تحلیل ارتعاشات آزاد پوسته استوانه‌ای دو سر گیردار FGM با رینگ تقویت شده بر اساس مدل ردی

محمد رضا عیسوند زیبائی[۱،*] مهدی سلمان زاده[۲] سید رسول موسوی‌فر[۳]

* نویسنده مسئول: isvandzibaei@iauandimeshk.ac.ir

چکیده

در این مقاله به بررسی ارتعاشات آزاد یک پوسته استوانه‌ای ساخته شده از مواد FGM (تابعی) با رینگ تقویت شده که ترکیبی از فولاد ضد زنگ و نیکل می باشد پرداخته می‌شود. خصوصیات مواد در جهت ضخامت پوسته مطابق قانون توزیع کسر حجمی تغییر می‌کنند. در این مطالعه پوسته‌های استوانه‌ای رینگ تقویت شده دارند و این رینگها به‌طور اختیاری در طول قرار دارند. این مطالعه بر اساس تئوری مرتبه سوم تغییر شکل برشی پوسته انجام شده است و استخراج معادلات حرکت این پوسته استوانه‌ای FGM بر اساس اصل همیلتون انجام شده است. نتایج ارائه شده در این تحقیق شامل فرکانسهای طبیعی، اثر رفتار کسر حجمی، اثر موقعیت رینگ تقویت شده روی پوسته و اثر شرایط مرزی گیردار-گیردار روی فرکانسهای طبیعی پوسته استوانه‌ای FGM است.

واژه‌های کلیدی: ارتعاشات مواد تابعی، پوسته استوانه‌ای، رینگ، اصل همیلتون.

۱- دانشجوی دکتری مهندسی مکانیک و عضو هیات علمی دانشگاه آزاد اسلامی واحد اندیمشک.

۲- عضو هیات علمی دانشگاه آزاد اسلامی واحد شوشتر.

۳- عضو هیات علمی دانشگاه آزاد اسلامی واحد ایذه.

۱- مقدمه

به دلیل کاربردهای وسیع پوسته‌های استوانه ای در طراحی سازه‌های دریایی، ساختمانی، هوایی و غیره، تحقیقات انجام شده در این زمینه فروان است که هر کدام با توجه به نوع تحلیل و روش حل از یکدیگر متمایز می‌شوند. انتخاب زمینه تحقیق با توجه به کاربرد آن در موارد مختلف صنعتی، نظامی، پزشکی و غیره است. این زمینه ها شامل حالتهای مختلف بارگذاری، شرایط مختلف تکیه گاهی یا مقاوم‌سازی پوسته‌ها و یا پایداری آنها در مقابل عوامل گوناگون بوده است. در سالهای اخیر تحقیقات متعددی بر روی مواد تابعی انجام شده است. این مواد با توجه به پیوستگی ترکیب مواد تشکیل دهنده خواص مکانیکی مؤثرتری نسبت به مواد کامپوزیت لایه ای دارند. مواد تابعی موادی جدید با زیر ساختار غیرهمگن هستند که خواص مکانیکی آن به‌طور ملایم و پیوسته از یک سطح تا سطح دیگر جسم تغییر می‌کند. نوع رایج مواد تابعی از ترکیب سرامیک و فلز حاصل می‌شود. نسبت این ترکیب در راستای ضخامت متغیر بوده و چگالی ذرات فلز معلق در بستر سرامیک از سطح فلزی تا سطح سرامیکی توسط یک تابع معین، که می‌تواند خطی یا غیر خطی باشد، تغییر می‌یابد. از کاربردهای مهندسی این مواد می توان به استفاده در موتور توربینها، ابزارها، آب بندی‌های مقاوم در برابر حرارت، سایش و ساخت سازه‌های صنایع هوایی، فضایی و دریایی نام برد. مقالات متعددی به بحث در مورد ارتعاش پوسته‌های استوانه‌ای شکل پرداخته‌اند. ارتعاشات آزاد یک پوسته استوانه‌ای ایزوتروپ با رینگ توسط لوی و لم [۱] بحث شده است. حل دقیق ارتعاشات پوسته استوانه ای با تقویت کننده‌های رینگ میانی بر اساس تئوری کلاسیک توسط زیانگ و همکاران [۲] مورد بررسی قرارگرفته شد. ارتعاشات آزاد یک پوسته استوانه‌ای تابعی با سطح مقطع بیضوی توسط پاتل و همکاران مورد بررسی قرار گرفت [۳]. ارتعاشات پوسته استوانه‌ای ساخته شده ازمواد تابعی توسط لوی و همکاران مورد بحث قرار گرفت[۴]. ارتعاشات پوسته استوانه‌ای ساخته شده از مواد تابعی در محیط مایع توسط چن و همکاران [۵] و ارتعاشات یک پوسته استوانه ای تحت شرایط مختلف تکیه‌گاهی توسط پراندهام و همکاران[۶] مورد تحقیق و بررسی قرار گرفته است. تحقیقات انجام شده شامل موضوعاتی مانند تنشهای حرارتی توسط لیو و همکاران [۷] بار گذاری پیچشی توسط سوفیگر و همکاران [۸] و تحلیل الاستیک توسط ردی و همکاران [۹] انجام شده است. همچنین تحقیقاتی در زمینه مواد تابعی با توجه به خصوصیات فرکانسها، ناشی از ارتعاشات توسط نعیم و همکاران [۱۰] و مومتاز و همکاران [۱۱] صورت پذیرفت. در این مقاله به بررسی ارتعاشات آزاد یک پوسته استوانه ساخته شده از مواد FGM با یک رینگ تقویت شده تحت تکیه گاههای گیردار-گیردار بر اساس تئوری مرتبه سوم تغییر شکل برشی مطابق مدل ردی پرداخته می شود.

۲- مواد تابعی

برای یک پوسته استوانه ای ساخته شده از مواد تابعی خصوصیات مواد مانند مدول الاستیسیته E، ضریب پواسون ν و چگالی ρ به صورت تابعی از رفتار کسر حجمی فرض می شوند. در این روابط با توجه به اینکه جنس پوسته از دو ماده است. اندیس یک مربوط به جنس ماده اول (فولاد ضد زنگ) و اندیس دوم مربوط به جنس ماده دوم نیکل است[۱۲] .

$$E=(E_۱-E_۲)\left(\frac{۲Z+h}{۲h}\right)^N+E_۲ \qquad (۱)$$

$$\nu=(\nu_۱-\nu_۲)\left(\frac{۲Z+h}{۲h}\right)^N+\nu_۲ \qquad (۲)$$

$$\rho=(\rho_۱-\rho_۲)\left(\frac{۲Z+h}{۲h}\right)^N+\rho_۲ \qquad (۳)$$

۳- روابط کرنش-جابه‌جایی

روابط کرنش- جابه‌جایی برای یک پوسته نازک به‌صورت زیر در نظر گرفته می شود [۱۳] .

