فصلنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک جامدات

سایت فصلنامه: www.jsme.ir

فصلنامه علمی پژوهشی
مهندسی مکانیک جامدات

تأثیر کشش سطحی بر تحلیل ارتعاشات غیر خطی نانو لوله

جعفر اسکندری جم[۱]، یاسر میرزایی[۲،*]، بهنام قشلاقی[۳]

* ایمیل نویسنده مسئول: Mirzaei@damavandiau.ac.ir

چکیده

در این مقاله به بررسی ارتعاشات غیرخطی نانو لوله ها با استفاده از تئوری اویلر برنولی تیر و با در نظر گرفتن مدل غیرخطی هندسی ون-کارمن به همراه اثرات کشش سطحی پرداخته شده است. با به‌کارگیری مدهای ارتعاشات آزاد مسئله خطی، فرکانس‌های طبیعی غیر خطی نانو لوله با شرایط مرزی ساده بر حسب توابع بیضوی ژاکوبی به‌دست آورده شده است. نتایج عددی نشان می‌دهد که کشش سطح، شماره مود، دامنه ارتعاشات و طول نانو لوله اثرات مورد توجهی بر خواص ارتعاشی نانو لوله‌ها دارند. همچنین تأثیر کشش سطح بر روی نمودار فاز مورد بررسی قرار گرفته است. در نهایت، مشاهده شده است که تأثیر کشش سطح با افزایش ابعاد نانو لوله از بین می‌رود. مطالعه حاضر را می‌توان در بهبود طراحی انواع مختلف میکرو- نانو سنسورها مورد استفاده قرار داد.

واژه‌های کلیدی

ارتعاشات غیرخطی، کشش سطح، نانو لوله.

۱- دانشیار، مرکز کامپوزیت، تهران.

۲- استادیار، گروه مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد دماوند.

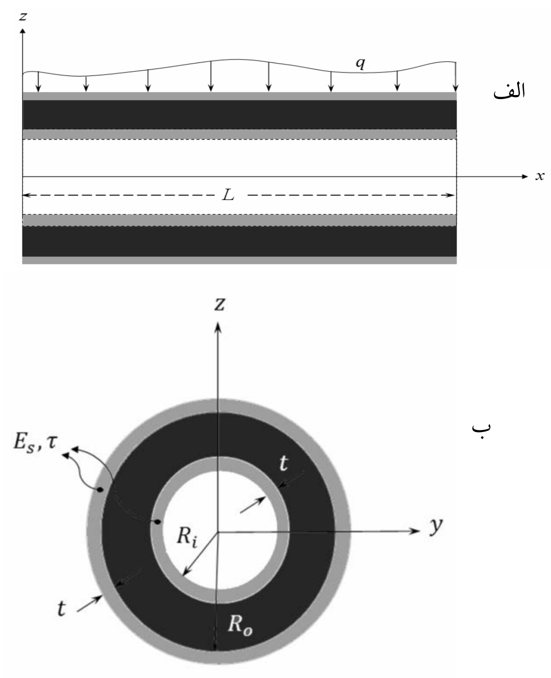
۳- کارشناس ارشد، گروه مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد دماوند.

