

## تحلیل ارتعاشات غیرخطی نانو لوله‌های کربنی چند لایه روی بستر الاستیک در محیط حرارتی

رضا انصاری<sup>۱\*</sup>

حبیب رمضان نژاد آزاربنی<sup>۲</sup>

\*نویسنده مسئول: r\_ansari@guilan.ac.ir

### چکیده

در این مقاله مدل دینامیکی رفتار نانو لوله های کربنی چند لایه با فرض دامنه ارتعاشی زیاد روی بستر الاستیک، بر اساس مدل تیر اویلر- برنولی بیان شده است. با توجه به شرط مرزی تکیه گاه ساده و حضور نیروی‌های وندروالسی بین لایه‌ها برای نانو لوله کربنی، از روش هارمونیک بالانس جزئی برای حل دستگاه معادلات غیر خطی حاکم بر رفتار سیستم مورد استفاده قرار گرفته است. اثرات تعداد لایه‌ها، ضریب بستر الاستیک، نسبت طول به قطر خارجی نانو لوله و دما بر پاسخ فرکانس غیرخطی نانو لوله‌ها بررسی شده است. روابط ارائه شده برای به دست آوردن پاسخ فرکانس غیر خطی سیستم به صورت کلی بوده و قابل اعمال برای نانو لوله کربنی با هر تعداد لایه را دارا می باشد. با توجه به نتایج به دست آمده برای نانو لوله ها تک لایه، دو لایه و سه لایه، افزایش تعداد لایه‌ها، مقدار ضریب بستر الاستیک، نسبت طول به قطر خارجی و دما باعث کاهش سطوح پاسخ فرکانس غیر خطی شده و فرکانس غیر خطی نانو لوله‌های کربنی به سمت فرکانس خطی میل می کند.

**واژه‌های کلیدی:** نانو لوله کربنی، نیروهای وندر والسی، روش هارمونیک بالانس جزئی، فرکانس غیر خطی.

۱- استادیار، دانشکده مکانیک، دانشگاه گیلان.

۲- کارشناس ارشد، دانشکده مکانیک، دانشگاه گیلان.

## ۱- مقدمه

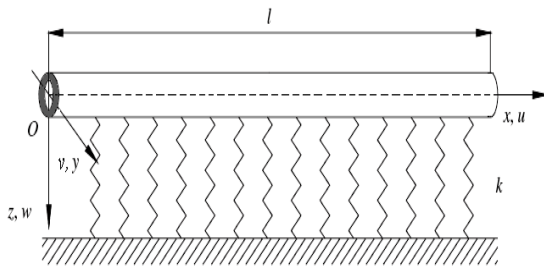
نانو لوله‌های کربنی از موادی جدیدی هستند که دارای ویژگی‌های قابل توجهی مانند ضریب سفتی و مقاومت بالا نسبت به وزن در مقایسه با مواد شناخته شده دیگر می‌باشند. به خاطر جدید بودن خواص الکترونیکی، مکانیکی و شیمیایی نانو لوله‌های کربنی، این مواد نقش اساسی در ساختار نانو الکترونیک، نانو ابزارها و نانو کامپوزیتها دارند. به طور مثال سفتی نانو لوله‌های کربنی صد برابر فولاد بوده در حالیکه وزنشان یک ششم وزن فولاد می‌باشد. با توجه به اهمیت مواد نانو لوله کربنی و ویژگی‌های آن مطالعه رفتار دینامیکی آنها از اهمیت بالایی برخوردار است.