$$\varepsilon_{11}=\frac{1}{A_1(1+\frac{\alpha_3}{R_1})}\left[\frac{\partial U_1}{\partial\alpha_1}+\frac{U_2}{A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}+U_3\frac{A_1}{R_1}\right] \qquad (۴)$$

$$\varepsilon_{22}\frac{1}{A_2(1+\frac{\alpha_3}{R_2})}\left[\frac{\partial U_2}{\partial\alpha_2}+\frac{U_1}{A_1}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}+U_3\frac{A_2}{R_2}\right] \qquad (۵)$$

$$\varepsilon_{33}=\frac{\partial U_3}{\partial\alpha_3} \qquad (۶)$$

(۷)

$$\varepsilon_{12}=\frac{A_1(1+\frac{\alpha_3}{R_1})}{A_2(1+\frac{\alpha_3}{R_2})}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(\frac{U_1}{A_1(1+\frac{\alpha_3}{R_1})}\right)+\frac{A_2(1+\frac{\alpha_3}{R_2})}{A_1(1+\frac{\alpha_3}{R_1})}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left(\frac{U_2}{A_2(1+\frac{\alpha_3}{R_2})}\right)$$

(۸)

$$\varepsilon_{13}=A_1(1+\frac{\alpha_3}{R_1})\frac{\partial}{\partial\alpha_3}\left(\frac{U_1}{A_1(1+\frac{\alpha_3}{R_1})}\right)+\frac{1}{A_1(1+\frac{\alpha_3}{R_1})}\frac{\partial U_3}{\partial\alpha_1}$$

(۹)

$$\varepsilon_{23}=A_2(1+\frac{\alpha_3}{R_2})\frac{\partial}{\partial\alpha_3}\left(\frac{U_2}{A_2(1+\frac{\alpha_3}{R_2})}\right)+\frac{1}{A_2(1+\frac{\alpha_3}{R_2})}\frac{\partial U_3}{\partial\alpha_2}$$

(۱۰)

$$\begin{cases} U_1=u_1(\alpha_1,\alpha_2)+\alpha_3.\phi_1(\alpha_1,\alpha_2)+\alpha_3^2.\psi_1(\alpha_1,\alpha_2)+\alpha_3^3.\beta_1(\alpha_1,\alpha_2)\\ U_2=u_2(\alpha_1,\alpha_2)+\alpha_3.\phi_2(\alpha_1,\alpha_2)+\alpha_3^2.\psi_2(\alpha_1,\alpha_2)+\alpha_3^3.\beta_2(\alpha_1,\alpha_2)\\ U_3=u_3(\alpha_1,\alpha_2)\end{cases}$$

در این روابط A_1 و A_2 پارامترهای لامه، U_1 ، U_2 و U_3 میدان جابه‌جایی در جهات $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$، R_1 و R_2 شعاعهای پوسته می‌باشند. تئوری مرتبه سوم تغییر شکل برشی مطابق با مدل ردی به صورت زیر انتخاب می‌شود[۱۳].

از طرفی چون تنش‌های برشی ε_{23} و ε_{13} در دو سطح مرزی $Z=\pm\frac{h}{2}$ صفر می‌باشد. میدان جابه‌جایی به‌صورت زیر در می‌آید.

(۱۱)

$$\begin{cases} U_1=u_1(\alpha_1,\alpha_2)+\alpha_3.\phi_1(\alpha_1,\alpha_2)-C_1.\alpha_3^3(-\frac{u_1}{R_1}+\phi_1+\frac{\partial u_3}{A_1\partial\alpha_1})\\ U_2=u_2(\alpha_1,\alpha_2)+\alpha_3.\phi_2(\alpha_1,\alpha_2)-C_1.\alpha_3^3(-\frac{u_2}{R_2}+\phi_2+\frac{\partial u_3}{A_2\partial\alpha_2})\\ U_3=u_3(\alpha_1,\alpha_2)\end{cases}$$

که در آن $C_1=\frac{4}{3h^2}$ می باشد. با قرار دادن معادله (۱۱) در روابط (۴) تا (۹) روابط کرنش- جابجایی به صورت ماتریسی به صورت زیر در می‌آید:

$$\begin{Bmatrix}\varepsilon_{11}\\ \varepsilon_{22}\\ \varepsilon_{12}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\varepsilon_{11}^{\circ}\\ \varepsilon_{22}^{\circ}\\ \varepsilon_{12}^{\circ}\end{Bmatrix}+\alpha_3\begin{Bmatrix}k_{11}\\ k_{22}\\ k_{12}\end{Bmatrix}+\alpha_3^3\begin{Bmatrix}k'_{11}\\ k'_{22}\\ k'_{12}\end{Bmatrix} \qquad (۱۲)$$

$$\begin{Bmatrix}\varepsilon_{13}\\ \varepsilon_{23}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\gamma_{13}^{\circ}\\ \gamma_{23}^{\circ}\end{Bmatrix}+\alpha_3^2\begin{Bmatrix}\gamma_{13}^2\\ \gamma_{23}^2\end{Bmatrix}+\alpha_3^3\begin{Bmatrix}\gamma_{13}^3\\ \gamma_{23}^3\end{Bmatrix} \qquad (۱۳)$$

که در آن؛

$$\begin{Bmatrix}\varepsilon_{11}^{\circ}\\ \varepsilon_{22}^{\circ}\\ \varepsilon_{12}^{\circ}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}(\frac{1}{A_1}\frac{\partial u_1}{\partial\alpha_1}+\frac{u_2}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}+\frac{u_3}{R_1})\\ (\frac{1}{A_2}\frac{\partial u_2}{\partial\alpha_2}+\frac{u_1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}+\frac{u_3}{R_2})\\ \frac{A_2}{A_1}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}(\frac{u_2}{A_2})+\frac{A_1}{A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}(\frac{u_1}{A_1})\end{Bmatrix} \qquad (۱۴)$$

$$\begin{Bmatrix}k_{11}\\ k_{22}\\ k_{12}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}(\frac{1}{A_1}\frac{\partial\phi_1}{\partial\alpha_1}+\frac{\phi_2}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2})\\ (\frac{1}{A_2}\frac{\partial\phi_2}{\partial\alpha_2}+\frac{\phi_1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1})\\ (\frac{A_2}{A_1}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}(\frac{\phi_2}{A_2})+\frac{A_1}{A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}(\frac{\phi_1}{A_1}))\end{Bmatrix} \qquad (۱۵)$$

