

## تغییر مکان استاتیکی تیرهای پیزوالکتریک چندلایه دو سر لولا تحت بارگذاری‌های مختلف

افشین منوچهری فر<sup>۱\*</sup> علیرضا جلیلی<sup>۲</sup>

\* نویسنده مسئول: Manouchehri@iaukhsh.ac.ir

### چکیده

در این مقاله ابتدا معادلات ساختاری پیزوالکتریک‌ها بیان شده و با بکارگیری این معادلات، انرژی داخلی تیر چند لایه پیزوالکتریک محاسبه شده است. سپس با ترکیب اصل حداقل انرژی پتانسیل و روش رایلی-ریتز، رابطه‌ای برای جابه‌جایی تیر پیزوالکتریک دو سر لولا، تحت ممان متمرکز، نیروی متمرکز، بار گسترده و ولتاژ خارجی، به طوریکه شرایط مرزی را ارضا کند حدس زده شده است و ضرایب مجهول با حداقل کردن انرژی پتانسیل به دست آمده است. در ادامه روابط به دست آمده برای تیرهای بای مورف و یونی مورف دو سر لولا ساده شده و بار الکتریکی و همچنین ولتاژ ایجاد شده در آنها در حالت حسگری به دست آمده است. جهت اطمینان از صحت و دقت روابط تحلیلی به دست آمده، نتایج تحلیلی با نتایج نرم‌افزار ANSYS ۱۰ در قالب مثال‌های عددی مقایسه شده است.

**واژه‌های کلیدی:** پیزو الکتریک، تیر چندلایه، معادلات ساختاری، بای مورف، یونی مورف.

۱- استادیار دانشکده مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد خمینی شهر

۲- دانشجوی کارشناسی ارشد مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد خمینی شهر

## ۱- مقدمه

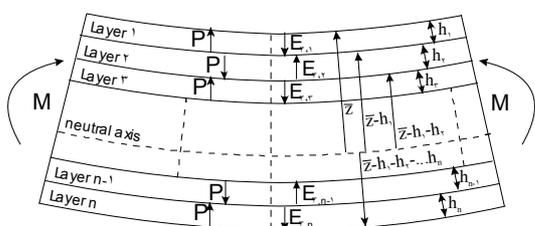
و اصل همیلتون<sup>۴</sup> به بررسی استاتیکی و دینامیکی تیر بای مورف سری و موازی با شرایط مرزی دو سر لولا و تحت بار گسترده و ولتاژ اعمالی پرداخته‌اند. بالز و همکاران [۷] با استفاده از معادلات حاکم بر پیزوالکتریک‌ها و اصل مینیمم انرژی پتانسیل<sup>۵</sup>، تغییر مکان تیر پیزوالکتریک یک سر گیردار را تحت انواع بارگذاری به شکل بسته به دست آورده‌اند.

در مجموع در تحقیقات قبلی تنها به تیرهای دولایه پیزوالکتریک و نوع خاصی از بارگذاری روی آنها پرداخته شده است. همچنین معیاری برای سنجش دقت و صحت روابط به دست آمده ارائه نشده است.

در این مقاله با به کارگیری معادلات ساختاری پیزوالکتریک‌ها، انرژی هر لایه محاسبه شده و انرژی کل از مجموع انرژی تمامی لایه‌ها به دست می‌آید. سپس با ترکیب اصل مینیمم انرژی پتانسیل و روش رایلی-ریتز<sup>۶</sup>، رابطه‌ای برای جابه‌جایی تیر چند لایه پیزوالکتریک دو سر لولا، بطوریکه شرایط مرزی را ارضا کند، حدس زده شده و ضرایب مجهول با مینیمم کردن انرژی پتانسیل به دست می‌آید. معادلات به دست آمده برای تیرهای دو لایه پیزوالکتریک ساده شده و بار الکتریکی و ولتاژ ایجاد شده در آنها در حالت حسگری محاسبه می‌شود. روابط تحلیلی به دست آمده در قالب چند مثال با نتایج نرم‌افزار ANSYS مقایسه می‌شود.

## ۲- فرضیات

در شکل (۱) هندسه تیر چند لایه نشان داده شده است.



شکل (۱). نمایش هندسه تیر چند لایه

پیزوالکتریک‌ها<sup>۱</sup> موادی هستند که وقتی نیروی خارجی بر آنها وارد می‌شود، اتم‌ها و مولکولهای کریستالی آنها قطبی شده و یک میدان دو قطبی را به وجود می‌آورند که می‌توان آن را به ولتاژ الکتریکی تبدیل نمود. به‌طور معکوس اعمال ولتاژ الکتریکی خارجی به آنها باعث تغییر ابعاد هندسی می‌شود. اثر پیزوالکتریک در سال ۱۸۸۰ بوسیله پیر و ژاک کوری کشف شد. در سال ۱۸۸۱ خاصیت معکوس پیزوالکتریک توسط گابریل لیپمن کشف شد [۱].

