

## طراحی بهینه پروفیل قالب اکستروژن متقارن

حسن نحوی<sup>۱\*</sup> مهدی حسن زاده<sup>۲</sup>

\* نویسنده مسئول: nahvi@iaukhsh.ac.ir

### چکیده

در این مقاله طراحی بهینه شکل قالب اکستروژن به منظور کنترل نرخ کرنش و نرخ مصرف انرژی مورد مطالعه قرار گرفته است. ناحیه پلاستیک به روش اجزا محدود و در دستگاه اویلری و با فرمول بندی شارش تحلیل شده است و شکل منحنی قالب با استفاده از منحنی‌های بزییر با ۶ نقطه کنترل تولید شده است. به منظور به دست آوردن شکل بهینه قالب از روش بهینه‌سازی غیر گرادیانی نلدر-مد استفاده شده و برای به دست آوردن نرخ کرنش همگن، انحراف معیار نرخ کرنش کمینه شده است. از ترکیب روش عددی اجزا محدود و روش بهینه‌سازی نلدر-مد شکل بهینه قالب به دست آمده و کانتورهای کرنش مؤثر در قالب بهینه با کانتورهای مربوط به قالب غیر بهینه مخروطی مقایسه شده است. پروفیل‌های به دست آمده از حل با نرخ کرنش ثابت با نتایج حل تحلیلی مقایسه شده‌اند که هم خوانی خوبی مشاهده شده است. نتایج نشان‌دهنده همگن‌تر بودن نرخ کرنش و کاهش مقدار آن در قالب بهینه است. همچنین، تأثیر فاکتور اصطکاک بر نرخ مصرف انرژی بررسی شده است. نتایج نشان می‌دهد شکل قالب حساسیت زیادی به فاکتور اصطکاک دارد.

**واژه‌های کلیدی:** اکستروژن، روش المان محدود، بهینه‌سازی، منحنی بزییر، نرخ کرنش ثابت.

۱- دانشیار، دانشکده مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد خمینی شهر.

۲- مربی، گروه مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد کردکوی.

## 1- مقدمه

امروزه کاربرد کامپیوتر در شکل‌دهی و شبیه‌سازی‌های مربوط به شکل‌دهی متداول شده است. مزایای کاربرد کامپیوتر، به‌ویژه هنگامی که با شبیه‌سازی فرایند همراه شود به روشنی در طراحی فرایندهای بهبود یافته و سریع آشکار است. اخیراً راهکارهای بهینه‌سازی مؤثر با ترکیب روش‌های کلاسیک بهینه‌سازی با روش المان محدود توسعه یافته‌اند و در مهندسی سازه کاربرد یافته‌اند. اگر چه این روش‌ها در بهینه‌سازی سازه به طور گسترده به کار می‌روند اما کاربرد آن‌ها در زمینه شکل‌دهی و مسائل مربوط به طراحی ابزار تاکنون نادر بوده است [1].

حل‌های بهینه مربوط به فرایندهای شکل‌دهی به شارش ماده مربوط می‌شوند. شکل‌دهی با پیچیدگی‌های بسیاری که ناشی از رفتار غیرخطی ماده، تغییر شکل‌های بزرگ و شرایط مرزی برخورد در سطح مشترک ماده و ابزار است، توصیف می‌شود. به علاوه، تولید گرما در اثر تغییر شکل پلاستیک و اصطکاک قابل صرف‌نظر نیست زیرا خواص فیزیکی و مکانیکی مواد به دما وابسته‌اند. در این زمینه بهینه‌سازی‌های مختلفی انجام شده است.

میله‌یک و استک [1] در طراحی قالب اکستروژن تابع هدف را مصرف انرژی کل و مقدار کاهش سطح مقطع در نظر گرفته‌اند. لی و همکارانش [2] در مورد طراحی بهینه و قالب متقارن برای اکستروود مواد گرم تحقیق کردند. آنها با روش اجزا محدود صلب- ترموویسکوپلاستیک ناحیه پلاستیک را تحلیل کردند و با استفاده از منحنی‌های بزییر شکل قالب را تولید کردند و شکل بهینه آن را برای یکنواختی دانه‌بندی محصول به دست آوردند. کیم و همکارانش [3] در مورد طراحی بهینه قالب برای اکستروژن داغ یک نوع ماده کامپوزیتی مطالعه کرده‌اند. آنها تابع هدف را نرخ کرنش ثابت در طی اکستروژن در نظر گرفتند و شکل حدیده را برای این منظور به دست آوردند. یولیس [4] در بهینه‌سازی قالب اکستروژن، تابع هدف را کنترل شارش در خروجی قالب اکستروژن در نظر گرفت. لین و همکاران [5] شکل بهینه قالب را به منظور بهبود عمر آن در فرایند اکستروژن گرم به دست آوردند. یان و شیا [6] در مورد بهینه‌سازی قالب اکستروژن برای مقطع غیر متقارن بشکل

L تحقیق کردند. آنها سرعت شارش ماده را تابع هدف قرار داده و با استفاده از شبکه عصبی مصنوعی و الگوریتم ژنتیک پارامترهای بهینه را به دست آوردند. شیان هونگ و همکاران [7] در مورد شارش همگن یک نوع قالب کار کرده و با استفاده از FVM<sup>1</sup> مسئله خود را تحلیل کردند. گوردونا و همکارانش [8] با استفاده از روش حد بالایی و ارائه چند میدان سرعت قابل قبول برای قالب اکستروژن متقارن، با کمینه کردن فشار متوسط اکستروژن، شکل قالب را به دست آوردند. بخشی جویباری و همکارانش [9] با استفاده از داده‌های تجربی، روش اجزا محدود و روش ترکیبی حد بالایی و روش قاجی، طراحی قالب اکستروژن مستقیم و معکوس را انجام دادند. در کلیه موارد ذکر شده یک تابع هدف در نظر گرفته شده و سپس با استفاده از روش‌های عددی و تکراری، سعی در بهینه‌سازی تابع هدف شده است.

در تمامی موارد ذکر شده در روش اجزا محدود مش لاگرانژی برای تحلیل مسئله به کار گرفته شده است. در تحقیق حاضر، مش اویلری در شبیه‌سازی فرایند اکستروژن به کار گرفته شده است. مش اویلری در فضا ثابت است و برخلاف مش لاگرانژی خراب شدن المان‌ها و مشکلات ناشی از آن را به همراه ندارد. در این مقاله، طراحی بهینه قالب متقارن برای اکستروژن میله، به منظور یکنواخت سازی نرخ کرنش و کمینه سازی نرخ مصرف انرژی شکل‌دهی انجام شده است. با شروع از یک طرح اولیه قالب و با استفاده از روش بهینه‌سازی نلدر-مد<sup>2</sup>، شکل بهینه منحنی قالب به دست آمده است. کد کامپیوتری به زبان فرترن تدوین شده و کلیه مراحل محاسباتی یعنی تولید منحنی، تحلیل اجزا محدود، به دست آوردن توابع هدف و بهینه‌سازی در آن گنجانده شده و به هم ارتباط داده شده‌اند.