(۱۶)

$$\begin{Bmatrix} k'_{11} \\ k'_{22} \\ k'_{12} \end{Bmatrix} = -C_1 \begin{Bmatrix} \left(\frac{1}{A_1}\left(-\frac{\partial u_1}{R_1\partial\alpha_1}+\frac{\partial\phi_1}{\partial\alpha_1}+\frac{\partial^2 u_3}{A_1\partial\alpha_1^2}-\frac{\partial A_1}{A_1^2\partial\alpha_1}\frac{\partial u_3}{\partial\alpha_1}\right)+\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\frac{1}{A_1A_2}\left(-\frac{u_2}{R_2}+\phi_2+\frac{\partial u_3}{A_2\partial\alpha_2}\right)\right) \\ \left(\frac{1}{A_2}\left(-\frac{\partial u_2}{R_2\partial\alpha_2}+\frac{\partial\phi_2}{\partial\alpha_2}+\frac{\partial^2 u_3}{A_2\partial\alpha_2^2}-\frac{\partial A_2}{A_2^2\partial\alpha_2}\frac{\partial u_3}{\partial\alpha_2}\right)+\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\frac{1}{A_1A_2}\left(-\frac{u_1}{R_1}+\phi_1+\frac{\partial u_3}{A_1\partial\alpha_1}\right)\right) \\ \left(\frac{A_2}{A_1}\left(-\frac{\partial}{R_2\partial\alpha_1}\left(\frac{u_2}{A_2}\right)+\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left(\frac{\phi_2}{A_2}\right)+\frac{1}{A_2^2}\frac{\partial^2 u_3}{\partial\alpha_1\partial\alpha_2}-\frac{1}{A_2^4}\frac{\partial A_2^2}{\partial\alpha_1}\frac{\partial u_3}{\partial\alpha_2}\right)+\right. \\ \left.+\frac{A_1}{A_2}\left(-\frac{\partial}{R_1\partial\alpha_2}\left(\frac{u_1}{A_1}\right)+\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(\frac{\phi_1}{A_1}\right)+\frac{1}{A_1^2}\frac{\partial^2 u_3}{\partial\alpha_1\partial\alpha_2}-\frac{1}{A_1^4}\frac{\partial A_1^2}{\partial\alpha_2}\frac{\partial u_3}{\partial\alpha_1}\right)\right) \end{Bmatrix}$$

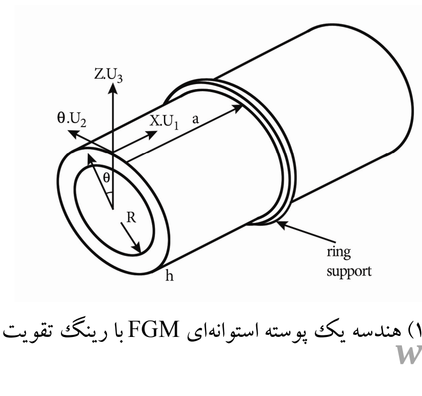
$$\begin{Bmatrix} \dot{\gamma}_{13} \\ \dot{\gamma}_{23} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \left(\phi_1-\frac{u_1}{R_1}+\frac{1}{A_1}\frac{\partial u_3}{\partial\alpha_1}\right) \\ \left(\phi_2-\frac{u_2}{R_2}+\frac{1}{A_2}\frac{\partial u_3}{\partial\alpha_2}\right) \end{Bmatrix} \quad (۱۷)$$

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{13}^2 \\ \gamma_{23}^2 \end{Bmatrix} = 3C_1 \begin{Bmatrix} \left(-\frac{u_1}{R_1}+\phi_1+\frac{\partial u_3}{A_1\partial\alpha_1}\right) \\ \left(-\frac{u_2}{R_2}+\phi_2+\frac{\partial u_3}{A_2\partial\alpha_2}\right) \end{Bmatrix} \quad (۱۸)$$

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{13}^3 \\ \gamma_{23}^3 \end{Bmatrix} = C_1 \begin{Bmatrix} \dfrac{\left(-\frac{u_1}{R_1}+\phi_1+\frac{\partial u_3}{A_1\partial\alpha_1}\right)}{R_1} \\ \dfrac{\left(-\frac{u_2}{R_2}+\phi_2+\frac{\partial u_3}{A_2\partial\alpha_2}\right)}{R_2} \end{Bmatrix} \quad (۱۹)$$

٤- روابط تنش-کرنش

یک پوسته استوانه‌ای FGM به طول L، شعاع R، ضخامت h و یک رینگ تقویت شده از جنس تابعی مطابق شکل (۱) در نظر می‌گیریم. سطح مرجع در وسط پوسته استوانه‌ای انتخاب می شود، همچنین a موقعیت رینگ در طول پوسته است.



شکل(۱) هندسه یک پوسته استوانه‌ای FGM با رینگ تقویت شده

روابط تنش- کرنش برای یک پوسته نازک به‌صورت زیر می باشد:

(۲۰)

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & \cdot & \cdot & \cdot \\ Q_{12} & Q_{22} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & Q_{44} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & Q_{55} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} \end{Bmatrix}$$

که در آن ؛

$$Q_{11} = Q_{22} = \frac{E}{1-\nu^2} \quad و \quad Q_{12} = \frac{\nu E}{1-\nu^2} \quad (۲۱)$$

$$Q_{44} = Q_{55} = Q_{66} = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (۲۲)$$

برای به‌دست آوردن روابط نیروهای برآیند تعاریف زیر را در نظر می‌گیریم:

(۲۳)

$$\{A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}, E_{ij}, F_{ij}, G_{ij}, H_{ij}\} = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij}\{1, \alpha_3, \alpha_3^2, \alpha_3^3, \alpha_3^4, \alpha_3^5, \alpha_3^6\}\, d\alpha_3$$

که A_{ij} نشانگر مؤلفه‌های ماتریس سفتی کششی، D_{ij} مؤلفه‌های ماتریس سفتی خمشی، B_{ij} سفتی‌های کوپله خمشی- کششی و H_{ij} و F_{ij} و E_{ij} سفتی‌های درجه بالا می‌باشند. A_{ij} و D_{ij} و F_{ij} برای ۶ ,۵ ,۴ ,۲ ,۱= j و i در حالیکه E_{ij} و B_{ij} و G_{ij} و H_{ij} فقط برای ۶ ,۲ , ۱= j و i تعریف می‌شوند.

$$\begin{Bmatrix} N_{11} \\ N_{22} \\ N_{12} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} d\alpha_3 , \quad \begin{Bmatrix} M_{11} \\ M_{22} \\ M_{12} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} \alpha_3^3 d\alpha_3 \quad (۲۴)$$

$$\begin{Bmatrix} P_{11} \\ P_{22} \\ P_{12} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} \alpha_3^3 d\alpha_3 , \quad \begin{Bmatrix} P_{13} \\ \\ P_{23} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_{13} \\ \\ \sigma_{23} \end{Bmatrix} \alpha_3^3 d\alpha_3 \quad (۲۵)$$

$$\begin{Bmatrix} Q_{13} \\ Q_{23} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{Bmatrix} d\alpha_3 , \quad \begin{Bmatrix} R_{13} \\ R_{23} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{Bmatrix} \alpha_3^2 d\alpha_3 \quad (۲۶)$$