پرکاربردترین تیرهای پیزوالکتریک، تیرهای یونی مورف<sup>۲</sup> و بای مورف<sup>۳</sup> و تیرسه‌لایه پیزوالکتریک هستند. تیر یونی مورف از یک لایه پیزوالکتریک و یک لایه الاستیک تشکیل شده است. تیر بای مورف از دو لایه پیزوالکتریک تشکیل شده که جهت پلاریزه لایه‌ها می‌تواند یکسان (بای مورف موازی) و یا مخالف هم (بای مورف سری) باشد [۲]. تیر سه‌لایه از یک لایه پیزوالکتریک در مرکز و دو لایه پیزوالکتریک در طرفین تشکیل شده است. پارک و مون [۳] به بررسی استاتیکی تیر پیزوالکتریک بای مورف و یونی مورف با شرایط مرزی یک سر گیردار و دو سر لولا تحت بار متمرکز و ولتاژ خارجی پرداخته‌اند و پارامترهای به دست آمده مانند تغییر مکان و بار الکتریکی برای انتهای تیر محاسبه شده است. اسمیت و چوی [۴] با استفاده از روش انرژی به بررسی استاتیکی تیر پیزوالکتریک یونی مورف پرداخته‌اند. در این مرجع با محاسبه مقدار انرژی سیستم، پارامترهایی چون خیز، شیب و بار الکتریکی برای انتهای تیر محاسبه شده است. یاکوم و آبرامویچ [۵] رفتار یک تیر پیزوالکتریک را به صورت آزمایشگاهی مورد بررسی قرار داده‌اند. در این مرجع همچنین به بررسی پدیده هیستریزیس در پیزوالکتریک‌ها پرداخته شده است. پوگت و فرناندس [۶] با استفاده از معادلات حاکم بر پیزوالکتریک‌ها

۴ - Hamilton's principle

۵ - Minimum total potential energy

۶ - Rayleigh-Ritz method

۱- Piezoelectrics

۲- Unimorph

۳ - Bimorph

با جایگذاری رابطه (۴) در رابطه (۲) برای لایه  $i$  ام:

$$T_{\alpha,i} = \frac{1}{s_{11,i}} (-zK^\circ - d_{\alpha 3,i} E_{\alpha,i}) \quad (6)$$

بنابراین ممان ایجاد شده در تیر با  $n$  لایه به صورت زیر است:

$$M = \sum_{i=1}^n w_i \int_{h_{i,u}}^{h_{i,o}} T_{\alpha,i} z dz \quad (7)$$

با جایگذاری معادله (۶) در معادله (۷) و انتگرالگیری از آن:

$$M = -CK^\circ - M_{piezo} \quad (8)$$

که در رابطه (۸)

$$M_{Piezo} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{w_i}{s_{11,i}} d_{\alpha 3,i} E_{\alpha,i} (h_{i,o}^\alpha - h_{i,u}^\alpha) \quad (9)$$

$$C = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^n \frac{w_i}{s_{11,i}} (h_{i,o}^\alpha - h_{i,u}^\alpha) \quad (10)$$

با استفاده از رابطه (۸) شعاع انحنای تیر را می توان به صورت زیر محاسبه نمود:

$$K^\circ = -\frac{M + M_{Piezo}}{C} \quad (11)$$

چگالی انرژی داخلی برای یک لایه به صورت زیر است [۴].

$$W_i = \frac{1}{2} E_{\alpha,i} D_{\alpha,i} + \frac{1}{2} T_{\alpha,i} S_{\alpha,i} \quad (12)$$

با جایگذاری رابطه (۲) در (۱۲) و انتگرال گیری حجمی، انرژی

داخلی کل  $W_{total}$  تیر چند لایه به صورت زیر به دست می آید:

$$W_{total} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_0^\ell \varepsilon_{\alpha\alpha,i}^T w_i h_i E_{\alpha,i}^\alpha dx$$

$$- \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_0^\ell \frac{w_i h_i}{s_{11,i}} d_{\alpha 3,i}^\alpha E_{\alpha,i}^\alpha dx \quad (13)$$

$$+ \int_0^\ell \left[ \frac{M^\alpha}{2C} + \frac{M M_{piezo}}{C} + \frac{M_{piezo}^\alpha}{2C} \right] dx$$

اکنون انرژی پتانسیل کل سیستم با استفاده از عبارت زیر محاسبه می شود.

$$\Pi = W_{tot} - W_a \quad (14)$$

در عبارت فوق  $W_a$  کار نیروهای خارجی است. با جایگذاری رابطه (۱۳) در رابطه (۱۴):

فرضیات زیر در نظر گرفته می شود:

۱- رفتار تیر در خمش از تیر اویلر برنولی پیروی می کند.

۲- هر لایه می تواند پیزوالکتریک یا الاستیک باشد.

