

تحلیل کمانش ورق‌های مستطیلی مواد مدرج تابعی تحت شرایط مرزی اختیاری

متین لطیفی^۱ فاطمه فرहत نیا^{۲*} محمود کدخدائی^۳

* نویسنده مسئول: farhatnia@iaukhsh.ac.ir

چکیده

در این مقاله کمانش ورق‌های مستطیلی از مواد مدرج تابعی، در شرایط مرزی اختیاری و تحت بارگذاری فشاری دو محوری مورد بررسی قرار گرفته است. تحلیل حاضر بر پایه تئوری کلاسیک ورق‌ها با تغییرشکل‌های بزرگ استوار است. ورق از جنس مواد مدرج تابعی با مدل توانی در راستای ضخامت است که از تغییرات ضریب پواسون صرف نظر شده است. ابتدا معادلات تعادل در کمانش ورق براساس تئوری سطح خنثی فیزیکی به دست آمده‌اند و سپس حل دقیق این معادلات به کمک روش تبدیل استوکس انجام شده است. روش تبدیل استوکس یک روش کارآمد در مواجهه با شرایط مرزی حاکم بر لبه‌های ورق است که توابع جابه‌جایی ورق در حال کمانش با توجه به شکل مدهای حادث از این رویداد، به صورت توابع مثلثاتی تعریف می‌شوند. در مقاله حاضر، تابع جابه‌جایی در راستای ضخامت با استفاده از سری فوریه سینوسی حدس زده شده‌اند. با حل معادلات کمانش و اعمال شرایط مرزی درحالی که لبه‌های ورق تحت مجموعه‌ای از فرهای پیچشی و کششی قرار گرفته‌اند، بار بحرانی در شرایط مرزی مختلف محاسبه می‌شوند. همچنین تغییرات بار بحرانی براساس نسبت ابعادی ورق، تغییرات توان مدل FGM و نسبت بارگذاری در دو راستای ورق مورد بررسی قرار گرفته است. این نتایج با نتایج حاصل از المان محدود و نتایج سایر محققین، صحت سنجی شده است که هماهنگی خوبی بین آنها مشاهده می‌شود.

واژه‌های کلیدی: کمانش، ورق مستطیلی، ماده مدرج تابعی، تبدیل استوکس.

۱- مدرس، دانشکده مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد خمینی شهر.

۲- استادیار، دانشکده مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد خمینی شهر.

۳- استادیار، دانشکده مکانیک، دانشگاه صنعتی اصفهان.

۱- مقدمه

ورق‌ها از اجزای مهم تشکیل دهنده سازه‌ها و ماشین‌آلات صنعتی هستند که تحت اثر بارهای فشاری، کششی و برشی پایداری خود را از دست داده و کمانش می‌کنند. حداقل بار کمانش در طراحی و محاسبات مهندسی اهمیت به‌سزایی دارد. امروزه استفاده ترکیبی از مواد برای دستیابی به خواص مطلوب روز به روز افزایش یافته است؛ زیرا با توجه به توسعه تکنولوژی، عملاً یک ماده به تنهایی نمی‌تواند جوابگوی خواص مورد نیاز در صنایع پیشرفته باشد. بنابراین برای ارضای این خواسته، مواد مرکب لایه‌ای تولید شده‌اند که در دو سطح خود خواص متفاوتی داشتند. ولی آنها نیز در اثر تنش‌های پسماند لایه لایه شده و دارای عمر کمی بودند. به همین منظور در سال ۱۹۸۴ در لابراتوار هوافضای ژاپن موادی با ریز ساختار ناهمگن تولید شد که خواص مکانیکی آن به طور تدریجی و پیوسته از سطحی به سطح دیگر تغییر می‌کرد. در این مواد، عدم وجود فصل مشترک تیز و ناگهانی باعث بهبود مقاومت اتصال، کاهش تنش‌های پسماند و توزیع یکنواخت تنش‌ها می‌شود. در این راستا، بررسی و تحلیل موضوع کمانش ورق‌های ساخته شده از FGM و تعیین بار بحرانی در آنها حائز اهمیت است.

تاکنون تحقیقات زیادی در مورد تحلیل کمانش ورق‌ها انجام گرفته است. لیزا و کانگ [۱] به تحلیل کمانش ورق‌های آیزوتروپیک تحت بارهای فشاری متغیر و در شرایط تکیه‌گاهی دو طرف ساده پرداختند و مقادیر بار کمانشی حداقل را به ازای تغییر شکل مودها برای شرایط تکیه‌گاهی مختلف رسم کردند. جواهری و اسلامی [۲] کمانش ورق‌های مستطیلی FGM را تحت بارهای فشاری و در شرایط مرزی چهارطرف تکیه‌گاه ساده به روش انرژی بررسی کردند و با تغییر در پارامترهای موثر در بار کمانش تاثیر گذاری آنها را در نمودارهای مختلف ترسیم کردند. نی و ایواموتو [۳] کمانش ورق‌های مستطیلی کامپوزیت لایه‌ای را تحت شرایط مرزی تیر الاستیک، بر اساس تئوری مرتبه سوم و به روش رایلی ریتز بررسی نمودند. آنها با توجه به مدلسازی تیر به صورت فنر، کمانش ورق‌ها تحت شرایط مرزی مختلف را تحلیل کردند. چن و همکاران [۴] ارتعاشات و پایداری ورق‌های FGM در مدل توانی و بر اساس تئوری مرتبه سوم

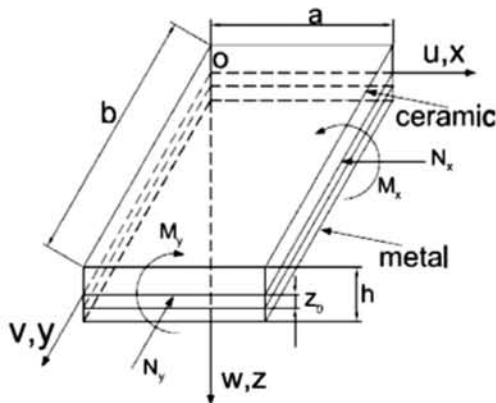
برشی را مورد بررسی قرار دادند. نجفی زاده و مهدویان [۵] به آنالیز کمانش ورق‌های مستطیلی FGM تحت بارهای محوری گسترده غیر یکنواخت به روش گالرکین و در شرایط تکیه‌گاهی ساده پرداختند.

