

تحلیل ریاضی تیر ویسکوالاستیک برشی تحت عبور بار گسترده متحرک

محمد طهرانی^۱

حمیدرضا ایکچی^{۲*}

* نویسنده مسئول: eipakchi@shahroodut.ac.ir

چکیده

در این مقاله پاسخ دینامیکی یک تیر ویسکوالاستیک تحت بار پیوسته متحرک مورد مطالعه قرار گرفته است. فرض شده که ماده سازنده تیر از مدل ویسکوالاستیک استاندارد خطی در برش پیروی کرده و در فشار (بالک) تراکم ناپذیر است. تنش‌ها به مؤلفه‌های برشی و اتساع تفکیک شده‌اند. سپس معادلات حاکم در حالت ویسکوالاستیک به روش مستقیم استخراج شده‌اند و با استفاده از روش بسط توابع ویژه حل شده‌اند. بر اساس ضرایب بی‌بعد معرفی شده یک مطالعه پارامتری انجام شده و اثر سرعت بار و خواص ویسکوالاستیک بر پاسخ بررسی شده است. مطالعات نشان می‌دهد که بیشترین میرایی در حالتی به دست می‌آید که زمان اولین تناوب تیر 2π برابر زمان رهاش برابر باشد.

واژه‌های کلیدی: تیر ویسکوالاستیک، بار متحرک، حل ریاضی، مدل استاندارد خطی.

۱- کارشناس ارشد، دانشکده مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود.

۲- استادیار، دانشکده مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود.

۱- مقدمه

حرکت نیروها روی سازه یکی از مسائل معمول در مهندسی به شمار می‌آید که از جمله آنها می‌توان به حرکت یک جرثقیل سقفی روی ریل، حرکت ماشینها روی پل، انتقال سیال در لوله‌ها و حرکت هوا بر روی بال هواپیما اشاره کرد. یکی از موارد مهم در تحلیل این گونه مسائل جنس سازه است. در تحلیل‌های صورت گرفته در این حوزه توجه بیشتر به مواد الاستیک است، در حالی که طیف بسیار گسترده‌ای از مواد پیرامون ما در حوزه ویسکوالاستیک قرار دارند یا خواص آنها تابع زمان است. از این رو شناخت رفتار مکانیکی این مواد به دلیل ارائه رفتار متفاوت نسبت به مواد الاستیک، از اهمیت بالایی برخوردار است. در مورد حرکت بار بر روی سازه ویسکوالاستیک می‌توان به مقاله‌های هانگ اشاره کرد که در آنها رفتار یک پوسته ویسکوالاستیک با طول محدود تحت فشار داخلی متحرک مورد بررسی قرار گرفته است [۱،۲،۳]. در این مقاله‌ها تنها به بررسی موردی یک ماده خاص که تابع مدل استاندارد خطی است پرداخته شده است. فانگ و همکاران پایداری دینامیکی یک تیر ویسکوالاستیک تحت تحریک هارمونیک و پارامتریک را بررسی کرده‌اند [۴]. آنها معادلات حاکم را به صورت‌های خطی و غیر خطی استخراج کردند و از پارامترهای بی‌بعد برای ساده سازی این معادلات و نتایج حاصل استفاده کردند. کارنوخوف و آی‌چوک به بررسی تأثیر سرعت بار و ابعاد یک تیر ویسکوالاستیک تیموشنکو بر مقدار گرمای تلف شده پرداخته‌اند [۵]. کواکاتورک و سیمسک به بررسی تیرهای تیموشنکو و برنولی تحت بار هارمونیک متحرک پرداخته‌اند [۶،۷،۸]. آنها از مدل کلونین-ویت استفاده کرده و از روش انرژی در استخراج معادله حرکت کمک گرفتند و معادله‌های به دست آمده را با روش عددی حل کردند. مفید و همکارانش به بررسی پاسخ یک تیر کلونین-ویت تحت جرم متحرک پرداختند و معادله حاکم را با روش‌های تحلیلی و عددی حل کرده‌اند [۹]. فریبا بسیاری از مسائل بار متحرک را در حوزه الاستیک مورد بررسی قرار داده است [۱۰].

در روشهای معمول از مدل کلونین-ویت برای بررسی رفتار مواد ویسکوالاستیک تحت تحریک دینامیکی استفاده شده و تحلیل‌های انجام شده به صورت عددی و تنها برای چند نمونه ماده خاص انجام گرفته است. ولی در این مقاله برخلاف معمول از یک مدل استاندارد خطی سه عضوی استفاده شده و معادله حاکم با روش بسط توابع ویژه به صورت تحلیلی حل شده است. برای مطالعه پارامتری مسأله، تعدادی پارامتر بی بعد تعریف شده و اثر این پارامترها بر پاسخ به دست آمده‌اند. نیاز به انجام چنین تحقیقی در دو وجه قابل توجه است. مورد اول نوع مدل به کار رفته و پارامترهای بی بعد استخراج شده است که از طریق آن طیف قابل ملاحظه‌ای از مواد که به این صورت مدل شده‌اند قابل بررسی است. مورد دوم کاربرد عملی آن در بررسی میرایی سازه‌هایی مانند ریل‌ها با زیر سازی ویسکوالاستیک، پل‌ها با قطعه‌های میراکننده لاستیکی و لوله‌های پلیمری حامل جریان سیال در صنایع مختلف است.