## 2- فرمول‌بندی فرایند شکل‌دهی مواد متقارن محوری

استفاده از فرمول‌بندی اویلری برای فرایندهایی مانند نورد، کشش سیم و اکستروژن که در آنها شارش ماده به صورت پیوسته است مناسب است. ناحیه ثابت در فضا حجم کنترل نامیده

1- Finite Volume Method

2- Nelder-Mead

$$\sigma_e = C \epsilon \quad (7)$$

$$\epsilon = \frac{2}{3} \epsilon_{ij} \epsilon_{ij} \quad (8)$$

که  $C$  و  $d$  مشخصه‌های ماده ویسکوپلاستیک بوده و برای آلیاژ آلومینیوم ۲۰۱۷ مقدارشان به ترتیب برابر  $۸۶/۱۲۵$  MPa و  $۰/۱۲۸$  است [۱۱].

برای حل این مسئله مقادیر مرزی از روش FEM استفاده شده است. در این حالت میدان سرعت از بیان تغییرات معادل با نرخ کار مجازی به دست می‌آید. سرعت‌های درون یک المان از میان یابی مقادیر گره‌ای  $\hat{u}$  المان به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$u = N \hat{u} \quad (9)$$

که  $N$  ماتریس توابع شکل است. همچنین، میدان نرخ کرنش  $\epsilon$  درون المان از ماتریس نرخ کرنش  $B$  و مقادیر گره‌ای المان  $u$  به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\epsilon = B \hat{u}$$

با استفاده از روش‌های استاندارد اجزا محدود، معادله ماتریسی زیر برای به دست آوردن سرعت‌های گره‌ای نتیجه می‌شود [۴]:

$$K \hat{u} = \hat{f} \quad (11)$$

می‌شود [۴]:

$$K = \int_{\Omega} \mu B^T D B d\Omega + \int_{\Omega} \beta B^T w w^T B d\Omega, \quad (12)$$

$$\hat{f} = \int_{\partial\Omega} N^T T^0 ds$$

که  $K$  ماتریس سختی غیرخطی المان،  $\hat{f}$  بردار نیروی المان حاصل از نیروهای سطحی اعمال شده (نیروی اصطکاک و ...) و  $D$  ماتریس نرخ کرنش-تنش است. ماتریس  $D$  به صورت قطری بوده و دارای مولفه‌های ۱ و  $۰/۵$  است. همچنین،  $w$  برداری است که نرخ کرنش را به نرخ کرنش حجمی بدل می‌کند.  $\beta$  نیز ثابت جریمه است که دارای مقدار بزرگی است طوری که قید تراکم ناپذیری را ارضا کند. تنش اصطکاکی به صورت فاکتور اصطکاک با فرمول زیر بیان می‌شود:

$$f_k = m \frac{\sigma_e}{\sqrt{3}} \quad (13)$$

می‌شود. می‌توان ماده را به عنوان یک سیال در حال عبور از حجم کنترل در نظر گرفت. در این فرمول‌بندی که فرمول‌بندی شارش نیز نامیده می‌شود می‌توان برای تحلیل روی یک ناحیه در فضا متمرکز شده و مش ریزی را در ناحیه تغییر شکل انجام داد. با صرف نظر از نیروهای حجمی و اینرسی، معادله تعادل برای مواد با حجم  $\Omega$  و مرز  $\partial\Omega$  به صورت زیر نوشته می‌شود [۱۰]:

$$\nabla \cdot \sigma = 0 \quad \text{در } \Omega \quad (1)$$

که  $\sigma$  تانسور تنش کوشی است. نیروی سطحی  $T_i^0$  در قسمتی از مرز  $\Omega_t$  و مؤلفه‌های سرعت  $u_i^0$  در سطح باقیمانده  $\Omega_u$  توصیف می‌شوند که به صورت زیر قابل بیان اند:

$$(\sigma n) \cdot e_i = T_i^0 \quad \text{روی } \Omega_{ti}, \quad i=1,2 \quad (2)$$

$$u \cdot e_i = u_i^0 \quad \text{روی } \Omega_{ui}, \quad i=1,2 \quad (3)$$

در این معادلات  $\partial\Omega = \partial\Omega_t + \partial\Omega_u$  بردار  $n$  یک عمود بر مرز  $\partial\Omega$ ،  $e_i$  بردار یکه در سیستم مختصات دکارتی و  $u$  بردار سرعت است. تانسور نرخ کرنش با سرعت به صورت زیر مرتبط می‌شود:

$$\epsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \epsilon_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r}, \quad \epsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad (4)$$

$$\epsilon_z = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right)$$

اگر ماده تراکم ناپذیر فرض شود معادله پیوستگی زیر باید در هر نقطه  $\partial\Omega$  ارضا شود:

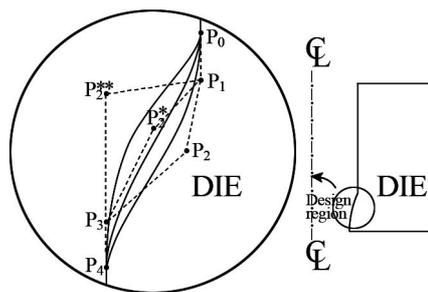
$$\nabla \cdot u = 0 \quad (5)$$

اگر برای مدل کردن تغییر شکل بزرگ پلاستیک که شامل فرایند اکستروژن هم می‌شود، فرمول بندی شارش انتخاب شود تانسور تنش کاهش یافته  $S_{ij}$  با نرخ کرنش  $\epsilon_{ij}$  به صورت زیر مرتبط می‌شود [۱۰]:

$$S_{ij} = 2\mu \epsilon_{ij}, \quad S = \sigma - pI \quad (6)$$

$$\mu = \frac{\sigma_e}{3\epsilon}$$

$\mu$  ویسکوزیته مؤثر ماده،  $p$  فشار هیدرواستاتیکی و  $I$  ماتریس واحد است.  $\sigma_e$  تنش مؤثر یا نامتغیر دوم تنش و  $\epsilon$  نرخ کرنش مؤثر یا نامتغیر دوم نرخ کرنش اند که به صورت زیر نوشته می‌شوند:



شکل (۱) ناحیه طراحی قالب و تغییر منحنی بزیر با جابه‌جایی محل نقاط کنترل.

