش غیر ابعادی است.

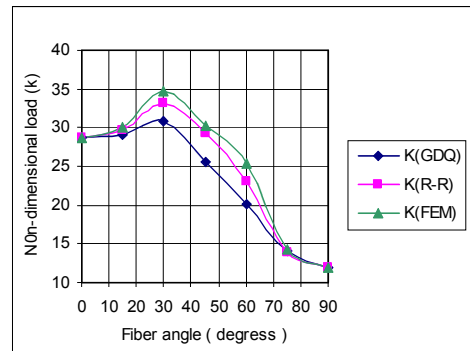
با حل مسئله مقدار ویژه، مقادیر ویژه ( $\lambda_i$  ها) و بردارهای ویژه ( $\Delta_i$  ها) بدست می آید. برای بررسی صحت نتایج، نتایج حاصل از سایر مراجع معتبر از جمله حل رابلی- ریتز [۱۹] و نیز حل اجزای محدود مسئله به کمک نرم افزار ANSYS 8.0 گزارش شده است. نتایج گزارش شده برای انواع ورق های مرکب و برای بارگذاری های یکنواخت تک محوری و دو محوری، خطی و سهمی شکل متغیر در راستای  $x$  و  $y$  بدست آمده است. بارگذاری های سهمی شکل از روابط زیر پیروی می کنند [۱۹]:



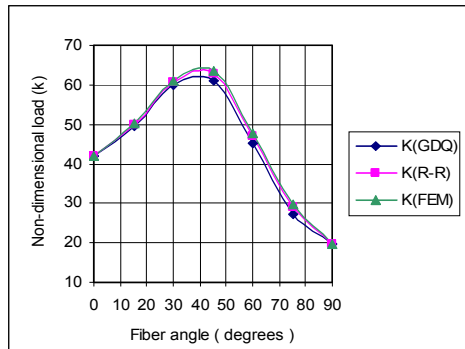
شکل (۱) ورق ارتوتروپ تحت نیروی جانبی سهمی شکل متغیر



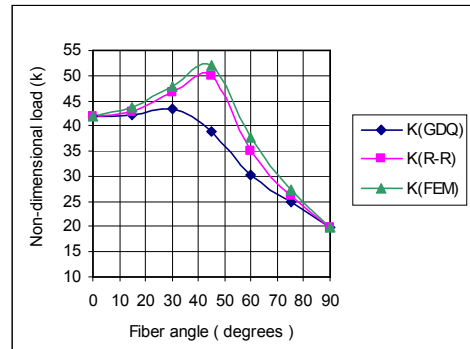
(a)



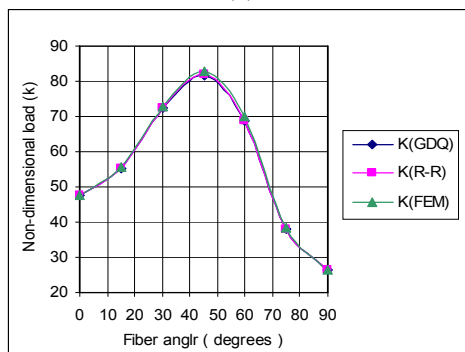
(a)



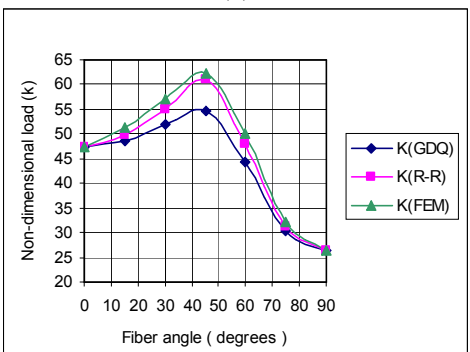
(b)



(b)



(c)



(c)

شکل (۲) کماتش ورق ارتوتروپیک ویژه مستطیلی بانسبت ابعادی  $\beta = 2$  با تکیه گاه ساده تحت بارگذاری های جانبی با توزیع خطی گوناگون: (a)  $r = -0.5$ ; (b)  $r = 0$ ; (c)  $r = 1$

شکل (۱) کماتش ورق ارتوتروپیک عام مستطیلی بانسبت ابعادی  $\beta = 2$  با تکیه گاه ساده تحت بارگذاری های جانبی با توزیع خطی گوناگون: (a)  $r = -0.5$ ; (b)  $r = 0$ ; (c)  $r = 1$

!!

