

## تحلیل خیز صفحات چهار گوش FGM بر اساس تئوری کلاسیک صفحات به روش کانتروویچ توسعه یافته

محمد مهدی نجفی زاده<sup>۱\*</sup>      مجید علوی<sup>۲</sup>      فؤاد سلماسی<sup>۳</sup>      شیما آذری<sup>۴</sup>

\* نویسنده مسئول: m-najafizadeh@iau-arak.ac.ir

### چکیده

تحلیل خیز ورق FGM تحت بارگذاری یکنواخت و سینوسی منجر به حل معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی مرتبه چهار می شود که برای حل چنین معادله ای روشهای عددی متفاوتی ارائه شده است. روش تحلیل در این مقاله بر پایه روش تکرار شونده کانتروویچ توسعه یافته است. در روش حل تکرار شونده، معادلات دیفرانسیل به کمک روش گلرکین به دست می آیند. تحلیل بر مبنای فرضیات تئوری کلاسیک صفحات استوار است. صحت نتایج حاصل برای ورق FGM، تحت شرایط تکیه گاهی متفاوت، با نتایج حاصل از حل ANSYS و همچنین حل به روش ناویر مقایسه و تأیید شده است. از آنجایی که در ANSYS مدلی برای تحلیل ورق FGM وجود ندارد، درمدلسازی و تحلیل از برنامه نویسی ماکرو استفاده شده است. نتایج نشان می دهد روش کانتروویچ، روش دقیقی برای حل معادلات بوده و پاسخ ها به سرعت همگرا می شوند. همچنین پاسخ های نهایی مستقل از انتخاب تابع آزمون اولیه برای حل معادله می باشد.

**واژه های کلیدی:** روش کانتروویچ توسعه یافته، ورق FGM، روش گلرکین، تئوری کلاسیک صفحات.

۱- دانشیار، دانشکده مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد اراک

۲- استادیار، دانشکده علوم، گروه ریاضی، دانشگاه آزاد اسلامی واحد اراک

۳- دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشکده مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد اراک

۴- دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشکده مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد اراک

## ۱- مقدمه

در علم مکانیک، مسائلی وجود دارد که دارای شکل هندسی معین و یا معادلات دیفرانسیل خطی می‌باشند. برای این مسائل روش های تحلیلی جهت حل معادلات تعادل پیشنهاد شده است. تنها زمانی که دو لبه موازی در ورق دارای تکیه گاه ساده می‌باشند، می‌توان به یک راه حل ریاضی دقیق بر پایه روش ناویر دست یافت که رفتار خمشی ورق مستطیلی را تحلیل کند. برای هر ترکیب دیگری از شرایط مرزی لازم است از روشهای حل تقریبی دیگری مانند روش انرژی و یا المان محدود استفاده کرد.

اما بسیاری از مسائل وجود دارند که دارای شکل هندسی ساده نمی‌باشند و یا معادلات حاکم بر آنها غیر خطی است و حل تحلیلی برای آنها وجود ندارد، لذا از روشهای حل عددی برای حل چنین مسائلی استفاده می‌گردد.

این روش ها که در علوم مهندسی کاربرد وسیعی یافته‌اند، یا بر اساس مینیم نمودن فانکشنال<sup>۱</sup> یا بر مبنای حل ضعیف معادلات<sup>۲</sup> استوارند. این روش ها به روش های مستقیم<sup>۳</sup> موسومند. زیرا جوابها به وسیله مستقیم از معادلات تغییراتی<sup>۴</sup> به دست آمده‌اند.

جواب مفروض ترکیب خطی از فضای برداری است و از آنجاییکه در یک مسئله واقعی پیوسته بینهایت درجه آزادی وجود دارد و جواب تقریبی در نظر گرفته شده تعداد محدودی از این درجات آزاد را از فضای برداری انتخاب می‌کند، لذا جواب های مسائل با درجات آزادی محدود، سبب ایجاد خطا در مسئله می‌شود. فقط می‌توان جوابهای تقریبی<sup>۵</sup> از جواب های دقیق روابط حاکم را به دست آورد چنانچه تعداد جملات به کار گرفته شده افزایش یابد خطای جواب ها کاهش پیدا نموده و جوابها به سمت جواب های دقیق میل می‌کند.

روشهای معروف تقریبی تغییراتی که در بیان فرم تغییراتی و همچنین فضای توابع تقریب با هم متفاوتند، عبارت‌اند از:

- ۱ - Functional
- ۲ - Weak Form
- ۳ - Direct Method
- ۴ - Variational
- ۵ - Approximate

۱. روش ریلی - ریتز (Rayleigh-Ritz)

۲. روش بانو-گلرکین (Bubnov - Galerkin)

۳. روش پترو - گلرکین (Petrov - Galerkin)

۴. روش کانتروویچ (Kantorovich)

۵. روش ترفتز (Trefftz)

در این مقاله از روش کانتروویچ توسعه یافته برای حل معادله دیفرانسیل تعادل ورق استفاده شده است، که معادلات دیفرانسیل به کمک روش گلرکین به دست می‌آیند. سپس نتایج حاصل برای ورق FGM، تحت شرایط تکیه گاهی متفاوت، با نتایج حاصل از حل ANSYS و همچنین حل به روش ناویر مقایسه شده است.

## ۲ - روش کانتروویچ

این روش یکی از انواع روش های باقیمانده وزنی است که برای حل معادله دیفرانسیل به کار می‌رود. این روش نخستین بار توسط کانتروویچ [۱-۳]، برای حل عددی مسائل خمش ورق های نازک مستطیلی در سال ۱۹۳۳ به کار گرفته شد.

روش کانتروویچ توسط کر [۴] در سال ۱۹۶۸ برای حل مسئله پیچش میله منشوری با مقطع مستطیل شکل مورد استفاده قرار گرفت. در سال ۱۹۶۹، بایومی [۵]، با استفاده از روش کانتروویچ توسعه یافته کمانش صفحات مستطیل شکل با نسبت ابعاد مختلف را حل نمود. نتایج این آنالیز ها تطابق زیادی با حل های شناخته شده ای که در دسترس می‌باشد، دارد.