۵- معادلات حرکت برای ارتعاشات یک پوسته عام

معادلات حرکت برای ارتعاشات یک پوسته عـام را مـی توان با استفاده از اصل همیلتون استخراج کرد:

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}(\Pi-K)dt=0 \quad , \quad \Pi=U-V \tag{27}$$

که در آن U, K و V انرژی جنبشی، انرژی پتانسیل و انرژی کرنشی بارهای خـارجی وارد بـر پوسـته کـه انـرژی جنـشی، انرژی پتانسیل و بارهای وارد بر پوسته به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$K=\frac{1}{2}\int_{\alpha_1}\int_{\alpha_2}\int_{\alpha_3}\rho(\dot{U}_1^2+\dot{U}_2^2+\dot{U}_3^2)dV \tag{28}$$

(۲۹)

$$U=\int_{\alpha_1}\int_{\alpha_2}\int_{\alpha_3}(\sigma_{11}\varepsilon_{11}+\sigma_{22}\varepsilon_{22}+\sigma_{12}\varepsilon_{12}+\sigma_{13}\varepsilon_{13}+\sigma_{23}\varepsilon_{23})dV$$

(۳۰)

$$V=\int_{\alpha_1}\int_{\alpha_2}(q_1\delta U_1+q_2\delta U_2+q_3\delta U_3)A_1A_2d\alpha_1 d\alpha_2$$

که در آنها حجم به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$dV=A_1A_2d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3 \tag{31}$$

با استفاده از معادلات (۱۰) تا (۱۹) و جایگـذاری آن در معادله (۲۷) معادلات حرکت برای پوسته عام به صورت زیر بـه‌دسـت مـی آینـد کـه جمـلات ایـن معـادلات در پیوسـت آمده است.

معادله A(پیوست) (۳۲)

معادله B(پیوست) (۳۳)

معادله C(پیوست) (۳۴)

معادله D(پیوست) (۳۵)

معادله E(پیوست) (۳۶)

برای معادلات (۳۲) تا (۳۶) تعریف می کنیم:

$$I_i=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\rho\alpha_3^i d\alpha_3 \tag{37}$$

٦- معـادلات حرکـت بـرای ارتعاشـات یـک پوسـته استوانه‌ای

برای یک پوسته استوانه‌ای (در مختصات استوانه‌ای) داریم:

$$\begin{aligned}&R_2=a \quad , \quad \frac{1}{R}=0 \quad , \quad A_2=a \quad , \quad A_1=0 \quad , \\ &\alpha_3=\alpha_3 \quad , \quad \alpha_2=\theta \quad , \quad \alpha_1=x\end{aligned} \tag{38}$$

بـا جایگـذاری معادلـه (۳۸) در معـادلات (۳۲) تـا (۳۶) معادلات حرکت برای ارتعاشات یـک پوسـته اسـتوانه‌ای بـا استفاده از تئوری مرتبه سوم تغییر شکل برشی به صورت زیر به‌دست می آیند:

$$a\frac{\partial N_{11}}{\partial x}+\frac{\partial N_{12}}{\partial\theta}=I_0\ddot{u}_1+(I_1-C_1I_3)\ddot{\phi}_1-C_1I_3\frac{\partial\ddot{u}_3}{\partial x} \tag{39}$$

$$\begin{aligned}&\frac{\partial N_{22}}{\partial\theta}+C_1\frac{\partial P_{12}}{\partial x}+Q_{23}-3C_1R_{23}+C_1P_{23}= \\ &(I_0+2\frac{C_1}{a}I_3+\frac{C_1^2}{a^2}I_6)\ddot{u}_2+ \\ &(I_1-C_1I_3+\frac{C_1}{a}I_4-\frac{C_1^2}{a}I_6)\ddot{\phi}_2-(\frac{C_1}{a}I_3-\frac{C_1^2}{a^2}I_6)\frac{\partial\ddot{u}_3}{\partial\theta}\end{aligned} \tag{40}$$

$$\begin{aligned}&-C_1a\frac{\partial^2P_{11}}{\partial x^2}+N_{22}-\frac{C_1}{a}\frac{\partial^2P_{22}}{\partial\theta^2}-2C_1\frac{\partial^2P_{12}}{\partial x\partial\theta}-a\frac{\partial Q_{13}}{\partial x} \\ &+3C_1a\frac{\partial R_{13}}{\partial x}-\frac{\partial Q_{23}}{\partial\theta}++3C_1\frac{\partial R_{23}}{\partial\theta}-\frac{C_1}{a}\frac{\partial P_{23}}{\partial\theta}= \\ &-C_1I_3\frac{\partial u_1}{\partial x}-\frac{C_1}{a}I_3\frac{\partial u_2}{\partial\theta}+(-C_1I_4+C_1^2I_6)\frac{\partial\ddot{\phi}_1}{\partial x}+ \\ &(-\frac{C_1}{a}I_4+\frac{C_1^2}{a}I_6)\frac{\partial\ddot{\phi}_2}{\partial\theta}-\frac{C_1^2}{a^2}I_6\frac{\partial\ddot{u}_2}{\partial\theta} \\ &+C_1^2I_6\frac{\partial^2\ddot{u}_3}{\partial x^2}+\frac{C_1^2}{a}I_6\frac{\partial^2\ddot{u}_3}{\partial\theta^2}-\ddot{u}_3I_0\end{aligned} \tag{41}$$

$$\begin{aligned}&-a\frac{\partial M_{11}}{\partial x}+C_1a\frac{\partial P_{11}}{\partial x}-\frac{\partial M_{12}}{\partial\theta}+C_1\frac{\partial P_{12}}{\partial\theta}-3C_1R_{13}a \\ &+aQ_{13}=-I_1\ddot{u}_1+C_1I_3\ddot{u}_1+ \\ &(-I_2+2C_1I_4-C_1^2I_6)\ddot{\phi}_1+(C_1I_4-C_1^2I_6)\frac{\partial\ddot{u}_3}{\partial x}\end{aligned} \tag{42}$$

$$-\frac{\partial M_{22}}{\partial\theta}-C_1\frac{\partial P_{22}}{\partial\theta}-a\frac{\partial M_{12}}{\partial x}+C_1 a\frac{\partial P_{12}}{\partial x}-3C_1R_{23}a$$
$$+aQ_{23}+C_1R_{23}=(-I_1C_1I_3-\frac{C_1}{a}I_4)\ddot{u}_2$$
$$+(-I_2+2C_1I_4)\ddot{\phi}_2-\frac{C_1}{a}I_4\frac{\partial\ddot{u}_3}{\partial\theta} \qquad (43)$$

۷- تحلیل معادلات پوسته استوانه ای FGM با رینگ تقویت شده

میدان جابه‌جایی برای این پوسته استوانه‌ای FGM که شرایط مرزی مسئله را ارضا کند به صورت زیر تعریف می‌شود [۱] و [۱۲].