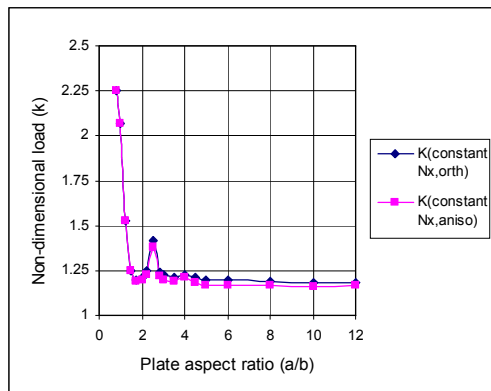
$$r = \frac{N_{\min}}{N_{\max}}, \quad r \text{ باشد، گرادیان تراکم } r$$

بیشتر است. این تفاوت محسوس به علت صفر بودن مؤلفه های غیر ایزوتروپ  $D_{16}$  و  $D_{26}$  ورق ارتوتروپیک ویژه است، حال آن که برای ورق ارتوتروپیک عام این مؤلفه ها غیر صفر خواهند بود.

شکل (۲) ضریب بی بعد نیروی کماتشی ورق ارتوتروپیک ویژه  $(NP = \infty)$  مستطیلی از جنس گرافیت-اپوکسی، با نسبت ابعادی  $\beta = 2$  را تحت بارگذاری جانبی با توزیع خطی گوناگون (a)  $r = -0.5$ ; (b)  $r = 0$ ; (c)  $r = 1$  با

با افزایش  $r$  تحت شرایط یکسان، ضریب نیروی کماتشی نیز افزایش می یابد. چنانکه برای  $r = 1$ ، حداکثر ضریب نیروی کماتشی گزارش شده است. به عبارت دیگر با نزدیک شدن به شرایط بارگذاری یکنواخت، ضریب نیروی کماتشی نیز افزایش می یابد. قابل توجه است که ضریب نیروی کماتشی به دست آمده برای ورق ارتوتروپیک ویژه به طور محسوس از نتایج حاصل شده برای ورق ارتوتروپیک عام متناظر با آن

کمانش برای ورق غیر ایزوتروپیک است (این اختلاف در حدود ۱۲٪ است). نکته قابل توجه حساسیت کم ضریب نیروی کمانشی برای  $\beta > 3$  می باشد. به نحوی که با افزایش ضریب نسبت شکل ظاهری ورق پس از  $\beta = 3$  تأثیر قابل ملاحظه‌ای در ضریب نیروی کمانش نخواهد داشت، به طوری که تا ضریب شکل ظاهری  $\beta = 12$  ضریب نیروی کمانشی تقریباً ثابت است.



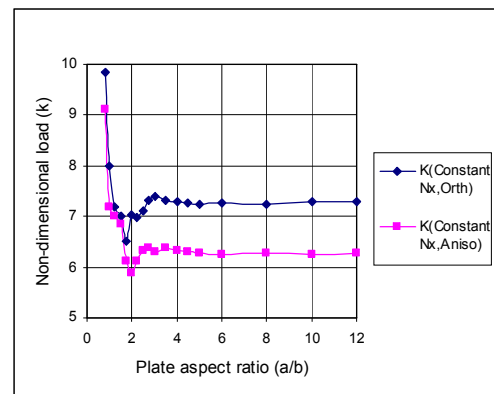
شکل (۴) کمانش ورق ارتوتروپیک و غیر ایزوتروپیک مستطیلی با تکیه گاه ساده تحت بار گذاری تک محوری به روش GDQ

شکل (۴) مقایسه کمانش ورق ارتوتروپیک و غیر ایزوتروپیک ۳ لایه مستطیلی از جنس گرافیت-اپوکسی را با تکیه گاه ساده تحت بار گذاری فشاری تک محوری یکنواخت بر حسب شکل ظاهری ورق به روش عددی GDQ نشان می دهد.

مطابق شکل، رفتار کمانشی هر دو نوع ورق تحت شرایط یکسان بار گذاری و تکیه گاهی، کاملاً یکسان است، با این تفاوت که ضریب نیروی کمانش ورق ارتوتروپیک کمتر از ۳٪ از ضریب نیروی کمانشی ورق غیر ایزوتروپیک بیشتر است. روند ضریب نیروی کمانشی برای هر دو نوع شرایط تکیه گاهی تحت شرایط بار گذاری یکسان روندی مشابه است، با این تفاوت که تحت شرایط تکیه گاهی گیردار ضریب نیروی کمانشی نسبت به تکیه گاه ساده بالاتر است.

