

## تحلیل کمانش حرارتی ورق دایره‌ای مدرج تابعی با لایه‌های محرک-محرک پیزوالکتریک براساس روش صفحه خنثی

محمد مهدی نجفی زاده<sup>۱\*</sup> محسن مالمراد<sup>۲</sup> آرش شریفی<sup>۳</sup>

\* نویسنده مسئول: M-najafizadeh@iaui-arak.ac.ir

### چکیده

در این مقاله، کمانش حرارتی ورق دایره‌ای شکل ساخته شده از مواد مدرج تابعی با لایه‌های محرک-محرک پیزوالکتریک براساس محل صفحه خنثی و به کمک تئوری کلاسیک صفحات و تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی صفحات بررسی شده است. خواص ورق مدرج تابعی براساس مدل ردی در نظر گرفته شده است. ورق تحت بارگذاری حرارتی، افزایش غیر خطی درجه حرارت در راستای ضخامت و با شرایط مرزی گیردار فرض شده است. معادلات تعادل و پایداری با استفاده از حساب تغییرات و اعمال معادلات اویلر به دست آمده است. در پایان، مقادیر اختلاف دمای بحرانی کمانش براساس تئوری‌های یاد شده برای یک ورق نمونه با نتایج به دست آمده توسط سایر محققان مقایسه شده است که تطابق خوبی بین آنها مشاهده شد.

**واژه‌های کلیدی:** کمانش حرارتی، لایه‌های پیزوالکتریک، ورق دایره‌ای، مواد مدرج تابعی.

۱- دانشیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد اراک.

۲- کارشناس ارشد مهندسی مکانیک، اداره کل استاندارد و تحقیقات صنعتی استان کرمانشاه.

۳- کارشناس ارشد مهندسی مکانیک، شرکت نفت کرمانشاه.

## ۱- مقدمه

در سالهای اخیر مواد تابعی یا مدرج تابعی<sup>۱</sup> در صنعت به ویژه در محیط‌های با درجه حرارت بسیار بالا مانند راکتورهای هسته‌ای، توربین‌ها و اجزای ماشین‌های پر قدرت به کار می‌روند. پیش‌بینی می‌شود با توجه به ویژگی‌های منحصر به فرد این مواد، کاربردهای صنعتی آن طی سالهای آتی توسعه یابد.

ماده تابعی یک ماده مصنوعی با ریز ساختار غیر همگن است که خواص مکانیکی آن به طور ملایم و پیوسته از یک سطح تا سطح دیگر جسم تغییر می‌کند. این خاصیت ویژه به وسیله تغییر یکنواخت نسبت حجمی مواد تشکیل دهنده به دست می‌آید. نوع رایج مواد تابعی از ترکیب سرامیک و فلز حاصل می‌شود. این مواد برای اولین بار در سال ۱۹۸۴ در آزمایشگاه هوافضای نینو در ژاپن به صورت عایق حرارتی مطرح شدند [۱]. در این مواد مولفه سرامیکی باعث مقاومت در برابر دماهای بالا می‌شود و از سوی دیگر مولفه فلزی باعث انعطاف پذیری و جلوگیری از رشد ترک و شکست ماده در اثر تنش‌های حرارتی بسیار بالا می‌گردد. همچنین، پیوستگی تغییرات ریزساختاری این مواد باعث برتری آنها نسبت به انواع مواد مرکب لایه‌ای شده است.

پس از پیدایش مدرج تابعی تحقیقات گسترده‌ای بر روی این مواد انجام شد. محققان بسیاری پایداری ترموالاستیک ورق‌های مستطیلی و دایره‌ای شکل تحت بارگذاری‌های متعدد و شرایط مرزی مختلف را مورد بررسی قرار داده‌اند. صمصام و همکارانش [۲] تحلیل کمناش ورق مستطیلی مدرج تابعی تحت بارهای مکانیکی و حرارتی را مورد بررسی قرار داده‌اند. ژانگ و گو [۳] حل دقیق مسئله کمناش یک ورق مستطیلی کامپوزیت با لایه‌های به هم پیوسته را که دارای تکیه گاههای غلتکی و تحت تاثیر بارهای متغیر خطی در لبه‌ها است به دست آوردند. این حل بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول توسعه پیدا کرده است. باترا و وی [۴] کمناش ورق نازک مستطیلی ترموویسکوپلاستیک را با برهم نهی اغتشاشات بینهایت کوچک اعمالی روی صفحه مورد مطالعه قرار دادند.

اسلامی و همکارانش [۵] کمناش ترموالاستیک ورق‌های مرکب لایه‌ای اورتوتروپیک را بر اساس تئوری مرتبه بالای تغییر شکل برشی صفحات با نقص اولیه مورد مطالعه قرار دادند. نجفی‌زاده و اسلامی [۶-۷] پایداری حرارتی و مکانیکی ورق دایره‌ای مدرج تابعی را بر اساس تئوری کلاسیک صفحات و فرضیات ساندرز مورد مطالعه قرار دادند. جواهری و اسلامی [۸-۱۰] کمناش مکانیکی و حرارتی ورق مستطیلی مدرج تابعی را با استفاده از تئوری کلاسیک صفحات و تئوری مرتبه بالای تغییر شکل برشی صفحات مورد بررسی قرار دادند.

کمناش حرارتی و مکانیکی ورق دایره‌ای مدرج تابعی با در نظر گرفتن تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی صفحات توسط نجفی‌زاده و حیدری [۱۱-۱۲] مورد مطالعه قرار گرفته است. ما و ونگ [۱۳] خمش غیر خطی و کمناش ورق دایره‌ای شکل مدرج تابعی را تحت اثر بارهای مکانیکی و حرارتی مورد بررسی قرار داده‌اند.

تیرستن [۱۴] برای اولین بار معادلات حاکم بر ارتعاشات ورق‌های پیزوالکتریک را به دست آورد و همچنین مبانی الکترومکانیکی این مواد را مورد بررسی قرار داد. ردی و فان [۱۵] نیز معادلات حاکم بر ورق‌های پیزوالکتریک را با استفاده از تئوری‌های مختلف صفحات به دست آورده است. آلدرایهم و خدیر [۱۶] معادلات تیر تیموشکو و اولر را با داشتن عملگرهای پیزوالکتریک در حالت استاتیکی به صورت تحلیلی به دست آوردند. وانگ و همکارانش [۱۷] معادلات ورق کامپوزیت هوشمند که دارای عملگر پیزوالکتریک است را به صورت کنترل استاتیکی مورد بررسی قرار دادند. رابینز و ردی [۱۸] معادلات تیر کامپوزیت که دارای یک لایه پیزوالکتریک می‌باشد را بر اساس تئوری اولر - برنولی در حالت استاتیکی و با استفاده از روش حل تئوری لایه مجزا ارائه دادند.

در این مقاله برای اولین بار کمناش حرارتی ورق دایره‌ای مدرج تابعی با لایه‌های محرک - محرک پیزوالکتریک براساس روش محل صفحه خنثی فیزیکی و به کمک تئوری کلاسیک صفحات و تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی صفحات بررسی شده است. در کارهای پیشین معادلات بر اساس صفحه میانی ورق به دست آمده‌اند و تحلیل بر اساس

<sup>۱</sup> - Functionally Graded Material

### روابط کرنش-جابجایی

به کمک تئوری کلاسیک صفحات، جابجایی‌ها به صورت زیر در نظر گرفته می‌شوند:

$$\begin{aligned} U(r, \theta, z) &= u(r, \theta) - (z - z_0) \frac{\partial w}{\partial r} \\ V(r, \theta, z) &= v(r, \theta) - (z - z_0) \frac{\partial w}{r \partial \theta} \end{aligned} \quad (3)$$

$$W(r, \theta, z) = w(r, \theta)$$

به طوری که  $W, V, U$  به ترتیب جابجایی‌ها در جهات  $z, \theta, r$  هستند و  $z_0$  مطابق رابطه (۲) به دست می‌آید.