۱- مقدمه

نانولوله‌ها کاربردهای وسیعی در نسل آینده در صنعت نانوتکنولوژی دارند. خواص مکانیکی منحصر به فرد نانولوله‌ها توجه شایان ذکری را به دلیل کاربرد بالقوه آنها در سیستم های نانوالکترومکانیک یا میکرو الکترومکانیک، به‌عنوان عملگر[۱]، فنر[۲]، و نوسان‌کننده[۳،۴] به خود جلب کرده‌است. به‌دلیل نسبت بالای بین سطح یا وجه مشترک و حجم، خواص فیزیکی و مکانیکی نانوسازه‌ها به اثرات سطح وابسته است [۲،۵]. تحقیقات فراوانی برروی اثرات سطح در نانوسازه‌ها انجام شده‌است. برای مثال، لاگوسکی و همکارانش [۵] اثرات تنش سطح باقیمانده را بر روی مودهای قائم ارتعاشات کریستال‌های نازک بررسی کردند. سادر[۶] اثرات سطح را برروی تغییر شکل خمشی تیر یک سر گیردار میکروسکوپ اتمی در نظر گرفت. همچنین لی و همکارانش[۷] تأثیرات جرم و تنش را برروی تغییرات فرکانس‌های تشدید یک میکرو تیر نشان دادند. هی و لی‌لی [۸] اثرات سطح را برروی رفتار الاستیک نانوسیم ها در خمش استاتیک درنظر گرفتند. ونگ و فنگ [۹] و عباسیون و همکارانش [۱۰] به ترتیب اثرات سطح را بر روی فرکانسهای طبیعی میکروتیرهای اویلر- برنولی و تیموشنکو بررسی کردند. مدلهای ارتعاشی تیرها، جهت نمایش ارتعاشات دیگر نانوساختارها همچون نانولوله‌ها بکار می‌روند. ژنگ و همکارانش [۱۱] ارتعاشات موجی نانولوله‌های تک‌جداره را با بکارگیری مدل ارتعاشی تیر تیموشنکو و با استفاده از دینامیک مولکولی مطالعه کردند. این مطلب حایز اهمیت است که بسیاری از مدل‌های پیوسته موجود برای نانولوله‌ها، بر مبنای تحلیلهای خطی می‌باشند. اخیراً تعداد اندکی تحلیل بر روی جنبه‌های غیرخطی ارتعاشات نانولوله‌ها انجام شده است. فو و همکارانش [۱۲] به مطالعه ارتعاشات آزاد غیر خطی نانولوله‌های چندجداره، با در نظر گرفتن هندسه غیر خطی مدل تیر، پرداختند. از آنجایی که برخی خواص نانو لوله‌ها، برای مثال مدول یانگ، را می‌توان از تحلیل فرکانسی آنها به‌دست آورد لذا تحلیل فرکانس ارتعاشات نانو لوله‌ها یکی از مهمترین بررسی‌ها می‌باشد. در کار حاضر اثر سطح برروی ارتعاشات آزاد غیر خطی نانو لوله‌ها در چارچوب مدل اویلر- برنولی و هندسه غیر خطی فون‌کارمن بررسی شده است.

۲- فرمول‌بندی

یک نانولوله با طول L، شعاع داخلی Ri و شعاع خارجی Ro، و ضخامت $t = R_{\circ} - R_i$، بطوریکه در شکل (۱) نشان داده شده است، را در نظر بگیرید.



شکل (۱) الف) هندسه مساله، ب) سطح مقطع نانولوله.

اثر سطح را می‌توان با انرژی سطح یا با تنش سطحی بیان کرد. گیبس [۱۳] و کاماراتا [۱۴] رابطه بین تانسور تنش سطحی، $\sigma^{۳}_{\alpha\beta}$، و چگالی انرژی سطحی را به‌صورت زیر بیان کرد :

$$\sigma^{۳}_{\alpha\beta} = \gamma \delta_{\alpha\beta} + \frac{\partial \gamma}{\partial \varepsilon^{۳}_{\alpha\beta}} \qquad (۱)$$

بطوریکه $\varepsilon^{۳}_{\alpha\beta}$ نمایش دهنده تانسور کرنش سطحی، $\delta_{\alpha\beta}$ دلتای کرونیکر و α و β می‌توانند اعداد ۱ یا ۲ باشند. شکل یک بعدی و خطی معادله بالا را می‌توان به فرم زیر نوشت :

$$\sigma^{۳} = \tau^{\circ} + E^{S}\varepsilon \qquad (۲)$$

در این رابطه τ° نشان دهنده تنش سطحی در طول نانولوله، E^{S} مدول الاستیک سطح و ε کرنش ناشی از نیروی وارده در طول نانولوله هستند. به‌منظور توضیح تنش خارج از صفحه ناشی از تنشهای درون صفحه‌ای بین سطوح انحنا دار، معادله یانگ- لاپلاس چنین عبارتی را بفرم ریاضی ارائه می کند [۹] و [۱۵ و ۱۶]:

$$\Delta\sigma_{ij}\, n_i\, n_i = \tau^{\circ}\kappa \qquad (۳)$$

به‌طوری که $\Delta\sigma_{ij}$ پرش تنش در طول سطوح میان صفحه‌ای، n_i بردار واحد عمود بر سطح، و κ تنسور انحنا است. در تغییر شکلهای کوچک در حالت خمشی در راستای z، پرش تنش تعریف شده در رابطه (۳)، منجر به نیروی گسترده در طول نانولوله می‌شود.