(۴۴)

$$u_1=\overline{A}\frac{\partial\phi(x)}{\partial x}\cos(n\theta)\cos(\omega t)$$
$$u_2=\overline{B}\,\phi(x)\sin(n\theta)\cos(\omega t)$$
$$u_3=\overline{C}\,\phi(x)\prod_{i=1}^{N}(x-a_i)^{\xi i}\cos(n\theta)\cos(\omega t)$$
$$\phi_1=\overline{D}\frac{\partial\phi(x)}{\partial x}\cos(n\theta)\cos(\omega t)$$
$$\phi_2=\overline{E}\,\phi(x)\sin(n\theta)\cos(\omega t)$$

که در آنها $\overline{E},\overline{D},\overline{C},\overline{B},\overline{A}$ ثابتهایی هستند که دامنه ارتعاشات در جهات x,θ,z را نشان می‌دهند. $\phi(x)$ تابع خطی است که شرایط مرزی هندسی را ارضا می‌کند. a_i موقعیت رینگ i ام را نشان می‌دهد و ζ_i پارامتری است که وقتی رینگ وجود داشته باشد، مقدار یک و وقتی رینگ موجود نیست، مقدار صفر را به خود می‌گیرد. n تعداد مودهای در جهت محیطی را نشان می‌دهد و ω فرکانس طبیعی ارتعاش می‌باشد. تابع محوری $\phi(x)$ نیز مانند تابع محوری برای تیر به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\phi(x)=\gamma_1\cosh(\frac{\lambda_m x}{L})+\gamma_2\cos(\frac{\lambda_m x}{L})-\xi_m\times$$
$$(\gamma_3\sinh(\frac{\lambda_m x}{L})+\gamma_4\sin(\frac{\lambda_m x}{L})) \qquad (45)$$

شرایط مرزی گیردار-گیردار برای این پوسته استوانه‌ای FGM به صورت زیر تعریف می شود:

$$\phi(0)=\phi'(L)=0 \qquad (46)$$

با جایگذاری معادله (۴۴) در معادلات (۳۹) تا (۴۳) می‌توانیم معادلات حرکت این پوسته استوانه‌ای FGM را به فرم ماتریسی درآورد):

$$[C]\begin{Bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\\\phi_1\\\phi_2\end{Bmatrix}-\omega^2[M]\begin{Bmatrix}\overline{A}\\\overline{B}\\\overline{C}\\\overline{D}\\\overline{E}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\end{Bmatrix} \qquad (47)$$

در نهایت با صفر قرار دادن دترمینان ضرایب به صورت زیر خواهیم داشت:

$$\det(C_{ij}-M_{ij}\,\omega^2)=0 \qquad (48)$$

با بسط دادن دترمینان ضرایب بر حسب ω بدست می‌آیند:

$$\beta_0\omega^{10}+\beta_1\omega^8+\beta_2\omega^6+\beta_3\omega^4+\beta_4\omega^2+\beta_5=0 \qquad (49)$$

با حل این معادله ده ریشه برای این استوانه‌ای FGM به‌دست می‌آوریم، پنج ریشه مثبت و پنج ریشه منفی که ریشه‌های منفی غیر قابل قبول هستند و از پنج ریشه مثبت کوچکترین ریشه فرکانس طبیعی مورد مطالعه در این تحقیق است. پوسته استوانه‌ای FGM مورد بررسی شده در این تحقیق تشکیل شده از نیکل در سطح داخلی و فولاد ضد زنگ در سطح خارجی پوسته است. خصوصیات مواد برای نیکل و فولاد ضد زنگ در دمای $T=300K$ مطابق جدول (۱) در نظر گرفته می شود.

جدول (۱) خصوصیات مواد[۱۴]

ضرایب	فولاد ضد زنگ			نیکل		
	E	ν	ρ	E	ν	ρ
P_0	$201/4\times10^{9}$	۰/۳۲۶۲	۸۱۶۶	$223/95\times10^{9}$	۰/۳۱۰۰	۸۹۰۰
P_{-1}	۰	۰	۰	۰	۰	۰
P_1	$3/079\times10^{-4}$	$-2/002\times10^{-4}$	۰	$-2/794\times10^{-4}$	۰	۰
P_2	$-6/534\times10^{-7}$	$3/797\times10^{-7}$	۰	$-3/797\times10^{-9}$	۰	۰
P_3	۰	۰	۰		۰	۰

در این جدول خواص مواد FGM می تواند به صورت تابعی از دما باشد، خواص P برای مواد FGM به صورت زیر است:

$$P = P_{\circ}(P_{-۱}T^{-۱} + ۱ + P_{۱}T + P_{۲}T^{۲} + P_{۳}T^{۳}) \qquad (۵۰)$$

که $P_{\circ}, P_{-۱}, P_{۱}, P_{۲}$ و $P_{۳}$ ضرایب دمایی بر حسب کلوین‌هستند.

۸- بحث درباره نتایج

در ایـن مقالـه بـه منظـور آگـاهی از صـحت و درسـتی جوابهای بـه‌دسـت آمـده، نتـایج بـا دیگـر تحقیقـات کـه از تئـوری کلاسـیک اسـتفاده کـرده انـد مطـابق بـا جـدول (۲) بررسی و مقایسه شده است که در این جـدول N عـدد مـوج محیطی و m عدد موج طولی می‌باشد.

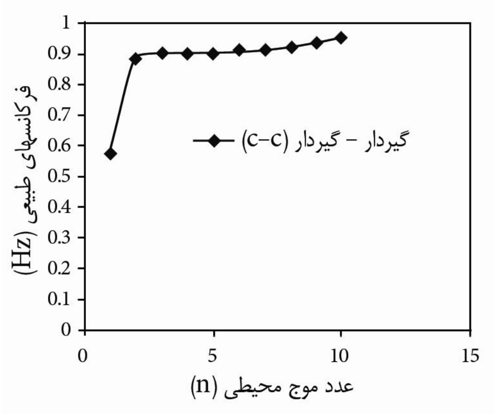
جدول (۲) مقایسه فرکانس های طبیعی برای یک پوسته استوانه‌ای FGM

$L = ۲۰/۳\,cm \;,\; R = ۵./۸\,cm \;,\; h = ۰/۲۵\,cm \;,\; E = ۲/۰۷۷۸۸ * ۱۰^{۱۱}\,N\,m^{-۲}$