روابط کرنش-جابجایی برای ورق دایره‌ای براساس روابط غیرخطی ساندروز به صورت زیر است [۱۱]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= u_{,r} + \frac{1}{r} \beta_r^2 \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{r} v_{,\theta} + \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \beta_\theta^2 \end{aligned} \quad (4)$$

$$\varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{r} u_{,\theta} + v_{,r} - \frac{v}{r} + \beta_r \beta_\theta$$

به طوری که:

$$\beta_r = -w_{,r} \quad (5)$$

$$\beta_\theta = -\frac{1}{r} w_{,\theta}$$

$\varepsilon_r, \varepsilon_\theta$  کرنش‌های نرمال در صفحه خنثی ورق FGM هستند و مؤلفه‌های کرنش نرمال  $\bar{\varepsilon}_r, \bar{\varepsilon}_\theta$  در هر نقطه از ضخامت ورق به فاصله  $z$  از سطح میانی مطابق روابط زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_r &= \varepsilon_r + (z - z_0) k_r \\ \bar{\varepsilon}_\theta &= \varepsilon_\theta + (z - z_0) k_\theta \end{aligned} \quad (6)$$

$k_r, k_\theta$  معرف انحناها و  $k_{r\theta}$  پیچش می‌باشد و به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\begin{aligned} k_r &= \beta_{r,r} \\ k_\theta &= \frac{1}{r} (\beta_r + \beta_{\theta,\theta}) \end{aligned} \quad (7)$$

$$k_{r\theta} = \frac{1}{r} (\beta_{r,\theta} - \beta_\theta)$$

### ورق FGM

ورق FGM ترکیبی از سرامیک و فلز یا مواد دیگر است. در این مقاله از مدل ردی برای بیان خواص مواد تابعی استفاده شده است. براساس این مدل چنانچه محور مختصات در جهت ضخامت ورق را  $z$  بنامیم خواص ورق FGM به صورت زیر تعریف می‌شود:

آنها انجام گرفته است. در این مطالعه ورق تحت بارگذاری حرارتی با افزایش غیرخطی درجه حرارت در راستای ضخامت و با شرایط مرزی گیردار فرض شده است. معادلات تعادل و پایداری با استفاده از حساب تغییرات و اعمال معادلات اویلر به دست آمده است. در پایان، مقادیر اختلاف دمای بحرانی کماتش براساس تئوری‌های یاد شده برای یک ورق نمونه آورده شده است.

### ۲- فرمول بندی ریاضی و تعاریف مواد

در ادامه فرمول‌بندی ریاضی و تعاریف مواد تابعی طبق مراحل ذیل مورد بحث قرار گرفته است:

#### صفحه خنثی فیزیکی

در همه مقالات بیان شده در قسمت قبل، سطح میانی هندسی به عنوان مرجع انتخاب شده است و مشخصه آن این است که تاثیر کوپل خمش و کشش در معادلات ساختاری به وجود می‌آید و معادلات و شرایط مرزی به کار برده شده فرم پیچیده‌ای به خود می‌گیرند. بنابراین روش حل آنها دشوار است.

موریموتو و همکارانش [۱۹] نشان دادند که اگر در معادلات ساختاری سطح مرجع به درستی انتخاب شود هیچ اثری از ترکیب خمش و کشش وجود ندارد. به منظور تعیین محل سطح مرجع، شرط زیر در راستای مختصه  $z$  تعریف می‌شود [۱۹]

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (z - z_0) E(z) dz = 0 \quad (1)$$

بنابراین فاصله  $z_0$  از سطح میانی به صورت زیر به دست می‌آید

$$z_0 = \frac{\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z E(z) dz}{\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} E(z) dz} \quad (2)$$

به طوری که  $z_0$  محل صفحه خنثی فیزیکی از سطح میانی است.

**روابط ساختاری لایه‌های محرک پیزوالکتریک**

معادله ماکسول برای لایه‌های محرک پیزوالکتریک به صورت زیر بیان می‌شود [۲۲]:

$$D = g.E \Rightarrow \nabla.D = 0 \quad (14)$$

به طوری که  $E, g, D$  به ترتیب جابه‌جایی الکتریکی، ثابت دی‌الکتریک و میدان الکتریکی اند. اگر لایه‌های پیزوالکتریک نازک باشند، جابه‌جایی الکتریکی در راستای  $r, \theta$  ثابت فرض می‌شود. بنابراین معادله شارژ (۱۴) به معادله زیر تبدیل می‌شود.

$$\frac{dD_z}{dz} = 0 \quad (15)$$

اگر میدان پتانسیل ایجاد شده در لایه‌ها را تابع درجه دوم از ضخامت فرض کنیم؛ خواهیم داشت [۲۰]:

$$\phi = \phi_0 + (z - z_0)\phi_1 + (z - z_0)^2\phi_2 \quad (16)$$

شرایط مرزی الکتریکی برای لایه‌های پایینی و بالایی پیزوالکتریک به صورت زیر است:

$$\begin{cases} z = -\frac{h}{2} \rightarrow \phi^l = 0 \\ z = -\frac{h}{2} - h_p \rightarrow \phi^l = V^l \end{cases} \quad (17)$$

$$\begin{cases} z = \frac{h}{2} \rightarrow \phi^u = 0 \\ z = \frac{h}{2} + h_p \rightarrow \phi^u = V^u \end{cases} \quad (18)$$

به طوری که  $h_p$  ضخامت لایه‌های پیزوالکتریک بوده و  $V^l, V^u$  به ترتیب ولتاژهای اعمالی به لایه‌های پیزوالکتریک بالایی و پایینی هستند. با اعمال شرایط (۱۸) و (۱۷) در معادله (۱۶) خواهیم داشت:

$$\phi_1^l = -\frac{V^l}{h_p} + 2(h_m + z_0)\phi_2^l \quad (19)$$

$$\phi_1^u = \frac{V^u}{h_p} - 2(h_m - z_0)\phi_2^u$$

که در رابطه فوق  $h_m = \frac{h + h_p}{2}$  است. حال با ترکیب معادله (۱۳-ب) با (۱۵) و با توجه به  $E_z = -\frac{\partial\phi}{\partial z}$  و معادلات (۱۶) و (۱۹)، میدان در لایه‌های محرک پیزوالکتریک به صورت زیر به دست می‌آید.

$$E_z^l = \frac{V^l}{h_p} - (z + h_m)\frac{e_{31}}{g_{33}}(k_x + k_y) \quad (20)$$

$$E_z^u = -\frac{V^u}{h_p} - (z - h_m)\frac{e_{31}}{g_{33}}(k_x + k_y)$$

$$p(z) = (p_0 - p_m)\left(\frac{z+h}{2h}\right)^k + p_m \quad (8)$$

که  $p_m, p_c$  مطابق با خصوصیات سرامیک و فلز است. همچنین در این مدل نسبت پواسون به علت نزدیک بودن ضرایب پواسون فلز و سرامیک ثابت در نظر گرفته می‌شود

$$v(z) = v_0 \quad (9)$$

و  $k$  ثابتی است که بین صفر تا بی نهایت تغییر می‌کند [۱۱].

**رابطه تنش- کرنش در ورق FGM**

روابط تنش - کرنش با در نظر گرفتن اثرات حرارت برای ورق FGM به صورت زیر نوشته می‌شود [۲۱]:

$$\begin{Bmatrix} \bar{\sigma}_{rr} \\ \bar{\sigma}_{\theta\theta} \\ \bar{\sigma}_{r\theta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{12} & C_{11} & 0 \\ 0 & 0 & C_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\epsilon}_{rr} - \alpha T \\ \bar{\epsilon}_{\theta\theta} - \alpha T \\ \bar{\epsilon}_{r\theta} \end{Bmatrix} \quad (10)$$

به طوری که

$$C_{11} = C_{22} = \frac{E(z)}{1 - \nu_0^2}, \quad C_{12} = C_{21} = C_{11}\nu_0 \quad (11)$$

$$C_{44} = \frac{E(z)}{2(1 + \nu_0)}, \quad \alpha = \alpha(z)$$

$\bar{\sigma}_{ij}$  تنش‌های نرمال و  $\bar{\tau}_{ij}$  تنش‌های برشی در هر نقطه از ضخامت ورق FGM به فاصله  $z$  از سطح میانی را نشان می‌دهند.