در ادامه به ذکر برخی از کارهای انجام شده به روش تبدیل استوکس^۱ پرداخته می‌شود. چانگ [۶] با کمک روش تبدیل استوکس ارتعاشات آزاد پوسته‌های استوانه‌ای متقارن تحت شرایط مرزی مختلف را مورد بررسی قرار داد و فرکانسهای طبیعی به‌دست آمده از معادلات را با نتایج حاصل از روش المان محدود مقایسه کرد و دقت زیاد این روش در حل مسائل را نشان داد. انصاری و درویزه [۷] ابتدا رفتار دینامیکی پوسته استوانه‌ای ساخته شده از مواد FG را مورد بررسی قرار دادند و سپس به کمک روش تبدیل استوکس معادلات به‌دست آمده را تحت شرایط مرزی مختلف تحلیل کردند. هیونگ کو و مون سانگ [۸] ابتدا معادلات ارتعاشات تیرها را استخراج و سپس به کمک روش تبدیل استوکس این معادلات را تحت شرایط مرزی مختلف و در نهایت در شرایط مرزی تیر مورد استفاده در راکتورها حل کردند. لطیفی و همکاران [۹] به کاربرد روش تبدیل استوکس در تحلیل سازه‌های مکانیکی پرداختند و با تحلیل نمونه‌هایی از مسائل سازه‌های مکانیکی مانند ارتعاشات تیر، کمانش ورق و ارتعاشات پوسته‌ها با استفاده از روش مذکور، قابلیت این روش در حل مسائل سازه‌های مختلف را مورد بررسی قرار دادند.

حل مستقیم معادلات دیفرانسیلی تعادل یک ورق در وضعیت کمانش، کار دشواری است و در روش معکوس نیز حدس تابع خیز ورق در شرایط مرزی متنوع از پیچیدگی‌های راه حل تحلیلی است. چنانچه لازم باشد رفتار ورق در شرایط مرزی مختلف مورد بررسی قرار گیرد، باید برای هر حالت، تابع ارضا کننده آن را حدس زده و به حل معادله پرداخت. این موضوع علاوه بر پیچیدگی، فرایندی وقت گیر و طولانی است. در این مقاله حل دقیق کمانش ورق با بهره‌گیری از روش تبدیل استوکس انجام گرفته است. جنبه نوآوری این تحقیق در آن است که تاکنون کمانش ورق‌ها به روش تبدیل استوکس انجام نشده است. در مقاله حاضر کمانش ورق‌های FGM تحت بارگذاری فشاری در صفحه و در شرایط

۱- Stokes Transformation

$$z_0 = \frac{\int_{-h/2}^{h/2} z \times E(z) dz}{\int_{-h/2}^{h/2} E(z) dz} \quad (2)$$



شکل (۱) دستگاه مختصات و نمایش نیرو و ممان روی آن.

با استفاده از تعریف سطح خنثی فیزیکی در رابطه (۲)، معادلات جابه‌جایی در ورقها چنین به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} u &= u^{(0)} - \frac{\partial w}{\partial x}(z - z_0) \\ v &= v^{(0)} - \frac{\partial w}{\partial y}(z - z_0) \end{aligned} \quad (3)$$

$$w = w(x, y)$$

$u^{(0)}$ و $v^{(0)}$ به ترتیب جابه‌جایی درون صفحه ای در راستای محورهای x و y ، در سطح خنثی (با فاصله z_0 از سطح میانی) می‌باشد.

با توجه به معادلات (۳)، روابط کرنش - جا به جایی به شکل معادله (۴) نوشته می‌شوند:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^{(0)} \\ \varepsilon_y^{(0)} \\ \gamma_{xy}^{(0)} \end{Bmatrix} + (z - z_0) \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^{(1)} \\ \varepsilon_y^{(1)} \\ \gamma_{xy}^{(1)} \end{Bmatrix} \quad (4)$$

به نحوی که $\{\varepsilon^{(0)}\}$ و $\{\varepsilon^{(1)}\}$ به ترتیب کرنش‌ها و خمیدگی‌ها در سطح خنثی هستند که با استفاده از معادلات (۵) و (۶) و تئوری فون کارمن در تعریف تغییر شکل‌های بزرگ به صورت زیر تعریف می‌شوند:

تکیه‌گاهی متفاوت بررسی شده است. ابتدا معادلات کمانش ورق FGM بر اساس تئوری سطح خنثی استخراج شده است و سپس با حدس تابع خیز به کمک سری فوریه سینوسی و تعریف مقادیر تابع در لبه‌های مرزی به صورت جداگانه، مشتقات تابع اولیه با استفاده از انتگرال جزئی به دست آمده است. در ادامه با جایگذاری این مشتقات در معادله کمانش، ضریب تابع خیز بر حسب مقادیر تابع و مشتقات آن در لبه‌های مرزی استخراج می‌شود. در نهایت، با فرض اینکه لبه‌های ورق تحت مجموعه‌ای از فنرهای کششی و پیچشی می‌باشند، بار کمانشی ورق FGM در شرایط مرزی مختلف به دست آمده است.

۲- معادلات کمانش ورقهای FGM بر اساس تئوری سطح خنثی فیزیکی

فرض بر آن است که ورق ساخته شده از مواد مدرج تابعی در راستای ضخامت (z) باشد و مدول الاستیسیته آن دارای مدل توانی بوده و ضریب پواسون آن ثابت باشد.

$$E(z) = E_m + (E_c - E_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^k \quad (1)$$

$$k \geq 0$$

$$v(z) = cte$$

h ضخامت ورق و E_m و E_c به ترتیب مدول الاستیسیته در سطح پایین و بالای ورق هستند. با توجه به عدم تقارن خواص ورق FGM نسبت به سطح میانی هندسی، جابه‌جایی صفحه‌ای در سطح میانی ورق به وجود می‌آید. در نتیجه برای تحلیل معادلات کمانش باید توابع جابه‌جایی در راستای x و y را نیز تعریف نمود که این مورد بر پیچیدگی معادلات و حل دقیق مسئله با اتکا بر روش تبدیل استوکس می‌افزاید. بنابراین در این مقاله ابتدا تئوری سطح خنثی بیان شده و سپس کلیه معادلات همانطور که در ادامه بدان اشاره می‌شود بر اساس تئوری سطح خنثی فیزیکی استخراج می‌شود. بر اساس تئوری اساسی خمش، سطحی که تنش‌ها و کرنش‌های متعاقب آن برابر صفر باشد، سطح خنثی فیزیکی نامیده می‌شود [۱۰] و فاصله آن را تا سطح میانی هندسی ورق برابر با z_0 مطابق شکل (۱) نمایش می‌دهند که مقدار این فاصله مطابق رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = [A_{ij}] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^{(0)} \\ \varepsilon_y^{(0)} \\ \gamma_{xy}^{(0)} \end{Bmatrix} \quad (11)$$

و

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = [D_{ij}] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^{(1)} \\ \varepsilon_y^{(1)} \\ \gamma_{xy}^{(1)} \end{Bmatrix} \quad (12)$$

ماتریسهای $[A_{ij}]$ و $[D_{ij}]$ که معرف کوپلینگ‌های محوری و خمشی هستند، توسط معادلات (۱۳) و (۱۴) نشان داده شده‌اند.

$$[A_{ij}] = A \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (13)$$

و

$$[D_{ij}] = D \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (14)$$

مقادیر A و D به کمک روابط زیر به دست می‌آیند:

$$A = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{E(z) dz}{(1-\nu^2)}$$

$$D = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{(z-z_0)^2 E(z) dz}{(1-\nu^2)} \quad (15)$$