پس از آن این روش برای حل مسائل گوناگون در الاستیسیته دوبعدی از جمله مسئله خمش ورق نازک مستطیل شکل ایزوتروپ [۶-۸]، حل مسئله مقدار ویژه در سال ۱۹۶۹ توسط کر [۹]، ارتعاشات آزاد [۱۰-۱۱]، کمانش [۱۲-۱۴] و آنالیز کرنش [۱۵] توسط کیم مورد توجه قرار گرفت.

همچنین صحت روش کانتروویچ در مختصاتی غیر از مختصات کارترین توسط اقدم در سال ۲۰۰۷ برای آنالیز تنش قطاع [۱۶] و خمش ورق قطاع نازک اورتوتروپ [۱۷] در سال ۲۰۰۷ و ابوحمزه [۱۸] در سال ۲۰۰۷ برای پنل استوانه‌ای کامپوزیت مورد بررسی قرار گرفته است.

طرز عملکرد روش کانتروویچ برای حل معادله دیفرانسیل به این صورت است که تابع را به صورت

تنها تعداد کمی از تحقیقات پاسخ خمشی ورق را با استفاده از روش کانتروویچ به دست آورده‌اند و تاکنون تمامی آنها به حالتی که تمام لبه‌های ورق گیردار باشد محدود شده‌اند.

کر و دالی [۲۰]، حالتی را که ورق لایه ای مستطیلی مبتنی بر تئوری کلاسیک است بررسی کرده‌اند و متوجه شدند که همگرایی در جواب روشی که مبتنی بر روش کانتروویچ توسعه یافته است بسیار سریع بوده و شکل نهایی پاسخ به دست آمده مستقل از نخستین انتخاب است. اقدام [۷]، پاسخی را برای خمش در ورق مستطیلی از نوع رایزنر و ایزوتروپیک گیردار به دست آورده است. اقدام، فلاحتگر<sup>۶</sup> [۸]، این مدل را برای رسیدن به رفتار خمشی در ورق‌های مستطیلی ضخیم گسترش دادند. یوان<sup>۷</sup> [۱۲]، روش کانتروویچ توسعه یافته را برای حل مسائل خمش در ورق‌های مستطیلی با کاربرد تابع آزمون و با استفاده از تئوری کلاسیک صفحات به کار برد.

همانطور که قبلاً توضیح داده شد، روش کانتروویچ دو مدل دارد: روش کلاسیک و روش توسعه یافته.

## ۱-۲- روش کانتروویچ کلاسیک<sup>۸</sup>

روش کلاسیک در سال ۱۹۵۸ توسط کریلاو کانتروویچ<sup>۹</sup> [۳]، ارائه شد و مربوط می‌شود به راه حل‌های نیمه تحلیلی که معادلات دیفرانسیل جزئی حاکم را به معادلات دیفرانسیل معمولی تبدیل می‌کند. این معادلات را می‌توان با استفاده از روش گلرکین و اصل حداقل انرژی پتانسیل به دست آورد. در این حالت فرض می‌کنیم که جابه‌جایی ورق به فرم زیر است:

$$w_m(x, y) = \sum_{n=1}^m f_n(x) \cdot g_{n-1}(y) \quad (2)$$

که  $g_{n-1}(y)$  توابع انتخابی قبلی هستند.

رابطه (۲) را در معادله حرکت ورق جانشین می‌کنیم و سپس روش گلرکین را به کار می‌بریم و با استفاده از قضیه اساسی حساب تغییرات،  $m$  معادلات دیفرانسیل معمولی برای

حاصلضرب توابعی از متغیرهای موجود در معادله دیفرانسیل در نظر می‌گیرند. یعنی یک جمله کانتروویچ به فرم:

$$W(x, y) = K \cdot \Phi(x) \cdot \Psi(y) \quad (1)$$

در نظر گرفته می‌شود، که ضریب  $K$  برای بی بعد کردن توابع  $\Phi(x), \Psi(y)$  می‌باشد.

تابع انتخاب شده در ابتدا الزامی به ارضا شرایط مرزی ندارد و همچنین جواب نهایی بعد از چند تکرار مستقل از تابع انتخاب شده خواهد بود.

در معادله (۱) یکی از توابع  $\Phi(x), \Psi(y)$  را معلوم فرض نموده و با قرار دادن معادله (۱) در معادله دیفرانسیل خمش ورق و با استفاده از یکی از روش‌های باقیمانده وزنی<sup>۱</sup> معادله دیفرانسیل دیگری که به صورت معادله دیفرانسیل کامل می‌باشد، به دست خواهد آمد. در مرحله بعد جواب به دست آمده را معلوم فرض نموده و به کمک رابطه (۱) و معادله دیفرانسیل مسئله تابع دیگر را به دست می‌آوریم. این عمل را تکرار نموده تا جوابها به مقدار خاص همگرا شوند.

در روش کانتروویچ حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی<sup>۲</sup> منجر به حل معادلات دیفرانسیل معمولی<sup>۳</sup> می‌گردد. معمولاً امکان حل معادلات دیفرانسیل با دقت بالاتری نسبت به روش ریتز می‌باشد.

در این مقاله یک روش حل با استفاده از روش کانتروویچ توسعه یافته برای بررسی رفتار خمشی در یک ورق FGM ارائه شده است. ورق‌ها برای هر شرایط مرزی مورد نیاز می‌توانند حل شوند.

دو مدل روش کانتروویچ وجود دارد: روش کلاسیک و روش توسعه یافته، [۴-۱۲]. این دو روش برای محاسبه نیروهای کماتش<sup>۴</sup> در ورق‌های فشرده<sup>۵</sup> استفاده می‌شود، [۱۳ و ۱۹]. برای مثال، اونگ هاک رون از این روش برای حل مسئله کماتش ورق‌های کامپوزیت با تکیه گاه‌های مختلف در لبه استفاده کرده‌اند. این پاسخ بر پایه اصل مینیمم انرژی پتانسیل است [۱۳].

۱- Weighted Residual

۲- Partial Differential Equation

۳- Ordinary Differential Equation

۴ - buckling loads

۵ - Compressed plates

۶- Falahatgar

۷- Yuan

۸- The classical Kantorovich method

۹- Krylov Kantorovich

می باشد. با در نظر گرفتن تئوری کلاسیک صفحات، مولفه های جابه جایی به صورت زیر تعریف می شوند:

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) \end{aligned} \quad (4)$$

که در روابط فوق  $u_0(x, y)$  و  $v_0(x, y)$  مولفه های کشش صفحه میانی هستند.