**روابط مواد پیزوالکتریک**

روابط ساختاری برای مواد پیزوالکتریک به صورت زیر بیان می‌شود [۲۱]:

$$\begin{cases} \{\sigma\} = [C^P]\{\epsilon\} - [e]^T\{E\} \\ \{D\} = [e]\{\epsilon\} + [g]^T\{E\} \end{cases} \quad (12)$$

و یا به فرم ماتریسی

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{r\theta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{12} & C_{11} & 0 \\ 0 & 0 & C_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{rr} \\ \epsilon_{\theta\theta} \\ \epsilon_{r\theta} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & e_{13} \\ 0 & 0 & e_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_r \\ E_\theta \\ E_z \end{Bmatrix} \quad (13-الف)$$

$$\begin{Bmatrix} D_r \\ D_\theta \\ D_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ e_{31} & e_{32} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\epsilon}_{rr} \\ \bar{\epsilon}_{\theta\theta} \\ \bar{\epsilon}_{r\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} g_{11} & 0 & 0 \\ 0 & g_{22} & 0 \\ 0 & 0 & g_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_r \\ E_\theta \\ E_z \end{Bmatrix} \quad (13-ب)$$

به طوری که  $\{\bar{\sigma}\}$  بردار مؤلفه‌های تنش،  $\{\bar{\epsilon}\}$  بردار مؤلفه‌های کرنش،  $\{E\}$  بردار مؤلفه‌های شدت میدان الکتریکی،  $\{D\}$  بردار مؤلفه‌های جابجایی الکتریکی،  $[C^P]$  ماتریس مدول الاستیسیته،  $[e]$  ماتریس ضریب کرنش پیزو الکتریک و  $[g]$  ماتریس ضریب دی‌الکتریک هستند.

$$F = \left\{ \frac{A_1}{\gamma} (\varepsilon_r^\gamma + \varepsilon_\theta^\gamma) + A_\gamma \varepsilon_r \varepsilon_\theta + \frac{A_1 - A_\gamma}{\varphi} \varepsilon_{r\theta}^\gamma + \frac{B_\gamma}{\gamma} (k_r^\gamma + k_\theta^\gamma) + B_\varphi k_r k_\theta + \frac{B_\gamma - B_\varphi}{\varphi} k_{r\theta}^\gamma + A_\delta (\varepsilon_r + \varepsilon_\theta) + B_\delta (k_r + k_\theta) + A_\gamma (\varepsilon_r k_r + \varepsilon_\theta k_\theta) + A_\varphi (\varepsilon_r k_\theta + \varepsilon_\theta k_r) + \frac{A_\gamma - A_\varphi}{\gamma} \varepsilon_r \theta k_{r\theta} + \frac{1}{1-\nu_o} T^* + E^* \right\}_{,r}$$

که در رابطه فوق

$$T^* = \int_{-\frac{h}{\gamma}}^{\frac{h}{\gamma}} E(z) [\alpha(z) T(z)]^\gamma dz$$

$$E^* = \int_{-\frac{h}{\gamma} - h_p}^{\frac{h}{\gamma}} g_{rr} (E_z^I)^\gamma dz + \int_{\frac{h}{\gamma}}^{\frac{h}{\gamma} + h_p} g_{rr} (E_z^{II})^\gamma dz$$

در حالتی که  $F$  در رابطه انرژی پتانسیل کل تابعی از سه متغیر وابسته  $w, v, u$  و مشتقات مرتبه اول  $v, u$  و مشتقات  $w$  تا مرتبه دوم و متغیرهای مستقل  $\theta, r$  باشد، معادلات اویلر به صورت زیر بیان می شوند:

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial F}{\partial u_{,r}} - \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\partial F}{\partial u_{,\theta}} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial F}{\partial v_{,r}} - \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\partial F}{\partial v_{,\theta}} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial w} - \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial F}{\partial w_{,r}} - \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\partial F}{\partial w_{,\theta}} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} \frac{\partial F}{\partial w_{,rr}} + \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} \frac{\partial F}{\partial w_{,r\theta}} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \frac{\partial F}{\partial w_{,\theta\theta}} = 0$$

با جایگذاری رابطه (۲۷) در معادلات اویلر (۲۸)، معادلات تعادل ورق دایره‌ای شکل FGM با لایه‌های محرک-محرک پیژوالکتریک به صورت زیر به دست می آید:

$$N_{r,r} + \frac{1}{r} N_{r\theta,\theta} + \frac{1}{r} (N_r - N_\theta) = 0$$

$$N_{r\theta,r} + \frac{1}{r} N_{\theta,\theta} + \frac{\gamma}{r} N_{r\theta} = 0$$

$$(r.M_r)_{,rr} + \gamma M_{r\theta,r\theta} + \frac{1}{r} M_{\theta,\theta\theta} + (r.w_{,r}.N_r + w_{,\theta}.N_{r\theta} - M_\theta)_{,r} + (\frac{1}{r}.w_{,\theta}.N_\theta + w_{,r}.N_{r\theta} + \frac{\gamma}{r} M_{r\theta})_{,\theta} = 0$$

### ۳- معادلات تعادل و پایداری

نیروها و گشتاورها در واحد طول مطابق رابطه زیر بر حسب مؤلفه‌های تنش بیان می شود:

$$(N_{ij}, M_{ij}) = \int_{-\frac{h}{\gamma} - h_p}^{-\frac{h}{\gamma} + h_p} \bar{\sigma}_{ij} (\nu, (z - z_o)) dz$$

با جایگذاری روابط (۶)، (۸)، (۱۰) و (۱۳) در رابطه (۲۱) و اعمال انتگرال‌ها، معادلات ساختاری ورق FGM با لایه‌های پیژوالکتریک به صورت زیر به دست می آید:

$$N_r = A_1 \varepsilon_r + A_\gamma \varepsilon_\theta + A_\varphi k_r + A_\psi k_\theta + A_\delta$$

$$N_\theta = A_\gamma \varepsilon_r + A_1 \varepsilon_\theta + A_\varphi k_r + A_\psi k_\theta + A_\delta$$

$$N_{r\theta} = \frac{A_1 - A_\gamma}{\gamma} \varepsilon_r \theta + \frac{A_\gamma - A_\varphi}{\gamma} k_{r\theta}$$

$$M_r = B_1 \varepsilon_r + B_\gamma \varepsilon_\theta + B_\varphi k_r + B_\psi k_\theta + B_\delta$$

$$M_\theta = B_\gamma \varepsilon_r + B_1 \varepsilon_\theta + B_\varphi k_r + B_\psi k_\theta + B_\delta$$

$$M_{r\theta} = \frac{B_1 - B_\gamma}{\gamma} \varepsilon_r \theta + \frac{B_\gamma - B_\varphi}{\gamma} k_{r\theta}$$

عبارات  $B_i, A_i (i=1,2,\dots,5)$  در پیوست الف آورده شده‌اند.

در حالت کلی، وقتی که ورق تحت بار مکانیکی و حرارتی قرار دارد و لایه‌های پیژوالکتریک تحت میدان الکتریکی است انرژی کل پتانسیل از رابطه زیر به دست می آید:

$$V = U + \Omega$$

که  $U$  انرژی کرنشی ورق و لایه‌های پیژوالکتریک بوده و به صورت زیر بیان می شود:

$$U = \frac{1}{\gamma} \int_V (\bar{\sigma}_{ij} \varepsilon_{ig} - D_i E_i) dv$$

همچنین  $\Omega$  انرژی پتانسیل نیروهای مکانیکی اعمالی بر ورق است و چون ورق فقط تحت بار حرارتی است این ترم برابر صفر است.

با جایگذاری از روابط تنش-کرنش در روابط انرژی پتانسیل کل و انتگرال‌گیری در جهت ضخامت خواهیم داشت:

$$V = \int_0^{\alpha} \int_0^{2\pi} F_{,r} dr_{,d\theta}$$

به طوری که

#### ۴- تحلیل کمناش حرارتی

یک ورق دایره‌ای از جنس ماده FGM با دو لایه پیزوالکتریک از نوع محرک-محرک مفروض است. ورق با شرایط مرزی گیردار فرض می‌شود. از آنجا که در یک ورق FGM خواص مادی در جهت ضخامت ورق متغیر است، بهتر است تابع بارگذاری حرارتی از حل معادله انتقال حرارت به دست آید. از طرفی چون خواص حرارتی ورق مانند ضریب هدایت حرارتی  $k$  به طور دلخواه تغییر می‌کند به دست آوردن تغییرات واقعی دما در حالت گذرا تقریباً غیرممکن است. بنابراین در تحلیل حاضر، مسئله انتقال حرارت در حالت پایا در نظر گرفته می‌شود. با توجه به اینکه دمای  $T$  تنها تابع مختصه  $z$  است، رابطه انتقال حرارت در حالت پایا به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{d}{dz} \left[ k(z) \frac{dT}{dz} \right] = 0 \quad (32)$$

شرایط مرزی حرارتی ورق به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned} z = \frac{h}{2} \quad T = T_c \\ z = -\frac{h}{2} \quad T = T_m \end{aligned} \quad (33)$$

ضریب هدایت حرارتی  $k(z)$  مشابه با سایر خواص مکانیکی و حرارتی ماده FGM توسط رابطه توانی بیان می‌شود

$$k(z) = k_m + k_{cm} \left( \frac{2z+h}{2h} \right)^k \quad (34)$$

به طوری که

$$k_{cm} = k_c - k_m \quad (35)$$

$k_c, k_m$  به ترتیب ضرایب هدایت حرارتی فلز و سرامیک‌اند. با جایگذاری رابطه (۳۴) در معادله (۳۲) و انجام تغییر متغیر  $r = \left( \frac{2z+h}{2h} \right)$ ، معادله انتقال حرارت ورق FGM همراه با شرایط مرزی مربوطه به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{k k_{cm} r^{k-1}}{k_m + k_{cm} r^k} \frac{dT}{dr} = 0 \\ r = 1 \quad : \quad T = T_c \\ r = 0 \quad : \quad T = T_m \end{aligned} \quad (36)$$