با جایگذاری معادلات (۱) و (۲) در معادلات (۱۵) و انتگرال‌گیری در راستای ضخامت، مقادیر A و D به دست می‌آیند. $\{N\}$ و $\{M\}$ در معادلات (۹) و (۱۰) به ترتیب معرف نیروی محوری و گشتاور خمشی در سطح خشی می‌باشند.

$$D = \frac{1}{1-\nu^2} \left(\frac{E_m h^3}{12} + (E_c - E_m) h^3 \right)$$

$$\left(\frac{1}{k+3} - \frac{1}{k+2} + \frac{0.25}{k+1} \right) - 2z_0 (E_c - E_m) h^2 \quad (16)$$

$$\left(\frac{1}{k+2} - \frac{0.5}{k+1} \right) + z_0^2 h \left(E_m + \frac{E_c - E_m}{k+1} \right)$$

مقدار D در رابطه بالا معرف صلبيت خمشی در ورقهای FGM است و این مقدار تابع ضخامت، مدول الاستیسیته در سطوح بالایی و پایینی، ضریب پواسون و توان در مدل FGM است. با مشاهده معادلات استخراج شده براساس سطح خشی فیزیکی

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^{(0)} \\ \varepsilon_y^{(0)} \\ \gamma_{xy}^{(0)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u^{(0)}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{\partial v^{(0)}}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \\ \frac{\partial u^{(0)}}{\partial y} + \frac{\partial v^{(0)}}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (5)$$

و

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^{(1)} \\ \varepsilon_y^{(1)} \\ \gamma_{xy}^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (6)$$

همچنین با توجه به روابط تنش-کرنش، معادلات (۴) تا (۶) و معادله (۲)، معادلات تنش-کرنش به شکل زیر استخراج می‌شوند:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [Q_{ij}] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (7)$$

به نحوی که ماتریس $[Q_{ij}]$ مطابق معادله زیر است.

$$[Q_{ij}] = \frac{E(z)}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (8)$$

با در نظر گرفتن تعریف نیروی محوری و گشتاور، روابط (۹) و (۱۰) حاصل می‌شوند:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} dz \quad (9)$$

و

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} z dz \quad (10)$$

سپس با استفاده از رابطه بین تنش با نیروی محوری و گشتاور (روابط (۹) و (۱۰))، معادلات (۳) تا (۸) و انتگرال‌گیری در طول ضخامت ورق، در نهایت معادلات گشتاور خمشی-کرنش و نیروی محوری-کرنش مطابق معادلات (۱۱) و (۱۲) به دست می‌آیند:

در تحلیل به کمک روش تبدیل استوکس، کلیه شرایط تکیه گاهی مورد بررسی قرار می گیرند. ولی تابع خیز (۲۰) فقط شرط مرزی چهار طرف تکیه گاه ساده را ارضا می کند. بنابراین مقدار تابع خیز در نقاط مرزی به صورت جداگانه مطابق معادلات (۲۱) تعریف می شوند.

$$\begin{aligned} w(o, y) &= -\frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} w_{o,y} \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \\ w(a, y) &= \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} w_{a,y} \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \\ w(x, o) &= -\frac{\pi}{2} \sum_{m=1}^{\infty} w_{x,o} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \\ w(x, b) &= \frac{\pi}{2} \sum_{m=1}^{\infty} w_{x,b} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \end{aligned} \quad (21)$$

پارامترهای $w_{o,y}$ ، $w_{x,b}$ ، $w_{x,o}$ ، $w_{a,y}$ در روابط (۲۱) به ترتیب مقادیر خیز در لبه های $(x, y = o)$ ، $(x, y = b)$ ، $(x = o, y)$ و $(x = a, y)$ هستند.

اکنون به کمک انتگرال جزئی، مشتقات تابع بر حسب w_{mn} و مقادیر تابع و مشتقات آن در نقاط مرزی، مطابق پیوست به دست می آید. سپس با جایگذاری این مشتقات در معادله دیفرانسیل کمانش (۱۸)، مرتب سازی معادله بر حسب w_{mn} ، همچنین با فرض اینکه بار پیچشی وجود ندارد و بار فشاری در جهت y به صورت ضریبی از بار فشاری در جهت x است، مقدار w_{mn} به دست می آید.

با توجه به اینکه در رابطه کمانش از مشتقات دوم و چهارم تابع خیز استفاده می شود و این مشتقات همانطور که در پیوست آمده اند بر حسب مقادیر تابع و مشتقات دوم آن در لبه ها نوشته می شوند، بنابراین مقدار w_{mn} بر حسب ضرایب بار کمانش در جهت های x و y ، بار کمانش N_x و پارامترهای

$$\begin{aligned} \underline{\underline{y}}, \underline{\underline{x}}, \underline{\underline{y}}, \underline{\underline{x}}, \underline{\underline{y}} \\ w_{x,o}, w_{x,o}, w_{a,y}, w_{a,y}, w_{o,y}, w_{a,y}, w_{x,b}, w_{x,o}, w_{o,y} \\ \underline{\underline{y}}, \underline{\underline{x}} \\ (w_{x,b}, w_{x,b}) \end{aligned}$$

به دست می آید.

به دلیل اینکه برای ارضای شرایط مرزی و حل معادله در حالت های مختلف تکیه گاهی نیاز به w_{mn} است، بنابراین باید مقدار w_{mn} را بر حسب پارامترهایی بیان کرد که هر کدام مشخصه یک شرط مرزی مانند گشتاور یا مقدار تابع در لبه های ورق باشد. حال با توجه به روابط بین مشتقات دوم و گشتاورها، این روابط به شکل معادلات (۲۲)

می توان دریافت که در این معادلات کوپلینگ کششی - خمشی وجود ندارد و معادلات به دست آمده به شکل معادلات ورق های آیزوتروپیک همگن هستند.

حال معادله تعادل ورق در حالت کمانش مطابق رابطه (۱۷) نوشته می شود [۱۱]:

$$\begin{aligned} D\left(\frac{\partial^2 M_y}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2}\right) - \\ N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \\ \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

با توجه به روابط (۱۱) تا (۱۷)، معادله کمانش ورق مستطیلی FGM به شکل معادله (۱۸) نتیجه می شود:

$$\begin{aligned} D\nabla^4 w - N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \\ \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} = 0 \end{aligned} \quad (18)$$

که

$$\nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \quad (19)$$

مقدار D در این معادلات، صلیبیت خمشی ورق FGM رابطه (۱۶) است.

۳- اعمال روش تبدیل استوکس در حل معادلات کمانش

در این مقاله تحلیل کمانش ورق به روش تحلیلی سری های فوریه که به روش تبدیل استوکس موسوم است، انجام شده است. ابتدا تابع خیز به صورت سری فوریه سینوسی مطابق معادله (۲۰) حدس زده می شود:

$$w(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} w_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (20)$$

$$0 < y < b \quad 0 < x < a$$

در رابطه بالا a طول ورق در جهت x و b طول ورق در جهت y است.

جدول (۱) نحوه ارضای شرایط مرزی توسط تابع خیز اولیه به صورت سری فوریه سینوسی.