شکل (۵) مقایسه کمانش ورق ارتوتروپیک مستطیلی ۳ لایه برای جنس های مختلف مواد مرکب با تکیه گاه گیردار را تحت بار دو محوری فشاری یکنواخت بر حسب زاویه قرار گیری الیاف به روش عددی GDQ نشان می دهد.

تکیه گاه ساده بر حسب زاویه قرار گیری الیاف به روش عددی GDQ نشان می دهد. با مشاهده شکل مشخص خواهد شد که روند تغییرات ضریب نیروی کمانشی بر حسب زاویه قرار گیری الیاف برای بار گذاری های جانبی با توزیع خطی مختلف تقریباً مشابه است. همان گونه که مشخص می باشد در این جا نیز مانند ورق ارتوتروپیک عام با افزایش گرادیان تراکم تحت شرایط یکسان، ضریب نیروی کمانشی افزایش می یابد. به نحوی که برای  $\tau = 1$ ، بیشترین ضریب نیروی کمانشی گزارش شده است. همچنین از مقایسه سه شکل a و b و c مشاهده می شود که حساسیت ضریب نیروی کمانشی نسبت به زاویه قرار گیری الیاف با افزایش گرادیان تراکم، افزایش می یابد. به نحوی که برای  $\tau = -0.5$  کمترین حساسیت نسبت به زاویه جهت گیری الیاف مشاهده می شود، در حالی که در  $\tau = 1$  این حساسیت حداکثر است.



شکل (۳) کمانش ورق ارتوتروپیک و غیر ایزوتروپیک مستطیلی با تکیه گاه گیردار تحت بار تک محوری یکنواخت به روش GDQ!!

!!

شکل (۳) مقایسه کمانش ورق ارتوتروپیک و غیر ایزوتروپیک ۳ لایه مستطیلی از جنس گرافیت-اپوکسی را با تکیه گاه گیردار تحت بار گذاری فشاری تک محوری یکنواخت بر حسب شکل ظاهری ورق به روش عددی GDQ نشان می دهد. این مقایسه به منظور نشان دادن تفاوت رفتار کمانشی ورق ارتوتروپیک و غیر ایزوتروپیک برای تکیه گاه گیردار می باشد. شکل نشان می دهد که رفتار کمانشی هر دو نوع ورق تحت شرایط یکسان بار گذاری و تکیه گاهی، کاملاً مشابه است، با این تفاوت که ضریب نیروی کمانشی برای ورق ارتوتروپیک بیشتر از ضریب نیروی

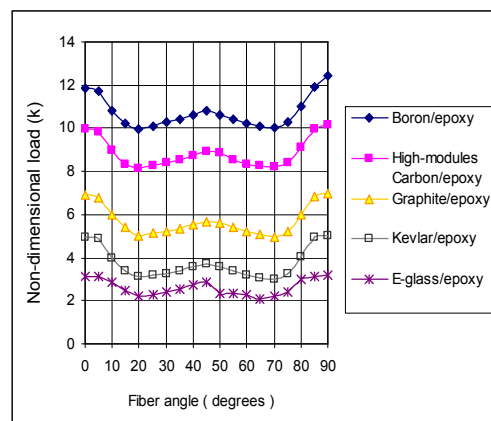
شکل متغیر در راستای  $y$  و تک محوری فشاری یکنواخت مشابه هم می‌باشند و فقط از لحاظ کمی دارای اختلاف هستند. این اختلاف حداکثر ۱۲٪ می‌باشد. این مطلب بیان‌گر آن است که می‌توان روند ضریب نیروی کمانش برای ورق ارتوتروپیک با بارگذاری سهمی شکل متغیر در راستای  $y$  را با توجه به رفتار همان ورق تحت شرایط بارگذاری یکنواخت پیش‌بینی کرد. در این شکل با افزایش ضریب شکل ظاهری ورق برای هر زاویه خاص، ضریب نیروی کمانش افزایش می‌یابد. به عنوان مثال برای زاویه ۴۵ درجه، ضریب نیروی کمانش برای  $\beta = 1$ ، بزرگتر از ضریب نیروی کمانش برای  $\beta = 2$  و آن نیز بزرگتر از ضریب نیروی کمانش برای  $\beta = 5$  است.