۲- استخراج معادله حاکم

معادله حرکت عرضی تیر برنولی با فرض ثابت بودن چگالی و سطح مقطع عبارت است از [۴]:

$$\rho A \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 M(x,t)}{\partial x^2} = f(x,t) \quad (1)$$

که در آن ρ چگالی، A سطح مقطع، $f(x,t)$ نیرو بر واحد طول، M گشتاور خمشی و w جابجایی عرضی تیر است. معادله بنیادین برای یک ماده ویسکوالاستیک خطی می‌تواند به شکل زیر نوشته شود:

$$P(D)\sigma_{ij}(t) = Q(D)\gamma_{ij}(t) \quad (2)$$

که در آن σ و γ به ترتیب تنش و کرنش و P و Q عملگرهای دیفرانسیلی به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$Q(D) = \sum_{r=0}^N Q_r \frac{\partial^r}{\partial t^r} \quad (3)$$

$$P(D) = \sum_{r=0}^N P_r \frac{\partial^r}{\partial t^r} \quad (4)$$

$$\rho A \frac{\partial^2 P^E w(x,t)}{\partial t^2} + I \frac{\partial^4 Q^E w(x,t)}{\partial x^4} = P^E f(x,t) \quad (14)$$

برای یک تیر با تکیه گاه ساده شرایط مرزی عبارت اند از:

$$w(0,t) = w(L,t) = \frac{\partial^2 w(0,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w(L,t)}{\partial x^2} = 0 \quad (15)$$

که L طول تیر است. با استفاده از روش بسط توابع ویژه، جابه جایی عرضی تیر به شکل زیر می تواند در نظر گرفته شود:

$$w_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (16)$$

با جایگذاری معادله فوق در معادله (۱۴)، شکل کلی معادله دیفرانسیل حاکم به شکل زیر حاصل می شود:

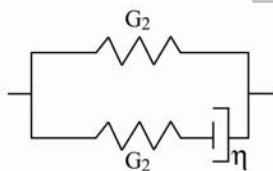
$$P^E \left(\frac{d^2 a_n}{dt^2}\right) + \frac{I}{\rho A} \left(\frac{n\pi}{L}\right)^4 Q^E (a_n) \quad (17)$$

$$= P^E \left[\frac{2}{\rho A L} \int_0^L f(x,t) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \right]$$

$$\frac{d^2 a_n}{dt^2} = \frac{d^2 a_n}{dt^2} \quad \text{که در آن}$$

مدل استاندارد خطی ویسکوالاستیک مورد نظر در شکل (۱) نمایش داده شده است. معادله حاکم بر این مدل عبارت است از [۱۱]:

$$\sigma + \frac{G_1}{\eta} \dot{\sigma} = (G_1 + G_2) \gamma + \frac{G_1 G_2}{\eta} \dot{\gamma} \quad (18)$$



شکل (۱) مدل استاندارد خطی.

از معادله (۱۸) و به کمک معادله (۵) مقادیر P_1 و Q_1 عبارتند از:

$$P_1 = \frac{d}{dt} + \frac{G_1}{\eta} \quad (19)$$

$$Q_1 = 2 \left((G_1 + G_2) \frac{d}{dt} + \frac{G_1 G_2}{\eta} \right)$$

و با جایگذاری آنها در معادله (۸)، معادله (۱۷) به شکل زیر تبدیل می شود:

عملگرهای P_r و Q_r در مسائل خطی مستقل از زمان اند. بخش های برش و اتساع تنش عبارت اند از:

$$P_r \sigma_{ij}^{de}(t) = Q_r \gamma_{ij}^{de}(t) \quad (5)$$

$$P_r \sigma_{KK}^{dil}(t) = Q_r \gamma_{KK}^{dil}(t) \quad (6)$$

که بالا نویس de و dil به ترتیب برای برش و اتساع گرفته شده است. P_1 و P_2 و Q_1 و Q_2 عملگرهای دیفرانسیلی مشابه معادلات (۳) و (۴) هستند. به کمک روابط الاستیک حاکم بین ضرایب لامه و معادلات (۵) و (۶) می توان رابطه مدول الاستیسیته و ضریب پواسون را به شکل زیر استخراج کرد [۱۱]:

$$E(D) = \frac{9Q_1 Q_2}{P_2 Q_1 + 3P_1 Q_2} = \frac{Q^E}{P^E} \quad (7)$$

$$\nu(D) = \frac{1}{2} \frac{3P_1 Q_2 - 2P_2 Q_1}{P_2 Q_1 + 3P_1 Q_2} = \frac{Q^\nu}{P^\nu} \quad (8)$$