$$p(x) = H\frac{\partial^{2} w}{\partial x^{2}} \qquad (۴)$$

به‌طوری‌که w جابه‌جایی عرضی نانولوله، و H یک پارامتر ثابت است [۱۷] که طبق رابطه زیر تعریف می‌شود.

$$H = 4\tau^{\circ}(R_{\circ} + R_{i}) \qquad (۵)$$

مولفه‌های جابه‌جایی در راستای x و z بترتیب به‌صورت زیر در نظر گرفته می‌شوند.

$$u(x,z,t) = u(x,t) - z\frac{\partial w}{\partial x} \qquad (۶\text{-الف})$$

$$w(x,z,t) = w(x,t) \qquad (۶\text{-ب})$$

با استفاده از اصل همیلتون [۱۸] و همچنین با در نظر گرفتن الاستیسیته سطحی و تنش باقیمانده سطحی، ارتعاشات غیر خطی نانولوله،با فرض ناچیز بودن نیروی اینرسی افقی نسبت به نیروی اینرسی عرضی، به شکل زیر به‌دست می‌آید.

(۷- الف)

$$(EI)^{*}\frac{\partial^{4} w}{\partial x^{4}} + \rho A\frac{\partial^{2} w}{\partial t^{2}} - H\frac{\partial^{2} w}{\partial x^{2}} - C\int_{\circ}^{L}(\frac{\partial w}{\partial x})^{2}dx\frac{\partial^{2} v}{\partial x}$$

$$C = \frac{EA}{2L} + \frac{E_{s}\pi}{L}\times(R_{\circ} + R_{i}) \qquad (۷\text{-ب})$$

$$(EI)^{*} = EI + E_{s}\pi(R_{\circ}^{3} + R_{i}^{3}) \qquad (۷\text{-ج})$$

به‌طوری که E مدول یانگ قسمت عمده (بالک) نانولوله، $I = \pi(R_{\circ}^{4} - R_{i}^{4})/4$ اینرسی سطح مقطع، ρ نشان دهنده چگالی، و $A = \pi(R_{\circ}^{2} - R_{i}^{2})$ مساحت سطح مقطع نانولوله است. روابط (۷) نشان می‌دهد که که الاستیسیته سطحی و تنش باقیمانده سطحی به‌طور مستقیم بر رفتار غیر خطی نانولوله تأثیرگذارند. در حالت غیرخطی تابع جابه‌جایی به‌صورت زیر فرض می‌شود:

$$w(x,t) = aX(x)T(t) \qquad (۸)$$

به‌طوری‌که a نشان دهنده دامنه تغییر شکل، X (x) شکل مود خطی شماره i–ام (i = ۱, ۲, ...) و $T(t)$ تابعی از زمان است. با جایگذاری رابطه (۸) و مشتقات آن در معادله غیرخطی حاکم (۷- الف) ، و سپس با ضرب با ضرب کردن طرفین در شکل مود و انتگرال‌گیری در طول نانولوله، معادله دیفرانسیل زیر به‌دست می‌آید:

(۹- الف)

$$T^{4} + \left(\frac{(EI)^{*}}{\rho A}a_{4} - \frac{2\tau^{\circ}b}{\rho A}a_{2}\right)T - \frac{Cl}{\rho A^{2}}\left(\frac{a}{r}\right)^{2}\alpha_{1}\alpha_{2}T^{3}$$

$$a_{4} = \frac{\int_{\circ}^{L}X^{(iv)}X\,dx}{\int_{\circ}^{L}X^{2}\,dx},\ a_{2} = \frac{\int_{\circ}^{L}X^{4}X\,dx}{\int_{\circ}^{L}X^{2}\,dx} \qquad (۹\text{-ب})$$

$$a_{4} = \int_{\circ}^{L}X'^{2}\,dx,\quad r = \sqrt{I/A}$$

در این رابطه r شعاع ژیراسیون است. سپس طرفین معادله (۹- الف) را در T' ضرب شده و نسبت به متغییر زمان انتگرال گرفته می‌شود. در اینجا شرایط اولیه صفر است. $(t = \circ, T = T' = \circ)$. در نتیجه رابطه زیر به‌دست می‌آید.

$$\left(\frac{dT}{dt}\right)^{2} = \chi_{1}(1 - T^{2}) + \frac{\chi_{2}}{2}(1 - T^{4}) \qquad (۱۰\text{-الف})$$

$$\chi_{1} = \left(\frac{(EI)^{*}}{\rho A}a_{4} - \frac{2\tau^{\circ}b}{\rho A}a_{2}\right)$$