$\frac{\partial w}{\partial y}$	$\frac{\partial w}{\partial x}$	M_y	M_x	w	
---	---	☑	☑	☑	تکیه گاه ساده (S)
☒	☒	---	---	☑	تکیه گاه درگیر (C)
---	---	☑	☑	☒	تکیه گاه آزاد (F)
---	---	☒	☒	☒	فکر پیچشی و کششی

نشانه‌های موجود در جدول (۱) به شرح زیر است:
 ---: برای ارضای شرط مرزی نیاز به بررسی عبارت نیست.
 ☒: سری فوریه سینوسی این شرط مرزی را ارضا نمی‌کند.
 ☑: سری فوریه سینوسی این شرط مرزی را ارضا می‌کند.

اعمال شرایط مرزی در حالتی که ورق تحت فنرهای پیچشی و کششی قرار دارد، در چهار لبه ورق باعث ایجاد هشت معادله می‌شود. به عنوان نمونه شرط مرزی برای نیرو در لبه $(x=0, y)$ به شکل معادله (۲۶) است:

$$V_x(0, y) = -T_1 w(0, y) \quad (26)$$
 که T_1 ضریب کششی در لبه $(x=0, y)$ بوده و $V_x(x, y)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$V_x(x, y) = -D \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2} + (2-\nu) \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2} \right) \quad (27)$$

با نوشتن معادله (۲۷) در لبه $(0, y)$ و جایگذاری مشتقات حاصل از روش تبدیل استوکس در معادله مذکور و مقدار تابع در لبه $(0, y)$ در رابطه (۲۱)، معادله (۲۶) کامل شده که به همین ترتیب در چهار لبه ورق، روابط مشابه برای شرط مرزی نیرو نوشته می‌شوند.

همچنین شرط مرزی گشتاور در لبه $(x=0, y)$ به صورت معادله (۲۸) نوشته می‌شود:

$$M_x(0, y) = -R_1 \frac{\partial w}{\partial x}(0, y) \quad (28)$$

در معادله بالا R_1 ضریب پیچش فخر در لبه $(x=0, y)$ است. حال با جایگذاری مشتقات حاصل از روش تبدیل استوکس در معادله بالا و تعریف گشتاور و خیز در لبه $(0, y)$ ، شرط مرزی گشتاور در این لبه نوشته می‌شود و به همین ترتیب در چهار لبه ورق، روابط مرزی مشابه برای شرط مرزی گشتاور به دست می‌آیند.

بازنویسی می‌شوند. به عبارتی، مقادیر مشتق دوم در لبه‌ها را بر اساس گشتاورهای موجود در آنها نوشته و سپس این معادلات در مقدار w_{mm} جایگذاری می‌شود. در نتیجه مقدار w_{mm} بر حسب مقادیر تابع و گشتاور در لبه‌ها مطابق پیوست نتیجه می‌شود.

$$\begin{aligned} \frac{x}{w_{0,y}} &= \frac{M_{0,y} - \nu M_{0,y}}{D(1-\nu^2)} & \frac{y}{w_{0,y}} &= \frac{M_{0,y} - \nu M_{0,y}}{D(1-\nu^2)} \\ \frac{x}{w_{a,y}} &= \frac{M_{a,y} - \nu M_{a,y}}{D(1-\nu^2)} & \frac{y}{w_{a,y}} &= \frac{M_{a,y} - \nu M_{a,y}}{D(1-\nu^2)} \\ \frac{x}{w_{x0}} &= \frac{M_{x0} - \nu M_{x0}}{D(1-\nu^2)} & \frac{y}{w_{x0}} &= \frac{M_{x0} - \nu M_{x0}}{D(1-\nu^2)} \\ \frac{x}{w_{xb}} &= \frac{M_{xb} - \nu M_{xb}}{D(1-\nu^2)} & \frac{y}{w_{xb}} &= \frac{M_{xb} - \nu M_{xb}}{D(1-\nu^2)} \end{aligned} \quad (22)$$

۴- اعمال شرایط مرزی

همانطور که در بخش قبلی بدان اشاره شد تابع خیز در معادله (۲۰) تنها شرایط مرزی چهار طرف تکیه گاه ساده را مطابق جدول (۱) ارضا می‌کند؛ در صورتی که در روش تبدیل استوکس کلیه شرایط مرزی تحلیل می‌شود. بنابراین باید وضعیتی از شرایط تکیه گاهی را در نظر گرفت که معادله خیز هیچ کدام از شرایط آن را ارضا ننماید و شرایط مرزی بر حسب پارامترهایی بیان شود که با تغییر در آنها بتوان شرط مرزی مورد نظر را تحلیل نمود. به این منظور لبه‌های ورق تحت فنرهای کششی و پیچشی به ترتیب با ضرایب R و T در نظر گرفته می‌شوند و با توجه به این فرض، شرایط مرزی در لبه‌های ورق نوشته می‌شوند. در روابط زیر شرایط مرزی مختلف در لبه $(0, y)$ بیان شده است.

شرایط مرزی در تکیه گاه ساده:

$$w(0, y) = 0 \quad (23)$$

$$M_x(0, y) = 0$$

شرایط مرزی در تکیه گاه گیردار:

$$w(0, y) = 0 \quad (24)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x}(0, y) = 0$$

شرایط مرزی در تکیه گاه آزاد:

$$V_x(0, y) = 0 \quad (25)$$

$$M_x(0, y) = 0$$

مقادیر عددی T_1 تا T_4 ، R_1 تا R_4 و q_1 تا q_4 بر اساس همان شرط مرزی، جایگذاری شوند. به عنوان مثال، چنانچه تکیه گاه در همه لبه‌ها ساده باشد مقادیر q ، T ، R به صورت زیر تعیین می‌شوند:

$$R_i = 0, q_i = 0, T_j \rightarrow \infty \quad (34)$$

$$i = 1, \dots, 4, j = 1, \dots, 4$$

به این ترتیب با در نظر گرفتن روابط (۲۵) تا (۲۹)، مقادیر R_1 تا R_4 و T_1 تا T_4 تعیین می‌شود.

در بخش بعدی با صفر قرار دادن دترمینان ماتریس $[e_{ij}]$ به کمک نرم افزار MATHEMATICA، معادلات کمانش در شرایط مرزی مختلف حل شده است که کوچکترین مقدار مثبت بار کمانشی یا به عبارتی حداقل بار فشاری که ورق تحت اثر آن کمانش می‌کند، جواب مسئله است. همچنین نتایج به دست آمده از این روش با نتایج سایر تحقیقات و نتایج حل به کمک نرم افزار ABAQUS مقایسه شده است.

۵- ارائه نتایج عددی

به منظور بررسی دقت روش تبدیل استوکس در حل مسئله کمانش ورق FGM، مقادیر زیر در محاسبه حداقل بار کمانشی در نظر گرفته شده اند.