مولفه های کرنش نرمال  $\varepsilon_{xx}$  و  $\varepsilon_{yy}$  و کرنش برشی  $\gamma_{xy}$  در هر نقطه از ضخامت ورق به فاصله  $z$  از صفحه میانی مطابق روابط زیر تعریف می شوند: [۲۳]

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon^{(0)}\} + (z) \{\varepsilon^{(1)}\} \quad (5)$$

که در آن:

$$\begin{aligned} \{\varepsilon\} &= \{\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \gamma_{xy}\}^T \\ \{\varepsilon^{(0)}\} &= \left\{ \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2, \right. \\ &\quad \left. \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x} \right\}^T \\ \{\varepsilon^{(1)}\} &= \left\{ -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, -2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right\} \end{aligned} \quad (6)$$

روابط تنش - کرنش برای ورق کامپوزیت به صورت زیر بیان می شود: [۲۵]

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = [Q] \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} \quad (7)$$

که  $[Q]$  ماتریس سختی کاهش یافته ورق کامپوزیت می باشد و برای ورق FGM به صورت زیر تعریف می شود: [۲۴]

$$[Q] = \frac{E(z)}{1 - \nu_{fgm}^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu_{fgm} & 0 \\ \nu_{fgm} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu_{fgm}}{2} \end{bmatrix} \quad (8)$$

که  $\nu_{fgm}$  ضریب پواسون و  $E(z)$  مدول الاستیسیته ورق FGM بوده و از رابطه زیر به دست می آید: [۲۶]

$$E(z) = (E_c - E_m) \left( \frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^k + E_m \quad (9)$$

تعیین  $m$  تابع مجهول  $f_n(x)$  به دست خواهد آمد. این معادلات دیفرانسیل توسط شرایط مرزی متناظر حل می شوند. سپس توابع  $f_n(x)$  بوجود آمده را دوباره در معادله (۲) جانشین می کنیم.

باید توجه داشت که اگر اولین پاسخ فرضی در مرحله اول تمام شرایط مرزی را ارضا کند، پاسخ برای کانترویچ کلاسیک ساده یک نتیجه قابل قبول خواهد داد.

## ۲-۲ - روش کانترویچ توسعه یافته<sup>۱</sup>

در این روش عملیات تکرار ادامه می یابد تا پاسخ به درجه دقت مطلوب همگرا شود. برای این حالت فرض می کنیم خیز ورق به فرم زیر باشد.

$$w_m(x, y) = \sum_{n=1}^m f_n(x) \cdot g_n(y) \quad (3)$$

که  $f_n(x)$  توابع به دست آمده از مرحله قبل (کانترویچ کلاسیک) است و  $g_n(y)$  مجهول است.  $g_n(y)$  ها از  $m$  معادله خطی به دست می آیند. عملیات تکرار با جایگزینی مجدد  $g_n(y)$  در معادله (۲) و به دست آوردن مجهول  $f_n(x)$  ادامه می یابد. کر، الکساندر<sup>۲</sup> [۲۱]، متوجه شدند که روش تکرار شونده به سرعت همگراست، و همینطور شکل نهایی معادله به دست آمده مستقل از انتخاب اولیه  $g_n(y)$  است. به علاوه هر چند روش کانترویچ توسعه یافته مبتنی بر اصل تغییرات است، تابع آزمون اولیه لازم نیست هیچکدام از شرایط مرزی هندسی و طبیعی را ارضا کند. روش تکرار شونده پاسخی می دهد که سرانجام تمام شرایط مرزی را ارضا می کند. [۱۲]

## ۳ - استخراج معادلات تعادل ورق مستطیل شکل

### FGM بر اساس تئوری کلاسیک صفحات

یک ورق مستطیل شکل از جنس FGM به طول  $a$ ، عرض  $b$ ، و ضخامت  $h$  مفروض است. ورق تحت بارگذاری مکانیکی

۱ - The extended Kantorovich method

۲ - Alexander

$$\{N\} = \begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \{0\} \quad (14)$$

$$\{M\} = \begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{\phi\phi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} M_{xx} &= -D_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ M_{yy} &= -D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - D_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ M_{xy} &= -\nu D_{\phi\phi} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (16)$$

معادلات تعادل ورق با تئوری CLPT عبارت اند از:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \\ \nu N_{xy} \frac{\partial^2 w_{xy}}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 w_y}{\partial y^2} + q &= 0 \end{aligned} \quad (17)$$

پس از جایگذاری (۱۶) در (۱۷):

$$\begin{aligned} -D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \nu(D_{12} + \nu D_{\phi\phi}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} - D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \\ + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + q = 0 \end{aligned} \quad (18)$$

و با صرف نظر از نیروهای درون صفحه‌ای به شکل ساده‌تر داریم:

$$\begin{aligned} -D_{11} \frac{\partial^4 w(x,y)}{\partial x^4} - \nu(D_{12} + \nu D_{\phi\phi}) \frac{\partial^4 w(x,y)}{\partial x^2 \partial y^2} \\ - D_{22} \frac{\partial^4 w(x,y)}{\partial y^4} + q(x,y) = 0 \end{aligned} \quad (19)$$

در نتیجه معادلات تعادل ورق مستطیل شکل FGM بر اساس

تئوری CLPT به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} D_1 \frac{\partial^4 w(x,y)}{\partial x^4} + D_2 \frac{\partial^4 w(x,y)}{\partial x^2 \partial y^2} + D_3 \frac{\partial^4 w(x,y)}{\partial y^4} \\ = q(x,y) \end{aligned} \quad (20)$$

در رابطه بالا پارامتر  $k \geq 0$  ثابت ماده FGM<sup>۱</sup> است.

