بررسی کمانش صفحات دایرهای و حلقوی ارتوتروپیک با ضخامت متغیر به روش ریلی- ریتز بهینه شده

آرش گل شاه

فاطمه فرهت نيا'`*

* نويسنده مسئول: farhatnia@iaukhsh.ac.ir

چکیدہ

در تحقیق حاضر کمانش متقارن صفحات دایرهای و حلقوی ارتوتروپ با ضخامت متغیر مورد بررسی قرار گرفته است. ضخامت این صفحات در راستای شعاعی به طور خطی تغییر می کند و بارگذاری به روی آنها به صورت فشاری یکنواخت در لبه خارجی است. مرز خارجی صفحات دارای تکیه گاههای گیردار، ساده و الاستیک مقاوم در برابر چرخش بوده و لبه داخلی به صورت آزاد میباشد. در تحلیل کمانش این صفحات، روش ریلی- ریتز بهینه شده به کار گرفته شده است. در این روش از توابع چند جملهای که بر اساس تغییر شکل استاتیک صفحات دایرهای ارتوتروپ در خمش میباشند و ارضاء کننده شرایط مرزی هستند، استفاده شده است. در روش فوق از یک پارامتر نمایی در تابع تغییر مکان استفاده میشود و مقادیر ویژه به دست آمده از تحلیل، نسبت به این پارامتر حداقل است. مزیت این روش علاوه بر سادگی نسبی آن نسبت به سایر روشها، این است که کل الگوریتم حل مسئله قابل برنامه نویسی میباشد. در این تحقیق اثر تغییرات شعاع، ضخامت، نوع تکیه گاه، نسبت مدول یانگ در دو جهت شعاعی و محیطی و نسبت شعاع خارجی به داخلی در صفحات حلقوی بر روی ثابت کمانش (بار بحرانی کمانش بی بعد شده) بررسی شده است. نتایج بدست آمده مؤید آن است که در صفحات حلقوی بر روی ثابت کمانش (بار بحرانی مین میران می می به میزان شیاع علی مین افزایش میاع خارجی به داخلی در صفحات حلقوی بر روی ثابت کمانش (بار بحرانی

واژدهای کلیدی: کمانش، روش ریلی- ریتز بهینه شده، ضخامت متغیر، صفحه ارتوتروپیک

۱ – استادیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد خمینی شهر

۲ - دانشجو کارشناسی ارشد مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد خمینی شهر

۱- مقدمه

صفحات دایرهای و حلقوی ارتوتروپ همواره مورد توجه طراحان سیستمهای مکانیکی، سازهای، عمران، دریا و هوافضا بودهاند که از جمله کاربردهای این صفحات میتوان به دریچههای مخازن تحت فشار، صفحات دایرهای تقویت شده توسط تقویت کنندههای شعاعی و محیطی، صفحات ساخته شده از مواد کامپوزیتی، سرپوش سیلندرها، صفحات نگه دارنده در بدنه زیر دریاییها، صفحات جدا کننده در هواپیماها، لنزهای نوری، ترانسدیوسرهای آکوستیکی و بعضی اجزای مورد استفاده در موشکها اشاره کرد.

مسئله يايداري الاستيك صفحات دايرهاي ارتوتروييك برای اولین بار توسط وینوسکی مورد مطالعه قرار گرفت. وی با استفاده از توابع بسل نتایج عددی برای کمانش این صفحات ارائه نمود[۱]. منک و همکارانش تاثیر تغییر ضخامت را بر روی کمانش یک صفحه ارتوتروپ مستطیل شکل بررسی کردند[۲]. لارا و همکارانش بار بحرانی کمانش را برای یک صفحه حلقوی ایزتروپیک با ضخامت ثابت به روش ریلی– ریتز بهینه شده به دست آوردند، صفحه مورد بررسی هم در لبه خارجی و هم در لبه داخلی خود تحت تکیه گاههای مختلف قرار داشت[۳]. کیانکو کمانش یک ورق دایرهای و حلقوی ایزتروپیک با ضخامت متغیر را که بخشی از بدنه یک زیر دریایی بود، مورد تحلیل قرار داد. این ورق در لبه داخلی آزاد فرض شده و در لبه خارجی به صورت گیردار و مقاوم در برابر چرخش بود. بار هیدرواستاتیک به طور هم راستا با محور بر آن اثر میکرد. ضخامت ورق تابع نمایی از شعاع آن بود. وی این ورق را با روش ریلی- ریتز بهینه شده مورد تحلیل قرار داد [۴].

برمس و کاسل نیز یک نرخ تغییرضخامت بهینه برای کمانش یک ورق ایزوتروپ ارائه کردند. ورق مورد بررسی آنها در لبه داخلی و خارجی تحت بار یکنواخت هم راستا با محور قرار گرفته و تغییر ضخامت نیز تابعی از شعاع بود. معادلات کمانش آنها از نوع خطی بوده و با یک روش عددی برای حالتهایی که لبههای داخلی و خارجی می توانند گیردار یا

ساده باشند، حل شد[۵]. گوتیرز و دیگر همکارانش کمانش و ارتعاشات یک صفحه ایزوتروپ با ضخامت متغیر را بر روی تکیهگاه الاستیک با استفاده از روش ریلی- ریتز مورد بررسی قرار دادند و نتایج قابل قبولی به دست آوردند [۶]. بین لیانگ و همکارانش با استفاده از روش ریلی- ریتز فرکانسهای طبیعی یک صفحه دایرهای و حلقوی ارتوتروپیک با ضخامت متغیررا به دست آوردند و با روش المان محدود مورد مقایسه قرار دادند که تطابق خوبی بین دو روش مشاهده گردید[۷].