#### ۴- روش بهینه‌سازی

به منظور طراحی شکل قالب طوری که تابع هدف در انجام فرایند کمینه باشد، از راهکار ترکیب اجزا محدود و تکنیک‌های طراحی بهینه بهره گرفته می‌شود. پس از تحلیل مسئله شکل‌دهی، تابع هدف محاسبه شده و محاسبات برای تعیین متغیرهای مختلف طراحی تا رسیدن به نقطه بهینه تکرار می‌شود. شکل (۲) فلوچارت الگوریتم جستجو را برای عملیات بهینه‌سازی نشان می‌دهد. این عملیات شامل شبیه‌سازی عددی FEM برای به دست آوردن نرخ کرنش مؤثر و بهینه‌سازی برای به دست آوردن تابع هدف کمینه است.

برای به دست آوردن آنالیز حساسیت در اجزا محدود و دیگر روش‌های عددی عموماً از تفاضل محدود که خود روشی عددی است، استفاده می‌شود. به دست آوردن آنالیز حساسیت به این شیوه معایب زیادی را در بر دارد که می‌توان هزینه زیاد محاسبات و پایین بودن دقت مشتقات را نام برد. در این تحقیق، برای پیدا کردن بردار  $x$  که تابع هدف  $f(x)$  را کمینه کند از روش نلدر-مد که روشی مؤثر برای پیدا کردن نقطه بهینه توابع غیرخطی بدون استفاده از مشتقات است، استفاده می‌شود [۱۳]. این روش در مواردی که رابطه ریاضی بین متغیرهای طراحی و تابع هدف وجود ندارد می‌تواند به راحتی مورد استفاده قرار گیرد. متغیرهای طراحی می‌توانند به طور هندسی با الگوریتم نلدر-مد بهنگام شوند. روش نلدر-مد می‌تواند تابعی با  $n$  متغیر مستقل را با استفاده از نقاط رأس یک چند وجهی  $n+1$  رأسی، بهینه کند.

که  $m$  فاکتور اصطکاک است.

برخلاف مش لاگرانژی، مش اوپلری در فضا ثابت است. بنابراین در این تحلیل خراب شدن مش وجود ندارد و حل مسئله به صورت گام به گام نیست، بلکه یکباره انجام می‌پذیرد.

#### ۳- کاربرد منحنی بزیر<sup>۱</sup> برای تولید شکل پروفیل قالب

در این مقاله، تولید شکل قالب فرایند اکستروژن میله، برای نسبت اکستروژن داده شده و شعاع اولیه شمش<sup>۲</sup> بر پایه استفاده از منحنی بزیر است. از منحنی بزیر به صورت گسترده در زمینه طراحی به کمک کامپیوتر استفاده می‌شود [۱۲]. این منحنی خواص مهمی چون قرار گرفتن در میان چند وجهی ایجاد شده به وسیله نقاط کنترل، قرار گرفتن نقطه کنترل اول و آخر روی منحنی و همچنین مماس بودن بر اولین و آخرین خط چند وجهی را داراست. منحنی بزیر به وسیله مجموعه‌ای از نقاط کنترل،  $(X_0, X_1, \dots, X_{n-1}, X_n)$ ، توصیف می‌شود. چند جمله‌ای درجه  $n$  بزیر بوسیله  $n+1$  نقطه کنترل به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$Q(t) = \sum_{i=0}^n X_i B_{i,n}(t) \quad (14)$$

که  $t$  یک پارامتر و  $B_{i,n}(t)$  چند جمله‌ای برنستین<sup>۳</sup> است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$B_{i,n}(t) = \binom{n}{i} (t)^i (1-t)^{n-i} \quad (0 \leq t \leq 1) \quad (15)$$

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!} \quad i = 0, \dots, n \quad (16)$$

شکل (۱) منحنی بزیر را با ۵ نقطه کنترل در ناحیه تغییر شکل نشان می‌دهد. با استفاده از ۵ نقطه کنترل، شکل قالب ایجاد شده به صورت یک چند جمله‌ای درجه ۴ است. این منحنی با استفاده از معادلات (۱۵) و (۱۶) به صورت زیر است:

$$Q(t) = (1-t)^4 X_0 + 4t(1-t)^3 X_1 + 6t^2(1-t)^2 X_2 + 4t^3(1-t) X_3 + t^4 X_4 \quad (17)$$

۱ - Bezier

۲ - Billet

۳ - Bernstein

۲- گسترش: اگر  $f(x_r^{(k)}) \leq f(x_l^{(k)})$  باشد، بردار  $(x_r^{(k)} - x_o^{(k)})$  با فرمول زیر گسترش داده شود:

$$x_e^{(k)} = x_o^{(k)} + \gamma(x_r^{(k)} - x_o^{(k)}) \quad (22)$$

که  $\gamma > 1$  اکنون اگر  $f(x_r^{(k)}) < f(x_l^{(k)})$  باشد،  $x_e^{(k)}$  جایگزین  $x_h^{(k)}$  شده و الگوریتم از مرحله ۱ با  $k = k + 1$  ادامه می‌یابد. در غیر این صورت، بردار  $x_r^{(k)}$  جایگزین  $x_h^{(k)}$  شده و به مرحله ۱ با  $k = k + 1$  بازگشت داده می‌شود.

۳- انقباض: اگر برای تمام  $i$ ها به غیر از  $h$ ،  $f(x_r^{(k)}) > f(x_i^{(k)})$  باشد، بردار  $(x_h^{(k)} - x_o^{(k)})$  با فرمول زیر منقبض شود:

$$x_c^{(k)} = x_o^{(k)} + \beta(x_h^{(k)} - x_o^{(k)}) \quad (23)$$

که  $0 < \beta < 1$  ضریب انقباض است. اکنون بردار  $x_c^{(k)}$  جایگزین بردار  $x_h^{(k)}$  شده و از مرحله ۱ با  $k = k + 1$  شروع شود.

۴- کاهش: اگر  $f(x_r^{(k)}) > f(x_h^{(k)})$  باشد، طبق فرمول زیر تمامی بردارهای  $(x_i^{(k)} - x_l^{(k)})$  با ضریب  $0.5$  از  $x_l^{(k)}$  کم شود:

$$x_i^{(k)} = x_l^{(k)} + 0.5(x_i^{(k)} - x_l^{(k)}) \quad i = 2, \dots, n+1 \quad (24)$$

والگوریتم از مرحله ۱ با  $k = k + 1$  آغاز گردد.