ماده مدرج تابعی ترکیبی از مواد آلومینیوم و آلومینا فرض شده است که مدول الاستیسیته آلومینیوم و مدول الاستیسیته آلومینا به ترتیب $E_m = 70 \text{ GPa}$ و $E_c = 380 \text{ GPa}$ است. ضریب پواسون در کل ورق ثابت و برابر $\nu = 0.3$ است. ضخامت ورق مقدار $h = 0.005 \text{ m}$ ، مقادیر توان در مدل FGM برابر $b = 0.5$ و طول ورق در جهت محور y مقدار $m = 0.125$ در نظر گرفته شده است. همچنین همانطور که در طول متن بدان اشاره شد، بار پیچشی برابر صفر و بار فشاری در جهت محور y به صورت ضریبی از بار فشاری در جهت محور x فرض شده است و مقدار این ضریب با توجه به نوع بارگذاری تعیین می‌گردد.

لازم به ذکر است که برای وضوح نتایج در نمودارها مقدار توان مدل FGM از صفر برای مقایسه با مواد همگن آیزوتروپیک و مقادیر $k = 1, 2, 5$ برای مقایسه نتایج حل با نتایج سایر تحقیقات استفاده شده است.

با توجه به روابط نوشته شده، در لبه‌های ورق هشت معادله نوشته می‌شود. چنانچه معادلات به صورت ماتریسی و برحسب مقادیر رابطه (۲۹) بازنویسی شود، ماتریسی به صورت زیر ایجاد خواهد شد که این ماتریس شامل پارامترهای N_x, α و همچنین ضرایب فنریت R و T در لبه‌ها می‌باشد.

$$[e_{ij}] \{w_{0y}, w_{ay}, w_{x0}, w_{xb}, M_{0y}, M_{ay}, M_{x0}, \quad (29)$$

$$M_{xb}, M_{x0}, M_{yb}, M_{0y}, M_{ay}\}^T = 0$$

$$(j = 1, 2, \dots, 12) \text{ و } (i = 1, 2, \dots, 8)$$

اکنون هشت شرط رابطه مرزی بر حسب دوازده پارامتر مرزی شامل چهار خیز و هشت گشتاور در لبه‌های ورق به دست آمد. در این مرحله باید چهار معادله دیگر در لبه‌ها، به گونه ای نوشت که به کمک این معادلات بتوان چهار کمیت از مقادیر گشتاور را که در بیان شرایط مرزی کاربرد ندارند مانند $M_{xb}, M_{0y}, M_{ay}, M_{x0}$ حذف نمود به نحوی که ماتریس ضرایب به صورت $\{e_{ij}\} (i, j = 1, 2, \dots, 8)$ در آید.

به عنوان مثال، در لبه‌ای که تکیه گاه ساده باشد، می‌توان رابطه بین گشتاورها را به صورت زیر نوشت:

$$M_x(0, y) = 0, M_y(0, y) = 0 \quad (30)$$

و به همین ترتیب هنگامی که تکیه گاه گیردار وجود دارد، رابطه زیر بین گشتاورها حاکم است:

$$M_y(0, y) = \nu M_x(0, y) \quad (31)$$

با در نظر گرفتن این روابط می‌توان به این نتیجه رسید که در شرایط مرزی معمول یعنی تکیه گاه ساده و گیردار رابطه زیر بین گشتاورها در هر لبه وجود دارد:

$$\begin{aligned} M_y(0, y) &= q_1 M_x(0, y) \\ M_y(a, y) &= q_2 M_x(a, y) \\ M_x(x, 0) &= q_3 M_y(x, 0) \\ M_x(x, b) &= q_4 M_y(x, b) \end{aligned} \quad (32)$$

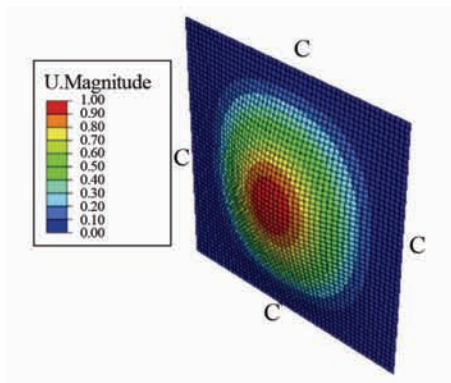
حال با توجه به معادلات (۳۲) دستگاه معادلات (۲۹) به صورت زیر ساده می‌شود:

$$[e_{ij}] \{w_{0y}, w_{ay}, w_{x0}, w_{xb}, \quad (33)$$

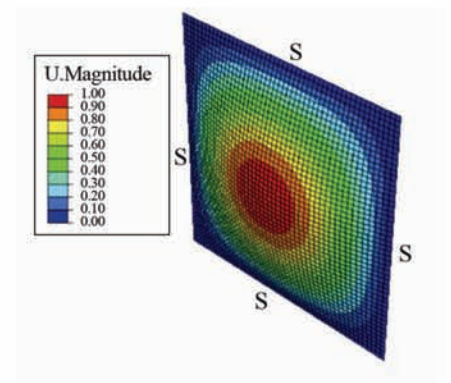
$$M_{0y}, M_{ay}, M_{x0}, M_{xb}\}^T = 0$$

$$(i, j = 1, 2, \dots, 8)$$

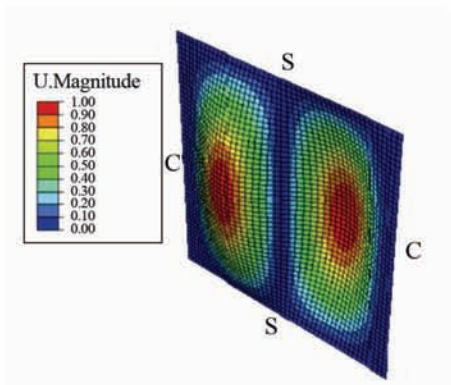
در این جا برای ارضای هر حالت از شرایط تکیه گاهی باید



شکل (۳) مدل ورق کمانش یافته در شرط مرزی C.C.C.C توسط نرم افزار ABAQUS.



شکل (۴) مدل ورق کمانش یافته در شرط مرزی S.S.S.S توسط نرم افزار ABAQUS.



شکل (۵) مدل ورق کمانش یافته در شرط مرزی C.C.S.S توسط نرم افزار ABAQUS.

در جدول (۲) مقادیر صلیبیت خمشی D در توانهای مختلف مدل FGM و بر اساس معادله (۱۶)، آورده شده است. این مقادیر بر اساس سطح خستگی فیزیکی تعیین شده‌اند.

برای صحت سنجی، مسئله کمانش ورق‌های FGM با روش المان محدود در نرم افزار ABAQUS شبیه سازی شده است و مراحل انجام آن مطابق ذیل است:

(الف) ورق در فضای سه بعدی به صورت shell/planer فرض می‌شود.

(ب) نوع ماده Mechanical/elastic با مدول یانگ ثابت در نظر گرفته می‌شود.