برای یک ماده تراکم ناپذیر P_2 در معادله (۶) صفر و معادله (۷) به شکل زیر تبدیل می شود [۱۱]:

$$E(D) = \frac{3Q_1}{P_1} = \frac{Q^E}{P^E} \quad (9)$$

رابطه انحنای کرنش کوچک برای یک تیر برنولی عبارت است از [۴]:

$$\gamma(x,y,t) = \gamma_0 + \kappa(x,t)y \approx \gamma_0 - \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} y \quad (10)$$

که γ_0 کرنش در مرکز سطح، κ انحنای تیر و y فاصله از مرکز سطح برای یک لایه مشخص در صفحه انحنای می باشد [۴]. گشتاور خمشی در یک تیر عبارت است از:

$$M(x,t) = \int_A \sigma(x,y,t) y dA \quad (11)$$

همچنین برای یک تیر ساده ویسکوالاستیک رابطه تنش کرنش محوری عبارت است از [۱۱]:

$$P^E \sigma_{xx}(t) = Q^E \gamma_{xx}(t) \quad (12)$$

با اعمال عملگر P^E در معادله (۱۱) و با توجه به معادلات (۱۰) و (۱۲) نتیجه می شود [۴]:

$$P^E M(x,t) = I Q^E \kappa = -I Q^E \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \quad (13)$$

که I گشتاور دوم سطح مقطع تیر است. با استفاده از معادله های (۱۳) و (۱)، معادله حاکم برای یک تیر برنولی ویسکوالاستیک به شکل زیر حاصل می شود:

تحلیلی حل شده است. روند حل در قالب یک برنامه نرم افزاری در محیط MAPLE کنترل شده است.

۳- بررسی پارامترهای بی بعد K و E_1

پارامتر K را می توان معادل با نسبت زمان اولین تناوب تیر به 2π برابر زمان رهایش در نظر گرفت. می توان نشان داد پارامتر E_1 نسبت مدول برشی ماده در زمان بی نهایت به مدول برشی ماده در زمان اولیه است [پیوست ب]. در شکل های (۲) تا (۸) تغییر نسبت خیز دینامیکی به خیز استاتیکی وسط تیر بر حسب زمان بی بعد $\tau \cdot \alpha / \pi$ نشان داده شده است. زمان $\tau \cdot \alpha / \pi = 15$ ، لحظه ی خروج بار از روی تیر نیز می باشد که در شکل ها با خط چین مشخص شده است. این زمان در بررسی نتایج حائز اهمیت می باشد. زمان $\tau \cdot \alpha / \pi = 1$ زمان رسیدن بار به انتهای تیر است. در شکل های (۲) و (۳) تغییرات K نشان داده شده است. در $K=1$ بیشترین و سریعترین میرایی حاصل شده است.

قبل از خروج بار از روی تیر کلیه نوسانات حول مقدار منفی یک بوده و اگر زمان قرار گیری بار بر روی تیر افزایش یابد حول همین مقدار میرا شده و خیز دینامیکی و استاتیکی تیر یکسان می شود. این موضوع برای مقادیر مختلف E_1 نیز صادق است. از دیگر نکات مهم در $K=1$ این است که با دور شدن از این عدد، سیستم رفتار ارتجاعی تری از خود نشان می دهد. این مطلب در مورد $K=50$ و $K=0.1$ به وضوح نشان داده شده است.

بعد از آغاز خروج بار از روی تیر نوسانات به صفر میرا می شود. برای مقادیر $1 \gg K$ رفتار سیستم قبل از خروج بار و بعد از خروج بار را می توان تقریباً الاستیک در نظر گرفت. این حالت را می توان به بزرگ بودن G_1 یا کوچکی η نسبت داد. برای $K \approx 0$ رفتار سیستم قبل از شروع خروج بار مشابه رفتار تیر الاستیک است اما بعد از خروج بار، دامنه نوسانات به آرامی به سمت صفر میل می کند. علت این رفتار را می توان در بزرگ بودن زمان رهایش نسبت به زمان اولین تناوب دانست.

$$\frac{G_1}{\eta} \frac{G_2}{\rho L^2} + 3(n\pi)^4 \frac{G_1 + G_2}{\rho L^2} \frac{I}{AL^2} \frac{I}{AL^2} + 3(n\pi)^4 \frac{G_1}{\eta} \frac{G_2}{\rho L^2} \frac{I}{AL^2} \frac{I}{AL^2} = P^E \left[\frac{2}{\rho AL} \int_0^L f(x,t) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \right] \quad (20)$$

طرف راست معادله (۲۰) بر حسب نوع بار می تواند شکل های مختلفی داشته باشد. برای بار پله ای $f(x,t) = P_0 H[x - Vt]$ در جدول پیوست [پ] شکل های مختلف بار و شرایط اولیه معادله داده شده است که $H(x)$ تابع پله واحد، V سرعت بار و P_0 اندازه بار بر واحد طول است. با معرفی پارامترهای بی بعد به شکل زیر:

$$\alpha = \frac{\omega}{\Omega_1} \quad K = \frac{G_1}{\eta} \frac{1}{\Omega_1} = \frac{T'}{2\pi\tau'} \quad (21)$$

$$\tau = \Omega_1 t \quad E = \frac{G_2}{G_1 + G_2} < 1$$

به طوری که $T' = \frac{2\pi}{\Omega_1}$ ، $\Omega_1^2 = 3\pi^4 \frac{G_1 + G_2}{\rho L^2} \frac{I}{AL^2}$ زمان اولین نوسان طبیعی، $\tau' = \frac{\eta}{G_1}$ زمان رهایش، α شاخص سرعت و τ زمان بی بعد است. معادله حاکم بر اساس این پارامترها برای حالت ورود بار به شکل زیر تبدیل می شود.