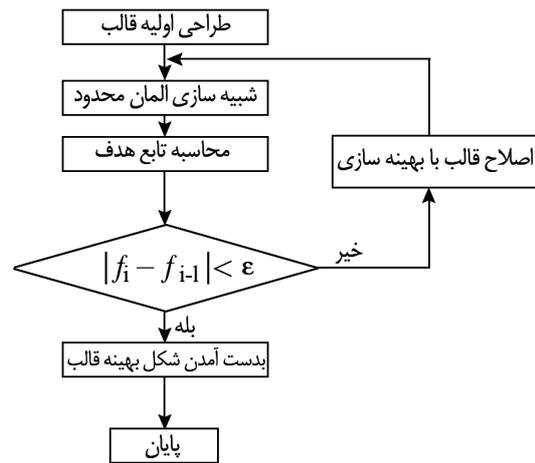
معیار پایان جستجو در هر تکرار به صورت زیر است:

$$\left\{ \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} [f(x_i^{(k)}) - f(x_o^{(k)})]^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \leq \varepsilon \quad (25)$$

که  $\varepsilon$  مقدار کوچک اختیاری و  $f(x_o)$  مقدار تابع هدف در مرکز ثقل است.

## ۵- نتایج عددی

**مثال ۱:** در بعضی مواد حساس به نرخ کرنش مثل آلیاژ تیتانیوم، مواد سوپر پلاستیک و مواد مرکب، تغییر شکل در محدوده کوچکی از نرخ کرنش انجام می‌شود. از این رو، کنترل نرخ کرنش و همگن‌سازی آن از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. همگن‌سازی کرنش از نظر ریاضی به صورت انحراف معیار نرخ کرنش تعریف می‌شود. هر چه انحراف معیار نرخ کرنش کمتر باشد نرخ کرنش همگن‌تر است.



شکل (۲) الگوریتم جستجو برای طراحی بهینه پروفیل قالب.

فرض کنید  $x_i^{(k)} = [x_{i1}^{(k)}, x_{i2}^{(k)}, \dots, x_{in}^{(k)}]^T$ ،  $i = 1, \dots, n+1$ ،  $i$  امین نقطه در  $k$  امین مرحله از جستجو باشد و مقدار تابع هدف در  $x_i^{(k)}$ ،  $f(x_i^{(k)})$  باشد. همچنین فرض کنید:

$$f(x_i^{(k)}) = \max \{f(x_1^{(k)}), \dots, f(x_{n+1}^{(k)})\} \quad (18)$$

و

$$f(x_l^{(k)}) = \min \{f(x_1^{(k)}), \dots, f(x_{n+1}^{(k)})\} \quad (19)$$

$x_o^{(k)}$  مرکز ثقل تمام نقاط بجز  $x_n^{(k)}$  است که از فرمول زیر محاسبه می‌شود:

$$x_{o,j}^{(k)} = \frac{1}{n} \left[ \left( \sum_{i=1}^{n+1} x_{ij}^{(k)} \right) - x_{nj}^{(k)} \right] \quad j = 1, \dots, n \quad (20)$$

اندیس  $z$  نشان دهنده‌ی جهات مختصات است.

روند پیدا کردن رأسی که مقدار  $f(x)$  کمتری را بدهد

شامل چهار مرحله زیر است:

۱- انعکاس:  $x_h^{(k)}$  از میان مرکز ثقل با فرمول زیر منعکس شود:

$$x_r^{(k)} = x_o^{(k)} + \alpha(x_o^{(k)} - x_h^{(k)}) \quad (21)$$

که  $\alpha > 0$  ضریب انعکاس است و  $x_h^{(k)}$  نقطه‌ای است که بیشترین مقدار  $f(x)$  را می‌دهد.

اگر  $f(x_h^{(k)}) \leq f(x_r^{(k)}) < f(x_n^{(k)})$  باشد، بردار  $x_r^{(k)}$

جایگزین بردار  $x_h^{(k)}$  شده و الگوریتم از مرحله ۱ با  $k = k + 1$  ادامه می‌یابد.

برای بهینه سازی شکل قالب با سه نسبت اکستروژن مختلف به صورت تکراری انجام شده است. جدول (۱) مقادیر پارامترهای فرایند را نشان می‌دهد. مقادیر نقاط کنترل برای قالب بهینه در جدول (۲) ارائه شده است. شکل (۴) تغییرات انحراف معیار نسبی نرخ کرنش را با افزایش تعداد تکرار برای سه نسبت اکستروژن مختلف نشان می‌دهد. مقادیر انحراف معیار نسبی برای تمام نسبت‌های اکستروژن با تعداد تکرار کاهش می‌یابد. در مورد نسبت اکستروژن ۳، مقدار انحراف معیار نرخ کرنش نسبی بعد از ۳۸ تکرار تقریباً ثابت شده است. برای نسبت‌های اکستروژن ۵/۵ و ۸/۵ به ترتیب پس از ۵۷ و ۶۷ تکرار مقدار انحراف معیار نرخ کرنش ثابت شده است.

شکل‌های (۵)، (۶) و (۷) توزیع نرخ کرنش مؤثر را طی اکستروژن متقارن ماده به ترتیب با نسبت‌های اکستروژن برابر ۳، ۵/۵ و ۸/۵ در قالب‌های بهینه شده و مخروطی نشان می‌دهند. خطوط رسم شده ناحیه کرنش و برجسب آن را نشان می‌دهد. در طول خط، کرنش ثابت است و بین دو خط، کرنش متغیر است. همانطور که در این شکل‌ها دیده می‌شود در قالب‌های مخروطی توزیع کرنش ناهمگن تر بوده و مقادیر انحراف معیار و کرنش نیز بیشترند. با کمیته کردن انحراف معیار نرخ کرنش، مقادیر کرنش نیز کاهش می‌یابند. در قالب به شکل مخروطی، تراکم کرنش در نزدیکی قالب و قسمت خروجی آن مشاهده می‌شود در حالیکه در قالب بهینه، شکل خروجی قالب به صورت خط جریانی در آمده تا بدین صورت کرنش آن قسمت را کاهش دهد. قسمت‌های ابتدایی و وسط قالب نیز به صورت مقعر در آمده تا کرنش در این قسمت‌ها تعدیل شده و باعث همگنی بیشتر نرخ کرنش شود.

جدول (۱) مقادیر پارامترهای فرایند برای شبیه سازی اجزا محدود.