معادله دیفرانسیل فوق حل تحلیلی ندارد و لذا از روش حل تقریبی به وسیله سری جهت یافتن درجه حرارت استفاده می‌شود. مطابق با این روش، جواب معادله به صورت

معادلات پایداری ورق‌ها به وسیله روش تغییرات<sup>۱</sup> قابل دستیابی است. اگر  $V$  معرف انرژی پتانسیل کل ورق باشد، بسط آن نسبت به حالت تعادل به وسیله سری تیلور بصورت زیر نوشته می‌شود:

$$\Delta V = \delta V + \frac{1}{2} \delta^2 V + \dots \quad (30)$$

در رابطه فوق  $\delta V$  مجموع ترم‌های مرتبه اول و  $\delta^2 V$  مجموع ترم‌های مرتبه دوم در بسط تیلور هستند. بنابر تعریف،  $\delta V$  اولین تغییرات  $V$  و  $\delta^2 V$  دومین تغییرات  $V$  است. مطابق با معیار ترفترز<sup>۲</sup>، شرط تعادل یک سیستم چند درجه آزادی، معادل صفر بودن اولین تغییرات  $V$  می‌باشد. همچنین شرط پایداری جسم در همسایگی تعادل، مثبت معین بودن دومین تغییرات  $V$  می‌باشد. بنابراین معیار، تعادل وقتی پایدار است که به ازای کلیه جابه‌جایی‌های مجازی  $\delta^2 V > 0$  باشد. اگر به ازای حداقل یک مجموعه ممکن از جابه‌جایی‌های مجازی  $\delta^2 V < 0$  باشد، حالت تعادل ناپایدار است. از شرط  $\delta^2 V = 0$  برای به دست آوردن معادلات پایداری مسائل کمناش ورق‌ها استفاده می‌شود [۲۳].

با اعمال معادلات اویلر بر دومین تغییرات انرژی پتانسیل کل، معادلات پایداری به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} N_{r1,r} + \frac{1}{r} N_{r\theta1,\theta} + \frac{1}{r} (N_{r1} - N_{\theta1}) = 0 \\ N_{r\theta1,r} + \frac{1}{r} N_{\theta1,\theta} + \frac{2}{r} N_{r\theta1} = 0 \\ (r.M_{r1})_{,rr} + 2M_{r\theta1,r\theta} + \frac{1}{r} M_{\theta1,\theta\theta} + \\ (r.w_{1,r}.N_{r0} + w_{1,\theta}.N_{r\theta0} - M_{\theta1})_{,r} \\ + \left( \frac{1}{r}.w_{1,\theta}.N_{\theta0} + w_{1,r}.N_{r\theta0} + \frac{2}{r} M_{r\theta1} \right)_{,\theta} = 0 \end{aligned} \quad (31)$$

در اینجا زیرنویس‌های ۱ بیانگر تنش‌های منتجه حالت پایداری است و زیرنویس‌های ۰ بیانگر تنش‌های منتجه حالت تعادل است.  $N_{r0}, N_{\theta0}, N_{r\theta0}$  نیروهای پیش کمناش بوده و از حل معادلات تعادل در حالت غشایی به دست می‌آیند.

به طور مشابه معادلات تعادل و پایداری به کمک تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی صفحات به دست خواهند آمد که در پیوست (ب) آورده شده‌اند.

۱- Variational Method

۲- Trefftz

$$N_{r0} = -\frac{\phi_m}{1-\nu_0} + e_{\beta 1}(V^u - V^l)$$

$$N_{\theta 0} = -\frac{\phi_m}{1-\nu_0} + e_{\beta 1}(V^u - V^l) \quad (41)$$

$$N_{r\theta 0} = 0$$

معادلات پایداری (۳۱) با توجه به شرط تقارن بصورت زیر نوشته می شوند:

$$\frac{dN_{r1}}{dr} + \frac{N_{r1} - N_{\theta 1}}{r} = 0 \quad (42)$$

$$\frac{d^2}{dr^2}(r M_{r1}) + \frac{d}{dr}(r \frac{dw_1}{dr} N_{r0} - M_{\theta 1}) = 0$$

با قراردادن روابط (۵) و (۴) در روابط (۲۲) و انجام عملیات ساده سازی، معادلات پایداری بر حسب تغییر مکان به صورت زیر به دست خواهند آمد:

$$A_1(\frac{d^2 u_1}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du_1}{dr} - \frac{u_1}{r^2}) +$$

$$A_2(-\frac{d^2 w_1}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{d^2 w_1}{dr^2} + \frac{1}{r^2} \frac{dw_1}{dr}) = 0$$

$$A_3[-\frac{d^2 u_1}{dr^2} - \frac{2}{r} \frac{d^2 u_1}{dr^2} + \frac{1}{r^2} \frac{du_1}{dr} - \frac{u_1}{r^3}] + \quad (43)$$

$$B_3[\frac{d^4 w_1}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3 w_1}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 w_1}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{dw_1}{dr}]$$

$$= \frac{1}{r} \frac{d}{dr}(r N_{r0} \frac{dw_1}{dr})$$

با استفاده از تغییر متغیرهای زیر و قرار دادن در رابطه اول (۴۳) خواهیم داشت:

$$y = \frac{dw_1}{dr}, q = A_1 u_1 - A_3 \frac{dw_1}{dr} = A_1 u_1 - A_3 y \quad (44)$$

$$q'' + \frac{1}{r} q' - \frac{1}{r^2} q = 0 \quad (45)$$

که دارای جوابی به صورت زیر است:

$$q = C_1 r + \frac{C_2}{r}$$

در حالتی که تکیه گاه ها گیردار باشند داریم:

$$C_2 = 0 \Rightarrow r = 0 \text{ در } \frac{dw_1}{dr} = \text{finite}$$

$$C_1 = 0 \Rightarrow r = a \text{ در } \frac{dw_1}{dr} = 0 \quad (46)$$

پس

$$q = 0 \Rightarrow u_1 = \frac{A_3}{A_1} \frac{dw_1}{dr} \quad (47)$$

با جایگذاری رابطه (۴۷) در رابطه دوم (۴۳) و پس از ساده سازی خواهیم داشت:

یک سری توانی فرض می شود. استفاده از تعداد جملات بیشتر باعث بالا رفتن دقت حل می شود. با ارضای شرایط مرزی حرارتی، تابع توزیع درجه حرارت در راستای ضخامت به دست می آید [۲]:

$$T(r) = T_m + r \Delta T \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\frac{r^k k_{cm}}{nk+1})^n}{nk+1}}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\frac{k_{cm}}{nk+1})^n}{nk+1}} \quad (37)$$

عبارت  $\phi_m$  برای حالت بارگذاری مفروض با توجه به پیوست (الف) و رابطه (۳۷) به دست می آید:

$$\phi_m = \Delta T h$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\frac{k_{cm}}{nk+1})^n}{nk+1} \left\{ \frac{E_m \alpha_m}{nk+1} + \frac{E_m \alpha_{cm} + E_{cm} \alpha_m}{(n+1)k+1} + \frac{E_{cm} \alpha_{cm}}{(n+2)k+1} \right\}$$

$$+ T_m h \left\{ E_m \alpha_m + (E_m \alpha_{cm} + E_{cm} \alpha_m) \frac{1}{k+1} + (E_{cm} \alpha_{cm}) \frac{1}{2k+1} \right\}$$

در ابتدا باید نیروهای پیش کمانش تعیین شوند. برای به دست آوردن نیروهای پیش کمانش از معادلات تعادل استفاده می کنیم. برای حل معادلات تعادل از تئوری غشایی استفاده کرده و کلیه گشتاورها و دوران های قبل از کمانش را مساوی صفر قرار می دهیم. با انجام این کار نیروهای پیش کمانش به صورت زیر به دست خواهند آمد [۲۴]:

$$N_{r0} = A_5$$

$$N_{\theta 0} = A_5 \quad (39)$$

$$N_{r\theta 0} = 0$$

با توجه به پیوست (الف) داریم

$$A_5 = -\frac{\phi_m}{1-\nu_0} - e_{\beta 1} \left\{ \frac{-\frac{h}{2} \int E_z^l dz + \frac{h}{2} + h_p}{-\frac{h}{2} - h_p} \frac{h}{2} \right\} \quad (40)$$

با جایگذاری روابط (۲۰) در (۴۰) نیروهای پیش کمانش به دست می آید:

$N_{r0}$  نیروی پیش کمانش در جهت  $r$  است. با جایگذاری روابط (۳۸) و (۴۱) در رابطه (۵۹) رابطه زیر برای اختلاف دما به دست خواهد آمد:

$$\Delta T = \frac{1}{L_r} \left\{ \frac{14/68 \lambda D (1 - \nu_0)}{h a^2} + \frac{e_{31} (V^u - V^l) (1 - \nu_0)}{h} - L_1 \right\} \quad (60)$$

به طوری که

$$L_1 = T_m [E_m \alpha_m + \frac{1}{k+1} (E_m \alpha_{cm} + E_{cm} \alpha_m) + \frac{1}{2k+1} (E_{cm} \alpha_{cm})]$$

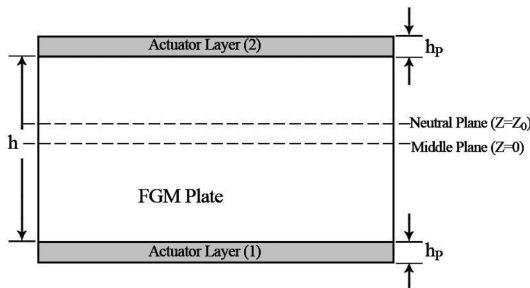
$$L_r = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\frac{k_{cm}}{k_m})^n}{nk+1} \left\{ \frac{E_m \alpha_m}{nk+2} + \frac{E_m \alpha_{cm} + E_{cm} \alpha_m}{(n+1)k+2} + \frac{E_{cm} \alpha_{cm}}{(n+2)k+2} \right\}}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\frac{k_{cm}}{k_m})^n}{nk+1}} \quad (61)$$

به طور مشابه اختلاف دمای کمانش به کمک تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی صفحات به صورت زیر به دست خواهد آمد:

$$\Delta T = \frac{1}{L_r} \left\{ \frac{14/68 A_\varphi (A_1 B_3 - A_3^2) (1 - \nu_0)}{h [A_1 A_\varphi a^2 - 14/68 (A_3^2 - A_1 B_3)]} + \frac{e_{31} (V^u - V^l) (1 - \nu_0)}{h} - L_1 \right\} \quad (62)$$

### ۵- بحث و بررسی

یک ورق دایره‌ای FGM (Aluminum-Alumina) با لایه‌های محرک - محرک پیزوالکتریک  $PZT-5H$  مطابق شکل (۱) در نظر گرفته می‌شود. ورق دارای شرایط مرزی گیردار بوده و مشخصات هندسی و خواص مادی ورق در پیوست (ج) آورده شده است [۱۶].



شکل (۱) ورق دایره‌ای FGM با لایه‌های پیزوالکتریک.

$$D \nabla^4 w_1 = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r N_{r0} \frac{dw_1}{dr}) \quad (48)$$

که

$$D = B_3 - \frac{A_3^2}{A_1} \quad (49)$$

به منظور حل معادله (۴۸) تغییر متغیر زیر را انجام می‌دهیم:

$$\beta = \frac{d^2 w_1}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw_1}{dr} \quad (50)$$

با جایگذاری داریم:

$$D (\beta'' + \frac{1}{r} \beta') = N_{r0} \beta \quad (51)$$

با قرار دادن  $\lambda^2 = -\frac{N_{r0}}{D}$  در رابطه فوق به معادله بسل زیر خواهیم رسید:

$$r^2 \beta'' + r \beta' - \lambda^2 r^2 \beta = 0 \quad (52)$$

حل معادله فوق دارای جوابی به صورت زیر است.

$$\beta = C_3 J_0(\lambda r) + C_4 Y_0(\lambda r) \quad (53)$$

به طوری که  $J_0(\lambda r)$  معرف تابع بسل نوع اول مرتبه صفر و  $Y_0(\lambda r)$  معرف تابع بسل نوع دوم مرتبه صفر است. می‌دانیم که گشتاور برای ورق دایره‌ای در حالت متقارن به صورت زیر بیان می‌شود:

$$M = \frac{d^2 w_1}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dw_1}{dr} \quad (54)$$

پس می‌توان  $\beta$  را مؤلفه‌ای از گشتاور دانست. بنابراین باید در  $r=0$  مقداری محدود داشته باشد. بنابراین خواهیم داشت:

$$\Rightarrow C_4 = 0 \quad r=0 \quad \text{at} \quad \beta = \text{finite}$$

$$\Rightarrow \beta = \frac{dy}{dr} + \frac{1}{r} y = C_3 J_0(\lambda r) \quad (55)$$

معادله (۵۵) یک معادله کامل است که با حل آن خواهیم داشت:

$$y = \frac{C_3}{\lambda} J_1(\lambda r) + \frac{C_5}{r} \quad (56)$$

شرایط مرزی برای ورق با تکیه‌گاه‌های گیردار به صورت زیر است:

$$r=0 \quad \text{at} \quad y = \text{finite}$$

$$r=a \quad \text{at} \quad y=0 \quad (57)$$

با اعمال شرایط فوق به دست خواهیم آورد:

$$\lambda r = 3.1831 \Rightarrow \quad (58)$$

و با توجه به تعریف  $\lambda^2$  داریم:

$$N_{r0} = -\frac{14/68 D}{a^2} \quad (59)$$



لایه‌های پیزوالکتریک مقادیر اختلاف دمای بحرانی کمانش بصورت خطی افزایش می‌یابد.

در شکل (۳) مقادیر اختلاف دمای بحرانی کمانش ورق FGM نمونه تحت افزایش درجه حرارت غیرخطی در جهت ضخامت حاصل از حل معادلات انتقال حرارت به ازای مقادیر مختلف ثابت توانی ( $K = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ ) بر حسب  $\frac{h}{a}$  رسم شده است. در این حالت فرض شده تحلیل کمانش ورق مثبتی بر تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی صفحات است. همان‌طور که مشاهده می‌شود مقدار اختلاف دمای بحرانی کمانش با افزایش  $\frac{h}{a}$  یعنی ضخیم شدن ورق افزایش می‌یابد. میزان افزایش  $T_{cr}$  از  $\frac{h}{a} = 0.02$  تا  $\frac{h}{a} = 0.1$  شدید است و از  $\frac{h}{a} = 0.1$  تا  $\frac{h}{a} = 0.02$  نسبتاً ملایم و اندک است.

با افزایش ثابت توانی  $K$  مقدار اختلاف دمای بحرانی کمانش ورق کاهش یافته است. تفاوت بین مقادیر اختلاف دمای بحرانی کمانش ورق همگن  $K = 0$ ، با ورق FGM، با ترکیب خطی مؤلفه‌ها  $K = 1$  زیاد است. در حالی که این تفاوت در ورق FGM با فرض مقادیر مختلف ثابت توانی به طور نسبی کمتر می‌باشد. به‌ویژه تفاوت بین مقادیر اختلاف دمای بحرانی کمانش ورق FGM با ترکیب غیرخطی مؤلفه‌ها ( $K > 2$ ) ناچیز است.

در شکل (۴) مقادیر اختلاف دمای بحرانی کمانش ورق FGM با لایه‌های پیزوالکتریک تحت افزایش درجه غیر خطی به ازای مقادیر مختلف ثابت توانی ( $K = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ ) بر حسب  $\frac{h}{a}$  رسم شده است. در این جا نیز فرض شده تحلیل کمانش ورق مثبتی بر تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی صفحات است. رفتار کمانش ورق در این حالت‌ها نیز مشابه شکل (۳) قابل تفسیر است.

در شکل (۵) تاثیرات لایه‌های پیزوالکتریک بر مقدار اختلاف دمای بحرانی کمانش ورق FGM به ازای مقادیر مختلف ثابت توانی ( $K = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ ) بر حسب  $\frac{h_p}{a}$  طبق تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی صفحات ترسیم شده است. در شکل (۶) به مقایسه تاثیر لایه‌های پیزوالکتریک بر اختلاف دمای بحرانی کمانش نسبت به حالتی که از اثرات پیزوالکتریک صرف‌نظر شده است پرداخته‌ایم. همان‌طور که مشاهده می‌شود لایه‌های پیزوالکتریک موجب افزایش اختلاف دمای بحرانی

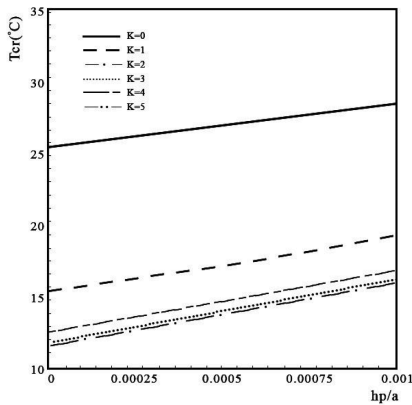
در این بخش ورق نمونه معرفی شده تحت بارگذاری حرارتی مفروض قرار گرفته است. بر اساس روابط به دست آمده اختلاف دمای بحرانی کمانش بر اساس تئوری کلاسیک و تئوری مرتبه اول برشی صفحات، نمودارها و جداول ارائه شده است (کلیه مقادیر اختلاف دما در مقاله حاضر بر حسب درجه سانتیگراد است).