(۱۰- ب)

$$\chi_{2} = -\frac{Cl}{\rho A^{2}}\left(\frac{a}{r}\right)^{2}a_{1}a_{2}$$

به‌منظور حل رابطه (۱۰- الف) با استفاده از تابع بیضوی ژاکوبی، پارامترهای زیر تعریف می‌شود.

$$p^{2} = \chi_{1} + \chi_{2} \qquad (۱۱\text{-الف})$$

$$k^{2} = \frac{\chi_{2}}{2p^{2}} \qquad (۱۱\text{-ب})$$

با جایگذاری پارامترهای بالا، در معادلات (۱۰- الف) معادلات زیر نتیجه می‌شود:

$$\left(\frac{dT}{dt}\right)^{2} = p^{2}(1 - k^{2} - (1 - 2k^{2})T^{2} - k^{2}T^{2}) \qquad (۱۲\text{-الف})$$

$$\left(\frac{dT}{d(dt)}\right)^{2} = (1 - T^{2})(k^{2}T^{2} - k^{2} + 1) \qquad (۱۲\text{-ب})$$

توابع بیضوی ژاکوبی [۱۹] تعریف شده در معادله (۱۱- ب) با مدول k ، را می‌توان با فرض $T = \cos\theta$ به‌صورت زیر به‌دست آورد:

$$pt = \int_{\circ}^{\theta}\frac{d\theta}{\sqrt{(1 - k^{2}\sin^{2}\theta)}} \qquad (۱۳)$$

با استفاده از فرم معکوس معادله (۱۳)، T، به‌صورت تابعی از توابع بیضوی ژاکوبی، به فرم زیر به‌دست می‌آید:

$$T = cn[pt,k] \qquad (۱۴)$$

به ازای مقادیر حقیقی p و $k^۲$ بین ۰ و ۱، مقادیر توابع بیضوی ژاکوبی نیز حقیقی خواهند بود. اگر $\chi_۲ = ۰$ باشد اثرات غیرخطی از بین رفته و خواهیم داشت $k^۲ = ۰$ همچنین توابع بیضوی ژاکوبی به توابع اصلی مثلثاتی $\cos pt$ با دوره تناوب ۲π تبدیل می‌شوند و حرکت ارتعاشی نانولوله هارمونیک است. اما به ازای $k^۲ = ۱$ توابع بیضوی ژاکوبی به توابع اصلی مثلثاتی $\sec h\, pt$ تبدیل می‌شوند و حرکت ارتعاشی نانولوله، غیرنوسانی است که با گذشت زمان به‌صورت مجانبی به حالت مستقیم خود همگرا می‌شود. دوره تناوب تابع $cn[pt,k]$، $۴K$ است و توسط انتگرال کامل بیضوی به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$۴K = ۴\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \frac{d\theta}{\sqrt{(۱-k^۲\sin^۲\theta)}} \qquad (۵)$$

عبارت زیر فرکانس غیرخطی را ارائه می‌کند.

$$\omega_{ni} = \frac{\pi\sqrt{\chi_۱+\chi_۲}}{۲K} \qquad (۱۶)$$

۳- نتایج عددی

در این قسمت به‌منظور نشان دادن اثرات سطحی بر روی رفتار نانولوله با شرایط تکیه‌گاهی ساده، چند مثال عددی ارائه شده است. میلر و شنوی [۲۰] و شنوی [۲۱] با به‌کارگیری روش اتمی جاسازی شده ثوابت الاستیک سطح را تعیین کردند. نتایج آنها تأیید کرد که ثوابت الاستیک سطح به نوع ماده و جهت کریستالی سطح بستگی دارد. برای مثال برای آلومینیوم با مدول یانگ $E = ۷۰\ GPa$، ضریب پواسون $\nu = ۰/۳$، و چگالی $\rho = ۲۷۰۰$ و جهت کریستالی [۱۰۰]، چنین خواص سطحی را خواهیم داشت:

$$\tau^\circ = ۰/۵۶۸۹\ N/m \text{ و } E_S = -۷/۹۲۵۳\,N/m$$

در حالی‌که این مقادیر برای جهت کریستالی [۱۱۱] برابر $\tau^\circ = ۰/۹۱۰۸\ N/m$ و $E_S = -۵/۱۸۸۲\,N/m$ خواهند بود.