۳- در سطح مشترک دولایه لغزشی وجود ندارد.

۴- شعاع انحنای تیر خیلی بیشتر از ضخامت آن است.

### ۳- حل تحلیلی

معادلات حاکم بر پیزوالکتریک ها به صورت زیر است:

$$S_i = s_{ij} T_j + d_{ki} E_k \quad (1)$$

$$D_k = d_{kj} T_j + \varepsilon_{kl} E_l$$

در رابطه فوق  $i, j, k, l = 1, 2, 3$  و  $S$  کرنش،  $T$  تنش،  $E$

میدان الکتریکی،  $D$  جابه جایی الکتریکی،  $d$  ثابت

پیزوالکتریک،  $s$  معکوس ماتریس سختی و  $\varepsilon$  ثابت

دی الکتریک است. چون تیر دارای هندسه یک بعدی است،

معادلات فوق را می توان به صورت زیر کاهش داد:

$$S_1 = s_{11} T_1 + d_{13} E_3 \quad (2)$$

$$D_3 = d_{31} T_1 + \varepsilon_{33}^T E_3$$

در مرجع [۷] برای یک تیر با  $n$  لایه محل تار خشی از رابطه ۳

به دست آورده شده است. در این رابطه  $h_i$  ضخامت لایه  $i$  ام و

$w_i$  عرض لایه  $i$  ام است.

$$\bar{Z} = -\frac{\sum_{i=1}^n \frac{w_i}{s_{11,i}} h_i^\alpha - 2 \sum_{i=1}^n \frac{w_i}{s_{11,i}} h_i \sum_{j=1}^i h_j}{2 \sum_{i=1}^n \frac{w_i}{s_{11,i}} h_i} \quad (3)$$

اگر شعاع انحنای تیر خیلی بیشتر از ضخامت تیر باشد، رابطه زیر

بین کرنش و شعاع انحنا برقرار می باشد. در این رابطه  $K^\circ$  انحنا

(عکس شعاع انحنا) است.

$$S_1(z) = -zK^\circ \quad (4)$$

کمترین و بیشترین فاصله لایه  $i$  ام از تار خشی، یعنی  $h_{i,u}$  و

$h_{i,o}$  به صورت زیر به دست می آید:

$$h_{i,u} = \bar{Z} - \sum_{j=1}^i h_j \quad (5)$$

$$h_{i,o} = \bar{Z} - \sum_{j=1}^{i-1} h_j$$

تحریک می شوند، داریم:

$$M_{piezo} = m_p V \quad (21)$$

در رابطه فوق  $m_p$  یک ضریب ثابت است که بستگی به چگونگی اعمال ولتاژ به لایه ها دارد. با این تعریف معادله (۲۰) به صورت زیر در می آید:

$$\xi(x) = \frac{L(x-L)}{6C} \left( \frac{x}{L} + \left(\frac{x}{L}\right)^2 \right) M + \frac{m_p}{2C} x(x-L)V \quad (22)$$

ب) تیر پیزوالکتریک تحت نیروی متمرکز

وقتی تیر پیزوالکتریک دو سر لولا، تحت نیروی متمرکز در وسط تیر قرار گیرد، کار نیروی متمرکز به صورت  $W_a = F \cdot \xi(x)_{x=L/2}$  است. بنابراین با جایگذاری  $W_a$  در رابطه (۱۵) و استفاده از روابط (۱۶) و (۱۷) خواهیم داشت:

$$\int_0^L \frac{\partial}{\partial a_i} \left( \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \right) \left[ C \left( \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \right) - M_{Piezo} \right] dx - F \left( \frac{\partial \xi}{\partial a_i} \right)_{x=L/2} = 0 \quad (23)$$

با استفاده از رابطه فوق و در نظر گرفتن تابع تغییر مکان تیر به صورت زیر است:

$$\xi(x) = a_1 x(x-L) + a_2 x^2(x-L) + a_3 x^3(x-L)$$

ضرایب مجهول به صورت زیر به دست می آیند:

$$a_1 = -\frac{FL}{16C} + \frac{M_{piezo}}{2C} \quad (24)$$

$$a_2 = -\frac{5F}{64C} \quad , \quad a_3 = \frac{5F}{64CL}$$

بنابراین با جایگذاری ضرایب مجهول در معادله تغییر مکان، خیز تیر به صورت زیر به دست می آید:

$$\xi(x) = -\frac{L^3(x-L)}{16C} \left( \frac{x}{L} + \frac{5}{4} \left(\frac{x}{L}\right)^2 - \frac{5}{4} \left(\frac{x}{L}\right)^3 \right) F + \frac{m_p}{2C} x(x-L)V \quad (25)$$

ج) تیر پیزوالکتریک تحت بار گسترده

در این قسمت فرض می شود تیر تحت بار گسترده  $P$  قرار دارد.