پارامترهای فرایند	داده ورودی
قطر اولیه (mm)	۳۶
قطر نهایی حالت اول (mm)	۲۰/۷۸
قطر نهایی حالت دوم (mm)	۱۵/۳۵
قطر نهایی حالت سوم (mm)	۱۲/۳۴۸
طول قالب (mm)	۲۰
سرعت ورودی (mm/s)	۲
فاکتور اصطکاک	۰/۵

بنابراین به منظور همگن سازی نرخ کرنش، تابع هدف به صورت زیر نوشته می‌شود [۱۰]:

$$vd = \sqrt{\frac{\sum (\xi_i - \xi_{avg}) V_i}{V_{total}}} \quad (26)$$

که  $\xi_i$  و  $V_i$  به ترتیب کرنش مؤثر و حجم المان  $i$  هستند. همچنین،  $V_{total}$  حجم کل و  $\xi_{avg}$  کرنش میانگین مؤثر است که بوسیله رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$\xi_{avg} = \frac{\sum \xi_i V_i}{V_{total}} \quad (27)$$

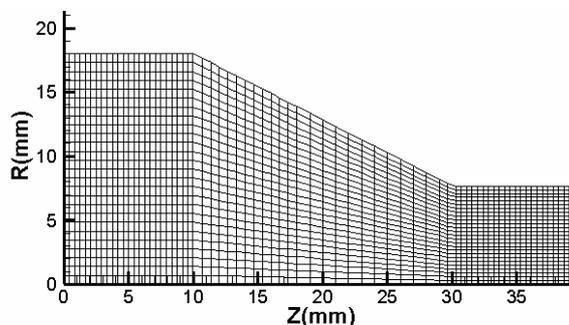
مسئله مورد نظر عبارت است از به دست آوردن شکل منحنی قالب بطوری که  $vd$  کمینه شود. برای طراحی منحنی از بزییر با ۶ نقطه کنترل استفاده شده است. دو نقطه، نقاط ابتدا و انتها هستند که ثابت می‌باشند. برای این مساله بهینه‌سازی در مجموع ۸ متغیر طراحی وجود دارد که عبارتند از مختصات نقاط کنترل. در ضمن، قیدهای زیر در طی برنامه‌نویسی به روش پناالتی اعمال شده اند:

$$Px_0 \leq Px_1 \leq Px_2 \leq Px_3 \leq Px_4 \leq Px_5 \quad (28)$$

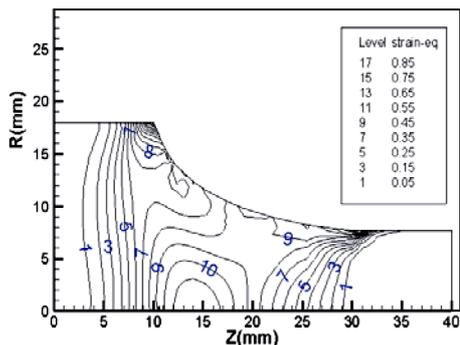
$$Py_1 \leq R_0, \quad Py_4 \geq R_f,$$

که  $Px_0 - Px_5$  نقاط کنترل و  $R_0, R_f$  به ترتیب شعاع اولیه و نهایی اند. تمامی مراحل ذکر شده (طراحی منحنی، روش اجزا محدود و روش بهینه‌سازی) با زبان برنامه‌نویسی فرترن پیاده‌سازی شده و نتایج در نرم‌افزار TECPLOT رسم شده است.

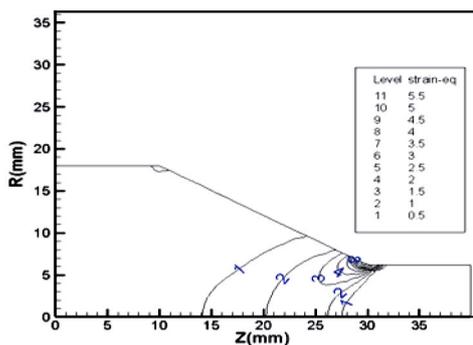
برای مش ریزی قالب از المان‌های چهار گرهی و توابع شکل لاگرانژ استفاده شده است. نمونه‌ای از مش ریزی قالب در شکل (۳) نشان داده شده است.



شکل (۳) نمونه‌ای از مش ریزی قالب.

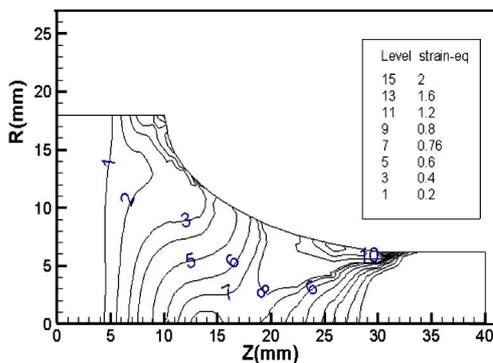


(الف)

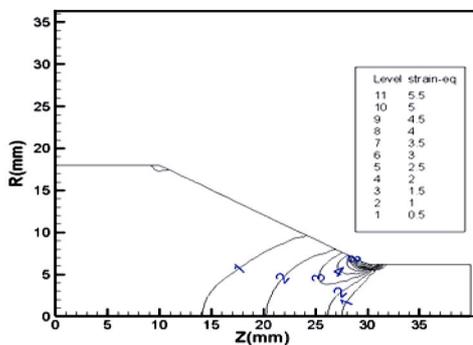


(ب)

شکل (۶) توزیع کرنش مؤثر برای نسبت اکستروژن ۵/۵ (الف) قالب بهینه، (ب) قالب مخروطی (غیر بهینه).



(الف)

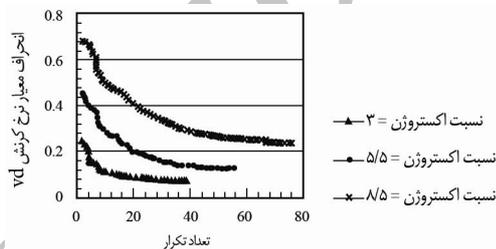


(ب)

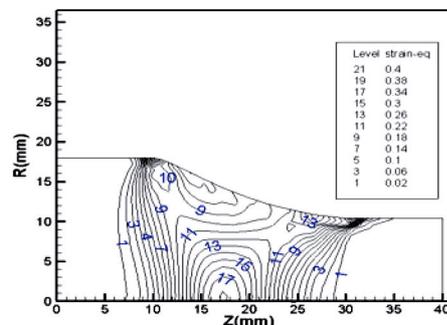
شکل (۷) توزیع کرنش مؤثر برای نسبت اکستروژن ۸/۵ (الف) قالب بهینه، (ب) قالب مخروطی (غیر بهینه).

جدول (۲) مقادیر نقاط کنترل در همگن سازی نرخ کرنش.