در سال ۱۹۹۱ این خواص مواد نانو لوله کربنی کشف شد [۱]. تحلیل ارتعاشات غیر خطی نانو لوله تک لایه و دو لایه برای ضرایب الاستیک و نسبت طول به قطر خارجی نانو لوله کربنی مختلف مورد بررسی قرار گرفته شده است [۲]. اثر نسب طول به قطر خارجی نانو لوله بر اساس مدل تیر تیموشنکو تحت شرایط مرزی مختلف تحلیل شد [۳]. در مراجع سالهای [۴] و [۵] مطالعاتی روی رفتار نانو لوله های چند لایه تحت بار محوری و پیچشی انجام شده است. تأثیر دما بر پاسخ فرکانسی نانولوله تک لایه بر اساس مدل تیر تیموشنکو مورد تحلیل قرار گرفته است [۶]. در این مقاله با استفاده از مدل تیر اویلر-برنولی معادله دیفرانسیل غیر خطی حاکم بر رفتار نانولوله چند لایه با شرط تکیه گاهی ساده روی بستر الاستیک با در نظر گرفتن اثر دما به صورت کلی بدست آمده است. در مطالعات گذشته [۲] نیروهای وندروالسی به صورت تأثیر متقابل لایه‌های مجاور با هم در نظر گرفته شده بود که در این مقاله علاوه بر به کارگیری مدل کامل تری از ضرایب وندروالسی، اثرات متقابل تمام لایه ها روی یکدیگر لحاظ شده است. با به کارگیری روش هارمونیک بالانس جزئی دستگاه معادلات مورد نیاز برای محاسبه فرکانس غیر خطی که به صورت تابعی از دامنه بیان می‌شود برای نانولوله کربنی با هر تعداد لایه به صورت کلی استخراج شده و اثرات ضریب بستر الاستیک، نسبت طول به

قطر خارجی، دما و تعداد لایه‌ها بر پاسخ فرکانسی مورد بررسی قرار گرفته است.

## ۲- معادلات حاکم

شکل (۱) یک نانو لوله کربنی با طول  $L$ ، مدول یانگ  $E$ ، چگالی  $\rho$  و سطح مقطع  $A$  را روی بستر الاستیک نشان می‌دهد.



شکل (۱) شماتیک یک نانو لوله کربنی چند لایه روی بستر الاستیک

معادله دیفرانسیل حاکم بر رفتار غیر خطی سیستم با توجه

به مدل تیر اویلر-برنولی به صورت زیر بیان می‌شود [۷].

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \left[ \frac{EA}{2l} \int \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) dx + N_t \right] \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + p \quad (1)$$

در رابطه (۱)  $p(x, t)$  اثر فشار بر حسب طول حاصل از عکس العمل بستر الاستیک با لایه خاجی نانو لوله و  $N_t$  اثر نیروی ثابت محوری ناشی از در نظر گرفتن دما بر روی نانو لوله می‌باشد که به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$p(x, t) = -kw \quad (2)$$

$$N_t = -\frac{EA}{1-2\nu} \alpha_x T \quad (3)$$

علامت منفی در رابطه (۲) به خاطر فشاری است که از طرف بستر الاستیک در خلاف جهت جابجایی نانو لوله وارد می‌شود. در دو رابطه اخیر  $k$  مقدار ضریب بستر الاستیک،  $\alpha_x$  ضریب نفوذ دمایی در راستای  $x$ ،  $\nu$  ضریب پواسون و  $T$  دما می‌باشد. برای نانو لوله  $N$  لایه فشار موجود بین هر دو لایه در هر نقطه به اختلاف جابجایی بین دو لایه بستگی دارد. بنابراین نیروی وندروالسی را می‌توان به صورت زیر بیان کرد [۸].

که با اعمال شرط مرزی تکیه گاه ساده دستگاه معادلات (۸) به صورت تابعی از زمان به دست می آید.

$$\frac{d^{\nu} W_1}{dt^{\nu}} + \left( \frac{m^{\nu} \pi^{\nu} E I_1}{l^{\nu} \rho A_1} + \sum_{j=1, j \neq 1}^n \frac{c_{1j}}{\rho A_1} + \frac{m^{\nu} \pi^{\nu} N_t^1}{l^{\nu} \rho A_1} \right) W_1 + \frac{m^{\nu} \pi^{\nu} E}{\nu l^{\nu} \rho} W_1^{\nu} - \sum_{j=1, j \neq 1}^n \frac{c_{1j}}{\rho A_1} W_j = 0$$