بنابراین کار نیروی خارجی از رابطه  $W_a = Pw \int_0^L \xi(x) dx$  با جایگذاری  $W_a$  در رابطه (۱۵) و استفاده از

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_0^L \varepsilon_{33,i}^T w_i h_i E_{3,i}^Y dx - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_0^L \frac{w_i h_i}{s_{11,i}} d_{31,i}^Y E_{3,i}^Y dx \quad (15)$$

$$+ \int_0^L \left[ \frac{M^Y}{2C} + \frac{M_{piezo}}{C} + \frac{M_{piezo}^Y}{2C} \right] dx - W_a$$

با استفاده از روش رایلی-ریتز، جابه جایی تیر دو سر لولا را به صورت زیر فرض می شود:

$$\xi(x) = \sum_{j=1}^k a_j x^j (x-L) \quad (16)$$

هدف پیدا کردن ضرایب مجهول  $a_j$  است، به نحوی که  $\xi(x)$  به دست آمده از رابطه (۱۶) را حداقل کند. بنابراین:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_j} = 0 \quad , \quad j = 1, 2, \dots, k \quad (17)$$

الف) تیر پیزوالکتریک تحت ممان متمرکز

اگر تیر پیزوالکتریک دو سر لولا، تحت ممان متمرکز در انتهای تیر قرار گیرد، کار نیروی خارجی از رابطه  $W_a = M \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)_{x=L}$  به دست می آید. بنابراین با جایگذاری  $W_a$  در رابطه (۱۵) و استفاده از روابط (۱۶) و (۱۷) خواهیم داشت:

$$\int_0^L \frac{\partial}{\partial a_i} \left( \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \right) \left[ C \left( \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \right) - M_{Piezo} \right] dx - M \frac{\partial}{\partial a_i} \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)_{x=L} = 0 \quad (18)$$

با استفاده از عبارت فوق و در نظر گرفتن تابع تغییر مکان تیر به صورت  $\xi(x) = a_1 x(x-L) + a_2 x^2(x-L)$  ضرایب مجهول به صورت زیر به دست می آیند:

$$a_1 = \frac{1}{6} \left( \frac{M}{C} + \frac{3M_{piezo}}{C} \right) \quad , \quad a_2 = \frac{M}{6LC} \quad (19)$$

با جایگذاری ۱۹ در معادله تغییر مکان، خیز تیر در اثر ممان متمرکز به صورت زیر به دست می آید:

$$\xi(x) = \frac{L(x-L)}{6C} \left( \frac{x}{L} + \left(\frac{x}{L}\right)^2 \right) M + \frac{M_{piezo}}{2C} x(x-L) \quad (20)$$

با استفاده از رابطه (۹) و توجه به اینکه تمامی لایه ها با یک ولتاژ

$$\xi(x) = -\frac{s_{11}L^3(x-L)}{16h^3} \left( \frac{x}{L} + \left(\frac{x}{L}\right)^2 - \left(\frac{x}{L}\right)^3 \right) P \quad (32)$$

روابط (۱۶) و (۱۷) خواهیم داشت:

$$\int_0^L \frac{\partial}{\partial a_i} \left( \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \right) \left[ C \left( \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \right) - M_{Piezo} \right] dx \quad (26)$$

$$-Pw \int_0^L \frac{\partial \xi}{\partial a_i} dx = 0$$

با استفاده از رابطه (۲۶) و در نظر گرفتن تابع تغییر مکان تیر به صورت زیر است:

$$\xi(x) = a_1 x(x-L) + a_2 x^2(x-L) + a_3 x^3(x-L)$$

ضرایب مجهول به صورت زیر به دست می آیند:

$$a_1 = -\frac{wL^2}{24C} P + \frac{M_{piezo}}{2C} \quad (27)$$

$$a_2 = -\frac{wL}{24C} P, \quad a_3 = \frac{w}{24C} P$$

بنابراین با جایگذاری ضرایب مجهول، تغییر مکان تحت بار گسترده از رابطه زیر به دست می آید:

$$\xi(x) = -\frac{wL^3(x-L)}{24C} \left( \frac{x}{L} + \left(\frac{x}{L}\right)^2 - \left(\frac{x}{L}\right)^3 \right) P + \frac{m_p}{2C} x(x-L)W \quad (28)$$

#### ۴- تغییر مکان تیر بای مورف دو سر لولا

تیر پیزوالکتریک بای مورف سری، تیری است که از دو لایه پیزوالکتریک با جهت پلاریزه متفاوت تشکیل شده است. ضخامت هر لایه  $h$  فرض می شود. بنابراین با استفاده از روابط

$$(9) \text{ و } (10) \text{ و جایگذاری } E_3 = -\frac{V}{2h} \text{ داریم:}$$

$$C = \frac{2}{3} \frac{w}{s_{11}} h^3, \quad M_{piezo} = -\frac{wd_3 h}{2s_{11}} V \quad (29)$$

با جایگذاری رابطه (۲۹) در روابط (۲۰)، (۲۵) و (۲۸) تغییر مکان تیر بای مورف دوسر لولا تحت انواع بار گذاری به صورت زیر به دست می آید.