در تحقیق حاضر کمانش صفحات دایرهای و حلقوی ارتوتروب با ضخامت متغير خطي تحت اثر فشار يكنواخت بررسی میشود. صفحات حلقوی شامل صفحات F-C (لبه داخلی آزاد و لبه خارجی گیردار) یا صفحات حلقوی گیردار، صفحات F-S (لبه داخلی آزاد و لبه خارجی تکیه گاه ساده) یا صفحات حلقوی با تکیه گاه ساده و صفحات حلقوی با تکیهگاه داخلی آزاد و تکیه گاه خارجی مقاوم الاستیک در برابر چرخش میباشند. صفحات دایرهای شامل صفحات با شرایط مرزی گیردار، ساده و مقاوم الاستیک در برابر چرخش میباشند. با توجه به معادله دیفرانسیل کمانش یک صفحه دایرهای یا حلقوی ارتوتروپ با ضخامت متغیر، عملاً حل این معادله به صورت تحلیلی و دقیق غیر ممکن است و به ناچار باید از یکی از روشهای عددی یا انرژی برای حل این مسئله کمانش استفاده کرد. در تحقیق حاضر برای تحلیل کمانش صفحات از روش ریلی- ریتز بهینه شده استفاده شده است. نتایج این روش نسبت به روش ریلی–ریتز از دقت بالاتری برخوردار است. برای بهینه کردن روش ریلی– ریتز، از یک پارامتر نمایی در تابع تقریبی در نظر گرفته شده، استفاده می شود. مقادیر ویژه به دست آمده (ثابت كمانش) نسبت به این پارامتر نمایی حداقل میشود. سپس مقایسهای بین نتایج به دست آمده از این روش با نتایجی که از حل المان محدود که به کمک نرم افزار ANSYS به دست آمده، صورت مي گيرد.

در این تحلیل اثر تغییرات ضخامت، شرایط مرزی، نسبت مدول یانگ در دو جهت شعاعی و محیطی، تغییر نسبت شعاع داخلی به خارجی بر روی ثابت کمانش بررسی شده است.

۲- انرژی کرنشی صفحه انرژی کرنشی ذخیره شده در یک جسم الاستیک برای حالت کلی تنش در دستگاههای مختصات دکارتی با عبارت زیر داده می شود[۸]:

 $U = \frac{1}{\tau} \iiint_{\nu} (\sigma_r \varepsilon_r + \sigma_\theta \varepsilon_\theta + \tau_{r\theta} \gamma_{r\theta}) \tag{1}$

با استفاده از روابط تنش– کرنش و کرنش– تغییر مکان در مواد ارتوتروپ و جایگذاری تنش بر حسب کرنش، و با توجه به برقراری رابطه , $E_r v_ heta = E_ heta v_r$ در مواد ارتوتروپ خواهیم داشت:

$$U = \frac{1}{r} \iiint_{v} \frac{z^{r}}{1 - \upsilon_{r} \upsilon_{\theta}} \left[E_{r} \left(\frac{d^{r} w}{dr^{r}} \right)^{r} + r E_{r} \upsilon_{\theta} \left(\frac{d^{r} w}{dr^{r}} \right) \left(\frac{dw}{dr} \right) + E_{\theta} \left(\frac{dw}{dr} \right)^{r} \right] r \, dr \, d\theta \, dz$$

$$(Y)$$

صفحه شکل(۱) دارای ضخامت متغیر (*h*(*r) و* شعاع داخلی و خارجی به ترتیب *a,b* باشد. با انتگرالگیری در امتداد ضخامت خواهیم داشت:



$$U = \pi \int_{a}^{b} D_{r}(r) \left[\left(\frac{d^{\mathsf{T}} w}{dr^{\mathsf{T}}} \right)^{\mathsf{T}} + \mathfrak{r} \upsilon_{\theta} \left(\frac{d^{\mathsf{T}} w}{dr^{\mathsf{T}}} \right) \left(\frac{dw}{rdr} \right) + \beta^{\mathsf{T}} \left(\frac{dw}{rdr} \right)^{\mathsf{T}} \right] rdr \quad (\mathsf{T})$$

$$D_{r}(r) = \frac{E_{r}h(r)^{r}}{\mathrm{vr}(\mathrm{v}-\upsilon_{r}\upsilon_{\theta})}$$
(*)

$$D_{\theta}(r) = \frac{E_{\theta}h(r)}{\mathrm{i}\tau(\mathrm{i}-\upsilon_{r}\upsilon_{\theta})}$$

همچنين:

$$\frac{E_{\theta}}{E_r} = \frac{D_{\theta}(r)}{D_r(r)} = \beta^{\mathsf{Y}} \tag{(b)}$$

در تحقیق حاضر به دلیل آنکه صفحه تنها تحت بار شعاعی قرار دارد، می توان نوشت:

$$T = \pi \int_{b}^{a} N_r \left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^{\mathsf{Y}} r dr \tag{V}$$

۳- روش ریلی- ریتز بهینه شده

روش ریلی- ریتز یک روش حد بالاست و مقادیر ویژه بهدست آمده توسط این روش از مقدار واقعی بیشتر است. بنابراین اگر بتوان این مقدار ویژه را بهینه کرد، به طوری که به مقدار واقعی نزدیک تر شود، نتایج به دست آمده از دقت بالاتری برخوردار خواهد بود. بهطور کلی اگر تابع معرف کمیت مجهول در روش ریلی- ریتز به صورت ترکیب خطی از توابع شکل (*m*(x) به صورت زیر باشد:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{N} c_n \varphi_n(x) \tag{A}$$

که در آن C_n ضرایب نامعین هستند. میتوان با استفاده از ایده بهینه سازی این تابع را به صورت زیر نوشت:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{N} c_n \varphi_n(x,k) \tag{4}$$

که در آن k پارامتر نمایی بهینه سازی است. با حداقل کردن تابع انرژی پتانسیل J در روش ریلی – ریتز، دستگاهی از معادلات بر حسب ضرایب ثابت C_n به دست می آید که با صفر قرار دادن دترمینان ماتریس ضرایب این می آید که با صفر قرار دادن دترمینان ماتریس ضرایب ویژه می آید که با صفر قرار دادن در مینان ماتریس ضرایب این λ_i بر حسب k به دست می آید. (۱۰)

با حداقل کردن λ_i نسبت به k یعنی $\circ = \frac{\partial \lambda_i}{\partial k}$ می توان مقدار ویژه بهینه شده را به دست آورد.