در مثالها، از جهت [۱۱۱] استفاده شده است. حال با در نظر گرفتن شرایط مرزی ساده به‌صورت زیر:

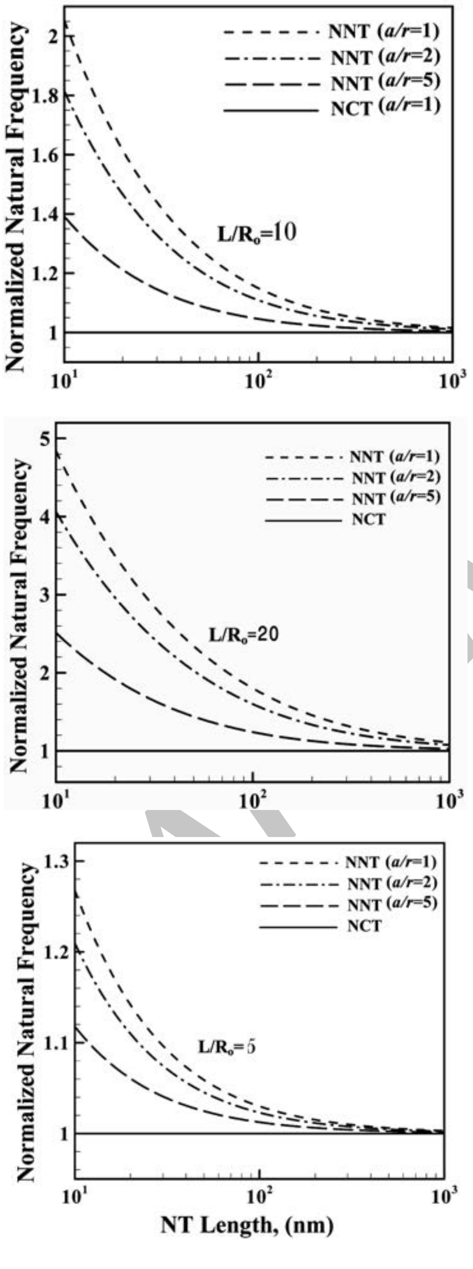
$$w(x) = \frac{d^۲w}{dx^۲} = ۰ \ at\ \ x = ۰, L \qquad (۱۷)$$

شکل مودها را به‌صورت زیر است:

$$X_i(x) = a_i \sin(\beta_i x) \qquad (\text{الف} -۱۸)$$

$$\beta_i = \frac{i\pi}{L},\ (i = ۱,۲,...) \qquad (\text{ب} -۱۸)$$

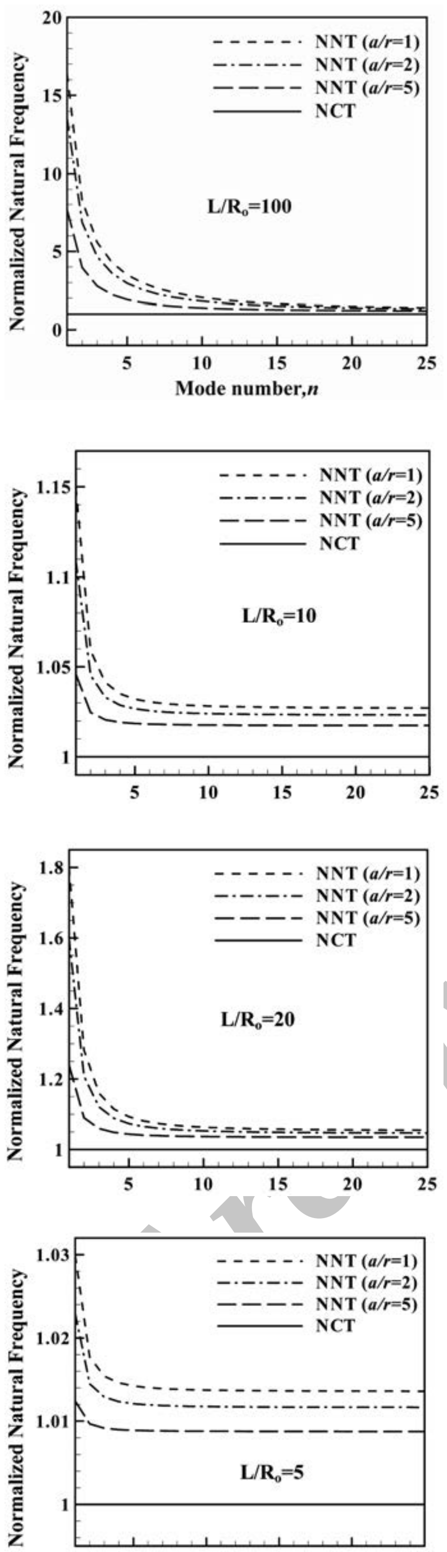
که در آنها a_i نشان‌دهنده مود i ام است.