۱- تغییر مکان تحت ممان متمرکز:

$$\xi(x) = \frac{s_{11}L(x-L)}{4wh^3} \left( \frac{x}{L} + \left(\frac{x}{L}\right)^2 \right) M \quad (30)$$

۲- تغییر مکان تحت نیروی متمرکز:

$$\xi(x) = -\frac{3s_{11}L^2(x-L)}{32wh^3} \left( \frac{x}{L} + \frac{5}{4} \left(\frac{x}{L}\right)^2 - \frac{5}{4} \left(\frac{x}{L}\right)^3 \right) F \quad (31)$$

۳- تغییر مکان تحت بار گسترده:

۴- تغییر مکان تحت ولتاژ اعمالی:

$$\xi(x) = \frac{3d_{31}}{8h^2} x(x-L)V \quad (33)$$

#### ۵- بار الکتریکی ایجاد شده در تیر بای مورف

برای به دست آوردن بار الکتریکی بایستی از  $D_3$ ، انتگرال گرفت تا بار الکتریکی به دست آید [۸] بنابراین:

$$q = w \int D_3 dx = w \int (d_{31}T_1 + \epsilon_{33}^T E_3) dx \quad (34)$$

با استفاده از روابط (۶) و (۸) و (۲۹) و جایگذاری در رابطه فوق:

$$q = \frac{wl\epsilon_{33}}{4h} \left( 2 + \frac{d_{31}^2}{s_{11}\epsilon_{33}^T} \right) V \quad (35)$$

با توجه با رابطه  $q = C_p V$  و معادله (۳۵) ظرفیت تیر بای مورف به صورت زیر محاسبه می گردد.

$$C_p = \frac{wl\epsilon_{33}}{4h} \left( 2 + \frac{d_{31}^2}{s_{11}\epsilon_{33}^T} \right) \quad (36)$$

حال می توان ممان ایجاد شده در تیر در اثر بار مکانیکی خارجی را محاسبه و با جایگذاری در رابطه  $T_1 = \frac{M \cdot \xi}{I}$  و استفاده از رابطه (۳۴) بار الکتریکی را برای نقاط مختلف تیر بای مورف محاسبه نمود. نتایج به صورت زیر می باشد:

۱- بار الکتریکی تولید شده تحت بار متمرکز در وسط:

$$q = \frac{3d_{31}F}{8h^2} x^2, \quad 0 \leq x \leq \frac{L}{2} \quad (37)$$

۲- بار الکتریکی تولید شده تحت بار گسترده:

$$q = \frac{3d_{31}w}{4h^2} \left( \frac{Lx^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) P \quad (38)$$

ولتاژ ایجاد شده در نقاط مختلف را می توان از رابطه زیر محاسبه نمود:

$$V = \frac{q}{C_p} \quad (39)$$

#### ۶- تحلیل تیر یونی مورف

خیز تیر یونی مورف را می توان از روابط (۲۲) و (۲۵) و (۲۸)

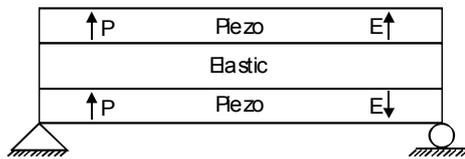
**مثال عددی ۱-** یک تیر پیزوالکتریک سه لایه و دو سر لولا مطابق شکل ۲ به طول تیر  $0.15m$  و عرض  $0.01m$  تحت ولتاژ  $250V$  در هر لایه قرار دارد. ضخامت لایه الاستیک  $0.01m$  و ضخامت لایه های پیزوالکتریک  $0.005m$  می باشد. مدول الاستیسیته لایه الاستیک برابر  $200GPa$  و لایه های پیزوالکتریک از جنس PZT-5A در نظر گرفته شده که خواص آن در زیر آمده است [۸]. هدف تعیین تغییر مکان تیر با استفاده از رابطه (۳۳) و مقایسه آن با حل عددی نرم افزار ANSYS می باشد.