٤- بررسی هندسه مسئله

ابتدا صفحات حلقوی و دایرهای با ضخامت متغیر خطی مورد بررسی قرار می گیرد. شعاع داخلی صفحات(b) و شعاع خارجی صفحات (a) است. تغییرات ضخامت (h(r) صفحه با استفاده از رابطه زیر نشان داده می شود:

$$h(r) = h_{\circ} \left(1 + \gamma \left(\frac{r}{a}\right)^n \right) \tag{11}$$

که در رابطه فوق _o h ضخامت در مرکز صفحه، n نشان دهنده نوع تغییرات ضخامت، اعم از ثابت (o=n) و متغیر خطی (n=۱)، میباشد که کمیتی مثبت است و γ نیز پارامتری بی بعد میباشد که دارای هر دو علامت مثبت و منفی است این پارامترها در صفحات حلقوی به صورت زیر تعریف می شود:

$$h_{\circ} = \frac{h_b}{1 + \gamma \left(\frac{b}{a}\right)^n} = \frac{h_b}{1 + \gamma (r_b)^n}$$
(117)

همچنین این پارامترها در صفحات دایرهای بهصورت زیر تعریف میشود:

$$\gamma = \frac{h_a}{h_o} - 1 \tag{117}$$

٥- كمانش صفحات حلقوي

تحلیل کمانش صفحات حلقوی با استفاده از روش ریلی- ریتز مستلزم حداقل شدن انرژی پتانسیل J(w) است. این انرژی برابر است با: J(w) = U - T (1۴)

در صفحات با تکیه گاه گیردار و ساده بهصورت زیر است: تربیب م

$$U = \pi \int_{b}^{a} D_{r}(r) \left(\frac{d^{\mathsf{T}} w}{dr^{\mathsf{T}}} \right)^{\mathsf{T}} + \mathfrak{T} \upsilon_{\theta} D_{r}(r) \left(\frac{d^{\mathsf{T}} w}{dr^{\mathsf{T}}} \right) \left(\frac{dw}{rdr} \right) + D_{\theta}(r) \left(\frac{dw}{rdr} \right)^{\mathsf{T}} rdr$$

$$(10)$$

$$+ \mathfrak{T} \upsilon_{\theta} D_{r}(r) \left(\frac{d^{\mathsf{T}} w}{dr^{\mathsf{T}}} \right) \left(\frac{dw}{rdr} \right) + D_{\theta}(r) \left(\frac{dw}{rdr} \right)^{\mathsf{T}} rdr$$

$$(10)$$

$$= \mathfrak{T} = \mathcal{T}$$

$$= \mathfrak{T}$$

$$T = \pi \int_{b} N_{r}(r) \left(\frac{dw}{dr}\right) r dr \tag{19}$$

کار انجام شده (N_r(r برای یک صفحه حلقوی ارتوتروپ با استفاده از رابطه زیر محاسبه می شود [۹]:

$$N_{r}(r) = \frac{-N \cdot a^{\beta+1}}{a^{\gamma\beta} - b^{\gamma\beta}} \left[r^{\beta-1} - \frac{b^{\gamma\beta}}{r^{\beta+1}} \right]$$
(1V)

برای سهولت انجام کار برای رابطه *J(w)* از تبدیلات بی بعد ساز استفاده می شود. در نتیجه:

$$\frac{a^{\Upsilon}}{\pi D_{\circ}} J(w) = \int_{r_{b}}^{r} \left\{ g(R) \left[\left(\frac{d^{\Upsilon} w}{dR^{\Upsilon}} \right)^{\Upsilon} + \gamma \upsilon_{\theta} \left(\frac{d^{\Upsilon} w}{dR^{\Upsilon}} \right) \left(\frac{dw}{RdR} \right) + \beta^{\Upsilon} \left(\frac{dw}{RdR} \right)^{\Upsilon} \right]$$
(1A)

 $-\frac{\lambda}{1-r_b^{\gamma\beta}} \left[R^{\beta-1} - \frac{r_b^{\gamma\beta}}{R^{\beta+1}} \right] \left(\frac{dw}{dR} \right)^{\gamma} \left\{ RdR \\ \text{c. aslebe in } \mathcal{K}, y \text{ by } \mathcal{K}, y \text{ bold } \mathcal$

$$\lambda = \frac{N_{\circ}a^{\prime}}{D_{\circ}} \tag{19}$$

$$g(R) = (1 + \gamma R)^{\mathsf{T}} \tag{(Y.)}$$

$$w(R) = \sum_{i=1}^{m} c_i w_i(R) \tag{Y1}$$

$$W_i(R)$$
 با توجه به تغییر مکان استاتیکی صفحات دایرهای $W_i(R)$ شکل ارتوتروپ به صورت زیر در نظر گرفته می شود [۷]: $W_i(R) = (a_i R^k + b_i R^{1+\beta} + 1)R^{i-1}$ (۲۲)

$$\begin{cases} w_i(1) = \circ \\ \frac{dw_i}{dR}(1) = \circ \end{cases}$$
(YY)

با قرار دادن رابطه (۲۳) در رابطه (۲۴) خواهیم داشت:

$$a_{i} = \frac{-\gamma - \beta}{\gamma + \beta - k}$$

$$b_{i} = \frac{k}{\gamma + \beta - k}$$
(YF)

$$\begin{cases} w_i(1) = \circ \\ \frac{d^{\mathsf{T}} w_i}{dR^{\mathsf{T}}}(1) + \upsilon_{\theta} \frac{dw_i}{dR}(1) = \circ \end{cases}$$
(Y\Delta)

www.SID.ir

اعمال شرایط فوق برای رابطه (۲۳) ضرایب ثابت b_i,a_i بدست می آید که عبارتند از:

$$a_{i} = \frac{(1+\beta)(-1+\gamma i+\beta+\upsilon_{\theta})}{(-1-\beta+k)(-1+\gamma i+k+\beta+\upsilon_{\theta})}$$

$$k(-1+\gamma i+k+\upsilon_{\theta})$$

$$(19)$$

$$b_i = -\frac{k(-1 + 1l + k + U_{\theta})}{(-1 - \beta + k)(-7 + 7i + k + \beta + U_{\theta})}$$

$$\mu_i = -\frac{k(-1 - \beta + k)(-7 + 7i + k + \beta + U_{\theta})}{(-1 - \beta + k)(-7 + 7i + k + \beta + U_{\theta})}$$

برابر چرخش شرایط مرزی زیر حاکم است:
$$(w_i(1) = 0)$$

$$\begin{cases} \varphi \frac{dw_i}{dR}(1) = -g(R) \left[\frac{d^{\mathsf{T}} w_i}{dR^{\mathsf{T}}}(1) + \upsilon_{\theta} \frac{dw_i}{dR}(1) \right] \end{cases}$$
(YV)

که در آن
$$arphi$$
 به صورت زیر تعریف می شود:

$$\varphi = \frac{ak_{\varphi}}{D_{\circ}} \tag{YA}$$

که
$$k_{arphi}$$
 سختی فنر پیچشی میباشد.