ابتدا مقادیر اختلاف دمای بحرانی کمانش به دست آمده برای ورق نمونه مذکور با مقادیر به دست آمده در مرجع [۱۱] مقایسه شده است. در این مرجع روابط بر مبنای صفحه میانی به دست آمده و نتایج برای ورق FGM یک لایه آورده شده است. ابتدا نتایج برای ورق FGM یک لایه با مرجع مذکور مقایسه و پس از اطمینان از درستی روش کار به بررسی نتایج برای ورق FGM با لایه‌های پیزوالکتریک پرداخته شده است. سپس برای حالات مختلف بارگذاری حرارتی مقادیر اختلاف دمای بحرانی کمانش  $T_{cr}$  به ازای مقادیر مختلف ثابت توانی ( $K = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ ) بر حسب  $\frac{h}{a}$  و  $\frac{h_p}{a}$  به دست آمده‌اند. در همه حالات بارگذاری، ولتاژ برای لایه بالایی پیزوالکتریک ۴۵ ولت و برای لایه پایینی ۴۵- ولت در نظر گرفته می‌شود.

با انتخاب ثابت توانی معادل صفر ( $K = 0$ ) ورق تبدیل به ورق همگن از جنس سرامیک شده و با انتخاب  $K > 0$  یک ورق FGM در نظر گرفته می‌شود.  $K = 1$  معرف فرض رابطه خطی برای ترکیب اجزا FGM (سرامیک- فلز) است. با فرض  $K > 1$  رابطه توانی (غیر خطی) بر کلیه خواص مادی FGM حاکم است.

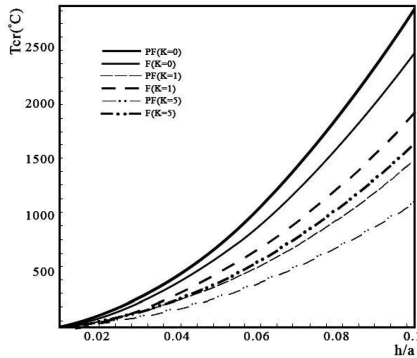
با توجه به اینکه مقادیر به دست آمده برای تئوری‌های ذکر شده اختلاف اندکی با هم دارند در اینجا تنها نمودارهای مربوط به تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی صفحات آورده شده‌اند و در جداول مربوطه این مقادیر با هم مقایسه شده‌اند.

در شکل (۲) مقادیر اختلاف دمای بحرانی کمانش ورق FGM با لایه‌های پیزوالکتریک تحت افزایش درجه غیر خطی بر حسب مقادیر مختلف ولتاژ اعمالی بر لایه‌های پیزوالکتریک با استفاده از رابطه (۶۱) رسم گردیده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود با افزایش ولتاژ اعمالی به



شکل (۵) تاثیر ضخامت لایه های پیزوالکتریک بر اختلاف دمای بحرانی کمانش ورق دایره‌ای FGM با لایه های محرک - محرک

$$\left(\frac{h}{a} = 0.01\right).$$

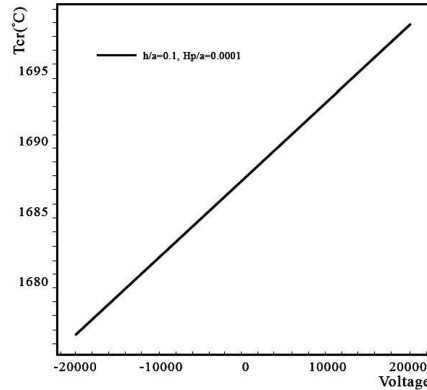


شکل (۶) مقایسه اختلاف دمای بحرانی کمانش ورق دایره‌ای FGM با لایه های محرک - محرک پیزوالکتریک با اختلاف دمای بحرانی

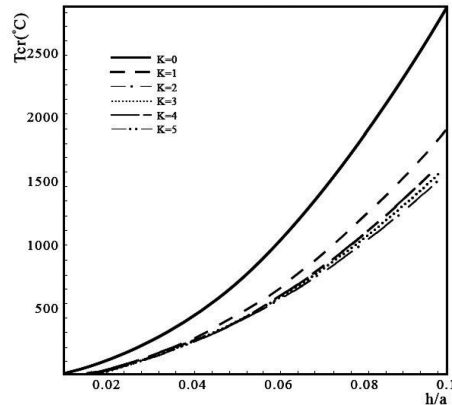
$$\left(\frac{h_p}{a} = 0.0001\right).$$

در شکل (۶)، PF نمودار مربوط به ورق پیزو الکتریک تحلیل شده به کمک تئوری مرتبه اول و F نمودار مربوط به ورق FGM تحلیل شده به کمک تئوری مرتبه اول را مشخص می کنند. در جدول (۱) مقایسه اختلاف دمای بحرانی کمانش ورق FGM به دست آمده در مقاله حاضر بر حسب  $h/a$  و  $K$  مبتنی بر تئوری های کلاسیک (C) و مرتبه اول تغییر شکل برشی صفحات (F)، با نتایج مرجع [۱۱] ارائه شده است. در جدول (۲) مقایسه اختلاف دمای بحرانی کمانش ورق FGM با لایه های محرک پیزوالکتریک بر حسب  $h/a$  و  $K$  مبتنی بر تئوری های کلاسیک (C) و مرتبه اول تغییر شکل برشی صفحات (F) ارائه شده است.

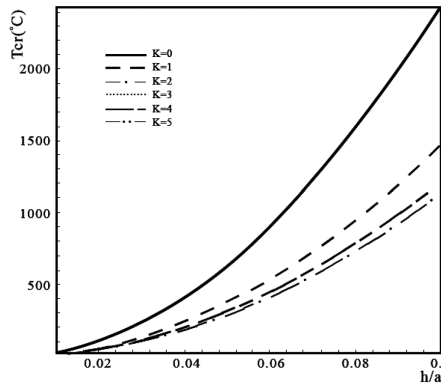
کمانش شده که این افزایش برای ورق همگن کمتر از افزایش اختلاف دما برای ورق ( $K > 0$ ) FGM است. رفتار کمانش ورق در حالت مبتنی بر تئوری کلاسیک صفحات همانند تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی صفحات قابل تفسیر است.



شکل (۷) اختلاف دمای بحرانی کمانش ورق دایره‌ای FGM بر حسب اختلاف پتانسیل لایه های پیزو الکتریک.



شکل (۸) اختلاف دمای بحرانی کمانش ورق دایره‌ای FGM.



شکل (۹) اختلاف دمای بحرانی کمانش ورق دایره‌ای FGM با لایه های

$$\left(\frac{h_p}{a} = 0.0001\right).$$

جدول (۱) مقایسه اختلاف دمای بحرانی کمانش ورق FGM در مقاله حاضر بر حسب  $\frac{h}{a}$  و  $K$  مبتنی بر تئوری کلاسیک (C) و تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی صفحات (F)، با نتایج به دست آمده در مرجع [۱۱].

CLPT( $K=1$ )	FSDT( $K=1$ )	CLPT( $K=0.5$ )	FSDT( $K=0.5$ )	CLPT( $K=0$ )	FSDT( $K=0$ )	h/a
۱۵/۳۷۹	۱۵/۳۹۵	۱۱۹/۰۰۴	۱۹/۰۱۶	۲۵/۴۳۳	۲۵/۴۳۹	مقاله حاضر ۰/۰۱
۱۵/۳۷۸	۱۵/۳۷۳	۱۱۹/۰۰۲	۱۸/۹۹۶	۲۵/۴۳۳	۲۵/۴۲۴	مرجع [۱۱]
۶۱/۵۱۹	۶۱/۴۴۵	۷۶/۰۱۶	۷۵/۹۱۱	۱۰۱/۷۳۲	۱۰۱/۵۶۲	مقاله حاضر ۰/۰۲
۶۱/۵۱۲	۶۱/۴۴۰	۷۶/۰۰۹	۷۵/۹۱۵	۱۰۱/۴۵۵	۱۰۱/۵۹۰	مرجع [۱۱]
۱۳۸/۴۱۸	۱۳۷/۹۵۷	۱۷۱/۰۳۶	۱۷۰/۴۲۶	۲۲۸/۸۹۸	۲۲۷/۹۷۰	مقاله حاضر ۰/۰۳
۱۳۸/۴۳۳	۱۳۸/۰۳۷	۱۷۱/۰۲۱	۱۷۰/۵۹۴	۲۲۸/۸۹۸	۲۲۸/۱۸	مرجع [۱۱]
۲۴۶/۰۷۷	۲۴۴/۵۷۹	۳۰۴/۰۶۴	۳۰۲/۱۰۰	۴۰۶/۹۳۰	۴۰۳/۹۶۸	مقاله حاضر ۰/۰۴
۲۴۶/۰۵۰	۲۴۴/۸۹۷	۳۰۴/۰۳۹	۳۰۲/۵۳۲	۴۰۵/۸۲۱	۴۰۴/۶۶۶	مرجع [۱۱]
۳۸۴/۴۹۵	۳۸۰/۸۲۲	۴۷۵/۱۰۰	۴۷۰/۲۹۵	۶۳۵/۸۲۸	۶۲۸/۶۰۲	مقاله حاضر ۰/۰۵
۳۸۴/۴۵۳	۳۸۱/۶۴۶	۴۷۵/۰۶۱	۴۷۱/۳۹۳	۶۳۵/۸۲۸	۶۳۰/۳۲۰	مرجع [۱۱]