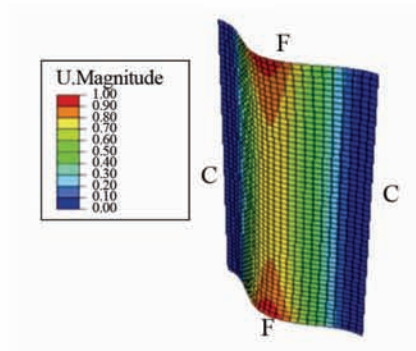
(ج) برای مدل سازی به صورت FGM، ورق کامپوزیتی با صد لایه که مدول الاستیسیته آن به طور تدریجی و با شیب کم تغییر می‌کند، ساخته می‌شود. لازم به ذکر است که این تعداد زیاد لایه در ماده کامپوزیتی برای نزدیک شدن ماده مورد تحلیل در نرم افزار ABAQUS و ورق FGM در حل تحلیلی در نظر گرفته می‌شود.

(د) در قسمت step برای نوع مسئله Buckle انتخاب می‌شود. (ه) شرایط تکیه گاهی ورق با توجه به نوع شرط مرزی Mechanical/Displacement and rotation در نظر گرفته می‌شود.

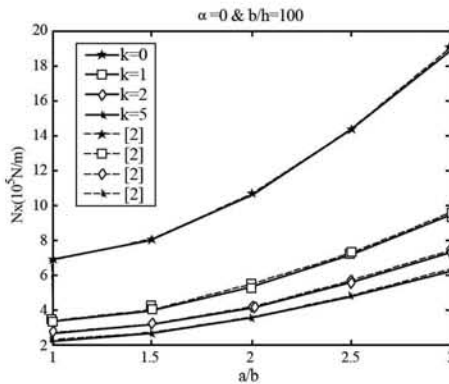
(و) شرایط بار گذاری ورق به صورت در دو لبه یا چهار لبه با شرط Mechanical/Shell edge load بار گذاری شده است.

(ز) برای مش بندی ورق از size-۰/۰۱ برای طول و عرض مستطیل استفاده می‌شود.

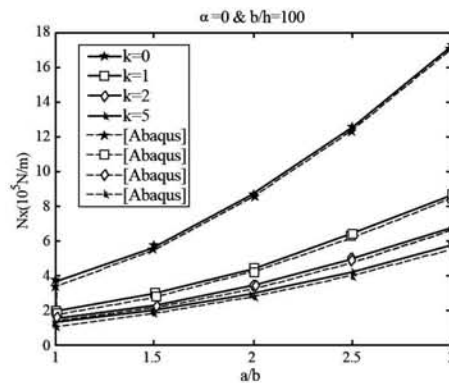
در شکل (۲) تا (۵) نمونه‌ای از ورق کمانش یافته و مدل شده توسط نرم افزار ABAQUS در شرایط تکیه گاهی متنوع و در مود شکل‌های مختلف آورده شده است.



شکل (۶) مدل ورق کمانش یافته در شرط مرزی C.C.F.F توسط نرم افزار ABAQUS.

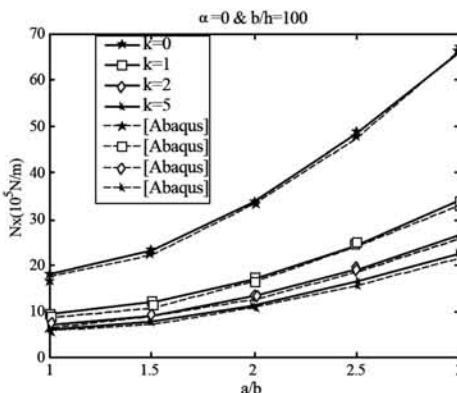


شکل (۶) بار کمانشی N_x (N/m) بر حسب تغییرات b/a و k در شرایط تکیه گاهی (S.S.S.S)، $\alpha=0$ و $b/h=100$.



شکل (۷) بار کمانشی N_x (N/m) بر حسب تغییرات b/a و k در شرایط تکیه گاهی (S.S.S.S)، $\alpha=1$ و $b/h=100$.

با مشاهده شکل‌های (۶) و (۷) علاوه بر دقت قابل قبول نتایج در مقایسه با نتایج حاصل از روش اجزا محدود و روش انرژی در مرجع [۲] نتیجه می‌شود که با افزایش توان در مدل FGM، در شرایط تکیه گاهی چهار طرف ساده با توجه به کاهش صلبیت خمشی، بار کمانشی کاهش می‌یابد و با افزایش نسبت (b/a) ، بار کمانشی افزایش می‌یابد.



شکل (۸) بار کمانشی N_x (N/m) بر حسب تغییرات b/a و k در شرایط تکیه گاهی (C.C.C.C)، $\alpha=0$ و $b/h=100$.

جدول (۲) z_0 فاصله سطح خنثی از سطح میانی (z_0) و صلبیت خمشی بر حسب توان مدل FGM (k).

$H=0.05 m$		
$D(N.m)$	$z_0(m) 10^{-4}$	توان مدل FGM
۴۳۴۹/۸۲	۰	۰
۲۱۶۸/۱۳	۵/۷۴۰۷۴	۱
۱۶۹۱/۸۳	۷/۴۵۱۹۲	۲
۱۴۳۰/۷۳	۷/۵۸۳۱۷	۵

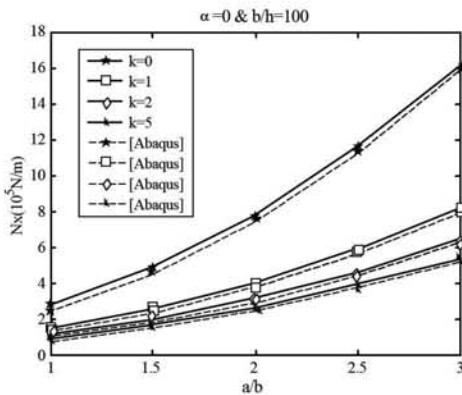
همانطور که از جدول (۲) مشاهده می‌شود، با افزایش توان در مدل FGM فاصله سطح خنثی فیزیکی از سطح میانی هندسی افزایش یافته و صلبیت خمشی ورق کاهش می‌یابد. برای بررسی همگرایی جوابها، در جدول (۳) تعداد جملاتی از سری فوریه سینوسی که جوابها نتیجه شده اند، برای شرایط مرزی مختلف، به ازاء $k=0$ و $b/h=100$ و $b/a=1$ آورده شده است.

همانطور که مشاهده می‌شود برای شرایط مرزی چهار طرف تکیه گاه ساده، با در نظر گرفتن بیش از بیست جمله از سری سینوسی تغییری در نتایج حاصل نشده است. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که تعداد بیست جمله برای به دست آوردن جواب با دقت زیاد کافی است.

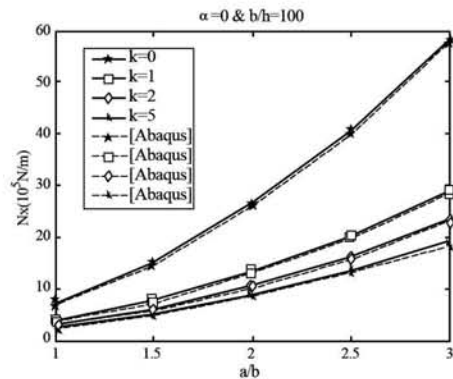
جدول (۳) نمایش همگرایی جوابها ($10^5 N/m$) به ازای تغییر در تعداد جملات سری فوریه برای شرایط مرزی مختلف، $b/a=1$ و $b/h=100$ و $k=0$.