با قرار دادن رابطه (۲۳) در معادله (۲۸) خواهیم داشت:

$$a_{i} = -\frac{Q_{i} - L_{i}}{S_{i} - L_{i}}$$
 , $b_{i} = -\frac{S_{i} - Q_{i}}{S_{i} - L_{i}}$ (Y9)

$$\begin{split} S_i &= (k+i-1)[1+g(R)\varphi(-1+i+k+\upsilon_{\theta})] \\ L_i &= (i+\beta)[1+g(R)\varphi(-1+i+\beta+\upsilon_{\theta})] \\ Q_i &= (i-1)[1+g(R)\varphi(-1+i+\upsilon_{\theta})] \end{split} \tag{Υ.}$$

حداقل نمودن (J(w مستلزم آن است که:

$$\frac{\partial J(w)}{\partial c_i} = \cdot \qquad \qquad i = 1, \forall, \forall, \dots, m \qquad (\forall 1)$$

$$|A - \lambda B| = \cdot$$
 (۳۲)
که در آن $B = [b_{ij}]_{m \times m}$ و $A = [a_{ij}]_{m \times m}$ و

$$\begin{split} a_{ij} &= \int_{r_{b}}^{r} g(R) \Biggl[\Biggl(\frac{d^{\mathsf{v}} w_{i}}{dR^{\mathsf{v}}} \Biggr) \Biggl(\frac{d^{\mathsf{v}} w_{j}}{dR^{\mathsf{v}}} \Biggr) + {}^{\mathsf{v}} \upsilon_{\theta} \Biggl(\frac{d^{\mathsf{v}} w_{i}}{dR^{\mathsf{v}}} \Biggr) \Biggl(\frac{dw_{j}}{RdR} \Biggr) \\ &+ \beta^{\mathsf{v}} \Biggl(\frac{dw_{i}}{dR} \Biggr) \Biggl(\frac{dw_{j}}{RdR} \Biggr) \Biggr] R dR \end{split}$$

$$b_{ij} &= \frac{\lambda}{1 - r_{b}^{\mathsf{v}\beta}} \Biggl[R^{\beta - 1} - \frac{r_{b}^{\mathsf{v}\beta}}{R^{\beta + 1}} \Biggr]_{r_{b}}^{\mathsf{v}} \Biggl(\frac{dw_{i}}{dR} \Biggr) \Biggl(\frac{dw_{j}}{dR} \Biggr) R dR$$

$$(\Upsilon \mathcal{V})$$

برای صفحه حلقوی با تکیه گاه الاستیک مقاوم در برابر چرخش
به _{ij} یک ترم اضافه شده و به صورت زیر نوشته می شود:

$$a_{ij} = \int_{r_b}^{r} g(R) \Biggl[\Biggl(\frac{d^{\mathsf{v}} w_i}{dR^{\mathsf{v}}} \Biggr) \Biggl(\frac{d^{\mathsf{v}} w_j}{dR^{\mathsf{v}}} \Biggr) + \mathsf{v}_{\mathcal{O}} \Biggl(\frac{d^{\mathsf{v}} w_i}{dR^{\mathsf{v}}} \Biggr) \Biggr(\frac{dw_j}{RdR} \Biggr) \Biggr] + \beta^{\mathsf{v}} \Biggl(\frac{dw_i}{RdR} \Biggr) \Biggr] RdR + \varphi \Biggl(\frac{dw_i}{dR} \Biggr) \Biggl(\frac{dw_j}{dR} \Biggr) \Biggr]$$

۲- کمانش صفحات دایرهای

روابط مربوط به کمانش صفحات حلقوی با قرار دادن مقدار شعاع داخلی صفحات(b) برابر با صفر، قابل استفاده برای صفحات دایرهای است. البته با این تفاوت که تغییر مکان (R)w صفحات دایرهای با صفحات حلقوی متفاوت است و به دنبال آن ضرایب _i,a نیز متفاوت است.

در صفحات دایرهای با توجه به تغییر مکان استاتیکی صفحه تابع تغییر مکان (w(R به شکل زیر در نظر گرفته می شود:

$$w(R) = \sum_{i=1}^{m} c_i w_i(R) \tag{75}$$

$$w_i(R) = \left(a_i R^k + b_i R^{1+\beta} + 1\right) R^{1(i-1)}$$
(**T**?)

ضرایب ثابت ،b_i,a نیز با اعمال شرایط مرزی صفحه در توابع (R) به صورت زیر بهدست میآید: ۱) برای صفحه دایر های با تکیه گاه گیر دار:

$$a_i = \frac{-\gamma - \beta}{\gamma + \beta - k} \tag{(YV)}$$

$$b_i = \frac{k}{1 + \beta - k}$$

۲) برای صفحه دایرهای با تکیه گاه ساده:

$$a_{i} = \frac{(1+\beta)(-\forall +\forall i+\beta+\upsilon_{\theta})}{(-1-\beta+k)(-\forall +\forall i+k+\beta+\upsilon_{\theta})}$$

$$k(-\forall +\forall i+k+\beta)$$
(YA)

$$b_{i} = -\frac{k(-1+k+\theta_{\theta})}{(-1-\beta+k)(-1+k+k+\beta+\nu_{\theta})}$$
(*) برای صفحات دایره ای با تکیه گاه الاستیک مقاوم در برابر چرخش:

$$\begin{split} S_{i} &= (k + \forall i - \forall) \left[+ g(R) K_{\phi}(-\forall + \forall i + k + \upsilon_{\theta}) \right] \\ L_{i} &= (\forall i + \beta - \vee) \left[+ g(R) K_{\phi}(-\forall + \forall i + \beta + \upsilon_{\theta}) \right] \\ Q_{i} &= \forall (i - \vee) \left[+ g(R) K_{\phi}(-\forall + \forall i + \upsilon_{\theta}) \right] \end{split}$$
(F•)

www.SID.ir

ثابت کمانش برای مقادیر مختلف 7 , γ , η نشان داده شده است. همانطور که در این جدول مشاهده می شود با افزایش مقدار β مقدار ثابت کمانش κ افزایش می یابد. $I = \beta$ وضعیتی است که در آن صفحه ایزوتروپیک است. همانطور که در جدول مشاهده می شود، به کار گیری یک صفحه ارتوتروپیک به جای صفحه ایزوتروپیک با مشخصات هندسی یکسان سفحه موجب افزایش بار کمانش می گردد. در واقع مقاومت آن در برابر کمانش افزایش می یابد. علاوه بر این با افزایش مقدار پارامتر γ از π , تا π . ثابت کمانش افزایش می یابد. همچنین در این جدول مشاهده می شود که با افزایش مقدار r_b