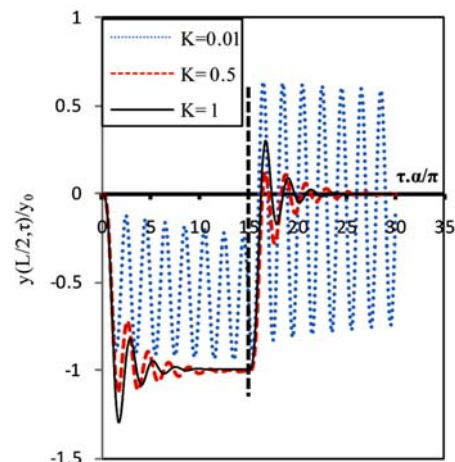
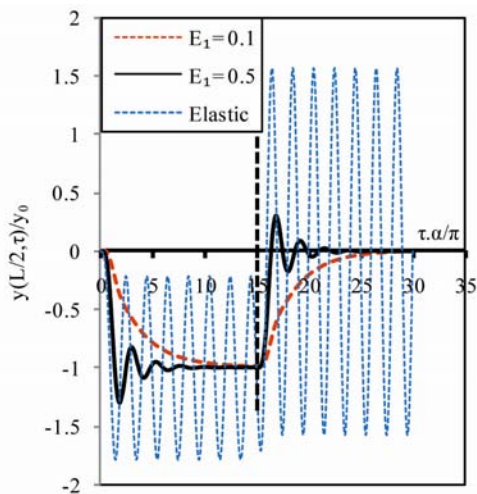
$$\frac{d^3 a_n}{d\tau^3} + K \frac{d^2 a_n}{d\tau^2} + n^4 \frac{da_n}{d\tau} + K \cdot E_1 \cdot n^4 a_n = \frac{2P_0}{\rho A \Omega_1^2 n \pi} [K - K \cos(n\alpha\tau) + n\alpha \sin(n\alpha\tau)] \quad (22)$$

می توان نشان داد خیز استاتیکی وسط یک تیر ویسکوالاستیک در زمان بی نهایت که تمام آن تحت بار پیوسته P_0 قرار گرفته با تقریب خوبی برابر است با [پیوست الف]:

$$y_0 = \frac{4P_0 E_1}{\rho A \pi \Omega_1^2} \quad (23)$$

با تقسیم معادله (۲۲) به y_0 ، حاصل یک شکل بی بعد بوده که حل آن تغییرات خیز دینامیکی به خیز استاتیکی یا ضریب تقویت را نشان می دهد. همچنین این معادله یک معادله دیفرانسیل خطی از مرتبه سه بوده که برای هر n یک جواب دارد. این معادله باروش تبدیل لاپلاس به صورت

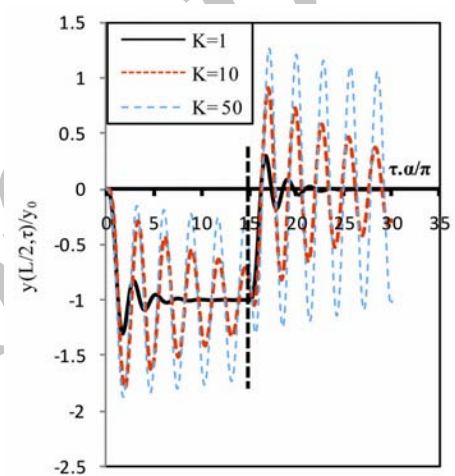
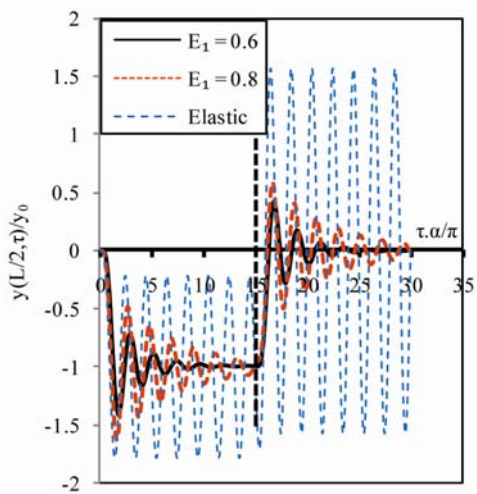
به‌طور تقریبی برای مقادیر $E_1 \leq 0.25$ خیز تیر بدون نوسان به رشد خود ادامه داده تا به مقدار استاتیکی خود برسد این رفتار ناشی از افزایش تأثیر ویسکوزیته ماده می‌تواند می‌باشد، از این رو در طراحی‌هایی که نیازمند ارتعاش بسیار ناچیز است می‌توان از مقادیر مشخصی از پارامتر E_1 بهره جست.