نوع تکیه گاه	تعداد جملات سری			
	۳۵	۳۰	۲۰	۱۰
SSSS	۶/۸۱۱	۶/۸۱۱	۶/۸۱۱	۷/۱۳۶
SSCC	۱۰/۶۱۹	۱۰/۶۱۹	۱۱/۰۲۳	۱۱/۹۱۶
CCCS	۱۳/۸۰۹	۱۳/۸۰۹	۱۴/۶۱۳	۱۶/۱۰۸
CCCC	۱۷/۲۶۱	۱۷/۲۶۱	۱۸/۴۳۱	۲۰/۳۰۱

در شکل‌های (۶) تا (۱۲) مقادیر حداقل بار کمانش به دست آمده با استفاده از روش تبدیل استوکس در شرایط مرزی مختلف و به ازاء تغییر در پارامترهای موثر بر نتایج مانند نسبت ابعاد، نسبت بار فشاری در راستای محورهای x ، y و توان در مدل FGM در نمودارها ترسیم گردیده و با نتایج حل به روش المان محدود و روش انرژی در مرجع [۲] مقایسه شده است.



شکل (۱۲) بار کمانشی N_x (N/m) بر حسب تغییرات b/a و k در شرایط تکیه‌گاهی (S.S.C.F)، $\alpha=0$ و $b/h=100$.



شکل (۹) بار کمانشی N_x (N/m) بر حسب تغییرات b/a و k در شرایط تکیه‌گاهی (C.C.C.C)، $\alpha=1$ و $b/h=100$.

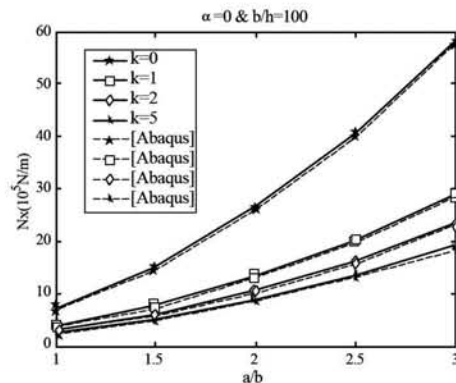
به طور کلی با مشاهده شکل‌های (۶) تا (۱۲) می‌توان چنین نتیجه گرفت که روش تبدیل استوکس در تحلیل کمانش ورق دقت بسیار قابل قبولی دارد. علاوه بر این با افزایش توان مدل FGM در کلیه شرایط مرزی با توجه به کاهش صلیبت خمشی، بار کمانشی کاهش می‌یابد و با افزایش نسبت (b/a) بار کمانشی افزایش می‌یابد. چنانچه ورق در هر دو جهت x و y تحت فشار قرار گیرد، بار کمانشی نسبت به حالتی که ورق تنها در یک جهت تحت فشار قرار گیرد، کاهش می‌یابد.

۶- نتیجه گیری نهایی

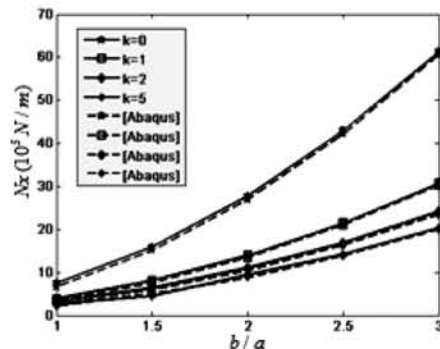
در این مقاله ابتدا تئوری سطح خنثی فیزیکی بیان شد و سپس معادلات کمانش ورق‌های ساخته شده از مواد مدرج تابعی (FGM) بر اساس این تئوری به دست آمد. در ادامه روش تبدیل استوکس به کمک معادلات کمانش ورق‌های FGM تحلیل شد و در نهایت نتایج حل به کمک این روش و توسط نرم افزار MATHEMATICA در نمودارهای مختلف به ازاء تغییرات پارامترهای موثر در جواب مانند توان مدل FGM، نسبت (b/a) ، تغییر در نسبت بار فشاری در راستای محورهای x و y و همچنین تغییر در شرایط مرزی ترسیم شد. برای صحت سنجی نتایج حل، نتایج حاصل با نتایج دیگر تحقیقات و نتایج حاصل از اجزا محدود توسط نرم افزار ABAQUS مقایسه گردید.

به طور کلی با بررسی نتایج به دست آمده در این مقاله می‌توان چنین نتیجه گیری کرد:

با مشاهده شکل‌های (۸) و (۹) علاوه بر دقت قابل قبول نتایج در مقایسه با نتایج حاصل از روش المان محدود نتیجه می‌شود که با افزایش توان در مدل FGM در شرایط تکیه‌گاهی چهار طرف درگیر با توجه به کاهش صلیبت خمشی، بار کمانشی کاهش می‌یابد. با افزایش نسبت b/a بار کمانشی افزایش می‌یابد و همچنین با افزایش ضریب بار فشاری در جهت‌های x و y از صفر به یک، بار کمانش کاهش می‌یابد.



شکل (۱۰) بار کمانشی N_x (N/m) بر حسب تغییرات b/a و k در شرایط تکیه‌گاهی (C.C.S.S)، $\alpha=1$ و $b/h=100$.



شکل (۱۱) بار کمانشی N_x (N/m) بر حسب تغییرات b/a و k در شرایط تکیه‌گاهی (C.C.S.F)، $\alpha=0$ و $b/h=100$.

k	توان در مدل FGM
α	نسبت بار فشاری در راستای محورهای x, y
z_0	فاصله سطح خنثی از سطح میانی
w_{0y}	خیز در لبه $(x=0, y)$
M_{0y}	گشتاور نسبت به محور y در لبه $(x=0, y)$
\underline{x} w_{0y}	مشتق دوم نسبت به x در لبه $(x=0, y)$

پیوست‌ها

الف) مشتقات تابع خیز به روش تبدیل استوکس

$$w(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} w_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \times \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (\text{الف-۱})$$

$$0 < y < b, \quad 0 < x < a$$

$$w_{,x}(x, y) = \frac{\pi}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{w_{0y} + w_{ay}}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \{w_{0y} + w_{ay}(-1)^m + mw_{mn}\} \right. \quad (\text{الف-۲})$$

$$\left. \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \right\} \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

$$0 < y < b, \quad 0 \leq x \leq a$$

$$w_{,xx}(x, y) = \frac{-\pi^2}{a^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ w_{0y} m + w_{ay} m(-1)^m + m^2 w_{mn} \right\} \quad (\text{الف-۳})$$

$$\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \times \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

$$0 < y < b, \quad 0 < x < a$$

$$w_{,xxx}(x, y) = \frac{-\pi^3}{a^3} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ w_{0y} m^2 + w_{ay} m^2(-1)^m + m^3 w_{mn} \right\} \quad (\text{الف-۴})$$

$$\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \times \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

$$0 < y < b, \quad 0 < x < a$$

الف) با توجه به تحلیل پایداری ورق در شرایط مرزی مختلف به کمک روش تبدیل استوکس، این روش قابلیت بسزایی در تحلیل سازه‌های مکانیکی دارد.