نیروها و ممانها در واحد طول بر حسب مولفه های تنش به

صورت زیر بیان می‌شوند: [۲۳]

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} &= \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} \cdot z \cdot dz \\ \begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{Bmatrix} &= \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} \cdot dz \end{aligned} \quad (10)$$

با جایگذاری مقادیر تنش از رابطه (۷) داریم:

$$\begin{aligned} \{N\} &= [A] \{ \varepsilon^{(0)} \} \\ \{M\} &= [D] \{ \varepsilon^{(1)} \} \end{aligned} \quad (11)$$

که در آن [A] ماتریس سختی کششی<sup>۲</sup> و [D] ماتریس

صلبیت خمشی<sup>۳</sup> نامیده می‌شوند و عبارت اند از:

$$\begin{aligned} [D] &= D \cdot \begin{bmatrix} 1 & \nu_{fgm} & 0 \\ \nu_{fgm} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu_{fgm}}{2} \end{bmatrix} \\ [A] &= A \cdot \begin{bmatrix} 1 & \nu_{fgm} & 0 \\ \nu_{fgm} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu_{fgm}}{2} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (12)$$

که در آن:

$$\begin{aligned} A &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E(z)}{1-\nu_{fgm}} dz \\ D &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{z^2 E(z)}{1-\nu_{fgm}} dz \end{aligned} \quad (13)$$

با صرف نظر از مؤلفه‌های کشش صفحه میانی ( $u_0(x,y)$  و

$v_0(x,y)$ ) و جمله‌ها مرتبه بالایی کرنش<sup>۴</sup>، مقادیر متوجه‌های

نیرو و ممان به صورت زیر نوشته می‌شوند:

۱- Material constant

۲- Extensional Stiffness Matrix

۳- Bending Stiffness Matrix

۴- Large Deflection

که در آن: با ساده سازی رابطه (۲۵) و تعریف مقادیر  $H_i$  به صورت زیر:

$$\begin{aligned} H_\varphi &= D_1 \int_0^b W^\varphi(y) \cdot dy & D_1 &= D_{11} \\ H_\psi &= D_3 \int_0^b \frac{d^\psi W(y)}{dy^\psi} \cdot W(y) \cdot dy & D_3 &= 2(D_{12} + 2D_{66}) \\ H_\chi &= D_4 \int_0^b \frac{d^\chi W(y)}{dy^\chi} W(y) \cdot dy & D_4 &= D_{22} \end{aligned} \quad (21)$$

$$F(x) = \int_0^b q(x, y) \cdot W(y) \cdot dy \quad (26)$$

معادله (۲۴) به شکل یک معادله دیفرانسیل معمولی از مرتبه ۴ به صورت زیر به دست می آید:

$$H_\varphi \cdot \frac{d^\varphi W(x)}{dx^\varphi} + H_\psi \cdot \frac{d^\psi W(x)}{dx^\psi} + H_\omega \cdot W(x) = F(x) \quad (27)$$

مقدار نیرو را به صورت زیر تعریف می کنیم: [۲۲]

$$q(x, y) = q_0 \cdot \sin(k_x \cdot x) \sin(k_y \cdot y) \quad (28)$$

$$k_x = \frac{m \cdot \pi}{a}, k_y = \frac{n \cdot \pi}{b}$$

با جایگذاری این عبارات در معادله دیفرانسیل (۲۷) داریم:

$$H_\varphi \cdot \frac{d^\varphi W(x)}{dx^\varphi} + H_\psi \cdot \frac{d^\psi W(x)}{dx^\psi} + H_\omega \cdot W(x) = q_0 \cdot \sin(k_x \cdot x) \int_0^b W(y) \sin(k_y \cdot y) dy \quad (29)$$

معادله (۲۹) یک معادله دیفرانسیل معمولی غیر همگن از مرتبه ۴ می باشد که جوابهای عمومی و خصوصی آن به ترتیب عبارت اند از:

$$W(x) = \sum_{i=1}^4 X_i \cdot \exp(\lambda_i \cdot x) \quad (30)$$

$$+ \frac{q_0 \cdot \sin(k_x \cdot x)}{H_\varphi k_x^\varphi - H_\psi k_x^\psi + H_\omega} \int_0^b W(y) \sin(k_y \cdot y) \cdot dy$$

که در این رابطه مقادیر  $\lambda_i$  عبارت است از چهار ریشه معادله مشخصه معادله (۲۹)، که به صورت زیر تعیین می شود:

$$\lambda_i = \pm \frac{\sqrt{2} \sqrt{H_\varphi (-H_\psi \pm \sqrt{-H_\psi^\psi - 4H_\varphi H_\omega})}}{2H_\varphi} \quad (31)$$

$i = 1$  تا ۴

ثوابت  $X_i$  برای  $i$  از ۱ تا ۴ با توجه به شرایط مرزی در راستای  $x$  به دست می آیند.

#### ۴ - حل معادله تعادل ورق مستطیل شکل FGM به روش کانتروویچ توسعه یافته

در قسمت قبل معادلات تعادل ورق مستطیل شکل FGM بر اساس تئوری CLPT به صورت رابطه (۲۰) به دست آمد، اکنون به حل این معادله با روش کانتروویچ می پردازیم. ابتدا از روش گلرکین استفاده می کنیم به این صورت که طرفین معادله بالا را در  $w(x, y)$  ضرب کرده و روی محدوده ورق انتگرال می گیریم، پس داریم:

$$\int_0^a \int_0^b (D_1 \frac{\partial^\varphi w(x, y)}{\partial x^\varphi} + D_3 \frac{\partial^\psi w(x, y)}{\partial x^\psi \partial y^\psi} + D_4 \frac{\partial^\chi w(x, y)}{\partial y^\chi} - q(x, y)) \cdot w(x, y) \cdot dx \cdot dy = 0 \quad (22)$$

که در آن  $a$  و  $b$  ابعاد ورق می باشند.

با توجه به آنچه که در روش کانتروویچ گفته شد، تابع تغییر مکان  $w(x, y)$  را به صورت حاصلضرب دو تابع مستقل  $W(x), W(y)$  به صورت زیر در نظر می گیریم:

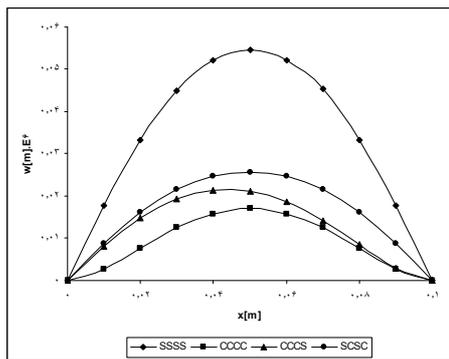
$$w(x, y) = W(x) \cdot W(y) \quad (23)$$

بر اساس روش کانتروویچ یکی از این توابع به عنوان مثال  $W(y)$  را معلوم فرض نموده و با جایگذاری در معادله (۲۲) داریم:

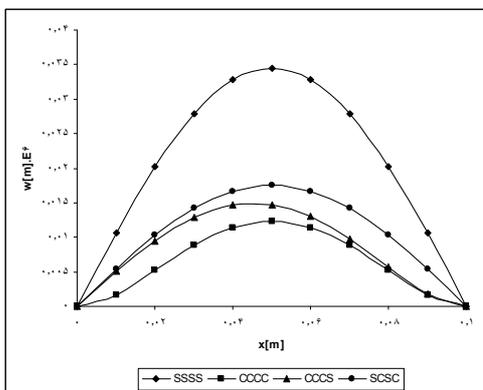
$$\int_0^a \left[ \int_0^b (D_1 \frac{d^\varphi W(x)}{dx^\varphi} \cdot W(y) + D_3 \frac{d^\psi W(x)}{dx^\psi} \cdot \frac{d^\psi W(y)}{dy^\psi} + D_4 \cdot W(x) \cdot \frac{d^\chi W(y)}{dy^\chi} - q(x, y)) \cdot W(y) \cdot dy \right] W(x) \cdot dx = 0 \quad (24)$$

رابطه (۲۴) در صورتی برقرار است که عبارت داخل کروشه برابر صفر باشد، پس:

$$\int_0^b (D_1 \frac{d^\varphi W(x)}{dx^\varphi} \cdot W(y) + D_3 \frac{d^\psi W(x)}{dx^\psi} \cdot \frac{d^\psi W(y)}{dy^\psi} + D_4 \cdot W(x) \cdot \frac{d^\chi W(y)}{dy^\chi} - q(x, y)) \cdot W(y) \cdot dy = 0 \quad (25)$$



شکل (۱) خیز ورق FGM (k=5) تحت بارگذاری یکنواخت بر اساس تئوری CLPT به روش کانتروویچ توسعه یافته



شکل (۲) خیز ورق FGM (k=5) تحت بارگذاری سینوسی بر اساس تئوری CLPT به روش کانتروویچ توسعه یافته

برای حالتی که ورق بر روی دو لبه مفصلی روبروی هم قرار گرفته است، نتایج به دست آمده از روش حل کانتروویچ با پاسخ روش نایبر مقایسه شده است، شکل (۳).

جدول (۱) مقایسه پاسخ روش کانتروویچ توسعه یافته برای ورق FGM با تکیه گاه مفصلی (SSSS) تحت بارگذاری یکنواخت بر اساس تئوری CLPT با پاسخ روش نایبر.

X[m]	SSSS	
	W[mm]e-3	
	حل به روش کانتروویچ	حل به روش نایبر
0	0	0
0/1	0/1775301	0/20396682
0/2	0/3317625	0/37217373
0/3	0/4488111	0/48827719
0/4	0/5213258	0/54543157
0/5	0/5458329	0/54640883
0/6	0/5213256	0/49798219
0/7	0/4488111	0/40914248
0/8	0/3317615	0/28973001
0/9	0/1775313	0/1499527
0/1	0	0

همچنین اگر بارگذاری یکنواخت باشد، یعنی داشته باشیم،  $q = q_0$ ، در این صورت جوابهای عمومی و خصوصی عبارت اند از:

$$W(x) = \sum_{i=1}^4 X_i \cdot \exp(\lambda_i \cdot x) + \frac{q_0}{H_0} \int_0^b W(y) dy \quad (32)$$

در مرحله بعد به کمک مقدار به دست آمده برای تابع  $W(x)$ ، همین روند را برای تعیین  $W(y)$  طی می کنیم و این روش را تا به دست آوردن نتایج همگرا به یک مقدار قابل قبول تکرار می کنیم.

## ۵ - نتایج عددی

برنامه محاسباتی برای روش تکرار شونده کانتروویچ توسط نرم افزار MAPLE نوشته شده است، و نتایج به دست آمده با نتایج به دست آمده از روش های حل دیگر برای ورق مشابه مقایسه شده است.

یک ورق تابعی مربعی شکل، به ابعاد  $10 \text{ cm} \times 10 \text{ cm}$  و ضخامت  $0/8 \text{ mm}$  را انتخاب کرده ایم. برای شروع حل به روش کانتروویچ، به عنوان اولین پاسخ برای روش تکرار شونده،  $w(y)$  به فرم  $\sin(\pi y/b)$  در نظر گرفته شده است.

شرایط مرزی در نظر گرفته شده برای تکیه گاه های مورد بحث در این پروژه را برای حل کانتروویچ توسعه یافته به صورت زیر تعریف نموده ایم: [۲۲]

$$w_x = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \varphi_x = 0: \text{Simply supported edge}$$

$$w_x = \frac{\partial w}{\partial x} = \varphi_y = 0: \text{Clamped edge}$$

خواص موادی که مسئله برای آنها حل شده است به شرح زیر است: [۲۶]

Ceramic-metal functionally graded plate:

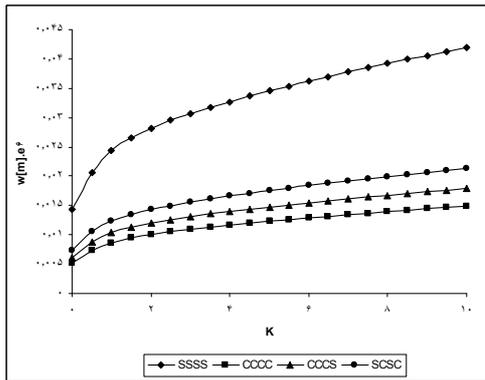
Alumina:  $E_c = 380 \text{ [GPa]}$

Aluminum:  $E_m = 70 \text{ [GPa]}$

$$\nu_{fgm} = 0/3$$

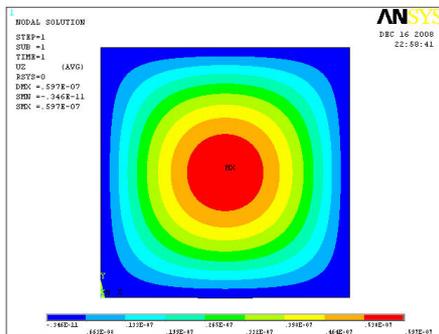
ابتدا مسئله خمش ورق مربعی شکل FGM، با خواص مطرح شده برای حالتی که ورق تحت بارگذاری یکنواخت و سینوسی قرار دارد، به کمک روابط به دست آمده در تئوری CLPT، مورد بررسی قرار گرفته است.