جدول (۲) مقایسه ضریب نیروی کمانش ورق ارتوتروپیک مستطیلی با تکیه گاه ساده و نسبت ابعادی  $\beta = 2$  تحت بارگذاری های سهمی شکل متغیر در راستای طولی و عرضی به دو روش GDQ و R-R

$\beta$	$N_x(x)$			$N_y(y)$		
	GDQ	R-R	Error	GDQ	R-R	Error
0.75	0.951	0.962	1.14%	2.548	2.591	1.66%
1	0.876	0.889	1.46%	1.752	1.778	1.96%
2	0.761	0.778	2.18%	1.446	1.489	2.89%
3	1.114	1.139	2.19%	1.379	1.431	3.63%
4	1.613	1.639	1.58%	1.355	1.397	3.01%
5	2.211	2.246	1.56%	1.339	1.388	3.53%

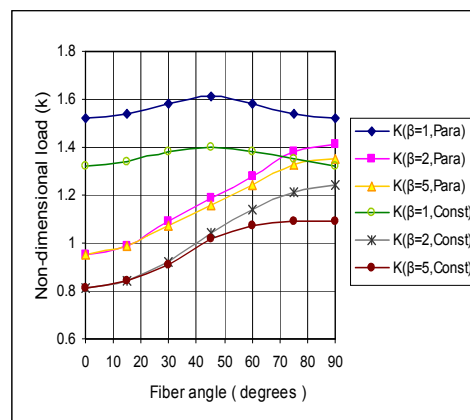
همانطور که از جدول (۲) مشخص است نتایج ضریب نیروی کمانش ورق ارتوتروپیک مستطیلی با تکیه گاه ساده و نسبت ابعادی  $\beta = 2$  تحت بارگذاری های سهمی شکل متغیر در راستای طولی و عرضی به دو روش GDQ و R-R با هم هماهنگی بسیار خوبی دارند و حداکثر خطای دو روش در حدود ۳٪ می‌باشد. این مطلب نیز دقت بالای الگوریتم روش مربعات ديفرانسیلی تعمیم یافته را نشان می‌دهد.

شکل (۷)، مقایسه ای بر کمانش ورق ارتوتروپیک عام ( $NP = 3$ ) مستطیلی از جنس گرافیت-اپوکسی را با تکیه گاه ساده تحت بارگذاری سهمی شکل متغیر در راستای عرضی و تک محوری فشاری یکنواخت بر حسب شکل های ظاهری گوناگون بر زاویه قرارگیری الیاف به روش GDQ نشان می‌دهد. حسب زاویه قرارگیری الیاف تحت دو نوع بارگذاری سهمی



شکل (۵) کمانش ورق ارتوتروپیک مستطیلی با تکیه گاه گیردار تحت بار دو محوری فشاری یکنواخت برای مواد مرکب مختلف به روش GDQ

این مقایسه به منظور نشان دادن تأثیر نوع مواد مرکب بر ضریب نیروی کمانشی صورت گرفته است. از مقایسه خواص این مواد با شکل های رسم شده نتیجه می‌شود که با افزایش  $E_{11}$ ، مقدار ضریب نیروی کمانشی تحت شرایط بارگذاری و تکیه گاهی یکسان افزایش می‌یابد.

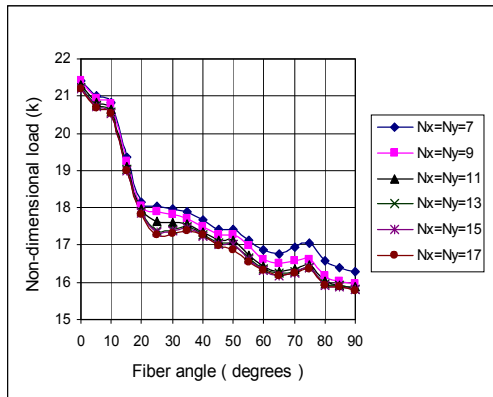


شکل (۶) کمانش ورق ارتوتروپیک مستطیلی با تکیه گاه ساده تحت بارهای سهمی شکل متغیر در راستای  $y$  و تک محوری فشاری یکنواخت