شکل (۲) تغییر ضریب تقویت سیستم برای $\alpha = 1$ ، $E_1 = 0.5$

شکل (۴) تغییر ضریب تقویت سیستم برای $\alpha = 1$ ، $K = 1$ برای نمونه

الاستیک $E_1 = 1$ ، $K = \infty$.



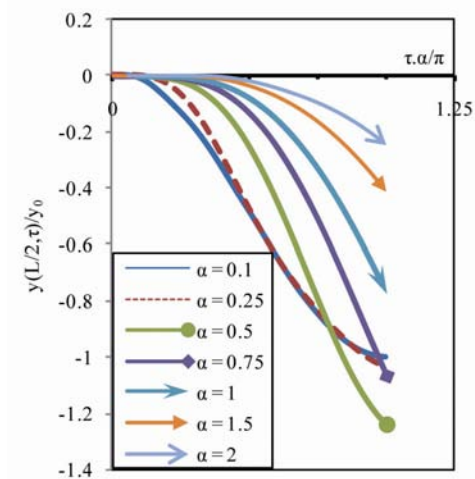
شکل (۳) تغییر ضریب تقویت سیستم برای $\alpha = 1$ ، $E_1 = 0.5$.

شکل (۵) تغییر ضریب تقویت سیستم برای $\alpha = 1$ ، $K = 1$ برای نمونه

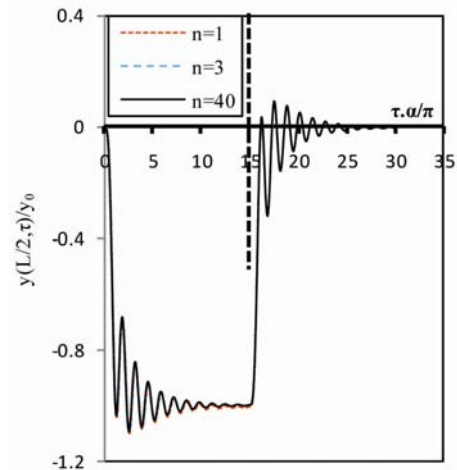
الاستیک $E_1 = 1$ ، $K = \infty$.

نمودارهای رسم شده در مقاله با در نظر گرفتن ۳۰ جمله از معادله (۱۶) است. برای بررسی همگرایی، در شکل (۶) تأثیر تعداد جملات بر پاسخ سیستم آورده شده است. مطابق این شکل، افزایش تعداد جملات، تأثیر قابل ملاحظه‌ای بر پاسخ ندارد.

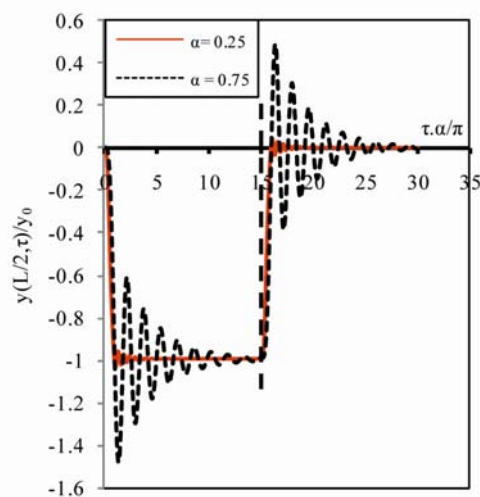
در شکل‌های (۴) و (۵) تأثیر مقادیر مختلف E_1 بر روی ضریب تقویت در $K = 1$ مورد بررسی قرار گرفته است. زمانی که E_1 به سمت یک میل می‌کند ماده رفتار ارتجاعی‌تری از خود نشان می‌دهد. زیرا نسبت E_1 با مدول برشی متناسب است و نسبت مدول برشی ماده در زمان بی‌نهایت به مدول برشی ماده در زمان اولیه برابر یک است که این یکی از خواص مواد الاستیک است. مدل الاستیک کامل زمانی حاصل می‌شود که $\eta = 0$ باشد. بنابراین اگر مقدار K به سمت بی‌نهایت میل کند، مقدار $E_1 = 1$ خواهد بود. مقایسه‌ای بین حالت الاستیک و ویسکوالاستیک در شکل‌های (۴) و (۵) ارائه شده است و بطور مشخص اثر میرایی سیستم‌های ویسکوالاستیک قابل تشخیص می‌باشد.