که نتایج به دست آمده به صورت شکل (۱) و (۲) در ادامه آمده است.

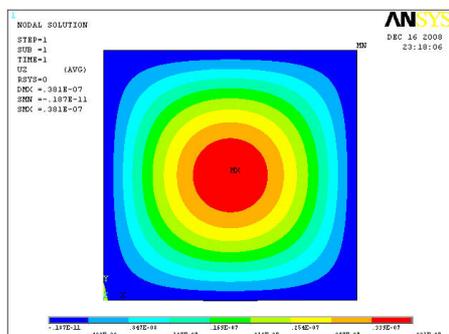


شکل (۵) تغییرات خیز ورق FGM نسبت به مقادیر مختلف k تحت بارگذاری سینوسی بر اساس تئوری CLPT

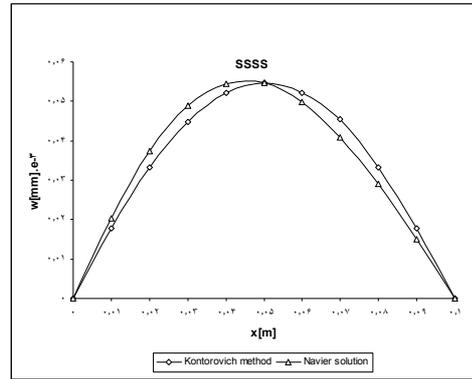
همچنین در راستای ضخامت ورق، چهار المان هریک به ضخامت  $0.2/25$  mm و لایه در نظر گرفته شده است و در مجموع تعداد لایه های ورق ۱۰۰ عدد می باشد. شکل های (۶) تا (۱۳) نتایج تحلیل به کمک ANSYS را برای ورق FGM، با شرایط مرزی مختلف و تحت دو نوع بارگذاری یکنواخت و سینوسی نشان می دهد.



شکل (۶) پاسخ Ansys برای ورق FGM (k=5) تحت بارگذاری یکنواخت با شرط مرزی SSSS

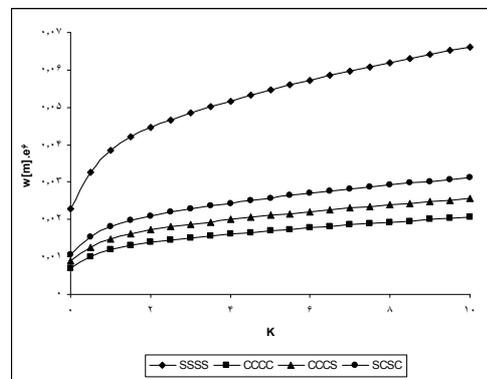


شکل (۷) پاسخ Ansys برای ورق FGM (k=5) تحت بارگذاری سینوسی با شرط مرزی SSSS



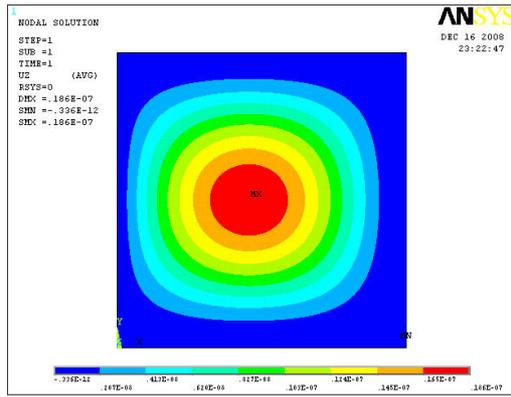
شکل (۳) مقایسه پاسخ روش کانتروویچ توسعه یافته برای ورق FGM با تکیه گاه مفصلی (SSSS) تحت بارگذاری یکنواخت بر اساس تئوری CLPT با پاسخ روش ناویر

شکل های (۳) و (۴)، تغییرات خیز مرکز ورق تابعی را نسبت به مقادیر مختلف k، برای دو نوع بارگذاری یکنواخت و سینوسی نشان می دهد. همانطور که مشاهده می شود برای شرایط مرزی مختلف، در هر نوع بارگذاری، با افزایش مقدار k، خیز ورق نیز افزایش می یابد.

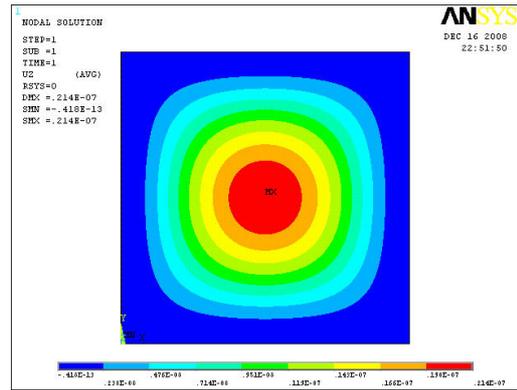


شکل (۴) تغییرات خیز ورق FGM نسبت به مقادیر مختلف k تحت بارگذاری یکنواخت بر اساس تئوری CLPT

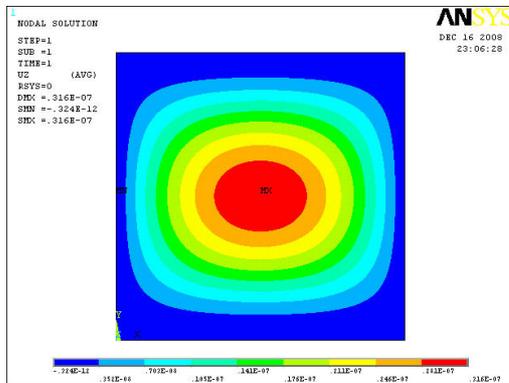
در ادامه نتایج به دست آمده با روش کانتروویچ برای ورق FGM (k=5) با نتایج حاصل از حل ANSYS مقایسه شده است. از آنجاییکه در مدلسازی ANSYS مدلی برای ورق FGM وجود ندارد، در تحلیل از ماکرونویسی استفاده شده است. المان در نظر گرفته شده برای ورق FGM، SOLID۴۶ بوده و سایز المان در سطح ورق،  $mm^2$  است.