جدول(۱) ثابت کمانش صفحات حلقوی ارتوتروپ گیردار

J., ' ,									
BT	γ		r _b						
β		٠/١	۰/۲	۰/٣	۰/۴	•/۵			
	۳/۰_	V/90990	٧/•٨۴۴٣	٧/١٥٦٢١	N1140V	1./9.99			
	-•/١	11/9082	11/1019	11/9011	14/4420	19/4777			
١	•	14/.1.1	18/9848	14/94.4	12/2222	۲۵/۷۶۰۲			
	۰/۱	19/9.0	19/4199	11/4666	17/7101	***/2914			
	۰/۳	17/2917	17/70	**/1991	50/1119	۵۰/۸۱۰۹			
	۳/ ۰۰	17/1977	11/2929	11/8181	11/9190	18/9919			
	-•/\	19/4944	14/4190	11/7.15	۲./.۸.۲	24/2.91			
۲	•	**/***	15/.111	17/1417	10/0.71	*1/22**			
	۰/۱	۲۸/۶۶۵۷	TY/AVA9	۲۸/۳۳۳۳	r1/A.v	4./2224			
	۰/۳	89/9298	W9/1214	4.//122	44/5.01	£1/VDK1			
	۳/ ۰۰	17/771	۲۳/۲۳۵	**/***	22/1615	***			
	-•/\	49/771A	89/101	WA/4929	٣٨/•١٣٨	*9/97*4			
۵	•	49/1751	49/.900	41/5.01	44/1914	51/5.9			
	۰/۱	9./9480	f./894A	59/8647	29/22.1	ff/ffa1			
	۰/۳	AV/A934	AY/40A4	19/9494	AA/44A9	94/2982			
	۳/ ۰ ـ	89/8.01	89/1292	89/8090	TA/V421	rv/9.2r			
	-•/١	£9/88V9	99/0290	99/•294	91/1991	fv/v.9r			
۱.	•	AA/8899	AA/88.8	AA/1414	AV/1111	AY/+111			
	۰/۱	11./910	11./298	111/111	1.9/1.5	1.9/91			
	۰/٣	199/201	194/14	199/140	198/149	190/9.1			

با ضخامت متغبر

ب) صفحات حلقوی ارتوتروپ با تکیه گاه ساده

در جدول (۲) نتایج ثابت کمانش صفحات حلقوی ارتوتروپ ضخامت متغیر با تکیه گاه ساده نسبت به پارامترهای *r*_b,γ,β^۲ نشان داده شده است. همانطور که در این جدول مشاهده میشود در صفحات با تکیه گاه ساده همچون صفحات گیردار با افزایش مقدار *β*، ثابت کمانش افزایش می یابد و در این نوع صفحات نیز می توان با استفاده از صفحات ارتوتروپیک به جای صفحات ایزوتروپیک، مقاومت صفحه را در برابر کمانش افزایش داد. $A = \left[a_{ij}\right]_{m \times m} \text{ if } G R \text{ be set of } A \in B$ $A = \left[a_{ij}\right]_{m \times m} \text{ or } A \text{ constraints of } A \text{ constraints$

$$b_{ij} = \lambda R^{\beta-1} \int_{\cdot} \left(\frac{dw_i}{dR} \right) \left(\frac{dw_j}{dR} \right) R dR$$

برای صفحه دایر های با تکیه گاه الاستیک مقاوم در برابر
چر خش _{ii} به صورت زیر بیان می شود:

$$\begin{aligned} u_{ij} &= \int_{0}^{V} g(R) \Biggl[\Biggl(\frac{d^{\mathsf{Y}} w_i}{dR^{\mathsf{Y}}} \Biggr) \Biggl(\frac{d^{\mathsf{Y}} w_j}{dR^{\mathsf{Y}}} \Biggr) \\ &+ \mathsf{Y} \upsilon_{\theta} \Biggl(\frac{d^{\mathsf{Y}} w_i}{dR^{\mathsf{Y}}} \Biggr) \Biggl(\frac{dw_j}{RdR} \Biggr) + \beta^{\mathsf{Y}} \Biggl(\frac{dw_i}{RdR} \Biggr) \Biggl(\frac{dw_i}{RdR} \Biggr) \Biggr] \qquad (\mathsf{FY}) \\ &+ \phi \Biggl(\frac{dw_i(\mathsf{V})}{dW_i} \Biggr) \Biggl(\frac{dw_j(\mathsf{V})}{dW_j} \Biggr) \end{aligned}$$

 $\int \frac{1}{RdR} \left(\frac{1}{RdR} \right) \left(\frac{1}{RdR} \right)^{+} \mu^{+}$ از صفر قرار دادن دترمینان فوق، رابطهای بر حسب k بهدست می آید که با استفاده از آن می توان λ را برحسب k محاسبه نمود. با حداقل نمودن λ نسبت به k، بار بحرانی کمانش تعیین می گردد.

۷- نتایج عددی

درتحقیق حاضر، به منظور بهدست آوردن ضریب نیروی کمانشی یک برنامه کامپیوتری در نرمافزار و MATHEMATICA به نحوی که تأثیر پارامترهایی مانند تغییرات شعاع، ضخامت، نوع تکیه گاه، نسبت مدول یانگ در دو جهت شعاعی و محیطی و در آن لحاظ شده باشد، نوشته شده است. در تحلیلهای انجام شده تعداد جملات در نظر گرفته شده برای تابع تغییر مکان شده تعداد جملات در نظر گرفته شده برای تابع تغییر مکان شده تعداد جملات در نظر گرفته شده برای تابع تفییر مکان نظر گرفته شده است. در این تحلیلها مقدار g برابر ۲، در نظر گرفته شده است. در حالیلهای انجام شده ثابت کمانش Λ مد نظر بوده که اثر پارامترهای مختلف بر روی آن بررسی شده است و مقدار آن در حالات مختلف به دست آمده است.

الف) صفحات حلقوی ار توتروپ گیردار

جدول (۲) ثابت کمانش صفحات حلقوی ارتوتروپ با تکیه گاه ساده و آن، λ بیشتر شد. در این حالت نیز با افزایش β ، λ افزایش مى يابد.