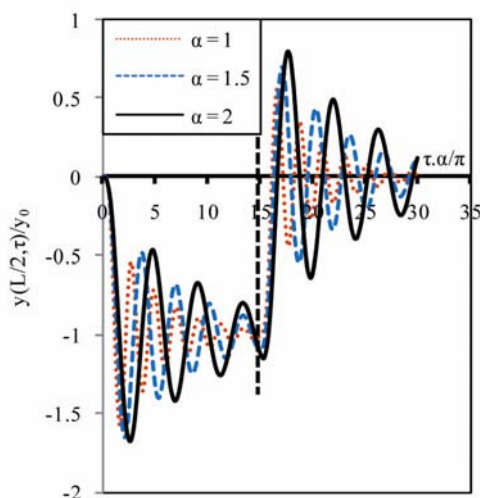
شکل (۷) تغییر ضریب تقویت سیستم برای مقادیر مختلف α در هنگام ورود بار در $E_1 = 0.75$ ، $K = 1$



شکل (۸) تغییر ضریب تقویت سیستم برای n های مختلف به ازای $K = 0.35$ ، $E_1 = 0.55$ ، $\alpha = 0.65$



شکل (۹) تغییر ضریب تقویت سیستم برای $K = 1$ ، $E_1 = 0.75$



شکل (۱۰) تغییر ضریب تقویت سیستم برای $K = 1$ ، $E_1 = 0.75$

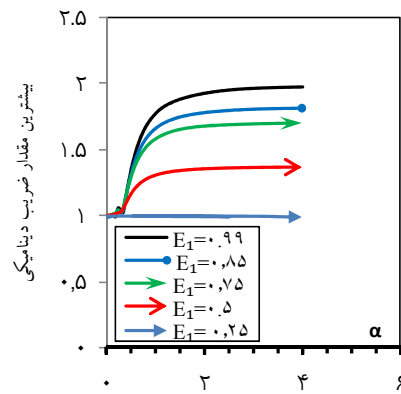
۴- بررسی پارامتری بعد شاخص تأثیر سرعت α

در شکل های (۷)، (۸) و (۹) تأثیر پارامتر α بر پاسخ تیر مطالعه شده است. در شکل (۷) تنها بخش ابتدایی حرکت شامل ورود بار پیوسته به تیر و رسیدن به انتهای آن مورد بررسی قرار گرفته است. با توجه به این شکل، بیشترین خیز متعلق به $\alpha = 0.5$ است. این مقدار وابسته به مقادیر E_1 و K بوده و بر اساس محاسبات، مقدار دقیق آن $\alpha = 0.53$ است. از این رو در ورود بار به روی تیر این مقدار را می توان سرعت بحرانی در این نمونه در نظر گرفت. برای مقادیر $\alpha \leq 0.5$ [حرکت شبه استاتیکی] می توان انتظار داشت که ضریب تقویت سیستم در انتهای حرکت به سمت عدد ۱- میل کند زیرا در این حالت تیر زمان کافی برای پاسخ به تحریک رادارد. این پدیده برای $\alpha = 0.1$ و $\alpha = 0.25$ در شکل (۷) نشان داده شده است.

با توجه به شکل (۸) برای $\alpha < 1$ هنگامی که بار به طور کامل بر روی تیر قرار گرفت پاسخ تیر به سرعت میرا شده و ضریب تقویت به مقدار ثابت ۱- میل پیدا می کند. البته این موضوع برای تمامی مقادیر α صادق است ولی با افزایش α مدت زمان میرا شدن نیز افزایش می یابد، شکل (۹) را ببینید. همچنین برای مقادیر بسیار بزرگ α تیر سرعت کافی برای پاسخ را ندارد. بنابر این می توان گفت افزایش سرعت باعث تأخیر در پاسخ تیر می شود.

۵- بررسی پیشینه پاسخ

یکی از مسائل مهم در تحلیل بار متحرک مقدار پیشینه خیز است. برای تحلیل این مسئله، پیشینه ضریب تقویت سیستم بر حسب پارامتر سرعت بی بعد α در شکل (۱۰) آورده شده است. بر اساس این شکل برای $\alpha > 2/5$ پیشینه خیز تیر تغییر چندانی نکرده و براساس پارامتر E_1 به یک مقدار ثابت میل می کند. همچنین می توان گفت برای $E_1 \leq 0.25$ رفتار تغییرات پیشینه خیز نسبت به افزایش سرعت تغییر چندانی نداشته و نزدیک به مقدار یک است. برای $E_1 = 0.99$ این مقدار ثابت به سمت عدد ۲ میل می کند در نتیجه با توجه به شکل (۱۰) می توان گفت ضریب تقویت در $K=1$ مقداری بین ۱ و ۲ است.



شکل (۱۰) نمودار تغییر پیشینه ضریب تقویت سیستم بر حسب پارامتر α .

هنگامی که $E_1 \rightarrow 1$ ماده رفتار ارتجاعی تری از خود نشان می دهد.

• برای $\alpha > 2/5$ پیشینه خیز تیر تغییر چندانی نداشته و براساس پارامتر E_1 به یک مقدار ثابت میل می کند.