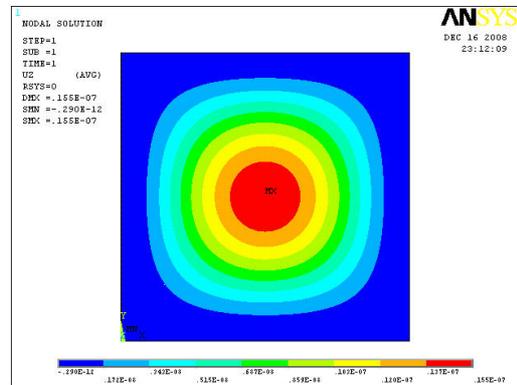
شکل (۱۱) پاسخ برای ورق FGM ( $k=5$ ) تحت بارگذاری سینوسی با شرط مرزی CCCS



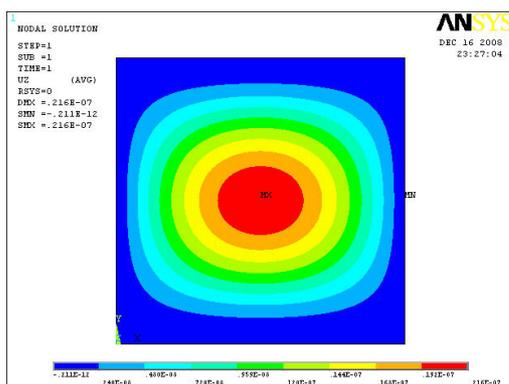
شکل (۸) پاسخ برای ورق FGM ( $k=5$ ) تحت بارگذاری یکنواخت با شرط مرزی CCCC



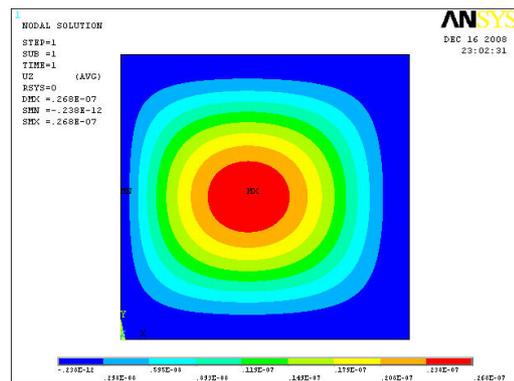
شکل (۱۲) پاسخ برای ورق FGM ( $k=5$ ) تحت بارگذاری یکنواخت با شرط مرزی SCSC



شکل (۹) پاسخ برای ورق FGM ( $k=5$ ) تحت بارگذاری سینوسی با شرط مرزی CCCS



شکل (۱۳) پاسخ برای ورق FGM ( $k=5$ ) تحت بارگذاری سینوسی با شرط مرزی SCSC



شکل (۱۰) پاسخ برای ورق FGM ( $k=5$ ) تحت بارگذاری یکنواخت با شرط مرزی CCCS

جدول (۲) مقایسه پاسخ روش کانتروویچ توسعه یافته برای ورق FGM بر اساس تئوری CLPT با نتایج حاصل از حل ANSYS

شرایط مرزی	W[mm].e-۳			
	بار گذاری یکنواخت		بار گذاری سینوسی	
	حل کانتروویچ	حل ANSYS با المان SOLID۴۶	حل کانتروویچ	حل ANSYS با المان SOLID۴۶
SSSS	۰٫۵۴۵۸۳۲۹	۰٫۵۹۶۸۳	۰٫۳۴۵۷۹۷۹۹	۰٫۳۸۱۲۶
CCCC	۰٫۱۶۹۹۴۳۲	۰٫۲۱۴۰۶	۰٫۱۲۲۸۶۹۳	۰٫۱۵۴۵۹
CCCS	۰٫۲۱۰۸۵۰۵	۰٫۲۶۲۹۵	۰٫۱۴۷۴۰۸۸	۰٫۱۸۳۸۴
SCSC	۰٫۲۵۷۲۵۹۶	۰٫۳۱۶۴۲	۰٫۱۷۵۳۱۵۸۸	۰٫۲۱۵۸۸

مقایسه جوابهای دقیق موجود تایید شده است. از آنجاییکه در ANSYS مدلی برای تحلیل ورق FGM وجود ندارد، در مدل سازی و تحلیل از برنامه نویسی ماکرو استفاده شده است. به این منظور ورق FGM به صورت یک ورق کامپوزیت ۱۰۰ لایه مدل شده است.

نتایج نشان می دهد روش تکرار شونده (کانتروویچ) به سرعت همگراست و دقت نسبتا خوبی نسبت به نتایج ارائه شده بر اساس روش های تحلیلی دیگر دارد. همچنین در این مقاله نشان دادیم که شکل نهایی معادله به دست آمده برای خیز ورق و در نتیجه پاسخ های نهایی کاملا مستقل از انتخاب جواب اولیه است. و به این ترتیب نشان داده شد که تابع آزمون اولیه لازم نیست هیچ یک از شرایط مرزی هندسی و طبیعی را ارضا کند، زیرا جوابهای حل تکرار شونده، سرانجام هر مدل آرایش شرایط مرزی را ارضا می کند.

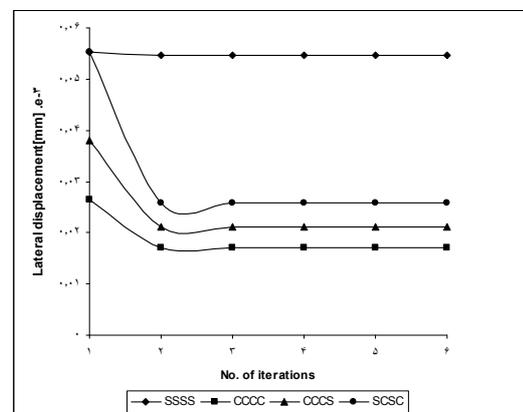
## مراجع

- [۱] Grimm T.R., Analysis of the instability of rectangular plate using the doctoral dissertation Extende Kontorovich method, Unpublished, Michigan – Technological University, ۱۹۷۲.
- [۲] Kantorovich L.V., Krylov L.V., Approximate method of Higher Analysis, Interscience, New York, ۱۹۵۸.
- [۳] Kerr AD, An extension of the Kantorovich method, *Quart Appl Math*, Vol. ۲۶, ۱۹۶۸, pp. ۲۱۹-۲۲۹.
- [۴] Reddy J.N., Energy and variational method in applied mechanics, ۲۰۰۲, pp. ۳۲۸-۳۴۱.
- [۵] Fariborz SJ, Pourbohloul A, Application of the extended Kantorovich method to the bending of variable thickness plates, *Comput Struct*, Vol. ۳۱, ۱۹۸۹, pp. ۹۵۷-۹۶۵.