β۲	γ	r _b					
		٠/١	۰/۲	۰/٣	۰/۴	۰/۵	
	-•/٣	۲/۳۸л۶۴	1/.1141	1/44281	1/40191	1/11101	
	-•/١	5/4.415	1/99419	۲/۵۹.۶۷	۲/۲۵۹۹۶	۲/۰۰۳۰۷	
١	•	4149412	5/22992	57/1.999	1/19899	۲/۵۰۰۲۳	
	۰/۱	4/94479	4/14289	87/89.44	٣/٣٣٩٨٥	5/	
	۰/۳	9/18984	0/09180	0/1.49	4/4747	4/4242	
	-٠/٣	5/142	5/4.444	5/50009	۲/۹۵۸۰۳	1/24214	
	-٠/١	0/91409	۵/۶۷۵۳۷	۵/۲۲۸۲	4/1.219	4/11440	
۲	•	٧/١۴٨٩٢	Ŷ/ <u></u>	۶/۳۶۳۳۸	۵/۷۹۸۲۸	۵/۲۸۳۵۵	
	۰/۱	NJ2825N	A/Y • AVT	V/90519	٧/٠۵٢۴۵	9/01991	
	۰/۳	11/1.47	11/5495	1./7791	1./.988	9/00.4	
	۳/ ۰ ـ	V/4490T	V/4790T	v/*999v	9/95771	9/50199	
	-٠/١	17/4.59	17/8984	17/1011	11/9410	1./4101	
۵	•	10/0149	10/494	10/1199	14/9184	18/9908	
	۰/۱	19/1.74	19/.598	14/441	14/+019	14/•241	
	۰/۳	۲٧/٨٠٨٨	**/*19*	11/1110	19/4919	Y0/YAYY	
	-•/٣	17/2915	17/4297	11/1777	17/29.4	17/1799	
	-٠/١	**/***	**/**99	YY/TAY?	22/16.1	11/4154	
١.	•	۲۸/۶۸۰۲	11/9759	۲۸/۶۱۳۴	24/2129	14/4004	
	٠/١	50/9949	50/9951	۳۵/۸۸۹	50/0101	84/2118	
	۰/۳	54/.1.4	54/	۵۳/۸۹۵۷	54/2922	21/.111	

ضخامت متغير

در جدول (۲) اثر پارامتر ضخامت γ بر روی λ نشان داده شده است که مانند صفحات گیردار در این صفحات نیز با افزایش مقدار ۲ از ۲۰۰۳ تا ۲۰، ۶ افزایش پیدا می کند. همچنین در این جدول اثر تغییرات rb بر روی גنشان داده شده است همانطور که در جدول مشاهده می شود با افزایش مقدار ، ۲، کاهش مى يابد. پس در صفحات حلقوى با تكيه گاه ساده با افزايش نسبت شعاع داخلي به شعاع خارجي (rb)، مقاومت صفحه در برابر کمانش کاهش می یابد. در حالی که در صفحات گیردار افزایش ابتدا باعث كاهش و سيس افزايش λ مي گردد. r_b

ج) صفحات حلقوى ارتوتروپ با تكيه گاه الاستيك مقاوم در برابر چرخش

در جداول (٣) تا (۵) نتایج تحلیل کمانش صفحات حلقوى ارتوتروپ با تكيه گاه الاستيك مقاوم در برابر جر خش برای سه مقدار مختلف β ($\sqrt{0}, \sqrt{1}, 1$) نشان داده شده است. در این جداول اثر یارامترهای $\varphi, \beta, r_h, \gamma$ (که نشان دهنده سختی چرخشی است) بررسی شده است. همچون دو حالت قبل (صفحات گیردار و تکیه گاه ساده) در این نوع صفحات نیز با افزایش مقدار γ از ۲۰٫۳ - تا ۲٫۳ یا به عبارت ديگر با افزايش نسبت ضخامت صفحه در لبه خارجي نسبت به لبه داخلي آن، مقدار ثابت كمانش λ و يا مقاومت صفحه در برابر كمانش افزایش می یابد. در دو حالت قبل یارامتر β اثر مستقیم بر روی مقدار λ داشت یعنی با افزایش β

جدول (۳) ثابت کمانش صفحات حلقوی ارتوتروب با تکیه گاه مقاوم در

	V /	-						
v	0		r_b					
r	Ψ	•/\	۰/۲	۰/٣	•//۴	• / Δ		
	•	7/89257	۲/• ۸۶۵۳	1/46616	1/40247	1/22180		
-•/٣	۱۰	٧/•٢٠٧٣	9/47188	9/4821	Y/14844	٨/٩٢٧٧٣		
	8	V/YA۴A۵	۷/۱۷۲۵۳	۷/۲۰۸۷۶	٨/٢١٣٨١	۱۰/۶۲۸۳		
	•	۳/۴۱۸۵	۳/۰۰۹۷۶	۲/۵۹۵۹۸	2/26111	۲/۰۰۳۵۷		
-•/1	۱۰	1./1949	9/97109	9/97809	11/898	14/4475		
	∞	11/1987	11/5940	17/0788	14/0129	19/7574		
	•	F/•1FF	37/20574	۳/۱۱۳۸۴	7/19077	۲/۵۰۰۹۷		
•	۱۰	11/7077	11/1744	۱۱/۸۰۷۴	18/9984	14/8848		
	∞	14/18.9	۱۳/۷۵۵۳	10/0781	۱۸/۵۹۳۳	۲۵/۷۸۵۴		
	•	4/99907	4/19914	۳/۶۹۹۵	٣/٣۴٣٠٩	۳/۰۷۷۳۹		
•/1	۱۰	17/7776	17/9888	17/777	10/9747	۲۰/۱۷۳۶		
	∞	18/4.41	19/5784	۱۸/۵۰۱۸	۲۳/۳۵۷	۳۲/۹۱۸۶		
	•	۶/۱۷۱۲۵	۵/۵۸۸۱	۵/۰۹۳۲	4/12419	4/46144		
٠/٣	١٠	19/9484	19/4149	17/8211	1176/07	۲۵/۵۵۸۶		
	8	22/8	۲۳/۰۸۰۱	78/9.97	۳۵/۱۴۸۸	5.146.6		

همچنین با بررسی اثر پارامتر ¢ در این جداول مشاهد می شود که در حالتی که φ به سمت صفر میل می کند، صفحه رفتار یک صفحه با تکیه گاه ساده را از خود نشان می دهد و می توان آن را حالت تکیه گاه ساده در نظر گرفت. همچنین در حالتی که φ به سمت بی نهایت میل می کند، صفحه رفتار یک صفحه گیردار را از خود نشان میده. همانطور که در این جداول ملاحظه می شود با افزایش مقدار بر روی λ نشان داده شده است. در حالت $\varphi = \varphi$ با r_b افزایش $r_{\mathcal{H}}$ مقدار λ کاهش و در حالتی که $\circ\langle \varphi$ باشد. با افزایش rb ابتدا که کاهش (تقریبا تا rb=۰/۳) و سیس افزایش پیدا می کند.