پیوست الف

برای بررسی خیز استاتیکی تیر تحت بار کامل فرض می شود، بارگذاری به آرامی صورت گرفته به طوری که در معادله (۱۷) از جمله اول، که نشان دهنده اثرات اینرسی می باشد صرف نظر می شود. از این رو:

$$\frac{I}{\rho A} \left(\frac{n\pi}{L} \right)^4 Q^E(a_n) \quad \text{(الف-۱)}$$

$$= P^E \left[\frac{2}{\rho A L} \int_0^L f(x,t) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \right]$$

به طوری که $f(x,t) = P_0 H(t)$. با اعمال عملگر P^E و

Q^E در معادله (الف-۱) این معادله به شکل زیر تبدیل می شود.

$$\begin{aligned} & 2(G_1 + G_2) \frac{I}{\rho A} \left(\frac{n\pi}{L} \right)^4 \frac{1}{\eta} + \frac{2G_1 G_2}{\eta} \frac{I}{\rho A} \left(\frac{n\pi}{L} \right)^4 a \\ & = \frac{2P_0}{\rho A \Omega_1^2 n \pi} \left[\frac{G_1}{\eta} - \frac{G_1}{\eta} \cos(n\pi) \right] \end{aligned} \quad \text{(الف-۲)}$$

با فرض اینکه خیز تیر در لحظه اولیه معادل صفر است

در نتیجه $a(0) = 0$. حل معادله (الف-۲) عبارت است از:

$$a_n(t) = \frac{2}{3} \frac{P_0 L^4}{n^5 \pi^5 I G_2} \left((-1)^n - 1 \right) \left(1 - e^{-\frac{G_1 G_2 t}{\eta G_0}} \right) H(t) \quad \text{(الف-۳)}$$

که در معادله فوق $G_0 = G_1 + G_2$. از این رو خیز استاتیکی تیر در هر لحظه و هر نقطه از تیر عبارت است از:

$$\begin{aligned} y(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3} \frac{P_0 L^4}{n^5 \pi^5 I G_2} \left((-1)^n - 1 \right) \left(1 - e^{-\frac{G_1 G_2 t}{\eta G_0}} \right) \\ & H(t) \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \end{aligned} \quad \text{(الف-۴)}$$

با توجه به معادله (الف-۴) مقدار خیز وسط تیر در زمان بی نهایت برای $n=1$ عبارت است از:

۶- نتایج

در این تحقیق با تعریف چند پارامتر بی بعد، تأثیر خواص ماده ویسکوالاستیک برشی و سرعت بار بر رفتار یک تیر ساده (برنولی) به صورت تحلیلی بررسی شد. از جمله نتایج این تحقیق عبارت است از:

- بیشترین میرایی سیستم در حالت $K=1$ است.
- با قرار گرفتن بار بر روی تیر ضریب تقویت حول مقدار ۱- بوده و بعد از مدت زمان مشخصی به همین مقدار میرا می شود.
- بعد از خروج بار از روی تیر نوسانات به مقدار صفر میرا می شوند.
- زمانی که $E_1 \rightarrow 0$ خیز پیوسته افزایش پیدا می کند تا به مقدار خیز استاتیکی پایدار خود برسد. همچنین

از معادله (ب-۱) می‌توان نتیجه گرفت که مدول رهايش برشی عبارت است از:

$$G(t) = G_\gamma + G_1 e^{(-t/\tau')} \quad (\text{ب-۲})$$

به‌عنوان یک نتیجه از معادله (ب-۲):

$$\lim_{t \rightarrow 0} G(t) = G_\gamma + G_1 \quad \text{و} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} G(t) = G_\gamma \quad (\text{ب-۳})$$

پس می‌توان نتیجه گرفت که:

$$E_1 = \frac{\lim_{t \rightarrow \infty} G(t)}{\lim_{t \rightarrow 0} G(t)} = \frac{G_\gamma}{G_\gamma + G_1} \quad (\text{ب-۴})$$

$$y_0 = \frac{4}{3} \frac{P_0 L^3}{\pi^5 I G_\gamma} \quad (\text{الف-۵})$$

همچنین با توجه به رابطه (۲۱)، معادله‌ی (الف-۵) به شکل زیر قابل باز نویسی است.

$$y_0 = \frac{4 P_0}{\rho A \pi \Omega_1^2 E_1} \quad (\text{الف-۶})$$

پیوست ب

پاسخ مدل مورد نظر در شکل (۱) با توجه به معادله (۱۸)

به کرنش پله‌ای $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 H(t)$ عبارت است از:

$$\sigma(t) = \varepsilon_0 [G_\gamma + G_1 e^{(-t/\tau')}] \quad (\text{ب-۱})$$

پیوست پ

جدول (پ-۱) انواع مختلف بارگذاری پیوسته بر روی تیر.