$$\frac{d^{\nu} W_i}{dt^{\nu}} + \left( \frac{m^{\nu} \pi^{\nu} E I_i}{l^{\nu} \rho A_i} + \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{c_{ij}}{\rho A_i} + \frac{m^{\nu} \pi^{\nu} N_t^i}{l^{\nu} \rho A_i} \right) W_i + \frac{m^{\nu} \pi^{\nu} E}{\nu l^{\nu} \rho} W_i^{\nu} - \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{c_{ij}}{\rho A_i} W_j = 0$$

$$\frac{d^{\nu} W_n}{dt^{\nu}} + \left( \frac{m^{\nu} \pi^{\nu} E I_n}{l^{\nu} \rho A_n} + \frac{k}{\rho A_n} + \sum_{j=1, j \neq n}^n \frac{c_{nj}}{\rho A_n} + \frac{m^{\nu} \pi^{\nu} N_t^n}{l^{\nu} \rho A_n} \right) W_n + \frac{m^{\nu} \pi^{\nu} E}{\nu l^{\nu} \rho} W_n^{\nu} - \sum_{j=1, j \neq n}^n \frac{c_{nj}}{\rho A_n} W_j = 0 \quad (9)$$

### ۳- روش حل هارمونیک بالانس جزئی

معادلات (۹) که برای یک نانو لوله  $N$  لایه بدست آمده است را می توان به صورت فشرده شده بیان کرد.

$$\frac{d^{\nu} W_i}{dt^{\nu}} + \left( \frac{m^{\nu} \pi^{\nu} E I_i}{l^{\nu} \rho A_i} + \frac{k}{\rho A_n} \delta_{in} + \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{c_{ij}}{\rho A_i} + \frac{m^{\nu} \pi^{\nu} N_t^i}{l^{\nu} \rho A_i} \right) W_i + \frac{m^{\nu} \pi^{\nu} E}{\nu l^{\nu} \rho} W_i^{\nu} - \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{c_{ij}}{\rho A_i} W_j = 0 \quad (10)$$

اگر پارامترهای بی بعد به صورت زیر تعریف شود:

$$r = \sqrt{\frac{I_1}{A_1}}, \quad a_i = \frac{W_i}{r}, \quad \omega_l = \frac{m^{\nu} \pi^{\nu}}{l^{\nu}} \sqrt{\frac{E I_1}{\rho A_1}}, \quad \omega_k = \sqrt{\frac{k}{\rho A_1}}$$

$$\omega_c^{ij} = \sqrt{\frac{c_{ij}}{\rho A_i}}, \quad \tau = \omega t, \quad \beta_i = \frac{A_1}{A_i}, \quad \gamma_i = \frac{I_1}{I_i}$$

$$\alpha = \frac{m^{\nu}}{\nu}, \quad \omega_T^i = \frac{m \pi}{l} \sqrt{\frac{N_t^i}{\rho A_i}}$$

$$F_i = w_i \sum_{j=1}^N c_{ij} - \sum_{j=1}^N c_{ij} w_j \quad (4)$$

ضریب وندروالس بین دو لایه،  $C_{ij}$ ، به صورت زیر تعریف می شود [۸ تا ۱۰].

$$c_{ij} = \left[ \frac{100 \pi \varepsilon \sigma^{12}}{3 a^6} E_{ij}^{12} - \frac{112 \pi \varepsilon \sigma^6}{9 a^6} E_{ij}^6 \right] R_j \quad (5)$$

که  $a = 1.42 \text{ \AA}$ ،  $\sigma$  عمق پتانسیل،  $\varepsilon$  پارامتری است که با فاصله تعادل بدست می آید،  $R_j$  شعاع لایه  $j$ ام نانولوله و  $E_{ij}^m$  به صورت زیر بیان می شود:

$$E_{ij}^m = (R_j + R_i)^{-m} \int_0^{\pi} \frac{d\theta}{[1 - k_{ij} \cos^2 \theta]^{m/2}} \quad (6)$$

که  $m$  یک عدد طبیعی و  $k_{ij}$  نیز به صورت زیر تعریف می شود [۸].

$$k_{ij} = \frac{4 R_j R_i}{(R_j + R_i)^2} \quad (7)$$

با در نظر گرفتن شرط مرزی تکیه گاه ساده در دو انتهای مدل تیر اوپلر-برنولی برای نانو لوله کربنی به صورت  $w(x,t) = W(t) \sin \frac{m\pi x}{l}$  دستگاه معادلات دیفرانسیل غیر خطی حاکم بر رفتار نانولوله به صورت تابعی از زمان و جابه جایی به دست می آید.