$\nu = ۰/۳۱۷۷۵۶ \quad \rho = ۸۱۶۶\,kg\,m^{-۳}$

N	m	واربارتن	لوی	مطالعه فعلی
۲	۱	۲۰۴۶/۸	۲۰۴۳/۸	۲۰۴۳/۶
	۲	۵۳۷/۶	۵۶۳۵/۴	۵۶۳۵/۲
	۳	۸۹۳۵/۳	۸۲۳۵/۳	۸۹۳۲/۱
	۴	۱۱۴۰۵	۱۱۴۰۷/۵	۱۱۴۰۷/۲
	۵	۱۳۲۴۵	۱۳۲۵۳/۳	۱۳۲۵۲/۸
	۶	۱۴۷۷۵	۱۴۷۹۰/۰	۲۱۹۵/۰
	۱	۲۱۹۹/۳	۲۱۹۵/۱	۴۰۳۵/۳
	۲	۴۰۴۱/۳	۴۰۳۵/۵	۶۶۱۴/۳
	۳	۶۶۲۰/۰	۶۶۱۴/۶	۳۱۲۰/۷
	۴	۹۱۲۴/۰	۹۱۲۱/۰	۳۱۲۰/۷
	۵	۱۱۳۵۷	۱۱۳۵۹/۰	۱۱۳۵۸/۷
	۶	۱۳۳۸۵	۱۳۳۹۲/۳	۱۳۳۹۲/۱

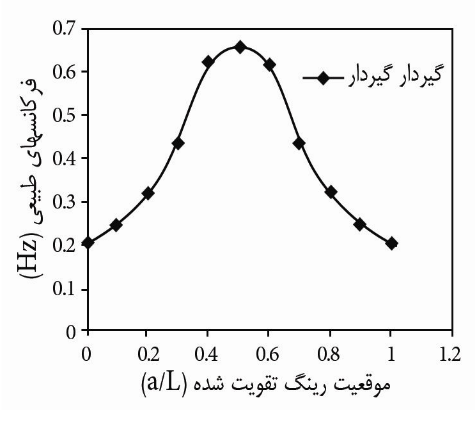
در ایـن تحقیـق مطالعـه بـر روی ارتعاشـات آزاد پوسـته استوانه‌ای FGM بـا رینـگ تقویـت شـده ارائـه شـد. شـرایط مرزی انتخاب شـده در ایـن تحقیـق گیـردار-گیـردار *(C-C)* انتخاب شد. در شکل (۲) تغییرات فرکانسهای طبیعی با عـدد موج محیطی n بـرای یـک پوسـته استوانه‌ای FGM بـا یـک رینگ تقویت شـده در موقعیـت $a = ۰/۳L$ نـشان داده شـده است. در این شکل فرکانسهای طبیعـی پوسـته بـا عـدد مـوج محیطی n افزایش می‌یابند. این افزایش فرکانسها بیـشتر مهـم اسـت زمـانی کـه n افـزایش مـی‌یابـد از یـک تـا دو و بـرای n های بیشتر از دو فرکانسها با عدد مـوج محیطـی n بتـدریج افـزایش مـی‌یابنـد. ایـن رفتـار فرکانـسها نـشان مـی‌دهـد کـه کمترین فرکانسها برای یک پوسته استوانه‌ای FGM بـا یـک رینگ تقویت شده در $n = ۱$ اتفاق می افتد.



شکل(۲) تغییرات فرکانسهای طبیعی یک پوسته استوانه ای FGM با رینگ تقویت شده

$(m = ۱ \quad , \quad h/R = ۰/۰۱ \quad , \quad l/R = ۲۰ \quad , \quad a/L = ۰/۳)$

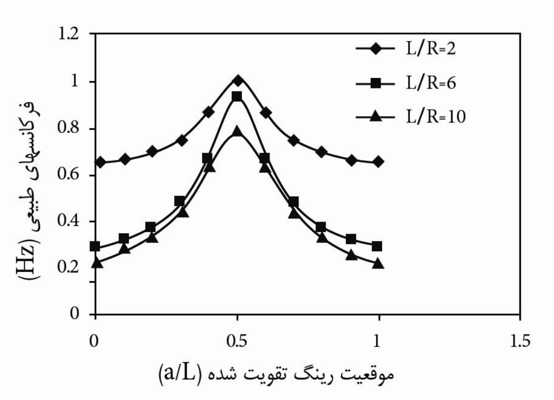
شـکل (۳) تغییـرات فرکانـسهای طبیعـی پوسـته اسـتوانه‌ای FGM با موقعیت یک رینگ تقویـت شـده را نـشان مـی‌دهـد. موقعیت رینگ تقویت شده در طول پوسته مهـم اسـت و روی فرکانسها طبیعی پوسته اثر می گذارد و این اثر بـا توجـه بـه نـوع تکیـه گـاه انتخـاب شـده تغییـر مـی کنـد. بـرای ایـن پوسـته استوانه‌ای FGM با یک رینگ تقویت شـده و بـا شـرایط تکیـه گاهی هر دو لبـه یکـسان مثـل شـرایط مـرزی گیـردار-گیـردار منحنی فرکانسهای طبیعی حول مرکز پوسته متقارن هستند.



شکل(۳) تغییرات فرکانسهای طبیعی یک پوسته استوانه ای FGM با رینگ تقویت شده در موقعیت *a/L*

$m = ۱ \quad , \quad h/R = ۰/۰۱ \quad , \quad L/R = ۲۰ \quad , \quad n = ۱$

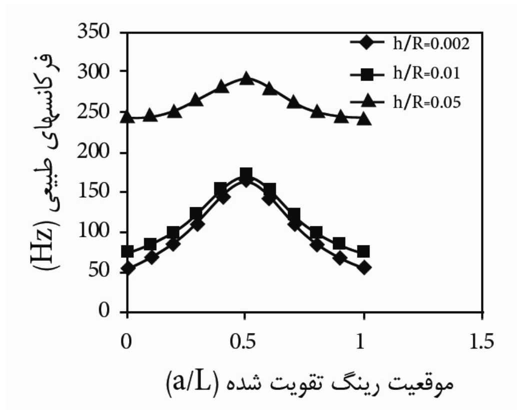
شکل (۴) تغییرات فرکانسهای طبیعی پوسته استوانه‌ای FGM با موقعیت یک رینگ تقویت شده a/L در نسبتهای مختلف طول به شعاع L/R را نشان می‌دهد. شکل نشان می‌دهد که نسبتهای مختلف طول به شعاع روی فرکانسهای طبیعی پوسته اثر می‌گذارند.



شکل(۴) تغییرات فرکانسهای طبیعی یک پوسته استوانه ای FGM با رینگ تقویت در نسبتهای مختلف طول به شعاع L/R

$(m=۱ \quad , \quad h/R=۰/۰۱ \quad , \quad n=۱)$

شکل (۵) تغییرات فرکانسهای طبیعی پوسته استوانه‌ای FGM با یک رینگ تقویت شده a/L در نسبتهای مختلف ضخامت به شعاع h/R را نشان می دهد. شکل نشان می‌دهد که نسبتهای مختلف ضخامت به شعاع روی فرکانسهای طبیعی پوسته اثر می‌گذارند و اینکه فرکانسها افزایش در نسبتهای بزرگ ضخامت به شعاع افزایش می‌یابند.