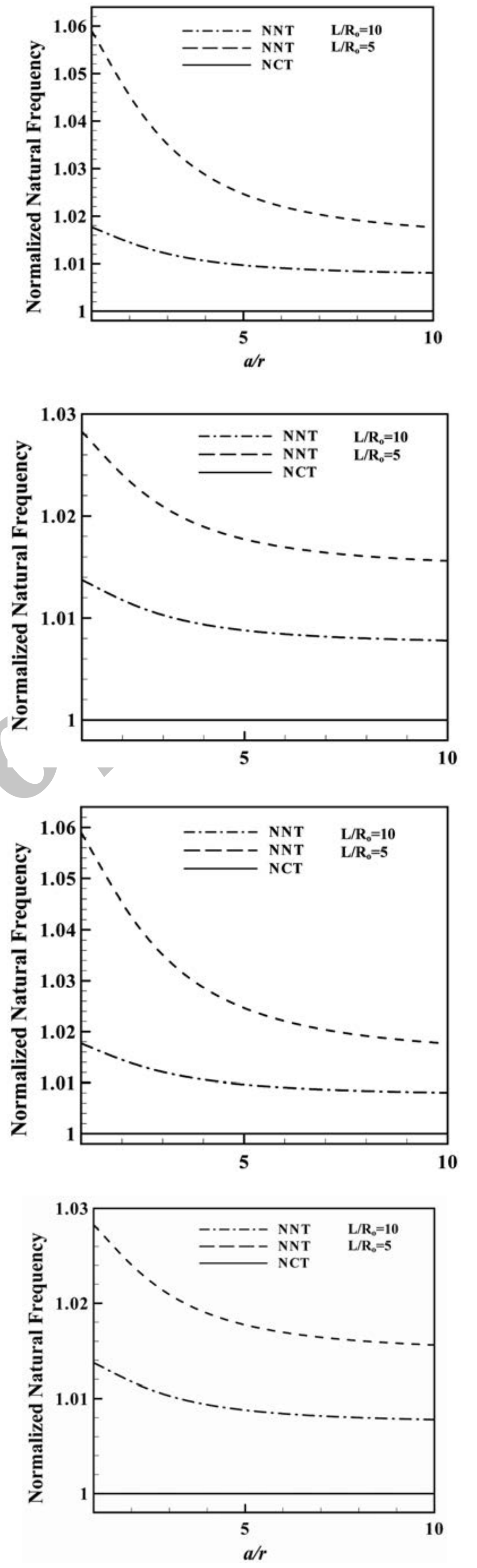
شکل (۲) اثرات سطحی بر فرکانس بی‌بعد طبیعی غیرخطی نانولوله.

شکل (۲) نمایش دهنده تغییرات فرکانس طبیعی غیرخطی نانولوله به‌ازای مقادیر مختلف $\frac{L}{R_\circ} = ۵,۱۰,۲۰,۱۰۰$ بر حسب طول $۱۰nm \le L \le ۱۰۰۰nm$ نانولوله است. حل‌ها بر اساس لوله کلاسیک غیر خطی را با NCT و نتایج با اثرات سطحی را با NNT نمایش می‌دهیم. همچنین نتایج فرکانسها را با حالات کلاسیک خود بی‌بعد کرده ایم. در تمامی نتایج فرض شده که $t = \frac{R_\circ}{۵}$ است. مشاهده می‌شود که با افزایش طول اثرات سطح کاهش می‌یابد. همچنین در دامنه های کمتر اثرات سطح بیشتر شده به‌طوری‌که بیشترین تغییرات در فرکانس طبیعی در $a/r = ۱$ مشاهده می‌شود. این اثرات ناشی از این حقیقت‌اند که اثرات مقیاس کوچک در ابعاد بزرگتر کمتر غالب شده و لذا تمامی منحنیها در ابعاد بزرگتر به حالت کلاسیک خود همگرا می‌شوند. نتایج حاصل برای چهار مقدار متفاوت درنظرگرفته شده برای $\frac{L}{R_\circ}$ نیز این حقیقت را تأیید می کنند. مشاهده می‌شود که با افزایش ضخامت نانولوله اثرات سطحی کاهش یافته و به‌طوری که بیشترین مقدار فرکانس طبیعی برای شکل اول دیده می‌شوند زیرا کمترین ابعاد را دارد. لازم به ذکر است که تمامی فرکانسهای طبیعی نسبت به حالت کلاسیک خود بی‌بعد شده اند.