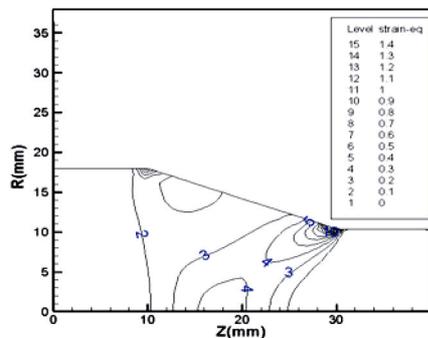
$\lambda$	۳	۵/۵	۸/۵
$Px_1$	۱۱/۴۳۵	۱۰/۸۹۴	۱۰/۲۰۲
$Px_2$	۱۳/۸۷۴	۱۱/۶۲۶	۱۰/۲۲۶
$Px_3$	۱۳/۸۷۷	۱۲/۲۵۲	۱۰/۵۱۶
$Px_4$	۱۴/۳۴۶	۱۳/۴۴۳	۱۰/۵۱۷
$Py_1$	۱۷/۷۱۷	۱۷/۷۸۷	۱۷/۹۵۸
$Py_2$	۱۶/۸۸۳	۱۵/۱۰۶	۱۴/۸۱۰
$Py_3$	۱۶/۰۹۴	۱۰/۳۳۱	۱۰/۲۲۴
$Py_4$	۱۲/۸۰۱	۱۵/۴۲۸	۷/۶۱۸



شکل (۴) تغییرات انحراف معیار نرخ کرنش با تعداد تکرار.



(الف)



(ب)

شکل (۵) توزیع کرنش مؤثر برای نسبت اکستروژن ۳ (الف) قالب بهینه، (ب) قالب مخروطی (غیر بهینه).

**مثال ۲:** یکی از فاکتورهای مهم در اکستروژن مواد، مصرف انرژی است که با کمینه کردن آن هزینه تولید کاهش می‌یابد. در فرایند اکستروژن متقارن نرخ انرژی مصرفی به صورت زیر فرموله می‌شود [۱۰]:

$$E = \sum_i \int \sigma_{eq} \epsilon_{eq} dV = 2\pi \sum_i \int \sigma_{eq} \epsilon_{eq} dA \quad (30)$$

برای این مثال پارامترهای فرایند مطابق جدول (۱) است. شبیه سازی عددی برای مقادیر  $\lambda$  برابر ۳، ۵/۵ و ۸/۵ انجام شده و مقادیر نقاط کنترل در جدول (۳) آورده شده است. مقادیر نرخ انرژی برای قالبهای بهینه و غیر بهینه و در نسبت‌های اکستروژن مختلف در جدول (۴) مقایسه شده‌اند. از نتایج این جدول دیده می‌شود که با افزایش نسبت اکستروژن اختلاف بین نرخ انرژی در حالت‌های بهینه و غیر بهینه افزایش می‌یابد. شکل (۹) تغییرات نرخ انرژی را برای نسبت‌های مختلف اکستروژن نشان می‌دهد. با افزایش تعداد تکرار، نرخ انرژی برای نسبت‌های اکستروژن مختلف کاهش می‌یابد. شکل‌های قالب بهینه برای این سه نسبت اکستروژن در شکل (۱۰) نشان داده شده است. می‌توان مشاهده کرد که با افزایش نسبت اکستروژن، شکل قالب بسمت خط جریانی شدن در ورودی و خروجی پیش می‌رود تا با صفر شدن کار ورودی و خروجی مقدار انرژی کاهش یابد.

جدول (۳) مقادیر نقاط کنترل در بهینه‌سازی مصرف انرژی.

$\lambda$	۳	۵/۵	۸/۵
$Px_1$	۱۵/۰۸۲	۱۷/۱۱۰	۱۶/۹۸۳
$Px_2$	۱۹/۱۲۱	۱۹/۵۱۸	۱۸/۶۶۵
$Px_3$	۲۱/۷۹۱	۲۳/۸۲۳	۲۲/۸۴۱
$Px_4$	۲۵/۸۹۷	۲۶/۱۰۶	۲۶/۵۲۲
$Py_1$	۱۷/۴۴۵	۱۷/۱۶۶	۱۶/۷۸۰
$Py_2$	۱۵/۷۶۸	۱۴/۱۴۲	۱۴/۳۴۵
$Py_3$	۱۴/۷۴۸	۱۴/۷۲۸	۱۵/۰۶۸
$Py_4$	۱۱/۷۴۴	۸/۸۰۹	۷/۴۷۸

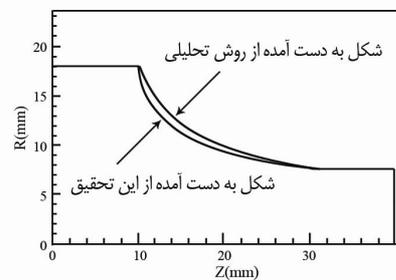
جدول (۴) نرخ مصرف انرژی برای قالب‌های بهینه و غیر بهینه

$\lambda$	۳	۵/۵	۸/۵
نرخ انرژی برای حالت بهینه	۳۳۷/۱۵۷	۴۸۲/۳۶۸	۵۹۹/۰۹۸
نرخ انرژی برای حالت غیر بهینه	۳۳۸/۶۷۰	۴۹۲/۴۲۳	۶۱۷/۳۶۷

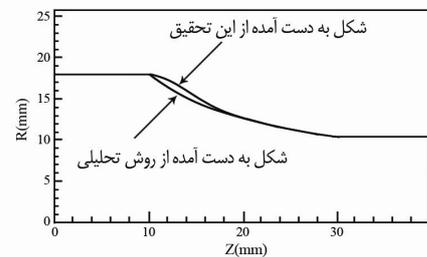
به منظور اعتبارسنجی روش ارائه شده، از روابط تحلیلی برای مقایسه با نتایج حاصل از این تحقیق استفاده می‌کنیم. حل تحلیلی شکل قالب با نرخ کرنش ثابت به صورت زیر داده شده است [۳]:

$$r(z) = \left( \frac{R_0^2}{(\lambda - 1)z/L + 1} \right)^{1/2} \quad (29)$$

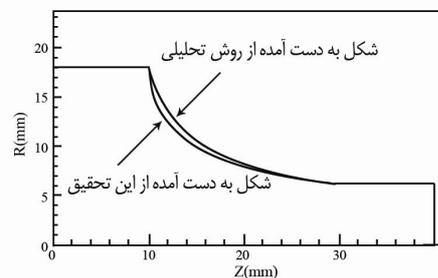
که  $L$  طول قالب است. نتایج حاصل از این دو روش در شکل (۸) نشان داده شده است. همانطور که مشاهده می‌شود پروفیل به دست آمده از این تحقیق همخوانی خوبی با نتایج روش تحلیلی دارد و اختلاف منحنی‌ها در قسمت ورودی قالب ناشی از فرض‌های ساده شونده در به دست آوردن حل تحلیلی است.