$$E I_1 \frac{\partial^{\nu} w_1}{\partial x^{\nu}} + \rho A_1 \frac{\partial^{\nu} w_1}{\partial t^{\nu}} \quad (8)$$

$$= \left[ \frac{E A_1}{\nu l} \int^l \left( \frac{\partial w_1}{\partial x} \right) dx + N_t^1 \right] \frac{\partial^{\nu} w_1}{\partial x^{\nu}} + \sum_{j=1, j \neq 1}^n c_{1j} (w_j - w_1)$$

$$E I_i \frac{\partial^{\nu} w_i}{\partial x^{\nu}} + \rho A_i \frac{\partial^{\nu} w_i}{\partial t^{\nu}} = \left[ \frac{E A_i}{\nu l} \int^l \left( \frac{\partial w_i}{\partial x} \right) dx + N_t^i \right] \frac{\partial^{\nu} w_i}{\partial x^{\nu}} + \sum_{j=1, j \neq i}^n c_{ij} (w_j - w_i)$$

$$E I_n \frac{\partial^{\nu} w_n}{\partial x^{\nu}} + \rho A_n \frac{\partial^{\nu} w_n}{\partial t^{\nu}} = \left[ \frac{E A_n}{\nu l} \int^l \left( \frac{\partial w_n}{\partial x} \right) dx + N_t^n \right] \frac{\partial^{\nu} w_n}{\partial x^{\nu}} + \sum_{j=1, j \neq n}^n c_{nj} (w_j - w_n) - k w_n$$

معادله (۱۰) به صورت زیر باز نویسی می‌شود [۲].  
 به منظور دستیابی به پاسخ هارمونیک برای رفتار نانولوله می‌توان برای  $a_{i_0}(\tau)$ ,  $\Delta a_{i_0}(\tau)$  پاسخ‌های هارمونیک با جمله‌های کسینوسی به صورت زیر ارائه کرد.

$$a_{i_0} = a_i \cos \tau + a_{n+i} \cos \tau + \dots \quad (15)$$

$$\Delta a_{i_0} = \Delta a_i \cos \tau + \Delta a_{n+i} \cos \tau + \dots$$

با قرار دادن رابطه (۱۵) در معادله (۱۴) و مساوی قرار دادن ضرایب جمله‌های هارمونیک مشابه معادلات جبری غیر خطی به شکل ماتریسی زیر بدست می‌آیند.

$$([K] + [W]) \begin{Bmatrix} \Delta a_i \\ \Delta a_{n+i} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_i \\ R_{n+i} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} Q_i \\ Q_{n+i} \end{Bmatrix} \quad (16)$$

که (۱۷)؛

$$\Delta a_i = \begin{Bmatrix} \Delta a_1 \\ \Delta a_2 \\ \vdots \\ \Delta a_n \end{Bmatrix} \quad \Delta a_{n+i} = \begin{Bmatrix} \Delta a_{n+1} \\ \Delta a_{n+2} \\ \vdots \\ \Delta a_{2n} \end{Bmatrix} \quad R_i = \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_n \end{Bmatrix}$$

$$R_{n+i} = \begin{Bmatrix} R_{n+1} \\ R_{n+2} \\ \vdots \\ R_{2n} \end{Bmatrix} \quad Q_i = \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \vdots \\ Q_n \end{Bmatrix} \quad Q_{n+i} = \begin{Bmatrix} Q_{n+1} \\ Q_{n+2} \\ \vdots \\ Q_{2n} \end{Bmatrix}$$