در شکل (۳) اثرات سطح بر فرکانسهای بی بعد غیرخطی نانو لوله با طول $L = ۱۰۰\text{nm}$ و به ازای مقادیر مختلف $\frac{L}{R_\circ}$ بررسی شده است. نتیجه جالب دیگر، همانطور که در مقالات پیشین دیده شده است، کاهش اثر سطح در فرکانسهای بالاتر می‌باشد. ملاحظه می‌شود که با افزایش شماره مود ارتعاشی فرکانس نرمال شده به حالت کلاسیک خود همگرا می‌شود. در این نیز حالت مشاهده می‌شود با افزایش ضخامت نانولوله اثرات سطحی کاهش یافته و به‌طوری که بیشترین مقدار فرکانس طبیعی برای شکل اول دیده می‌شوند و نتیجه قبلی را تأیید می کند.



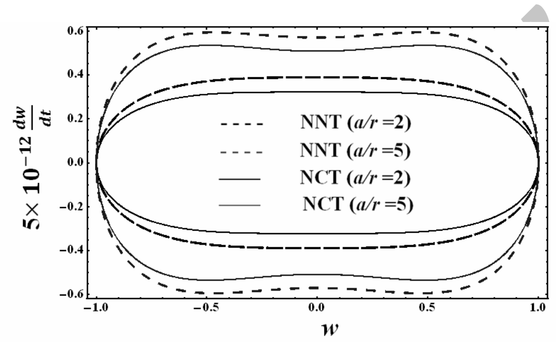
شکل (۳) اثرات عدد مود بر روی فرکانس بی‌بعد طبیعی غیرخطی نانو لوله با اثرات سطحی.



ادامه شکل (۴) اثر نسبت a/r بر روی فرکانس بی‌بعد طبیعی غیرخطی نانو لوله با اثرات سطحی.

در شکل (۴)، مشاهده می‌شود که اثرات سطح در مقادیر کمتر a/r مشهودترند و نشان از آن است که حساسیت بیشتری به اثرات سطح در دامنه های کمتر وجود دارد. دوباره مشاهده می‌شود، مانند شکل قبل، که که با افزایش مود ارتعاشی اثرات سطحی کاهش می‌یابد. همچنین ملاحظه می‌شود که کاهش اثرات سطحی در فرکانسهای کمتر بسیار چشمگیر تر از فرکانسهای بالاتر است.

بررسی اثرات غیر خطی برروی منحنی فاز، که نمایش‌دهنده جابه‌جایی برحسب سرعت است، آسانتر است. بنابراین در نمودار شکل (۵)، به بررسی اثرات سطح برروی منحنی فاز در مرکز نانو لوله $x = ۰٫۵L$ با طول $L = ۵۰nm$ و دو مقدار برای a/r پرداخته شده است. مشاهده می‌شود که برای مقادیر کوچکتر a/r منحنی بسته، متقارن و دارای یک مرکز(بیضی شکل) است. اما برای مقادیر بزرگ برای a/r منحنی بسته و با دو مرکز (دوکی شکل) ایجاد می‌شود. اثرات سطحی نیز در این نمودار به‌خوبی نشان دهنده تأثیر مهم این پارامتر در نانولوله ها دارد.



شکل (۵) اثرات سطحی بر روی نمودار فاز.