جدول (۲) مقایسه اختلاف دمای بحرانی کمانش ورق FGM با لایه های محرک پیزوالکتریک بر حسب  $\frac{h}{a}$  و  $K$  مبتنی بر تئوری کلاسیک (C) و تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی صفحات (F) ( $\frac{h_p}{a} = 0.001$ ).

$K=5$	$K=4$	$K=3$	$K=2$	$K=1$	$K=0$	h/a
۱۶/۲۵۹	۱۶/۲۴۹	۱۶/۳۴۵	۱۶/۸۹۷	۱۹/۳۱۴	۲۸/۵۴۸	C ۰/۰۱
۱۶/۲۵۰	۱۶/۲۴۰	۱۶/۳۳۶	۱۶/۸۸۹	۱۹/۳۰۵	۲۸/۵۳۴	F
۶۴/۹۶۶	۶۴/۹۲۶	۶۵/۳۱۰	۶۷/۵۲۳	۷۷/۱۹۲	۱۱۴/۱۴۱	C ۰/۰۲
۶۴/۸۱۱	۶۴/۷۷۸	۶۵/۱۷۲	۶۷/۳۹۱	۷۷/۰۵۰	۱۱۳/۹۱۳	F
۱۴۶/۱۴۳	۱۴۶/۰۵۵	۱۴۶/۹۱۹	۱۵۱/۸۹۹	۱۷۳/۶۵۵	۲۵۶/۷۹۶	C ۰/۰۳
۱۴۵/۳۶۳	۱۴۵/۳۱۵	۱۴۶/۲۲۳	۱۵۱/۲۳۵	۱۷۲/۹۴۰	۲۵۵/۶۴۶	F
۲۵۹/۷۹۱	۲۵۹/۶۳۵	۲۶۱/۱۷۲	۲۷۰/۰۲۵	۳۰۸/۷۰۵	۴۵۶/۵۱۳	C ۰/۰۴
۲۵۷/۳۳۶	۲۵۷/۳۰۴	۲۵۸/۹۸۱	۲۶۷/۹۳۵	۳۰۶/۴۵۰	۴۵۲/۸۹۱	F
۴۰۵/۹۱۱	۴۰۵/۶۶۷	۴۰۸/۰۶۹	۴۲۱/۹۰۲	۴۸۲/۳۳۹	۷۱۳/۲۹۱	C ۰/۰۵
۳۹۹/۹۴۷	۴۰۰/۰۰۵	۴۰۲/۷۴۵	۴۱۶/۸۲۲	۴۷۶/۸۵۷	۷۰۴/۴۸۹	F

$\varepsilon_r, \varepsilon_\theta$	کرنش محوری	<b>۷- نتیجه گیری</b>
$\rho$	چگالی	با توجه به بخش قبل نتایج زیر قابل استخراج است:
$\nu_o$	ضریب پواسون	۱- مقادیر اختلاف دمای بحرانی توسط تئوری‌های کلاسیک و مرتبه اول تغییر شکل برشی صفحات، اختلاف بسیار اندکی با یکدیگر دارند و این اختلاف با افزایش نسبت $\frac{h}{a}$ بیشتر می‌شود.
$\phi$	میدان پتانسیل در لایه‌های پیزوالکتریک	۲- در هر دو تئوری، مقادیر اختلاف دمای بحرانی کمانش مربوط به ورق FGM با لایه‌های پیزوالکتریک از مقادیر مربوط به ورق همگن کمتر است.
$g_{ii}$	ثابت دی الکتریک	۳- لایه‌های پیزوالکتریک موجب افزایش اختلاف دمای بحرانی کمانش شده که این افزایش برای ورق همگن ( $K = 0$ ) در هر دو حالت بارگذاری خطی و غیرخطی درجه حرارت کمتر از افزایش اختلاف دما برای ورق $FGM(K > 0)$ است. در هر دو تئوری، مقادیر اختلاف دمای بحرانی کمانش مربوط به ورق $FGM$ با لایه‌های پیزوالکتریک با افزایش نسبت $\frac{h_p}{a}$ ، $\frac{h}{a}$ افزایش می‌یابند.
$e_{ii}$	ضریب کرنش پیزوالکتریک	۴- مقادیر اختلاف دمای بحرانی کمانش با افزایش ولتاژ اعمالی به لایه‌های پیزوالکتریک به صورت خطی افزایش می‌یابد.
$C_{ii}^P$	مدول الاستیسیته ماده پیزوالکتریک	
$D_i$	جابجایی الکتریکی	
$E_i$	میدان الکتریکی	
$\Delta T_{cr}$	اختلاف دمای بحرانی کمانش	

### مراجع

- [1] Koizumi.M. , Niino.M. , Miyamoto.Y, FGM research programs in Japan-from structural to Functional uses. Functionally Graded Materials, 1996-1997, pp 1-8.
- [2] Samsam Shariat B.A., Eslami M.R., Buckling of thick functionally graded plates under mechanical and thermal loads, *Composite Structures*, 78, 2007, pp. 433-439.
- [3] Zhong H., GuC., Buckling of symmetrical cross-ply composite rectangular plates under a linearly varying in-plane load, *Composite Structures* ,80, 2007, pp. 42-48.
- [4] Batra. R.C, Wei Z., Dynamic buckling of a thin thermoviscoplastic rectangular plate, *Thin-Walled Structures*, 43, 2, 2005, pp. 273-290.
- [5] Eslami M.R., Mossavarali A., Peydaye Saheli G., Thermoelastic buckling of Isotropic and Orthotropic Plates with Imperfections, *Journal Of Thermal Stresses*, 23, 9, 2000, pp. 853-872.
- [6] Najafizadeh. M.M., Eslami.M.R., First-Order-Theory-Based Thermoelastic Stability of Functionally Graded Material Circular Plates, *AIAA Journal*, 40, 7, 2002, pp 1444-1450.
- [7] Najafizadeh. M.M., Eslami M.R., Buckling Analysis of Circular Plates of Functionally Graded Materials under Uniform Radial compression, *International Journal of Mechanical Science*, Volume 44, Issue 12, 2002, pp. 2479-2493.
- [8] Javaheri.R, Eslami.M.R, Thermal Bucking of Functionally Graded Plates, *AIAA Journal*, 40, 1, 2002, pp 162-169.

### فهرست علائم

$a$	شعاع ورق دایره‌ای
$E(z), E_c, E_m$	مدول الاستیسیته FGM، سرامیک و فلز
$h, h_p$	ضخامت ورق FGM و لایه‌های پیزوالکتریک
$K$	اندیس قانون توانی
$k_i$	انحناءها
$K(z), K_c, K_m$	ضریب هدایت حرارتی FGM، سرامیک و فلز
$N_i, M_i, Q_i$	نیرو و گشتاور و نیروهای برشی منتجه
$T$	دما
$u, v, w$	مؤلفه‌های جابه‌جایی
$z_o$	محل صفحه خنثی فیزیکی
$r, \theta, z$	مؤلفه‌های سیستم مختصات استوانه‌ای
$\alpha(z), \alpha_c, \alpha_m$	ضریب انبساط حرارتی FGM، سرامیک و فلز
$\varepsilon_r \theta$	کرنش برشی