ماتریس سختی ماده پیزوالکتریک به صورت زیر است:

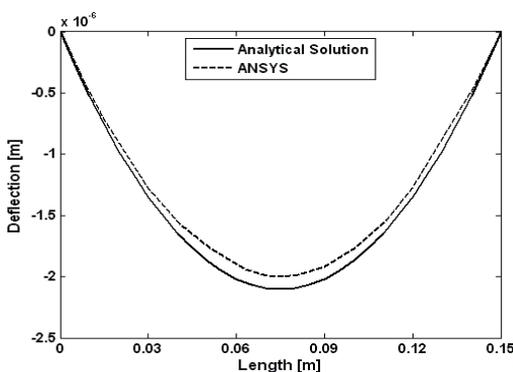
$$C = \begin{bmatrix} 121 & 75/9 & 75/4 & 0 & 0 & 0 \\ 75/9 & 1121 & 75/4 & 0 & 0 & 0 \\ 75/4 & 75/4 & 111 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 21 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 21 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 22/6 \end{bmatrix} GPa$$

ثابت پیزوالکتریک به صورت زیر است:

$$e = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 12/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12/3 & 0 \\ -5/4 & -5/4 & 15/8 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{C}{m}$$



شکل (۲) نمایش تیر سه لایه پیزوالکتریک دو سر لولا



شکل (۳) مقایسه حل تئوری و نرم افزار ANSYS برای تغییر مکان تیر

سه لایه و دو سر لولا تحت ولتاژ  $250 \text{ volt}$

در شکل (۳) مقایسه بین حل تحلیلی و نرم افزار ANSYS

به دست آورد. در این روابط باید به جای  $C, M_{piezo}$  با استفاده از روابط (۹) و (۱۰)، مقادیر زیر را قرار داد:

$$M_{piezo} = \frac{d_{31} w}{2} \frac{h_m (h_p + h_m)}{(h_m s_p + h_p s_m)} V \quad (40)$$

$$C = \frac{w.A}{12 s_m s_p (h_m s_p + h_p s_m)}$$

که در این رابطه

$$A = (h_p^4 s_m^2 + 4 h_p^3 h_m s_m s_p + 6 h_m^2 h_p^2 s_m s_p + 4 h_m^3 h_p s_m s_p + h_m^4 s_p^2)$$

در رابطه فوق زیر نویس  $m$  مربوط به ماده الاستیک و زیر نویس  $p$  مربوط به خواص ماده پیزوالکتریک می باشد.

ظرفیت تیر یونی مورف و بار الکتریکی ایجاد شده در آن را می توان به طریق مشابه تیر بای مورف محاسبه نمود، که نتیجه به صورت زیر است:

$$C_p = \frac{lw}{h_p} \left( \varepsilon_{33}^T - \frac{d_{31}^2 h_m (s_m h_p^2 + s_p h_m^2)}{A} \right) \quad (41)$$

بار الکتریکی ایجاد شده در تیر یونی مورف در اثر نیروی متمرکز  $F$  در وسط و همچنین تحت بار گسترده  $P$  به ترتیب از روابط (۴۲) و (۴۳) به صورت زیر به دست می آید.

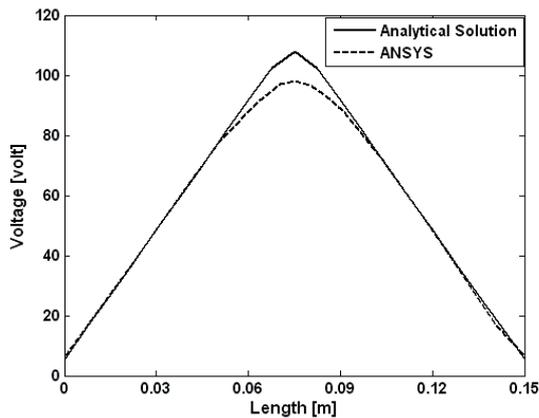
$$q = \left[ \left( \frac{3 d_{31} S_m}{2 A} (2 h_p h_m s_p + h_m^2 s_p + h_p^2 s_m) \right) x^2 \right] F \quad (42)$$

$$q = \left( \frac{6 d_{31} w S_m}{A} (2 h_p h_m s_p + h_m^2 s_p + h_p^2 s_m) \right) \times \left( \frac{Lx}{4} - \frac{x^3}{6} \right) P \quad (43)$$

برای محاسبه ولتاژ ایجاد شده نیز کافیت با توجه به رابطه (۳۹) بار الکتریکی بر ظرفیت تیر یونی مورف تقسیم شود.

## ۷- مثال عددی

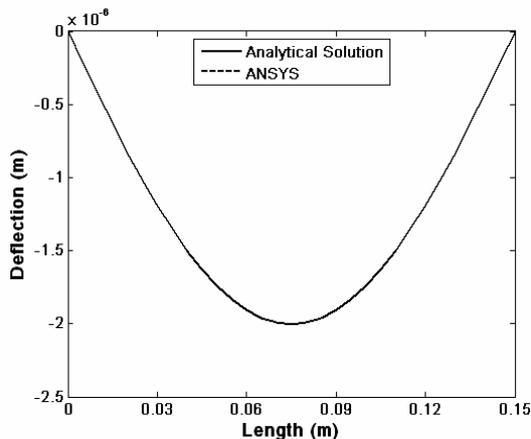
در این قسمت جهت اطمینان از صحت روابط تحلیلی به دست آمده در قسمتهای قبل در قالب مثال هایی، تغییر مکان تیر سه لایه پیزوالکتریک، تغییر مکان تیر بای مورف و یونی مورف و همچنین ولتاژ ایجاد شده در آنها بررسی شده و نتایج به دست آمده با نرم افزار ANSYS مقایسه خواهد شد. لازم به ذکر است، در محاسبات تحلیلی از برنامه نوشته شده برای تیر  $n$  لایه پیزوالکتریک دو سر لولا تحت انواع بار گذاری، توسط نرم افزار MATLAB استفاده شده است.