شکل(۵) تغییرات فرکانسهای طبیعی یک پوسته استوانه‌ای FGM با رینگ تقویت در نسبتهای مختلف ضخامت به شعاع h/R

$m=۱ \quad , \quad L/R=۲۰ \quad , \quad n=۱۰$

۹- نتیجه‌گیری

در این تحقیق مطالعه روی ارتعاشات آزاد یک پوسته استوانه‌ای با رینگ ساخته شده از مواد FGM متشکل از فولاد ضدزنگ و نیکل ارائه شد. خصوصیات مواد در جهت ضخامت پوسته مطابق با قانون توزیع کسر حجمی تغییر می‌کنند. تحقیق بر اساس تئوری مرتبه سوم تغییر شکل برشی صورت و تحلیل بر اساس اصل همیلتون انجام پذیرفت. نوع تکیه‌گاههای انتخاب شده در این تحقیق گیردار-گیردار *(C-C)* می‌باشند. مطالعه نشان می‌دهد در حالتی که یک رینگ در موقعیت دلخواه روی پوسته قرار گیرد در شرایط مرزی گیردار-گیردار با افزایش تعداد موجهای محیطی n، فرکانسها افزایش می‌یابد. پوسته‌های استوانه ای با شرایط مرزی یکسان مثل شرایط مرزی گیردار-گیردار *(C-C)* هنگامی که رینگ در وسط پوسته قرار گیرد فرکانس بیشترین مقدار را خواهد داشت و منحنی فرکانس اصلی حول مرکز پوسته متقارن است.

فهرست علائم

مدول الاستیسیته	E
ضریب پواسون	ν
چگالی	ρ
شعاع پوسته	R
طول پوسته	L
ضخامت پوسته	h
موقعیت رینگ	a
جابه‌جایهای پوسته	$U_۳\ ,\ U_۲, U_۱$
اجزای تنش	$\sigma_{۱۱}, \sigma_{۲۲}, \sigma_{۱۲}, \sigma_{۱۳}, \sigma_{۲۳}$
اجزای کرنش	$\varepsilon_{۱۱}, \varepsilon_{۲۲}, \varepsilon_{۱۲}, \varepsilon_{۱۳}, \varepsilon_{۲۳}$
منتجه های نیرو	$N_{۱۱}, N_{۲۲}, N_{۱۲}$
پارامترهای لامه	$A_۱, A_۲$
اعداد موج	n, m
خواص مواد	P, P_i
فرکانس طبیعی	ω

مراجع

[1] Loy C.T., Lam, K.Y., Vibration of Cylindrical Shells with Ring Support, *J. impact Engineering*, 1996, Vol. 35, pp.455-463.

[2] Xiang Y., Kitipornchai S., Lim C.W., Lau C.W.H., Exact solutions for vibration of cylindrical shells with intermediate ring supports, *Int. J. Mechanical Sciences*, Vol. 44(9),2002, pp.1907-1924.

[3] Patel B.P., Gupla S.S., Moknath M.S., Free Vibration analysis of FGM elliptical cylindrical shells, *Composite structures*, Vol. 69(3), 2004, pp. 259-270.

[4] Loy C.T., Lam K.Y., Reddy J.N., Vibration of functionally graded cylindrical shells. *J. Mechanical Sciences,* Vol.41 (3), 1999, pp. 309-324.

[5] Chen Q.W., Bian Z.G., Ding D.H., Three dimensional vibration analysis of fluid-filled Orthotropic FGM Cylindrical Shell. Journal of Mechanical Sciences, Vol 46, 2004, pp. 159-162.

[6] Prandhan S.C., Log C.T., Lam K.Y., Reddy J.N., Vibration Characteristics of FGM Cylindrical Shells under Various Boundaries. Applied an Acoustics, 2000, Vol. 61, pp.117-126.

[7] Liew K.M., Kitipornchai S., Zhang X.Z., Analysis of the Thermal Stress Behavior of Functionally Graded Hollow Circular Cylinders. *J. Functional Materials*, 1994, Vol 25, pp. 452-465.

[8] Sofiger A.H., Schanck E., The Stability of FG cylindrical shells under linearly increasing dynamic torsional loading, *Engineering Structures*, Vol. 26, 2004, pp.1323-1326.

[9] Gong S.W., Lam K.Y., Reddy, J.N. The elastic response of FGM cylindrical shells low-velocity. *J Impact Engineering,* Vol.22 (4), 1999, pp. 397-417.

[10] Naeem M.N., Arshad S.H., The Ritz formulation applied to the study of the vibration frequency characteristics of functionally graded circular cylindrical shells, *J. Mechanical Engineering Science,* Vol. 224,Part C, , 2009, pp. 43-54.

[11] Mumtaz A., Muhammad N., Vibration Characteristics of Rotating FGM Circular Cylindrical Shells Using Wave Propagation Method. *European Journal of Scientific Research*, Vol. 36 ,No.2, 2009, pp.184-235.

[12] Najafizadeh M.M., Isvandzibaei M.R., Vibration of functionally graded cylindrical shells based on higher order shear deformation plate theory with ring support. *Acta Mechanica,* Vol 191, 2007, pp. 75-91.

[13] Soedel W., Vibration of shells and plates, Marcel Dekker, INC, New York, USA, 1981.

[14] Warburton G. B., Vibration of thin cylindrical shells, *J. Mechanical Engineering Science,* Vol. 7, 1965, pp. 399-407.

[15] Loy, C.T. Lam, K.Y. Reddy J.N., Vibration of functionally graded cylindrical shells. *Int. J. Mechanical Sciences*, Vol. 41, 1999, pp. 309-324.

پیوست

معادله A:

$$-\frac{\partial(N_{11}A_2)}{\partial\alpha_1}+N_{22}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}-\frac{\partial(N_{12}A_1^2)}{A_1\partial\alpha_2}-\frac{Q_{13}}{R_1}A_1A_2-\frac{\partial}{\partial\alpha_1}(\frac{P_{11}C_1A_2}{R_1})+\frac{P_{22}C_1}{R_1}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}-$$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha_2}(\frac{P_{12}C_1A_1^2}{R_1})\frac{1}{A_1}+\frac{3C_1R_{13}}{R_1}A_1A_2-\frac{C_1P_{13}A_1A_2}{R_1^2}=-(\ddot u_1 I_0+\ddot\phi_1 I_1+[-C_1(-\frac{\ddot u_1}{R_1}+$$

$$\ddot\phi+\frac{\partial\ddot u_3}{A_1\partial\alpha_1})+\frac{C_1\ddot u_1}{R_1}]I_3+\frac{C_1\ddot\phi_1}{R_1}I_4-\frac{C_1^2}{R_1}(-\frac{\ddot u_1}{R_1}+\ddot\phi_1+\frac{\partial\ddot u_3}{A_1\partial\alpha_1})I_6)$$