همچنین هر یک از عوامل ماتریسهای  $[K]$  و  $[W]$  به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$K_{i,i} = \frac{\beta_i}{\gamma_i} + \left( \frac{9\alpha\alpha_i^2}{4} + \frac{3}{2}\alpha\alpha_i a_{n+i} + \frac{3\alpha\alpha_{n+i}^2}{2} \right) \quad (18)$$

$$K_{i,n+i} = \left( \frac{3\alpha\alpha_i^2}{4} + 3\alpha\alpha_i a_{n+i} \right)$$

$$K_{n+i,i} = \left( \frac{3\alpha\alpha_i^2}{4} + 3\alpha\alpha_i a_{n+i} \right)$$

$$K_{n+i,n+i} = \frac{\beta_i}{\gamma_i} + \left( \frac{3\alpha\alpha_i^2}{2} + \frac{9\alpha\alpha_{n+i}^2}{4} \right)$$

بقیه عناصر ماتریسهای  $[K]$  و  $[W]$  صفر می‌باشند. همچنین بردارهای  $R$  و  $Q$  نیز به صورت زیر بیان می‌شوند.

$$\left( \frac{\omega}{\omega_l} \right)^2 \ddot{a}_i + \left[ \frac{\beta_i}{\gamma_i} + \beta_i \left( \frac{\omega_k}{\omega_l} \right)^2 \delta_{in} + \sum_{j=1, j \neq i}^n \left( \frac{\omega_c^{ij}}{\omega_l} \right)^2 + \left( \frac{\omega_T^i}{\omega_l} \right)^2 \right] a_i + \alpha a - \sum_{j=1, j \neq i}^n \left( \frac{\omega_c^{ij}}{\omega_l} \right)^2 a_j = 0 \quad (11)$$

به طور کلی حل تحلیلی دستگاه معادلات (۱۱) به خاطر حضور جمله‌های غیرخطی و کوپله‌بودن بسیار مشکل است. به همین دلیل در این مقاله روش حلی با دقت بالا موسوم به روش هارمونیک بالانس جزئی به منظور دستیابی به حل عددی دستگاه معادلات (۱۱) مورد استفاده قرار گرفته است. فرض کنید  $a_i, \omega_0$  وضعیت مشخص اولیه از رفتار ارتعاشی نانو لوله مورد مطالعه باشد. بنابراین یک وضعیت ارتعاشی در همسایگی وضعیت اولیه با نمو دامنه‌ای  $\Delta a_{i_0}$  و نمو فرکانسی  $\Delta \omega$  می‌تواند به صورت زیر بیان شود.

$$a_i = a_{i_0} + \Delta a_{i_0} \quad (12)$$

$$\omega = \omega_0 + \Delta \omega$$

با قرار دادن معادله (۱۲) در معادله (۱۱) و صرف نظر کردن از عوامل کوچک با توان بالا، معادله نموی خطی شده زیر حاصل می‌شود:

$$\left( \frac{\omega}{\omega_l} \right)^2 \Delta \ddot{a}_{i_0} + \left[ \frac{\beta_i}{\gamma_i} + \beta_i \left( \frac{\omega_k}{\omega_l} \right)^2 + \sum_{j=1, j \neq i}^n \left( \frac{\omega_c^{ij}}{\omega_l} \right)^2 + \left( \frac{\omega_T^i}{\omega_l} \right)^2 \right] \Delta a_{i_0} + 3\alpha\alpha_{i_0}^2 \Delta a_{i_0} - \sum_{j=1, j \neq i}^n \left( \frac{\omega_c^{ij}}{\omega_l} \right)^2 \Delta a_{j_0} = R_i - \left[ \frac{\omega_0}{\omega_l} \right] \left[ \frac{\Delta \omega}{\omega_l} \right] \ddot{a}_{i_0} \quad (13)$$

بنابراین در معادله (۱۳):

$$R_i = - \left( \frac{\omega_0}{\omega_l} \right)^2 \ddot{a}_{i_0} - \left[ \frac{\beta_i}{\gamma_i} + \beta_i \left( \frac{\omega_k}{\omega_l} \right)^2 + \sum_{j=1, j \neq i}^n \left( \frac{\omega_c^{ij}}{\omega_l} \right)^2 + \left( \frac{\omega_T^i}{\omega_l} \right)^2 \right] a_{i_0} - \alpha\alpha_{i_0}^3 + \sum_{j=1, j \neq i}^n \left( \frac{\omega_c^{ij}}{\omega_l} \right)^2 a_{j_0} \quad (14)$$