جدول(۴) ثابت کمانش صفحات حلقوی ارتوتروپ با تکیه گاه مقاوم در $(\beta = \sqrt{\tau})$ برابر چرخش و با ضخامت متغیر خطی ($\beta = \sqrt{\tau}$

γ	φ	r_b					
	,	·/\	۲ ،	۳/،	۰/۴	۰/۵	
	•	8/19494	۳/۲۰۲۷۸	8/84967	7/929.4	2/24214	
-•/٣	۱.	11/1494	1./1499	1./1800	1./2421	11/49.4	
	∞	17/8991	11/9717	11/479	11/1.11	18/4884	
	•	0/98.44	0/91419	0/1271	4/11.40	4/11931	
-•/١	۱.	19/8980	10/94.9	10/0514	۱۶/۰۸۳۱	18/8689	
	×	19/9	19/0780	۱۸/۲۶۰۹	۲۰/۱۶۸	14/0001	
	•	Y/19849	÷/٨٨٢٩١	۶/۳۷۸۳۱	۵/۸۰۵۳۷	0/17612	
•	۱.	19/175	18/9498	18/5998	19/1.14	17/.188	
	∞	17/9771	17/1797	1191/7917	10/0111	81/2266	
	•	1/22111	۸/۲۳۹۵۸	٧/٦٧۴٠٩	٧/.977١	9/07808	
·/١	۱.	11/.119	11/19.5	51/1745	22/6.12	20/929	
	∞	۲۸/۷۶۲	۲۸/۰۶۲	۲۸/۴۷۳۶	51/226	4./311	
	•	11/1749	11/4791	1./7776	1./1.44	9/09818	
۰/۳	۱.	۲۷/۸۳۰۵	11/17/11	20/2779	14941	81/281	
	∞	4./.198	89/88.8	4./9404	41/2129	91/1.98	

جدول (۵) ثابت کمانش صفحات حلقوی ارتوتروپ با تکیه گاه مقاوم در

	$p = \sqrt{a}$	ير من (ن ر : +	- ,, ,,,	г.		
γ	φ	r_b						
/		·/\	۲/،	۳/ ۰	۰/۴	۰/۵		
	•	٧/44971	V/47V9T	٧/٣٠١٨٨	9/95714	6/8221		
-•/٣	۱.	۲۰/۳۹۸	1./2121	19/97.7	19/8004	19/8099		
	8	17/2797	17/4977	۲۳/۰۷۳۶	17/299	11/2120		
	•	17/4177	17/8628	17/19.7	11/9449	۱۰/۸۳		
-•/١	۱.	51/5292	51/1110	۳۰/۸۹۹۷	8./1829	5./2112		
	×	89/8981	89/8991	31/1409	**/*1**	4./1.8		
	•	10/07.4	10/499	10/1110	14/9949	18/1.461		
•	۱.	84/189	34/.941	89/904	89/.01	89/9881		
	8	49/4779	49/5.01	47/211	41/4.1	51/4981		
	•	19/1.79	19/.480	18/464	12/0460	14/.2.9		
·/١	۱.	48/1840	47/.914	42/2171	42/0424	47/1710		
	8 S	Ŷ•/YAA4	9./9184	29/9879	9.1.998	94/A491		
	•	10/117	11/1000	11/1104	19/0.11	۲۵/۳۰۸۳		
۰/۳	۱.	۵۵/۷۷۳۳	20/9711	00/144	54/4142	29/4629		
	00	11/1477	AY/YAA1	11.144	AA/2YAN	۹۸/۰۱		

$ig(eta=\sqrt{a})$ برابر چرخش و با ضخامت متغیر خطی $ig(eta=\sqrt{a})$

د) صفحات دایرهای ارتوتروپ با تکیه گاه الاستیک مقاوم در برابر چرخش

در جدول (۶) اثر پارامترهای *۵٫۲٫β* بر روی ثابت کمانش صفحات دایرهای ارتوتروپ نشان داده شده است.

جدول (۶) ثابت کمانش صفحات دایرهای ارتوتروپ با تکیه گاه مقاوم

الاستیک در برابر چرخش و ضخامت متغیر خطی							
ß	γ		arphi				
ρ	'	٠	١	1.	8		
	-•/٣	1/2.311	4/09191	٧/٣٩٥٩٥	11.9692		
	-٠/٢	٣/•١٣٨٢	۵/۱۳۳۵۸	1/91794	1./. 80		
	-•/١	٣/۵٧٧٢٣	5/2224	1./0777	17/2429		
١	•	4/19779	9/80888	17/1770	14/922		
	۰/۱	4/2011	٧/• ٢٨٨٩	18/1440	17/2019		
	۰/۲	5/98499	٧/٧٦١٢٩	10/0741	۲۰/۲۷۶۳		
	۰/۳	7/4371	1/00914	17/1999	17/47.1		
	-•/٣	۳/۸۸۸۹۱	9/901.9	11/1011	17/344		
	-٠/٢	4/100.4	٧/۶٩۴٧٢	17/789	10/1.11		
	-•/١	0/9007	1/12274	19/4011	19/9908		
۲	•	٧/١٩٨٧٦	۱./.۶۸۷	19/5099	26/.72		
	۰/۱	1/292.1	11/4774	1171/17	۲۳۷۳۲/۸۲		
	۰/۲	1./1000	17/9296	20/0860	**/****		
	۰/٣	11/8829	14/9989	21/9716	4./7.40		
	-•/٣	٧/42.9٣	11/9419	1./6.1	17/7724		
	-٠/٢	9/4294	17/9994	20/9002	۳۰/۷۰۹۶		
۵	-•/١	17/4.04	19/4.01	81/1836	39/328		
	•	10/07.9	19/819	34/.94	49/5.24		
	۰/۱	19/1.90	۲۳/۳۷۹۸	43/1	9./1171		
	۰/۲	17/1954	22/6271	49/7740	۷۳/۶۴		
	۰/۳	11/11.0	۳۲/۰۲۸۳	00/1916	AA/10YY		

ه) صفحات دایردای ارتوتروپ با تکیه گاه گیردار و ساده در شکل(۲) منحنی تغییرات ثابت کمانش صفحات ارتوتروپ گیردار با ضخامت متغیر خطی و در شکل(۳) منحنی تغییرات ثابت کمانش صفحات ارتوتروپ ضخامت متغیر خطی با تکیه گاه ساده برای مقادیر مختلف γ نشان داده

شده است. همانطور که در این شکلها دیده می شود با افزایش β و همچنین با افزایش مقدار γ از ۲۰۰ - تا۲۰ مقدار λ افزایش پیدا می کند. ثابت کمانش صفحات گیردار نسبت به صفحات با تکیه گاه ساده بیشتر است.