(الف)



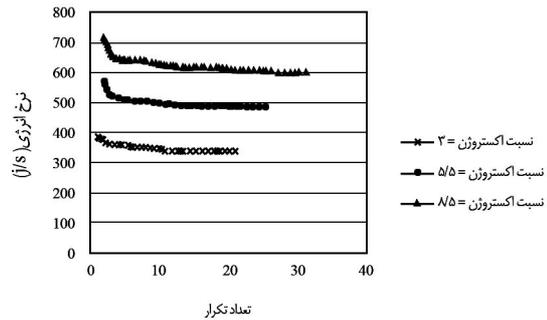
(ب)



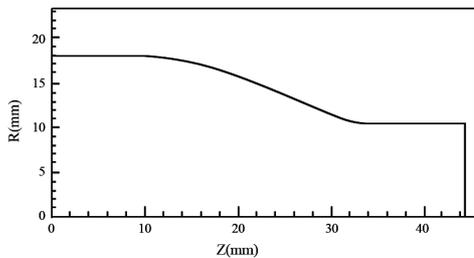
(ج)

شکل (۸) مقایسه پروفیل‌های به دست آمده از این تحقیق با نتایج حل تحلیلی از مرجع [۳] برای نسبت‌های مختلف اکستروژن، (الف) ۳، (ب) ۵/۵، (ج) ۸/۵.

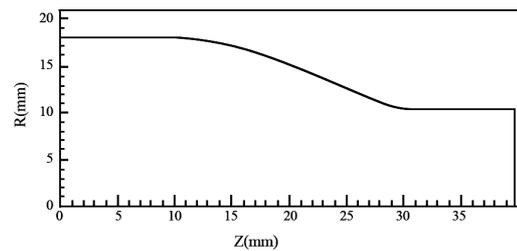
(۱۲) و (۱۳) نشان داده شده‌اند. همان طور که مشاهده می‌شود برای فاکتور اصطکاک کم، شکل قالب به سمت خط جریانی شدن می‌رود. در حالی که با فاکتور اصطکاک زیاد، شکل قالب به صورت خطی در آمده است. این امر نشان می‌دهد که در حالت اصطکاک کم، کار ورود و خروج و در حالت اصطکاک زیاد، اتلاف انرژی توسط اصطکاک اثر بیشتری داشته است.



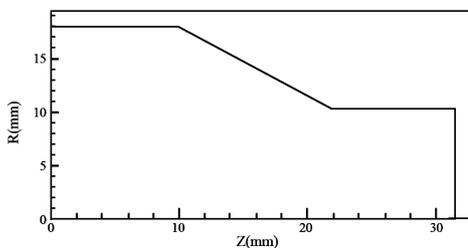
شکل (۹) تغییرات نرخ انرژی مصرفی با تعداد تکرار در حین بهینه‌سازی.



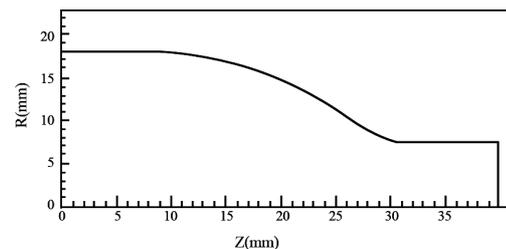
(الف)



(الف)

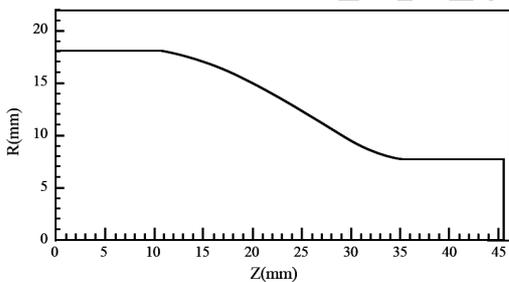


(ب)

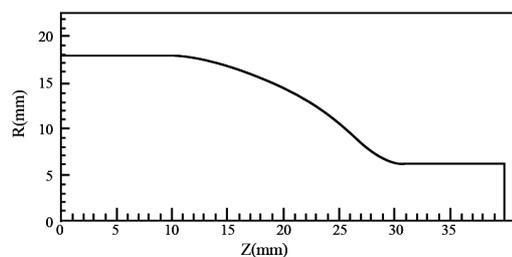


(ب)

شکل (۱۱) منحنی‌های بهینه با طول قالب متغیر و نسبت اکستروژن ۳، الف) فاکتور اصطکاک ۰/۱، ب) فاکتور اصطکاک ۰/۵.



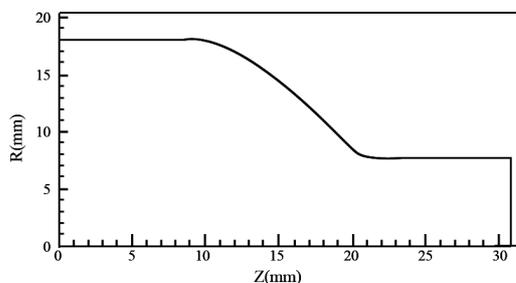
(الف)



(ج)

شکل (۱۰) منحنی‌های بهینه برای کمینه بودن نرخ مصرف انرژی،

الف) نسبت اکستروژن ۳، ب) نسبت اکستروژن ۵/۵، ج) نسبت اکستروژن ۸/۵



(ب)

شکل (۱۲) منحنی‌های بهینه با طول قالب متغیر و نسبت اکستروژن ۵/۵،

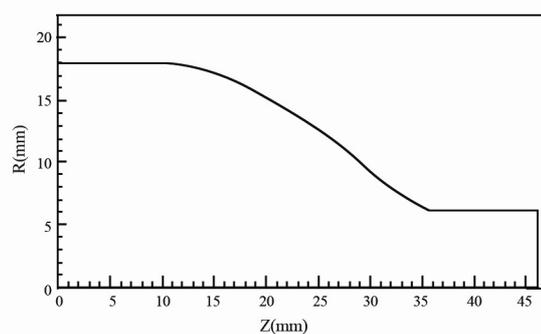
الف) فاکتور اصطکاک ۰/۱، ب) فاکتور اصطکاک ۰/۵.