شکل (۶) مقایسه کمانش ورق ارتوتروپیک عام ( $NP = 3$ ) مستطیلی از جنس گرافیت-اپوکسی را با تکیه گاه ساده تحت بارگذاری سهمی شکل متغیر در راستای  $y$  و تک محوری فشاری یکنواخت برای شکل های ظاهری گوناگون بر حسب زاویه جهت گیری الیاف به روش GDQ نشان می‌دهد. مشاهده می‌شود که روند تغییرات ضریب نیروی کمانشی بر حسب زاویه قرارگیری الیاف تحت دو نوع بارگذاری سهمی



صورت گرفته است. از شکل مشخص است که روند تغییرات ضریب نیروی کمانشی برای انواع مختلف



شکل (۸) کمانش ورق لمینیت تک لایه مستطیلی با تکیه گاه گیردار تحت بار دو محوری فشاری یکنواخت به روش GDQ در تقسیم بندی های گوناگون

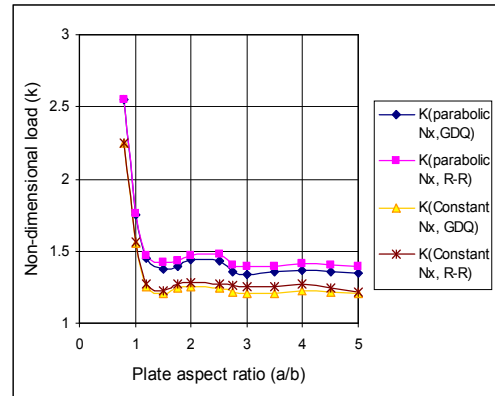
تقسیم بندی ها، روندی کاملاً نزولی است و همواره با افزایش زاویه قرارگیری الیاف، ضریب نیروی کمانشی کاهش می یابد. مشخص است که روند ضریب نیروی کمانشی برای تقسیم بندی های محوری گوناگون، مشابه است و به مقدار بسیار کمی از لحاظ کمی متفاوت می باشند. هر چند که این اختلاف ناچیز است، ولی مشاهده می شود که با کاهش تعداد تقسیم بندی های محوری، ضریب نیروی کمانشی اندکی بالاتر می رود.

#### ۵- نتیجه گیری نهایی

همان گونه که ملاحظه گردید روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم یافته، یک روش کارآمد و قابل اطمینان برای تحلیل کمانش را ارائه می دهد. این روش توانایی تخمین بسیار خوب استحکام کمانشی سازه را داراست.

- این مقاله نشان می دهد که روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم یافته قابلیت تعیین تمامی بارهای کمانشی را دارد. همچنین دقت این روش با افزایش تعداد نقاط دقت یا افزایش درجه چند جمله ای زیاد می شود. اثر تعداد نقاط دقت در همگرایی بار کمانش بررسی گردید و نشان داده شد که با نقاط دقت ۱۷ ۱۷ می توان نتایج دقیقی را

نکته قابل توجه مشابهت روند ضریب نیروی کمانش برای دو.



شکل (۷) کمانش ورق ارتوتروپیک مستطیلی با تکیه گاه ساده تحت دو نوع بار گذاری سهمی شکل متغیر در راستای عرضی و تک محوری فشاری یکنواخت

نوع بارگذاری سهمی شکل متغیر در راستای  $y$  و تک محوری فشاری یکنواخت است. این مشابهت فقط در روند کیفی شکل مشاهده می شود و از لحاظ کمی دارای اختلاف است. به طوری که مشاهده می شود ضریب نیروی کمانش ورق ارتوتروپیک عام مستطیلی با تکیه گاه ساده تحت بارگذاری تک محوری فشاری یکنواخت در حدود ۸۸٪ ضریب نیروی کمانشی همان ورق با شرایط یکسان هندسی و تکیه گاهی تحت بارگذاری سهمی شکل متغیر در راستای  $y$  است. بنابراین نتیجه می شود که می توان نیروی کمانشی ورق ارتوتروپیک عام با تکیه گاه ساده تحت بار سهمی شکل متغیر در راستای  $y$  را با یک ضریب  $1/15$  در نیروی کمانشی همان ورق با شرایط یکسان هندسی و تکیه گاهی تحت بارگذاری تک محوری یکنواخت محاسبه کرد.