شکل (۴) مقایسه ثابت کمانش صفحات دایرهای با تکیه گاههای مختلف برای ۲۰٫۳ = ۷

در شکل (۴) کمانش صفحات دایرهای شکل برا ساس تکیه گاههای ساده، الاستیک و گیردار رسم شده است. همانطور که انتظار می رفت بار بحرانی صفحه با لبههای گیردار به مراتب بیشتر از وضعیت مرزی ورق با تگیه گاه ساده است. در جدول(۷) نتایج ثابت کمانش صفحات دایرهای گیردار ارتوتروپ با ضخامت متغیر خطی حاصل از روش ریلی- ریتز بهینه شده و المان محدود که با استفاده از نرم افزار ANSYS به دست آمده مقایسه شده که مطابقت خوبی را نشان می دهد.

جدول(۷) مقایسه نتایج روش ریلی- ریتز بهینه شده روش المان محدود برای صفحات دایرهای ارتوتروپ با ضخامت متغیر (I نتایج روش ریلی- ریتز بهینه شده ، II نتایج نرم افزار ANSYS)

05		γ						
β		- • /٣	-•/Y	-•/\	•	٠/١	۰/۲	۰/٣
\	Ι	٨/•۵	۱۰/۰۳	17/74	14/882	۲۷/۳۶	۲۰/۲۸	۲۳/۴۳
,	II	Y/A	۹/۸۲۵	17/11	14/882	۱۷/۵۳	۲۰/۶۹	26/10
١/۴	Ι	٩/٨٧	17/48	۱۵/۳۲	18/262	22/1	79/04	۳۰/۲۶
171	Π	٩/٧٢	17/31	۱۵/۲۴	11/041	22/21	26/28	۳۰/۷۵
١/٨	Ι	۱ ۱/۵۶	14/89	۱۸/۲۵	22/228	28/81	۳۱/۵۲	36/16
1/1	Π	۱۱/۵۵	14/84	۱۸/۲۳	22/226	۲۶/۷	۳۱/۶۶	۳۷/۱۱

۸- نتیجه گیری نهایی

در این تحقیق کمانش صفحات حلقوی و دایم های ارتوتروپ با ضخامت متغير خطبي با تکيه گاههاي ساده، گیردار و مقاوم الاستیک در برابر چرخش تحت فسار خارجی یکنواخت بررسی شده است. در تحلیل انجام شده از روش ریلی- ریتز بهینه شده و نرم افزار ANSYS استفاده شده است که در روش ریلی- ریتز بهینه شده از توابع چند جملهای که بر اساس تغییر شکل استاتیک صفحات دایر های و حلقوى ارتوتروپ مىباشد استفاده شده است. در اين روش از یک یارامتر نمایی استفاده می شود که ثابت کمانش نسبت به این پارامتر حداقل می گردد و کمترین ثابت کمانش بحرانی به دست می آید. با توجه به نتایج نشان داده شده در جداول و شکلهای قبل نکات زیر در مورد صفحات دایرهای و حلقوى قابل استخراج است: ا-با افزایش مقدار β مقدار ثابت کمانش (λ) افزایش -۱ مي يابد. با توجه به اين نكته مي توان با انتخاب صفحاتي با رفتار ارتوتروييك، مقاومت آنها را مي توان در برابر كمانش

فهرست علائم

	• •
a	شعاع خارجی صفحه حلقوی، <i>mm</i>
b	شعاع داخلی صفحه حلقوی، <i>mm</i>
h	ضخامت صفحات، <i>mm</i>
Ε	مدول الاستيسيته، $N_{m^{+}}$
E _r	مدول الاستيسيته شعاعي ، <i>N</i> /m
E_{θ}	مدول الاستيسيته مماسي، <i>N</i> /m
N _r	نیروی محوری, N
$N_{\boldsymbol{\theta}}$	N , نیروی مماسی
w	جابجایی مرکز ورق، <i>mm</i>
J	انرژی پتانسیل ورق
h.	ضخامت در مرکز صفحه، <i>mm</i>
rь	نسبت شعاع داخلي به خارجي
k	پارامتر نمایی

علائم يونانى

λ	ثابت كمانش
γ	ضريب ضخامت ورق
U _r	ضريب پواسون شعاعي
$\upsilon_{ heta}$	ضريب پواسون مماسي
$D_{ heta}$	صلبيت خمشي مماسي
D _r	صلبيت خمشي شعاعي
β	پارامتر ارتوتروپ

افزایش داد.

مراجع

- [1] Woinowski-Krieger, S., Buckling stability of circular plates with circular cylindrical Aeolotropy, Ingenieur-Archiv, Vol. ^Y⁷, ¹⁴^Δ^A, pp. ¹³⁴³⁴, ¹⁴^Δ^A, pp.
- [Y] Meink T., Huybrechts S., Ganley J., "The Effect of varying thickness on the buckling of orthotropic plates, J. Composite Materials, Vol. YV, 1999, pp. 1964-1991.
- [^{*}] Laura P.A.A, Gutierrez R.H., Sanzi H.C., Elvira G., buckling of circular, solid and annular plates with an intermediate circular support, *J. Ocean Engineering*, Vol. ^{YV}, ^Y···, pp.^{YF9_VDD}
- [٤] Ciancio P.M, Reyes J.A., Buckling of circular annular plates of continuously variable thickness used as internal bulkheads in submersibles, J. Ocean engineering, Vol. ^r, ^r, ^r, ^r, ^p, ^J^r^r^r</sub>.
- [°] Bostjan B., Kosel F., Thickness optimization of circular annular plates at buckling, *Thin-Walled Structures*, Vol. ^{ΥΥ}, ^Υ··^γ·^γ·^γ-^Δ.
- [7] Gutierrez R.H., Romanlli E., Laura P.A.A., Vibration and elastic stability of thin circular plates with variable profile, *J. Sound and Vibration*, Vol. 192, 1997, 791-799.
- [Y] Liang B., Zhang Sh, Dian-Yun Chen, Natural frequencies of circular annular plates with variable thickness by a new method, *J. Pressure Vessels and Piping*, Vol. A[§], Y···V, Y97-Y9V.
- [A] Timoshenko, S. P., Gere, J. M., Theory of elastic stability, 'nd Ed, McGraw-Hill, New York, 1971.
- [[¶]] Venstel E., Thin plates and shells, Dekker Publication, ^Y···^Y.
- [1] Chuen-Yuan Chia, Nonlinear Analysis of Plates, McGraw-Hill, 194.