ب) با توجه به صحت سنجی نتایج حاصل از حل معادلات به کمک روش تبدیل استوکس با روشهای المان محدود و انرژی و خطای کم نتایج (کمتر از چهار درصد خطا)، از این روش می‌توان با دقت بسیار خوبی در تحلیل سازه‌ها استفاده کرد.

ج) با افزایش توان در مدل FGM در کلیه شرایط تکیه‌گاهی، با توجه به کاهش صلیبیت خمشی، بار کمانشی کاهش یافته و با افزایش نسبت ابعادی (b/a) بار کمانشی افزایش می‌یابد. همچنین با افزایش ضریب بار فشاری در جهت‌های x و y از صفر به یک، بار کمانش کاهش می‌یابد.

فهرست علائم

z و y و x	محورهای مختصات
a	طول مستطیل در جهت x
b	طول مستطیل در جهت y
D	صلیبت خمشی ورق
h	ضخامت ورق
w	جابجایی در راستای z
u	جابجایی در راستای x
v	جابجایی در راستای y
σ	تنش
ϵ	کرنش
E	مدول یانگ
ν	ضریب پواسون
M	گشتاور
N	نیروی محوری
R	ضریب پیچشی فتر
T	ضریب کششی فتر

[4] Chen C.S., Hsu C.Y., Tzou G.J., , *Vibration and Stability of Functionally Graded Plates Based on a Higher-order Deformation Theory*, *J. Reinforced Plastics and Composites*, Vol. 28, 2009, pp 1215-1234.

[5] Najafizadeh M.M., Mahdavian M., Superposition buckling analyses of rectangular Plates Composed of Functionally Graded materials subjected to non-uniform distributed In-plane loading, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers - Part C: J. Mechanical Engineering Science*, Vol. 224, issue 11,2010, pp.2299-2308.

[7] Ansari R., Darvizeh M., Prediction of dynamic behaviour of FGM shells under arbitrary boundary conditions, *Composite Structures*, Vol. 85, 2008, pp. 284–292.

[8] Hyeong K.K., Moon S. K., *An analytical method for calculating vibration characteristics of PWR fuel assembly with reactor end boundary conditions using fourier series*, Transactions, SMIRT16, Washington DC, 2001, paper No.1445.

[۹] لطیفی م.، فرهت نیا ف.، کدخدایی م.، کاربرد روش تبدیل استوکس در تحلیل سازه‌های مکانیکی، دومین کنفرانس ملی مهندسی مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد خمینی شهر، ۱۳۸۸.

[10] Zhang D.G., Zhou Y.H., A theoretical analysis of FGM thin plates based on physical neutral surface, *Computational Material Science*, 44, 2008, pp. 716-720.

[11] Timoshenko S., Goodier J., *Theory of elasticity*, McGraw-Hill, New York, 1971.

ب) ضریب تابع خیز w_{mn}

$$W_{mn} = P_{mn} w_{o,y} + (-1)^m P_{mn} w_{a,y} + P_{mn} w_{x,o} + (-1)^n P_{mn} w_{x,b} + P_{mn} M_{o,y}^x + (-1)^m P_{mn} M_{a,y}^x + P_{mn} M_{x,o}^y + (-1)^n P_{mn} M_{x,b}^y + P_{mn} M_{x,o}^x + (-1)^n P_{mn} M_{x,b}^x + P_{mn} M_{o,y}^y + (-1)^m P_{mn} M_{a,y}^y$$

$$P_{mn} = \frac{1}{J_{mn}} \left(\frac{D\pi^{\xi} m^{\gamma}}{a^{\xi}} - \frac{D\pi^{\xi} mn^{\gamma}}{a^{\gamma} b^{\xi}} + \frac{\pi^{\gamma} m N_x}{a^{\gamma}} \right)$$

$$P_{mn}^{\gamma} = \frac{1}{J_{mn}} \left(\frac{D\pi^{\xi} n^{\gamma}}{b^{\xi}} - \frac{D\pi^{\xi} m^{\gamma} n}{a^{\gamma} b^{\xi}} + \frac{\pi^{\gamma} n N_x \alpha}{b^{\gamma}} \right)$$

$$P_{mn}^{\gamma} = \frac{1}{J_{mn}} \left(\frac{-\pi^{\xi} m}{a^{\xi} (1-\nu^{\gamma})} - \frac{\nu \pi^{\xi} m}{a^{\gamma} b^{\xi} (1-\nu^{\gamma})} \right)$$

$$P_{mni} = \frac{1}{J_{mn}} \left(\frac{-\pi^{\xi} n}{b^{\xi} (1-\nu^{\gamma})} - \frac{\nu \pi^{\xi} n}{a^{\gamma} b^{\xi} (1-\nu^{\gamma})} \right)$$

$$P_{mno} = \frac{1}{J_{mn}} \left(\frac{-\nu \pi^{\xi} n}{b^{\xi} (1-\nu^{\gamma})} + \frac{\pi^{\xi} n}{a^{\gamma} b^{\xi} (1-\nu^{\gamma})} \right)$$

$$P_{mn\gamma} = \frac{1}{J_{mn}} \left(\frac{-\nu \pi^{\xi} m}{a^{\xi} (1-\nu^{\gamma})} + \frac{\pi^{\xi} m}{a^{\gamma} b^{\xi} (1-\nu^{\gamma})} \right)$$

$$J_{mn} = \left(\frac{\gamma D \pi^{\xi} m^{\gamma} n^{\gamma}}{a^{\gamma} b^{\xi}} - \frac{\pi^{\gamma} m^{\gamma} N_x}{a^{\gamma}} - \frac{\pi^{\gamma} n^{\gamma} N_x \alpha}{b^{\gamma}} - \frac{D \pi^{\xi} m^{\gamma}}{a^{\xi}} - \frac{D \pi^{\xi} n^{\gamma}}{b^{\xi}} \right)$$

و

مراجع

[1] Leissa A.W, Kang J.H., Exact solutions for vibration and buckling of an SS-C-SS-C rectangular plate loaded by linearly varying in-plane stresses, *ASME*, Vol.44,issue 9,2002, pp. 1925-1945

[2] Javaheri R., Eslami M.R., Buckling of functionally graded plates under in-plane compressive loading, *Zamm .Z.Angew. Math Mech*, Voll. 82, issue 4, 220, 2002, pp 277-283.

[3] Ni Q.Q., Xi J, Ivamoto M, Buckling analysis of composite laminated plates with arbitrary edge supports, *Composite structures*, Vol. 69, 2005, pp 209-217.