- [21] Lien. W.C., Chung. Y.L., Ching C.W., Dynamic Stability Analysis and Control of a Composite Beam with Piezoelectric Layers, *Composite Structures*, 56, 2002, pp. 97-109.
- [22] Halliday H., Resnick R., Walker J., Fundamentals of Physics, Wiley, New York, Extended Sixth Edition, 2000.
- [23] Brush D.O., Almorh. B.O., Buckling of Bars-Plate and shells, McGraw Hill , New York, 1975.
- [24] Meyers. C.A, Hyer. M.W., Thermal Buckling and Postbuckling of Symmetrically Laminated Composite Plates, *Journal of Thermal Stresses*, *Colume*, 14, 4, 1999, pp. 519-540.
- [9] Javaheri.R., Eslami M.R., Bucking of Functionally Graded Plates under in-plane Compressive Loading, *ZAMM-Journal of Applied Mathematics*, 82, 4, 2002, pp. 277-283.
- [10] Javaheri R., Eslami M.R., Thermal Bucking of Functionally Graded Plates Based on Higher Order Theory, *Journal of thermal Stresses*, 25, 7, 2002, pp. 603-625.
- [11] Najafzadeh M.M., Heydari H.R., Thermal Buckling of Functionally Graded Circular Plates Based on Higher Order Shear Deformation Plate Theory, *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 23, 6, 2004, pp. 1085-1100.
- [12] Najafzadeh M.M., Heydari H.R., An Exact Solution For Buckling of Functionally Graded Circular Plates Based on Higher Order Shear Deformation Plates Theory Under Uniform Radial Compression, *International Journal of Mechanical Sciences*, 50, 3, 2008, pp. 603-612.
- [13] Ma L.S., Wang T.J., Nonlinear Bending and Post-buckling of a Functionally Graded Circular Plates under Mechanical and Thermal Loading, *International Journal of Solids and Structures*, 40, 13-14, 2003, pp. 3311-3330.
- [14] Tiersten. H.F., Linear Piezoelctric Plate Vibration, Plenum Press, Newyork, 1969.
- [15] Reddy J.N., Phan N.D., Stability and Vibration of Isotropic, Orthotropic and Laminated Plates According to a Higher-Order Shear Deformation Theory, *Journal Of Sound and Vibration*, 98, 2, 1985, pp. 157-170.
- [16] Aldraihem.O.J, Khdeir.A.A, Exact deflection solutions of Beams With Shear Piezoelectric Actuators, *International Journal of Solids and Structures*, 40, 1, 2003, pp. 1-12.
- [17] Wang Z., Chen S.H., Han W., The Static Shape Control for Intelligent Structures, *Journal of Finite Element in Analysis and Design*, 26, 4, 1997, pp. 303-314.
- [18] Robbins D.H., Reddy J.N., Analysis of a Piezoelectrically Actuated Beams using a Layer-Wise Displacement Theory, *Computers & Structures*, 41, 2, 1991, pp. 265-279.
- [19] MorimotoT., Tanigawa Y., Kawamura R., Thermal Buckling of Functionally Graded Rectangular Plates Subjected to Partial Heating, *International Journal of Mechanical Sciences*, 48, 9, 2006, pp. 926-937.
- [20] Viliani N.S., Khalili S.M.R., Porrostami H., Buckling Analysis of FG Plate with Smart Sensor/Actuator, *Journal of Solid Mechanical*, 1, 3, 2009, pp. 201-212.

پیوست‌ها

(الف)

$$(A_{\lambda}, A_{\nu}) = \nu(C_{11}^P, C_{12}^P)h_p + \frac{E_{\lambda}}{1-\nu_{\circ}^{\nu}}(\lambda, \nu_{\circ})$$

$$(A_{\nu}, A_{\phi}) = -\nu(C_{11}^P, C_{12}^P)h_p z_{\circ}$$

$$A_{\Delta} = -\frac{\phi_m}{1-\nu_{\circ}} - e_{\nu\lambda} \begin{pmatrix} -\frac{h}{\nu} & \frac{h+h_p}{\nu} \\ \int E_z^l dz & \int E_z^u dz \\ -\frac{h}{\nu}-h_p & \frac{h}{\nu} \end{pmatrix}$$

$$\phi_m = \int_{-\frac{h}{\nu}}^{\frac{h}{\nu}} [E(z) \alpha(z) T(z)] dz$$

$$(B_{\lambda}, B_{\nu}) = (A_{\nu}, A_{\phi})$$

$$(B_{\nu}, B_{\phi}) = \nu(C_{11}^P, C_{12}^P) \left[ \frac{(\frac{h}{\nu} + h_p)^{\nu}}{\nu} - \frac{(\frac{h}{\nu})^{\nu}}{\nu} + h_p z_{\circ}^{\nu} \right] + \frac{E_{\nu}}{1-\nu_{\circ}^{\nu}}(\lambda, \nu_{\circ})$$

$$B_{\Delta} = -\frac{\phi_b}{1-\nu_{\circ}} - e_{\nu\lambda} \begin{pmatrix} -\frac{h}{\nu} & \frac{h+h_p}{\nu} \\ \int E_z^l(z-z_{\circ}) dz & \int E_z^u(z-z_{\circ}) dz \\ -\frac{h}{\nu}-h_p & \frac{h}{\nu} \end{pmatrix}$$

$$\phi_b = \int_{-\frac{h}{\nu}}^{\frac{h}{\nu}} [E(z) \alpha(z) T(z) (z - z_{\circ})] dz$$

$$z_{\circ} = \frac{E_{\nu}}{E_{\lambda}}$$

$$E_{\lambda} = (E_m + \frac{E_{cm}}{k+1})h$$

$$E_{\nu} = E_{cm} h^{\nu} \left( \frac{1}{k+\nu} - \frac{1}{\nu(k+1)} \right)$$

$$E_{\nu} = h \left( E_m \left( \frac{h^{\nu}}{\nu} + z_{\circ}^{\nu} \right) + E_{cm} \left( \frac{h^{\nu}}{k+\nu} - \frac{h^{\nu}}{k+\nu} + \frac{h^{\nu}}{\nu(k+1)} + \frac{z_{\circ}^{\nu}}{k+1} - \frac{\nu h z_{\circ}}{k+\nu} + \frac{h z_{\circ}}{k+1} \right) \right)$$

(ب)

معادلات تعادل به کمک تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی

$$N_{r,r} + \frac{1}{r} N_{r\theta,\theta} + \frac{1}{r} (N_r - N_{\theta}) = 0$$

$$N_{r\theta,r} + \frac{1}{r} N_{\theta,\theta} + \frac{\nu}{r} N_{r\theta} = 0$$

$$(r.Q_r)_{,r} + Q_{\theta,\theta} + (r.w_{,r}.N_r + w_{,\theta}.N_{r\theta})_{,r} + (\frac{1}{r}.w_{,\theta}.N_{\theta} + w_{,r}.N_{r\theta})_{,\theta} = 0$$

$$r.Q_r + M_{\theta} - (r.M_r)_{,r} - M_{r\theta,\theta} = 0$$

$$r.Q_{\theta} - M_{\theta} - (r.M_{r\theta})_{,r} - M_{\theta,\theta} = 0$$

معادلات پایداری به کمک تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی

$$N_{r\gamma,r} + \frac{1}{r}N_{r\theta\gamma,\theta} + \frac{1}{r}(N_{r\gamma} - N_{\theta\gamma}) = 0$$

$$N_{r\theta\gamma,r} + \frac{1}{r}N_{\theta\gamma,\theta} + \frac{\gamma}{r}N_{r\theta\gamma} = 0$$

$$(r.Q_{r\gamma})_{,r} + Q_{\theta\gamma,\theta} + (r.w_{\gamma,r}.N_{r\gamma} + w_{\gamma,\theta}.N_{r\theta\gamma})_{,r} + (\frac{1}{r}.w_{\gamma,\theta}.N_{\theta\gamma} + w_{\gamma,r}.N_{r\theta\gamma})_{,\theta} = 0$$

$$r.Q_{r\gamma} + M_{\theta\gamma} - (r.M_{r\gamma})_{,r} - M_{r\theta\gamma,\theta} = 0$$

$$r.Q_{\theta\gamma} - M_{r\theta\gamma} - (r.M_{r\theta\gamma})_{,r} - M_{\theta\gamma,\theta} = 0$$

(ج)

$\nu$	$h(m)$	$K(W/mK)$	$a(^\circ C)$	$E(GPa)$	ورق FGM
۰/۳	$5 \times 10^{-3}$	۲۰۴	$23 \times 10^{-6}$	۷۰	Aluminum (فلز)
۰/۳	$5 \times 10^{-3}$	۱۰/۴	$7/4 \times 10^{-6}$	۳۸۰	Alumina (سرامیک)

$C_{11}^P(GPa)$	$\nu$	$E(GPa)$	$g_{33}(f.m^{-1})$	$e_{31}, e_{32}(C.b/m)$	$C_{44}^P$	$C_{12}^P$	پیزوالکتریک
$126 \times 10^9$	۰/۳	۶۵	$1/3 \times 10^{-8}$	-۶/۵	$126 \times 10^9$	$79 \times 10^9$	PZT-۵