#### ۴- پاسخ فرکانس غیر خطی برای نانو لوله

نانو لوله کربنی مورد مطالعه دارای مدول الاستیسیته  $E = 1/TPa$ ، چگالی  $\rho = 1300 Kg/m^3$ ، طول  $L = 45nm$ ، قطر خارجی  $d_1 = 3nm$  و قطر داخلی  $d_2 = 232 nm$  و ضخامت  $t = 0.34nm$  و ضریب نفوذ  $\alpha = -1/6 \times 10^{-6} K^{-1}$  می باشد. در جدول شماره ۱، فرکانسهای پایه به ترتیب برای نانو لوله تک لایه (SWNT) دو لایه (DWNT) و سه لایه (TWNT) آورده شده است که با مرجع [۲] کاملاً مطابقت دارد.

جدول (۱) فرکانسهای پایه (THz) برای SWNT، DWNT و TWNT

$k = 10^9$	$k = 10^8$	$k = 0$	
0.3055	0.2102	0.1344	SWNT
0.2754	0.1895	0.1212	DWNT
0.2581	0.1758	0.1116	TWNT

با توجه به جداول بالا فرکانس پایه نانو لوله ها با افزایش تعداد لایه ها و مقدار ضریب بستر الاستیک به ترتیب کاهش و افزایش می یابد. در ادامه اثرات ضرایب بستر الاستیک مختلف و نسبت طول به قطر خارجی به ازای  $k = 10^9 N/m^2$  بر رفتار فرکانسی نانولوله به ترتیب در شکل های (۲) و (۳) آورده شده است.

با توجه به شکل های (۲) و (۳) با افزایش ضریب بستر الاستیک و نسبت طول به قطر خارجی نانو لوله رفتار سیستم به سمت رفتار خطی میل می کند. به عبارت دیگر فرکانس غیر خطی نانولوله به فرکانس خطی آن نزدیک می شود. همچنین با توجه به شکل (۴)، به ازای دمای  $T = 50^\circ K$  رفتار فرکانسی سیستم مشابه زمانی است که دمای آن برابر صفر است. اما با توجه به مقایسه این دو حالت با افزایش  $T = 50K$  درجه ای دمای نانو تیوپ نسبت فرکانس غیر خطی به فرکانس خطی آن سطح پایین تری را به خود اختصاص می دهد. با توجه به شکل (۵) نیز با افزایش تعداد لایه ها نسبت فرکانس غیرخطی به فرکانس خطی سطوح پایین تری را به خود اختصاص می دهد.

$$W_{i,i} = -\left(\frac{\omega_0}{\omega_l}\right)^2 + \beta_i \left(\frac{\omega_k}{\omega_l}\right)^2 \delta_{in} + \sum_{j=1, j \neq i}^n \left(\frac{\omega_c^{ij}}{\omega_l}\right)^2 + \left(\frac{\omega_T^i}{\omega_l}\right)^2$$

$$W_{i,j} = -\left(\frac{\omega_c^{ij}}{\omega_l}\right)^2 \quad j \neq i$$

$$W_{n+i, n+i} = -\left(\frac{\omega_0}{\omega_l}\right)^2 + \beta_i \left(\frac{\omega_k}{\omega_l}\right)^2 \delta_{in} + \sum_{j=1, j \neq i}^n \left(\frac{\omega_c^{ij}}{\omega_l}\right)^2 + \left(\frac{\omega_T^i}{\omega_l}\right)^2$$

$$W_{n+i, n+j} = -\left(\frac{\omega_c^{ij}}{\omega_l}\right)^2 \quad j \neq i$$
(۱۹)

$$R_i = \left(\frac{\omega_0}{\omega_l}\right)^2 (a_i) - \left[ \frac{\beta_i}{\gamma_i} + \beta_i \left(\frac{\omega_k}{\omega_l}\right)^2 \delta_{in} + \sum_{j=1, j \neq i}^n \left(\frac{\omega_c^{ij}}{\omega_l}\right)^2 + \left(\frac{\omega_T^i}{\omega_l}\right)^2 \right]$$