مقایسه نتایج حاصل از روش کانتروویچ توسعه یافته برای ورق FGM با شرایط تکیه گاهی متفاوت تحت بار گذاری یکنواخت و سینوسی با نتایج به دست آمده از حل ANSYS در جدول (۲) آورده شده است.

نتایج همگرایی برای ورق با شرایط مرزی متفاوت در شکل (۱۴) نشان داده شده است.

همانطور که مشخص است تنها تعداد کمی تکرار برای حل هر ورق لازم است تا نتایج به همگرایی مطلوب برسد.



شکل (۱۴) همگرایی روش کانتروویچ برای ورق FGM ( $k=5$ ) تحت بار گذاری یکنواخت بر اساس تئوری CLPT

## ۶ - نتیجه گیری

در این مقاله رفتار خمشی در ورق های FGM مستطیل شکل مورد بررسی قرار گرفت و پاسخ تحلیلی بر مبنای روش کانتروویچ به دست آمد. معادلات دیفرانسیل به دست آمده بر پایه روش گلرکین و بر مبنای تئوری CLPT به دست می آیند. همچنین اعتبار روش حل ارائه شده با

- free edges, *Int J Mech Sci.*, Vo.۳۹, ۱۹۹۶, pp. ۱۱۲۷-۱۱۳۸.
- [۱۹] Dalei M, Kerr AD, Analysis of clamped rectangular orthotropic plates subjected to uniform lateral load, *Int J Mech Sci* ۱۹۹۵, Vol.۳۷, pp.۵۲۷-۵۳۵.
- [۲۰] Kerr AD, Alexander H, An application of the extended Kantorovich method to the stress analysis of a clamped rectangular plate, *Acta Mechanica*, Vol.۶, ۱۹۶۸, pp. ۱۸۰-۱۹۶.
- [۲۱] Lucy, Edery-Azulay, Haim, Abramovich, Piezo-laminated plates – Highly accurate solutions based on the extended Kantorovich method, ۲۰۰۷.
- [۲۲] Reddy, J.N., Theory and analysis of elastic plates, ۱۹۹۸, pp.۲۳۸-۲۵۰.
- [۲۳] Zhang , Da-Guang , Zhou , You-He , A theoretical analysis of FGM thin plates based on physical neutral surface, *Computational Materials Science* , ۲۰۰۸.
- [۲۴] Jones R.M., Mechanics of composite materials, ۱۹۸۴, pp.۱۷۵-۱۶۰.
- [۲۵] Lanhe Wu, Thermal buckling of a simply supported moderately thick rectangular FGM plate, *Composite Structure*, Vol. ۶۴ , ۲۰۰۴, pp. ۲۱۱-۲۱۸.
- [۶] Aghdam MM, Shakeri M, Fariborz ,SJ, Solution to the Reissner plate with clamped edges, *ASCE J Eng Mech*, Vol.۱۲۲, ۱۹۹۶, pp.۶۷۹-۶۸۲.
- [۷] Aghdam MM, Falahatgar SR, Bending analysis of thick laminated plates using extended Kantorovich method, *Composite Structure*, Vol.۶۲, ۲۰۰۳, pp.۲۷۹-۸۳.
- [۸] Kerr AD, An extended Kantorovich method for the solution of eigenvalue problems, *Int J Solids Struct*, Vol.۵, ۱۹۶۹, pp.۵۵۹-۷۲.
- [۹] Jones R., Milne BJ, Application of extended Kantorovich method to the vibration of clamped rectangular plates, *J Sound Vib.*, Vol.۴۵, ۱۹۷۶, pp.۳۰۹-۳۱۶.
- [۱۰] Dalaei M, Kerr AD, Application of extended Kantorovich method to the vibration of clamped rectangular plates, *J. Sound Vib*, ۱۹۹۶, Vol.۱۸۹, pp.۳۹۹-۴۰۶.
- [۱۱] Yuan S, Jin Y, Computation of elastic buckling loads of rectangular thin plates using the extended Kantorovich method, *Comput Struct* ۱۹۹۸, Vol.۶۶, pp.۸۶۱-۸۶۷.
- [۱۲] Ungbhakorn V, Singhatanadgid P, Buckling analysis of symmetrically laminated composite plates by the extended Kantorovich method, *Compos Struct* ۲۰۰۶, Vol.۷۳, pp.۱۲۰-۱۲۸.
- [۱۳] Jana P, Bhaskar K , Stability analysis of simply-supported rectangular plates under non-uniform uni-axial compression using rigorous and approximate plane stress solutions, *Thin-Walled Struct*, Vol.۴۴, ۲۰۰۶, pp.۵۰۷-۵۱۶.
- [۱۴] Kim H.S., Cho M. , Kim G.I., Free-edge strength analysis in composite laminates by the extended Kantorovich method, *Composite Structures*, Vol. ۴۹, ۲۰۰۰, pp.۲۲۹-۲۳۵.
- [۱۵] Aghdam M.M., Mohammadi M., Erfanian V., Bending analysis of thin annular sector plates using extended Kantorovich method, *Thin-Walled Struct*, Vol.۴۵, ۲۰۰۷, pp.۹۸۳-۹۹۰.
- [۱۶] Aghdam MM, Mohammadi M, *Extended Kantorovich method for static analysis of thick orthotropic sector plates, Proceedings of the international conference on modeling and optimization of structures, processes and systems*, ICMOSPS/۰۷, Durban, South Africa, ۲۰۰۷.
- [۱۷] Abouhamze M , Aghdam ,MM , Alijani , F, Bending analysis of symmetrically laminated cylindrical panels using the extended Kantorovich method, *Mech Adv Mater Struct*, Vol.۱۴, ۲۰۰۷, pp.۵۲۳-۵۳۰.
- [۱۸] Liew KM, Xiang Y, Kitipornchai S, Analytical buckling solution for Mindlin plates involving