شکل (۵) مقایسه ولتاژ ایجاد شده در تیر بای مورف تحت نیروی متمرکز بین حل تحلیلی و نرم افزار ANSYS

### مثال عددی ۳- یک تیر یونی مورف دو سر لولا تحت بار

گسترده  $10 \text{ KN/m}^2$  قرار دارد. طول تیر  $0.15 \text{ m}$  و ضخامت لایه الاستیک  $0.1 \text{ m}$  و ضخامت لایه پیزوالکتریک  $0.005 \text{ m}$  و پهنای تیر  $0.001 \text{ m}$  است. همچنین مدول الاستیک لایه الاستیک برابر  $200 \text{ GPa}$  و لایه پیزوالکتریک از جنس PZT-5A می باشد. هدف محاسبه خیز تیر و ولتاژ ایجاد شده در تیر است.

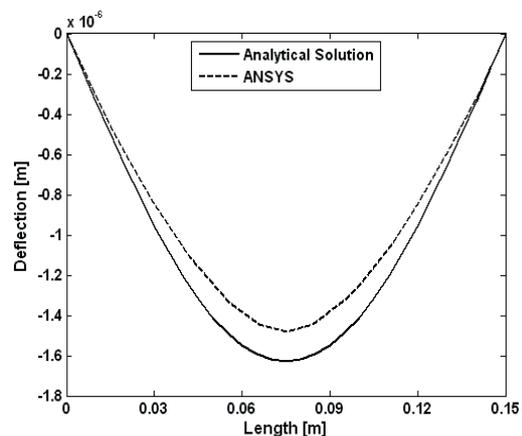


شکل (۶) خیز تیر یونی مورف تحت بار گسترده به روش تحلیلی

در شکل (۶) خیز تیر فوق نشان داده شده است. حداکثر اختلاف بین حل تئوری و نرم افزار ANSYS برابر ۷٪ است. در شکل (۷) نیز ولتاژ ایجاد شده در تیر در حالت حسگری نمایش داده شده است. حداکثر ولتاژ ایجاد شده در تیر برابر  $49.5 \text{ volt}$  است. با توجه به شکل (۷) حداکثر اختلاف بین ولتاژ تئوری و ANSYS برابر ۲٪ است.

صورت گرفته است. حداکثر اختلاف در این مورد ۴٪ می باشد که مربوط به نقطه مرکز تیر است.

**مثال عددی ۲-** یک تیر پیزوالکتریک بای مورف سری، دو سر لولا از جنس PZT-5A تحت نیروی متمرکز  $1 \text{ N}$  در مرکز تیر قرار دارد. طول تیر  $0.15 \text{ m}$  و ضخامت هر لایه  $0.1 \text{ m}$  و پهنای تیر  $0.001 \text{ m}$  است. هدف محاسبه خیز تیر با استفاده از رابطه (۳۱) و ولتاژ ایجاد شده در آن با استفاده از رابطه (۳۹) مقایسه آن با حل عددی نرم افزار ANSYS می باشد.



شکل (۴) مقایسه نتایج تحلیلی و نرم افزار المان محدود برای تغییر مکان تیر بای مورف تحت نیرو

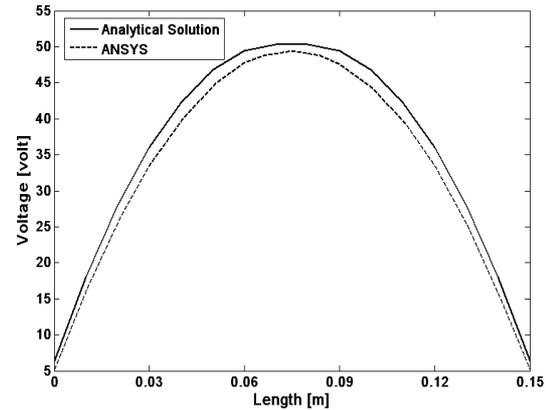
در شکل (۴) مقایسه بین حل تحلیلی و المان محدود صورت گرفته است. حداکثر اختلاف در این مورد برابر ۹٪ است. با جایگذاری روابط (۳۶) و (۳۷) در رابطه (۳۹) ولتاژ تولید شده در تیر بای مورف را می توان محاسبه نمود. در شکل (۵) مقایسه بین حل تحلیلی صورت گرفته و حل عددی برای ولتاژ ایجاد شده در تیر بای مورف تحت نیروی متمرکز نشان داده شده است.