شکل (۸) کمانش ورق لمینیت تک لایه مستطیلی از جنس گرافیت- اپوکسی با نسبت ابعادی  $\beta = 2$  را با تکیه گاه گیردار تحت بارگذاری فشاری دو محوری یکنواخت بر حسب زاویه قرارگیری الیاف برای تقسیم بندی های گوناگون  $N_x$  و  $N_y$  به روش عددی GDQ نشان می دهد.

این مقایسه به منظور نشان دادن تأثیر تعداد تقسیم بندی های محوری (تعداد نقاط دقت) بر روی ضریب نیروی کمانشی

در راستای  $y$ ، در حدود ۱۲٪ بیشتر از بار گذاری تک محوری یکنواخت است). این اختلاف مقداری با روش رایلی - ریتز نیز کاملاً تأیید می شود و این بدان معنی است که می توان رفتار نیروی کمانشی ورق ارتوتروپیک تحت بار گذاری سهمی شکل متغیر در راستای  $y$  را از طریق ضرب یک ضریب  $1/15$  در نیروی کمانشی ورق ارتوتروپیک تحت بار گذاری تک محوری یکنواخت پیش بینی نمود.

- از شکل ها مشخص است که روند تغییرات ضریب نیروی کمانش هم بر حسب شکل ظاهری ورق و هم بر حسب زاویه جهت گیری الیاف برای هر دو روش GDQ و رایلی - ریتز مشابه است. به نحوی که می توان گفت که نتایج روش رایلی - ریتز تا حد قابل قبولی نتایج روش GDQ را تأیید و سطح بالای دقت نتایج را نشان می دهد.

- در این تحقیق مقایسه ای بین بار کمانشی در مواد مرکب مختلف انجام شده و شامل بار گذاری فشاری در صفحه با توزیع غیر یکنواخت دو محوره در اعمال نیروی های فشاری در صفحه است که از این نظر کار جدیدی می باشد.

#### مراجع

- [1] Perry, C . L., " The bending of thin elliptical plates", Int Proc, Symp, Applied Mathematics, (1950), Vol. III, Elasticity, McGraw-Hill, New York, pp. 131-139
- [2] Nash, W . A., and Cooly, I . D., "Large deflection of a clamped elliptical plate subjected to Uniform pressure, Journal of Applied Mechanics, (1959), Vol. pp. 26, pp. 291-293.
- [3] Timoshenko, S . P ., and Gere, J . M., "Theory of elastic stability", (1961), 2<sup>nd</sup> , Ed, McGraw-Hill, New York, N . Y.
- [4] Bellman, R. E., and Casti, J. "Differential quadrature and long-term integration." J. Math. Anal. And applications, Vol. 34, 235-238. (1971)
- [5] Mingle, J . O., "Computational consideration in nonlinear diffusion", Int. J. Numrn. Methods Eng (1973), 7: 103-116.

استخراج نمود. در کاربرد این روش استفاده از حداقل چنین تعداد نقاطی توصیه می گردد.

- همان گونه که نشان داده شد ضریب نیروی کمانش برای ورق ارتوتروپیک با تکیه گاه گیردار در شرایط یکسان بار گذاری، به مراتب بالاتر از تکیه گاه ساده است.

- رفتار ورق های ارتوتروپیک عام تا حدودی از حالت ارتوتروپیک ویژه نظیرش متفاوت می باشد. به طوری که ملاحظه می شود ضریب نیروی کمانش برای ورق ارتوتروپیک ویژه بالاتر از ضریب نیروی کمانش برای ورق ارتوتروپیک عام نظیرش است. اهمیت مولفه های غیر ایزوتروپ (مولفه های  $D_{16}$ ,  $D_{26}$ ) در طراحی لایه های کامپوزیتی جدارنازک به خوبی تأیید شده است، به طوری که حذف آن ها منجر به یک تخمین بدون ملاحظه ای شده که به تبع آن اختلاف ایجاد خواهد کرد.

- تفاوت نسبی بین حالت ارتوتروپیک ویژه و عام به گرادیان تراکم بستگی دارد و با تغییر گرادیان تراکم از 1 به 0.5-، این تفاوت کاهش می یابد.

- ضریب نیروی کمانش ورق ارتوتروپیک و غیر ایزوتروپیک بر حسب شکل ظاهری ورق (نسبت طول به عرض) از لحاظ کیفی روندی کاملاً مشابهت دارند و به لحاظ مقداری نیز ضریب کمانشی برای ورق ارتوتروپیک کمی بیشتر از ورق غیر ایزوتروپیک می باشد. این اختلاف در تکیه گاه های ساده کمتر از ۴٪ و در تکیه گاه گیر دار حدود ۱۲٪ می باشد.