$$(a_i) - \left( \frac{\gamma \alpha a_i^2}{4} + \frac{\gamma \alpha a_i^2 a_{n+i}}{4} + \frac{\gamma \alpha a_i^2 a_{n+i}^2}{4} \right) + \sum_{j=1, j \neq i}^n \left(\frac{\omega_c^{ij}}{\omega_l}\right)^2 (a_j)$$

$$R_{n+i} = \left(\frac{\omega_0}{\omega_l}\right)^2 (a_{n+i}) - \left[ \frac{\beta_i}{\gamma_i} + \beta_i \left(\frac{\omega_k}{\omega_l}\right)^2 \delta_{in} + \sum_{j=1, j \neq i}^n \left(\frac{\omega_c^{ij}}{\omega_l}\right)^2 + \left(\frac{\omega_T^i}{\omega_l}\right)^2 \right]$$

$$(a_{n+i}) - \left( \frac{\gamma \alpha a_i^2}{4} + \frac{\gamma \alpha a_i^2 a_{n+i}}{4} + \frac{\gamma \alpha a_i^2 a_{n+i}^2}{4} \right) + \sum_{j=1, j \neq i}^n \left(\frac{\omega_c^{ij}}{\omega_l}\right)^2 (a_{j+n})$$
(۲۰)

$$Q_i = \left( \frac{\omega_0 \Delta \omega}{\omega_l^2} \right)$$

$$Q_{n+i} = \left( \frac{\omega_0 \Delta \omega}{\omega_l^2} \right) a_{n+i}$$
(۲۱)

با بکارگیری روش عددی نیوتن برای حل دستگاه معادلات غیرخطی و انتخاب  $a_i, a_{i+n}, \omega, \Delta a_i$  به عنوان پارامترهای مشخص، دستگاه معادله (۱۴) برای  $\Delta \omega, \Delta a_i, \Delta a_{i+n}$  حل می شود و با به دست آوردن مقادیر جدید  $a_i, a_{i+n}, \omega_0$  و جایگزینی آنها با مقادیر قبلی روند حل تکرار می شود.

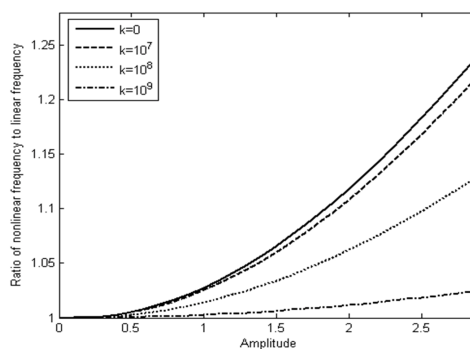
### ۵- نتیجه گیری

در این مقاله براساس مدل تیر اویلر-برنولی، معادلات دیفرانسیل جزئی غیر خطی حاکم بر رفتار دینامیکی نانولوله چند لایه به صورت کلی استخراج شده و با به کارگیری تابع شکل متناسب با شرط مرزی تکیه گاه ساده معادلات دیفرانسیل معمولی تابع زمان به دست آمده است. نیروهای وندروالسی بین لایه‌ها نانو لوله کربنی به صورت تاثیر متقابل تمامی لایه‌ها بر روی هم در نظر گرفته شده است که نسبت به مطالعات گذشته مدل کاملتری می باشد.

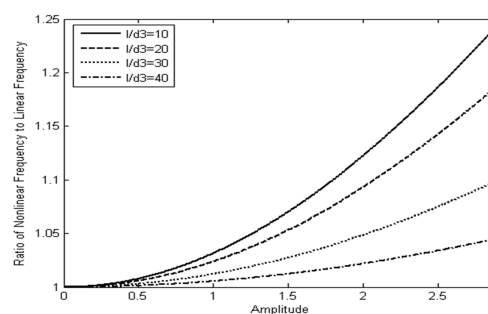
روش هارمونیک بالانس جزئی روشی تحلیلی تقریبی است که از آن برای به دست آوردن پاسخ فرکانسی غیر خطی نانولوله کربنی مورد استفاده قرار گرفته است. اثرات ضریب بستر الاستیک، نسبت طول نانو لوله کربنی به قطر خارجی، تعداد لایه های نانو لوله کربنی و دما بر پاسخ فرکانسی نانو لوله تک لایه، دو لایه و سه لایه مورد بررسی قرار گرفت. با توجه به نتایج حاصله با افزایش کلیه پارامترهای متغیر مورد بررسی پاسخ فرکانسی سطوح پایین تری را به خود اختصاص می دهد. به عبارت دیگر نسبت فرکانس غیر خطی به فرکانس خطی نزدیک شده و رفتار غیر خطی نانولوله کربنی به رفتار خطی میل می کند.