۹- فهرست علائم

$C$	ماتریس سختی $N/m^2$
$D$	جابه‌جایی الکتریکی $C/m^2$
$d$	ثابت پیزوالکتریک $C/N$
$E$	میدان الکتریکی $N/C$
$e$	ثابت پیزوالکتریک
$h$	ضخامت $m$
$K^\circ$	انحناء
$l$	طول $m$
$M$	ممان $N.m$
$q$	بار الکتریکی
$S$	کرنش
$T$	تنش $N/m^2$
$V$	ولتاژ
$W$	کار
$w$	عرض $m$
$\bar{Z}$	تار خنثی
$\varepsilon$	ثابت دی‌الکتریک $F/m$
$\pi$	انرژی پتانسیل
<b>زیرنویس:</b>	
$i, j, k$	شمارنده
$m$	ماده الاستیک
$p$	ماده پیزوالکتریک

۱۰- مراجع

- [۱] Reza Moheimani S.O., Fleming A.J., Piezoelectric transducers for vibration control and damping. - (Advances in industrial control), Springer-Verlag London Limited, UK, ۲۰۰۶.
- [۲] Gordan T.L., Ounaies Z., Piezoelectric Ceramics Characterization, ICASE Report, NO.۲۸, ۲۰۰۱.
- [۳] Park J.K., Moon W.K., Constitutive Relations for Piezoelectric Benders Under Various Boundary



شکل (V) مقایسه ولتاژ تولید شده در تیر یونی مورف در حالت حسگری به روش تئوری و نرم‌افزار ANSYS

۸- نتیجه‌گیری

در این تحقیق با استفاده از اصل مینیمم انرژی پتانسیل و روش رایلی - ریتز معادلات تغییر مکان تیر چندلایه پیزوالکتریک تحت شرط مرزی دو سر لولا برای بارگذاری‌های مختلف به‌دست آورده شد. سپس نتایج تحلیلی به‌دست آمده برای تیرهای بای مورف و یونی مورف ساده شده و بار الکتریکی و ولتاژ تولید شده در آنها در حالت حسگری محاسبه گردید. برای بررسی صحت روابط به‌دست آمده تغییر مکان تیر سه‌لایه تحت ولتاژ خارجی، تغییر مکان تیر بای مورف تحت نیروی متمرکز و ولتاژ ایجاد شده در آن در حالت حسگری و تغییر مکان تیر یونی مورف تحت بار گسترده و ولتاژ ایجاد شده در آن، به صورت تحلیلی و به کمک نرم‌افزار ANSYS مورد بررسی و مقایسه قرار گرفت، که مطابقت خوبی را نشان داد. نتایج نشان داد حداکثر ولتاژ ایجاد شده در تیرهای بای مورف و یونی مورف دو سر لولا در حالت حسگری در وسط تیر می‌باشد که تیر بیشترین خیز را در اثر بارگذاری دارد. همچنین افزایش ولتاژ متناسب با افزایش خیز تیر است و هرچه از تکیه‌گاه تیر دورتر شویم، دقت داده‌های مساله کاهش پیدا می‌کند. در نهایت اینکه با استفاده از لایه‌های پیزوالکتریک در حالت حسگری می‌توان خیز تیرها را با استفاده از ولتاژ ایجاد شده در لایه پیزوالکتریک نمایش داد. همچنین می‌توان در حالت عملگری با اعمال ولتاژ خارجی به لایه پیزوالکتریک خیز تیرها را کنترل نمود (خیز را می‌توان کم یا زیاد کرد).

Conditions, *Journal Sensors and Actuator A: Physical*, volume ۱۱۷, ۲۰۰۵, pp. ۱۵۹-۱۶۷.

- [۴] Smits J.G., Choi W., The Constituent Equations of Piezoelectric Heterogeneous Bimorphs, *IEEE Transactions on Ultrasonic, Ferroelectrics, and Frequency Control*, Volume ۳۸, No.۳, ۱۹۹۱.
- [۵] Yocum M., Abramovich H., Static Behavior of Piezoelectric Actuated Beams, *Computers & Structures*, Volume ۸۰, Number ۲۳, ۲۰۰۲, pp. ۱۷۹۷-۱۸۰۸
- [۶] Fernandes A., Pouget J., Analytical and numerical approaches to piezoelectric bimorph, *International Journal of Solid and Structures*, Volume ۴۰, ۲۰۰۳, pp. ۴۳۳۱- ۴۳۵۲.
- [۷] Balls R.G., Schlaak H.F., Schmid A.J., The Constituent Equations of Piezoelectric Multilayer Bending Actuators in Closed Analytical Form and Experimental Results, *Journal Sensors & Actuators .A: Physical*, ۲۰۰۶, pp. ۱-۷.
- [۸] Yang J., An Introduction to The Theory of Piezoelectricity, Department of Engineering Mechanics University of Nebraska-Lincoln, U.S.A., ۲۰۰۵.