- شکل ضریب نیروی کمانشی ورق ارتوتروپیک برای جنس های مختلف کامپوزیت تحت شرایط یکسان، روندی مشابه با هم دارند و به لحاظ مقداری نیز با افزایش  $E_{11}$ ، ضریب نیروی کمانش افزایش می یابد.

- ضریب نیروی کمانش ورق ارتوتروپیک بر حسب نسبت طول به عرض برای دو نوع بار گذاری سهمی شکل متغیر در راستای  $x$  و بار گذاری یکنواخت تک محوری کاملاً متفاوت است، این در حالی است که برای دو نوع بار گذاری سهمی شکل متغیر در راستای  $y$  و بار گذاری یکنواخت تک محوری، ضریب نیروی کمانشی روند کاملاً مشابهی دارد و فقط یک اختلاف مقداری در حدود ۱۲٪ بین آن ها وجود دارد (ضریب نیروی کمانشی برای بار گذاری متغیر

- method in fluids, (1995), Vol.21, pp. 723-733.
- [16] Shu, C., Du, H, "A generalized approach for implementing general boundary condition in the GDQ free vibration analysis of plates", International journal of solid and structure, Vol. 34(7), pp. 837-846, copyright (1997), with permission from Elsevier science.
- [17] Shu, C ., and Richards, B . E., "Application of generalized differential quadrature to solve 2-dimensional incompressible viscous Navier-Stokes equation", International journal for numerical methods in fluids, Vol. 15(7), pp. 791-798, copyright (1992), with permission from John Wiley and Sons, Ltd.
- [18] Darvizeh, M. and Darvizeh, A. and Ansari, R. and Sharma, C. B. "Buckling analysis of generally laminated composite plates (generalized differential quadrature method versus Rayleigh-Ritz), composite structures, 63 (2004), 69-74.
- [19] Hu H., Badir A., Abatan A., Buckling behavior of a graphite/epoxy composite plate under parabolic variation of axial loads, Int. Journal of Mechanical Sciences, (2003) ,Vol. 45, pp. 1135-1147.
- [6] Bellman, R. E., Kashef, B.G., and Casti, J. "Differential quadrature: a technique for the aroid solution for nonlinear partial differential equations." J. Computational Phys., Vol. 10, 45-52. (1972).
- [7] Bellman, R. E., and Kashef, B.G., "Solution of the partial differential equation of Hodgkins-Huxley model using differential quadrature", Math. Anal. Biosci., 19, 1-8(1974).
- [8] Civan, F., and Sliepcevich C. M. "Application of differential quadrature to transport processes", J. M ath. Anal. Appl., 93, 206-221. (1983).
- [9] Striz, A . G ., Chen, W . L., Bert C . W., "Free vibration of plates by the accuracy quadrature element method", Journal of sound and Vibration, Vol. 202(5), pp. 698-702, copyright (1997), with permission from Academic press.
- [10] Striz, A . G ., Wang, X., and Bert C . W., "Harmonic differential quadrature method and Application to analysis of structural components", (1995), Acta. Mech. III. 84-94.
- [11] Sherbourne, A . N., and Pandey, M . D, Differential quadrature method in the buckling analysis of beams and composite plates, Comput ans structures, (1991), 40: 903-913.
- [12] Shu, C ., Free vibration analysis of composite laminated conical shells, Journal of sound and vibration , Vol. 194(4), pp. 587-604, copyright (1996), with permission from academic press.
- [13] Shu, C ., and Chew, Y . T., and Khoo, B . C., and Yeo, K . S., "Application GDQ scheme to simulate incompressible viscous flows around complex geometries", Mechanics Research communication, (1995), Vol.22(4), pp. 319-325.
- [14] Shu, C ., and Chew, Y . T., and Khoo, B . C., and Yeo, K . S., "Solution of three-dimensional boundary layer equation by global methods of generalized differential-integral quadrature", International journal numerical methods for heat and flow, (1996), Vol. 6(2), pp. 61-75.
- [15] Shu, C ., and Richards, B . E., "Generalized differential and integral quadrature and their application to solve boundary -layer equation", International journal for numerical