### مراجع

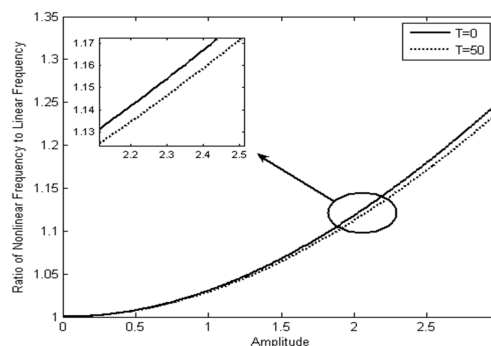
- [1] Iijima S., Helica microtubes of graphitic carbon, *Nature*, 354, 1991, 56-58.
- [2] Fu Y.M., Hong J.W., Wang X.Q., Analysis of nonlinear vibration for embedded carbon nanotubes, *J. Sound and Vibration*, Vol. 296, 2006, pp. 746-756.
- [3] Wang C.M., Tan V.B.C., Zhang Y.Y., Timoshenko beam model for vibration analysis of multi-walled carbon nanotubes, *J. Sound and Vibration*, Vol. 294, 2006, pp.1060-1072.
- [4] Lu Y. J., Wang X, 2006, combined torsional buckling of multi-walled carbon nanotubes. *J. Phys D*, Vol.39, pp. 3380-3387.
- [5] Wang X., Lu G., Lu Y.J., Buckling of embedded multi-walled carbon nanotubes under combined torsion and axial loading, *Int J. Solids and Structures*, Vol. 44, 2007, 336-351.



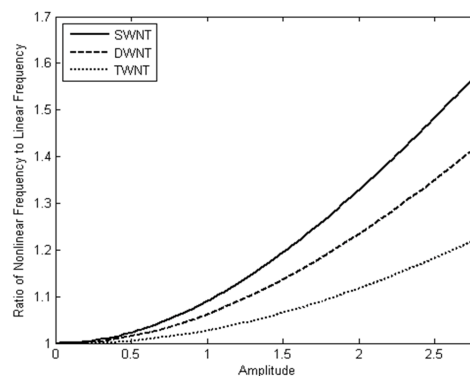
شکل (۲) تأثیر ضریب بستر الاستیک بر فرکانس غیر خطی TWNT



شکل (۳) تأثیر نسبت طول به قطر بر فرکانس غیر خطی TWNT



شکل (۴) تأثیر دما بر فرکانس غیر خطی TWNT



شکل (۵) تأثیر تعداد لایه های نانو لوله بر فرکانس غیر خطی

- [6] Hsu Jung-Chang, Chang Ruo-Ping, Chang Win-Jin, Resonance frequency of chiral single-walled carbon nanotubes using Timoshenko beam theory, *J. Physics Letters A*, Vol. 372, 2008, pp.2757–2759
- [7] Wang L., Ni Q., Li M., Qian Q., The thermal effect on vibration and instability of carbon nanotubes conveying fluid, *Physica E*, Vol. 40(10), 2008, pp. 3179-3182.
- [8] Hahn H.T., Williams J.G., Compression failure mechanisms in unidirectional composite, *J. Composite Materials Testing and Design*, Vol.7, 1984, pp.115–139.
- [9] Jones J.E., *The determination of molecular from the variation of the viscosity of a gas with temperature*, Proc. Roy. Soc. 106A, 1924,441.
- [10] Girifalco L.A., Lad R.A., Energy of cohesion, compressibility, and the potential energy function of graphite system, *J. Chemical Physics*, 195, Vol.25, pp.693–697.