معادله B:

$$\frac{\partial(N_{22}A_1)}{\partial\alpha_2}-N_{11}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}+\frac{\partial(N_{12}A_2^2)}{A_2\partial\alpha_1}+\frac{Q_{23}}{R_2}A_1A_2+\frac{\partial}{\partial\alpha_2}(\frac{P_{22}C_1A_1}{R_2})-\frac{P_{11}C_1}{R_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}+$$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha_1}(\frac{P_{12}C_1A_2^2}{R_2})\frac{1}{A_2}-\frac{3C_1R_{23}}{R_2}A_1A_2+\frac{C_1P_{23}A_1A_2}{R_2^2}=(\ddot u_2I_0+\ddot\phi_2I_1+\frac{C_1\ddot\phi_2}{R_2}I_{42}+$$

$$\left[-c_1(-\frac{\ddot u_2}{R_2}+\ddot\phi_2+\frac{\partial\ddot u_3}{A_2\partial\alpha_2})+\frac{C_1\ddot u_2}{R_2}\right]I_3-\frac{C_1^2}{R_2}(-\frac{\ddot u_2}{R_2}+\ddot\phi_2+\frac{\partial u_3}{A_2\partial\alpha_2})I_6)$$

معادله C:

$$(-\frac{\partial^2(P_{11}C_1A_2/A_1)}{\partial\alpha_1^2}+N_{11}\frac{A_1A_2}{R_1}+\frac{\partial}{\partial\alpha_2}(\frac{C_1P_{11}}{A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2})+N_{22}\frac{A_1A_2}{R_2}-\frac{\partial^2(P_{22}A_1C_1/A_2)}{\partial\alpha_2^2}+$$

$$+\frac{\partial}{\partial\alpha_1}(\frac{P_{22}C_1}{A_1}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1})-\frac{\partial^2(P_{12}C_1)}{\partial\alpha_1\partial\alpha_2}-\frac{\partial}{\partial\alpha_2}(\frac{P_{12}C_1}{A_2^2}\frac{\partial A_2^2}{\partial\alpha_1})-\frac{\partial^2(P_{12}C_1)}{\partial\alpha_1\partial\alpha_2}-\frac{\partial}{\partial\alpha_1}(\frac{P_{12}C_1}{A_1^2}\frac{\partial A_1^2}{\partial\alpha_2})$$

$$-\frac{\partial(Q_{13}A_2)}{\partial\alpha_1}+\frac{\partial(3C_1R_{13}A_2)}{\partial\alpha_1}-\frac{\partial}{\partial\alpha_1}(\frac{P_{13}C_1A_2}{R_1})-\frac{\partial(Q_{23}A_1)}{\partial\alpha_2}+\frac{\partial(3C_1R_{23}A_1)}{\partial\alpha_2}-$$

$$-\frac{\partial}{\partial\alpha_2}(\frac{C_1P_{23}A_1}{R_2})-\frac{\partial}{\partial\alpha_1}(\frac{P_{11}C_1A_2}{A_1^2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_1})-\frac{\partial}{\partial\alpha_2}(P_{22}C_1\frac{A_1}{A_2^2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_2}))=-\{\ddot u_3I_0+$$

$$+C_1\left[\frac{\partial}{\partial\alpha_1}(\frac{u_1}{A_1})+\frac{\partial}{\partial\alpha_2}(\frac{u_2}{A_2})\right]I_3+C_1\left[\frac{\partial}{\partial\alpha_1}(\frac{\ddot\phi_1}{A_1})+\frac{\partial}{\partial\alpha_2}(\frac{\ddot\phi_2}{A_2})\right]I_4-C_1^2I_6((-\frac{\partial}{R_2\partial\alpha_2}(\frac{\ddot u_2}{A_2})$$

$$+\frac{\partial}{\partial\alpha_2}(\frac{\ddot\phi_2}{A_2})+\frac{1}{A_2}\frac{\partial^2\ddot u_3}{\partial\alpha_2^2}-\frac{\partial A_2}{A_1^2\partial\alpha_2}\frac{\partial\ddot u_3}{\partial\alpha_2})+(-\frac{\partial}{R_1\partial\alpha_1}(\frac{\ddot u_1}{A_1})+\frac{\partial}{\partial\alpha_1}(\frac{\ddot\phi_1}{A_1})+$$

$$+\frac{1}{A_1}\frac{\partial^2\ddot u_3}{\partial\alpha_1^2}-\frac{\partial A_1}{A_1^2\partial\alpha_1}\frac{\partial\ddot u_3}{\partial\alpha_1}))$$

معادله D:

$$-\frac{\partial(M_{11}A_2)}{\partial\alpha_1}+\frac{\partial(C_1P_{11}A_2)}{\partial\alpha_1}+M_{22}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}-C_1P_{22}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}-\frac{\partial(M_{12}A_1^2)}{A_1\partial\alpha_2}+\frac{\partial(P_{12}C_1A_1^2)}{A_1\partial\alpha_2}-$$
$$-3C_1R_{13}A_1A_2+A_1A_2Q_{13}+\frac{C_1P_{13}}{R_1}A_1A_2=-\Big[\ddot{u}_1I_1+\ddot{\phi}_1I_2-C_1\ddot{u}_1I_3+(-2C_1\ddot{\phi}_1+C_1\frac{\ddot{u}_1}{R_1}-$$
$$-\frac{C_1}{A_1}\frac{\partial\ddot{u}_3}{\partial\alpha_1})I_4+C_1^2(-\frac{\ddot{u}_1}{R_1}+\ddot{\phi}_1+\frac{\partial\ddot{u}_3}{A_1\partial\alpha_1})I_6\Big]$$

معادله E:

$$-\frac{\partial(M_{22}A_1)}{\partial\alpha_2}+\frac{\partial(C_1A_1P_{22})}{\partial\alpha_2}+M_{11}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}-C_1P_{11}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}-\frac{\partial(M_{12}A_2^2)}{A_2\partial\alpha_1}+\frac{\partial(P_{12}C_1A_2^2)}{A_2\partial\alpha_1}-$$

$$-3C_1R_{23}A_1A_2+A_1A_2Q_{23}+\frac{C_1P_{23}}{R_2}A_1A_2=-\Big[\ddot{u}_2I_1+\ddot{\phi}_2I_2-C_1\ddot{u}_2I_3+(-2C_1\ddot{\phi}_2+$$

$$+C_1\frac{\ddot{u}_2}{R_2}-\frac{C_1}{A_2}\frac{\partial\ddot{u}_3}{\partial\alpha_2})I_4+C_1^2(\frac{\ddot{u}_2}{R_2}+\ddot{\phi}_2+\frac{\partial\ddot{u}_3}{A_2\partial\alpha_2})I_6\Big].$$