حالت بار بر روی تیر	شکل بار	شرایط اولیه	$f(x,t)$	طرف راست معادله (۲۰)
در حال ورود		$a(t) _{t=0} = 0$ $\frac{da(t)}{dt} _{t=0} = 0$ $\frac{d^2 a(t)}{dt^2} _{t=0} = 0$	$P_0 H[Vt - x]$	$\frac{4 P_0}{\rho A n \pi} \left[\frac{G_1}{\eta} - \frac{G_1}{\eta} \cos(n\omega t) + n\omega \sin(n\omega t) \right]$
پایداری		$a(t) _{t=L/V} = b(t) _{t=L/V}$ $\frac{da(t)}{dt} _{t=L/V} = \frac{db(t)}{dt} _{t=L/V}$ $\frac{d^2 a(t)}{dt^2} _{t=L/V} = \frac{d^2 b(t)}{dt^2} _{t=L/V}$	P_0	$\frac{4 P_0}{\rho A n \pi} \left[\frac{G_1}{\eta} - \frac{G_1}{\eta} \cos(n\pi) \right]$
در حال خروج		$b(t) _{t=T} = c(t) _{t=T}$ $\frac{db(t)}{dt} _{t=T} = \frac{dc(t)}{dt} _{t=T}$ $\frac{d^2 b(t)}{dt^2} _{t=T} = \frac{d^2 c(t)}{dt^2} _{t=T}$	$P_0 H[x - Vt]$	$\frac{4 P_0}{\rho A n \pi} \left[-(-1)^n \frac{G_1}{\eta} + \frac{G_1}{\eta} \cos(n\omega t) - n\omega \sin(n\omega t) \right]$
ارتعاش آزاد		$c(t) _{t=T+L/V} = d(t) _{t=T+L/V}$ $\frac{dc(t)}{dt} _{t=T+L/V} = \frac{dd(t)}{dt} _{t=T+L/V}$ $\frac{d^2 c(t)}{dt^2} _{t=T+L/V} = \frac{d^2 d(t)}{dt^2} _{t=T+L/V}$	o	o

در جدول فوق a, b, c, d مختصات مودال برای بارگذاری مربوطه می‌باشند و $\omega = \frac{\pi V}{L}$ فرکانس دایروی تحریک بوده و T زمان قرار گرفتن بار در حالت پایدار می‌باشد.

- [3] HUANG C. C., Moving loads on viscoelastic cylindrical shells, *Journal of Sound and Vibration*, 60(3), 1978, pp. 351-358.
- [4] Fung R.F., Hang J. and Echen W., Dynamic stability of a viscoelastic beam subjected to harmonic and parametric excitations simultaneously, *Journal of Sound and Vibration*, 198, 1996, pp. 1-16.
- [۵] Karnaukhov V. G., Kirichok I. F., Vibrations and dissipative heating of a viscoelastic beam under a moving load, *Journal of Sound and Vibration*, 41(1), 2005, pp. 49 - 55.
- [۶] Kocatürk T., Şimşek M., Vibration of viscoelastic beams subjected to an eccentric compressive force and a concentrated moving harmonic force, *Journal of Sound and Vibration*, 291, 2006, pp. 302-322,
- [۷] Kocatürk T., Şimşek M., Dynamic analysis of eccentrically prestressed viscoelastic Timoshenko beams under a moving harmonic load, *Computers and Structures*, 84, 2006, pp. 2113-2127.
- [۸] Şimşek M., Kocatürk T., Nonlinear dynamic analysis of an eccentrically prestressed damped beam under a concentrated moving harmonic load, *Journal of Sound and Vibration*, 320, 2009, pp. 235-253.
- [۹] Mofid M., Tehranchi A., Ostadhossein A., On the viscoelastic beam subjected to moving mass, *Advances in Engineering Software*, 41, 2010, pp. 240-243.
- [1۰] Fryba L., Vibration of solids and structures under moving loads., The Netherlands Noordhoff International, 1972.
- [11] Riande E., Calleja R.D., Prolongo M.G., Masegosa R.M., Salom C., Polymer viscoelasticity stress and strain in practice, Marcel Dekker INC, 2000.

فهرست علائم

A	سطح مقطع
$E(D)$	مدول لاستیسیتیه
$f(x,t)$	نیرو بر واحد طول
G_0	مدول برشی اولیه
G_1 و G_2	مدول برشی
$H(x)$	تابع پله واحد
I	گشتاور دوم سطح مقطع
L	طول تیر
M	گشتاور خمشی
P, Q	عملگرهای دیفرانسیلی
P_0	بار بر واحد طول
V	سرعت بار
w	خیز تیر
y	فاصله از مرکز سطح
y_0	خیز استاتیکی وسط تیر
ρ	چگالی
γ, σ	تنش و کرنش
$\nu(D)$	ضریب پواسون
γ_0	کرنش در مرکز سطح تیر
κ	انحنای تیر
η	ضریب ویسکوزیته
Ω_1	فرکانس طبیعی
$\varepsilon(t)$	کرنش پله ای
α	شاخص سرعت
τ	زمان بی بعد
τ'	زمان رهائش

مراجع

- [1] HUANG C. C., Forced motions of viscoelastic cylindrical, *Journal of Sound and Vibration*, 39(3), 1975, pp. 273-286.
- [2] HUANG C. C., Forced motions of viscoelastic thick cylindrical shell, *Journal of Sound and Vibration*, 45(4), 1976, pp. 529-537.