در منحنی‌های بهینه به دست آمده طول قالب ثابت فرض شده و متغیرهای طراحی نقاط کنترل بودند. در مورد این مسئله طول قالب نیز جزو پارامترهای مهم است و می‌توان طول بهینه آنرا محاسبه نمود. با در نظر گرفتن طول قالب به‌عنوان متغیر و با فاکتورهای اصطکاک ۰/۱ و ۰/۵، منحنی‌های بهینه قالب برای نسبت‌های مختلف اکستروژن به دست آمده و در شکل‌های (۱۱)،

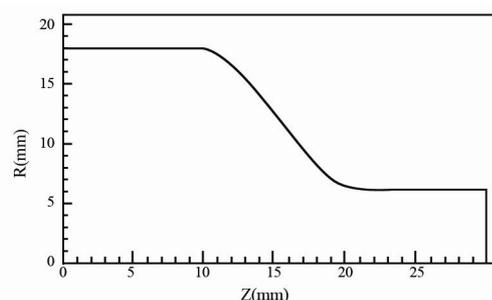
در بهینه سازی نرخ مصرف انرژی، نتایج نشان می‌دهد که با فرض طول قالب ثابت، شکل قالب به سمت خط جریانی شدن پیش می‌رود. این امر به دلیل صفر شدن کار ورود و خروج است. همچنین مشاهده شد اصطکاک اثر قابل توجهی روی نرخ مصرف انرژی می‌گذارد. به طوری که در حالتی که طول قالب متغیر و به عنوان پارامتر طراحی در نظر گرفته شده برای اصطکاک کم، شکل قالب به سمت خط جریانی با طول زیاد و برای اصطکاک زیاد، به سمت طول کمتر و شکل مخروطی پیش می‌رود. علت این امر آن است که با افزایش طول قالب سطح قالب هم افزایش پیدا کرده و مقدار انرژی مصرفی را بالا می‌برد. نتایج مشابهی برای تاثیر اصطکاک و کار ورود و خروج در مرجع [۱۴] آمده است.

### فهرست علائم

$B$	ماتریس نرخ کرنش
$B_{i,n}(t)$	چند جمله ای برنستین
$D$	ماتریس نرخ کرنش-تنش
$\mathcal{E}$	نرخ انرژی مصرفی
$e_i$	بردار یکه در مختصات دکارتی
$\hat{f}$	بردار نیروی المان
$f_k$	تنش اصطکاکی
$K$	ماتریس سختی غیر خطی المان
$L$	طول قالب
$m$	فاکتور اصطکاک
$N$	ماتریس توابع شکل
$P$	فشار هیدرواستاتیک
$P_x$	نقاط کنترل
$R_f$	شعاع نهایی قالب
$R_0$	شعاع اولیه قالب
$S_{ij}$	تانسور تنش کاهش یافته
$T_i^0$	نیروی سطحی
$u$	بردار سرعت
$vd$	انحراف معیار نرخ کرنش
$V_i$	حجم المان
$V_{total}$	حجم کل
	<b>علائم یونانی</b>
$\beta$	ثابت جریانه



(الف)



(ب)

شکل (۱۳) منحنی‌های بهینه با طول قالب متغیر و نسبت اکستروژن  $4/5$  (الف) فاکتور اصطکاک  $0/1$ ، (ب) فاکتور اصطکاک  $0/5$ .

### ۶- نتیجه گیری

در این تحقیق، روش طراحی جدیدی برای بهینه سازی شکل قالب و به منظور به دست آوردن نرخ کرنش مؤثر یکنواخت در ناحیه تغییر شکل در فرایند اکستروژن ارائه شد. در تحلیل اجزا محدود برای شبیه سازی فرایند از فرمول بندی شارش در دستگاه اویلری استفاده شد و روش بهینه سازی نلدر-مد برای طراحی پروفیل منحنی قالب مورد استفاده قرار گرفت. منحنی قالب با استفاده از منحنی‌های بزییر بیان شد. نتایج نشان می‌دهد توزیع نرخ کرنش در ناحیه تغییر شکل در قالب بهینه نسبت به قالب غیر بهینه همگن تر است. برای نسبت اکستروژن کم، پروفیل‌های قالب به دست آمده از حل تحلیلی و روش بهینه سازی با یکدیگر تفاوت چندانی ندارند ولی برای مقادیر نسبت اکستروژن زیادتر اختلاف این دو بیشتر نمایان می‌شود. با توجه به بعضی فرض‌های ساده شونده در به دست آوردن حل تحلیلی (فرض عدم اصطکاک، سرعت همگن در مقطع و ...) این اختلاف منطقی است.

- hollow pipe extrusion process, *Materials Science and Engineering A* 435–436, 2006, pp. 266-274.
- [8] Gordona W. A., Van Tyneb C.J., Moon Y. H., Axisymmetric extrusion through adaptive dies- Part 3: Minimum pressure streamlined die shapes, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 49, 2007, pp. 104-115.
- [9] Bakhshi-Jooybari M., Saboori M., Noorani-Azad M., Hosseinipour S. J., Combined upper bound and slab method, finite element and experimental study of optimal die profile in extrusion, *Materials and Design*, Vol. 28, 2007, pp. 1812-1818.
- [10] Dixit P. M., Dixit U. S., *Modeling of Metal Forming and Machining Processes*, Springer, London, 2008.
- [11] Altan T., Oh S.I., Gegel H.L., *Metal Forming Fundamentals and Applications*, American Society of Metals, Cleveland, OH, 1983.
- [12] Saxena A., Sahay B., *Computer Aided Engineering Design*, Springer, 2005.
- [13] Himmelblau D.M., *Applied Nonlinear Programming*, McGraw-Hill, New York, 1972.
- [14] Hosford W. F., Caddell R. M., *Metal Forming: Mechanics and Metallurgy* Cambridge University Press, 2007.
- $\dot{\epsilon}_e$  نرخ کرنش مؤثر
- $\dot{\epsilon}_{ij}$  مؤلفه‌های تانسور نرخ کرنش
- $\dot{\bar{\epsilon}}_{avg}$  کرنش میانگین مؤثر
- $\dot{\epsilon}_i$  کرنش مؤثر
- $\lambda$  نسبت اکستروژن
- $\mu$  ویسکوزیته مؤثر
- $\sigma$  تانسور کوشی
- $\sigma_e$  تنش مؤثر
- مراجع**
- [1] Mihelic A. Stok B., Tool design optimization in extrusion processes, *Computers & Structures*, Vol. 68, 1998, pp. 283-293.
- [2] Lee S.K., Ko D.C. Kim B.M., Optimal die profile design for uniform microstructure in hot extrusion product, *International Journal of Machine Tool Manufacturing*, Vol. 40, 2000, pp 1457–1478.
- [3] Kim N. H., Kang C. G., Kim B.M., Die design optimization for axisymmetric hot extrusion of metal matrix composites, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 42, 2000, pp. 1507-1520.
- [4] Ulysse P., Extrusion die design for flow balance using FE and optimization methods, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 44, 2002, pp. 319–341.
- [5] Juchen X., Xinyun W., Lin Z., Guoan H Optimization of die profile for improving die life in the hot extrusion process, *Journal of Materials Processing Technology*, Vol. 142, 2003, pp. 659–664.
- [6] Yan H., Xia J, An approach to the optimal design of technological parameters in the profile extrusion process, *Science and Technology of Advanced Materials*, Vol. 7, 2006, pp. 127–131.
- [7] Xianghong W., Guoqun Z., Yiguo L, Xinwu M., Numerical simulation and die structure optimization of an aluminum rectangular