۴- نتیجه‌گیری

در این بررسی ما به مطالعه اثرات سطح برروی ارتعاشات غیرخطی نانولوله برمبنای تیوری تیر اویلر- برنولی و هندسه فون کارمن پراختیم. چند پارامتر از جمله طول، a/r، و اثرات سطح برروی منحنی فاز بررسی شده‌اند. در ابتدا تغییرات فرکانس طبیعی غیر خطی نانو لوله به ازای مقادیر مختلف نسبت طول به شعاع بر حسب طول نانولوله بررسی شد. مشاهده می‌شود که با افزایش طول اثرات سطح کاهش می‌یابد. همچنین در دامنه‌های

کمتر اثرات سطح بیشتر شده بطوریکه بیشترین تغییرات در فرکانس طبیعی در $a/r = ۱$ مشاهده می‌شود. این اثرات ناشی از این حقیقت می‌باشند که اثرات مقیاس کوچک در ابعاد بزرگتر کمتر غالب شده و لذا تمامی منحنیها در ابعاد بزرگتر به حالت کلاسیک خود همگرا می‌شوند. همچنین مشاهده می‌شود که با افزایش ضخامت نانولوله اثرات سطحی کاهش یافته است. در ادامه اثرات سطح برروی فرکانسهای بی بعد غیر خطی نانو لوله به ازای مقادیر مختلف $\frac{L}{R_\circ}$ بررسی شد. کاهش اثر سطح در فرکانسهای بالاتر ملاحظه می‌شود. با افزایش شماره مود ارتعاشی فرکانس نرمال شده به حالت کلاسیک خود همگرا می‌شود. با افزایش ضخامت نانولوله اثرات سطحی کاهش یافته و بطوریکه بیشترین مقدار فرکانس طبیعی برای شکل اول دیده می‌شوند. در ادامه، مشاهده می‌شود که اثرات سطح در مقادیر کمتر a/r مشهودترند و نشان از ان است که حساسیت بیشتری به اثرات سطح در دامنه‌های کمتر وجود دارد. ملاحظه می‌شود که کاهش اثرات سطحی در فرکانسهای کمتر بسیار چشمگیر تر از فرکانسهای بالاتر است. مشاهده می‌شود که برای مقادیر کوچکتر a/r منحنی فاز منحنی بسته و متقارن و با یک مرکز، اما برای مقادیر بزرگ برای a/r منحنی بسته و با دو مرکز ایجاد می‌شوند.

۵- فهرست علائم

طول نانولوله	L
شعاع داخلی نانولوله	R_i
شعاع خارجی نانولوله	R_o
ضخامت نانولوله	t
تانسور تنش سطحی	$\sigma^{۳}_{\alpha\beta}$
تانسور کرنش سطحی	$\varepsilon^{۳}_{\alpha\beta}$
دلتای کرونیکر	$\delta_{\alpha\beta}$
نشان دهنده تنش سطحی	τ°
مدول الاستیک سطح	$E^{۳}$
کرنش	ε
پرش تنش در طول سطوح میان صفحه‌ای	$\Delta\sigma_{ij}$
بردار واحد عمود بر سطح	n_i
تنسور انحنا	κ
جابه‌جایی عرضی نانولوله	w
مدول یانگ قسمت بالک	E
اینرسی سطح مقطع	I
چگالی	ρ
مساحت سطح مقطع نانولوله	A
شکل مود خطی	$X(x)$
شعاع ژیراسیون	r

مراجع

[1] Fennimore A.M., Yuzvinsky T.D., Han W.Q., Fuhrer M.S., Cumings J., Zettl A., Rotational actuators based on carbon nanotubes, *Nature*, 424, 2003, pp. 408-410.

[2] Williams P.A., Papadakis S.J., Patel A.M., Falvo M.R., Washburn S., Superfine R., Fabrication of nanometer-scale mechanical devices incorporating individual multiwalled carbon nanotubes as torsional springs, *Applied Physics Letters*, 82, 2003, pp. 805-807.

[3] Papadakis S.J., Hall A.R., Williams P.A., Vicci L., Falvo M.R., Superfine R., Washburn S., Resonant oscillators with carbon-nanotube torsion springs, *Physics Review Letters*, 93, 2004, pp. 1461011, 1461014.

[4] Williams P.A., Papadakis S.J., Patel A.M., Falvo M.R., Washburn S., Superfine R, Torsional response and stiffening of individual multiwalled carbon nanotubes, *Physics Review Letters*, 89, 2002, pp. 2555021-2555025.

[5] Lagowski J., Gatos H.C., Sproles Jr E.S., Surface stress and the normal mode of vibration of thin crystals: GaAs, *Applied Physics Letters*, 26, 1975, pp. 493-495.

[6] Sader J. E., Surface stress induced deflections of cantilever plates with applications to the atomic force microscope: rectangular plates, *Journal of Applied Physics*, 89, 2001, pp. 2911-2921.

[7] Lee J.H., Kim T. S., Yoon K. H., Effect of mass and stress on resonant frequency shift of functionalized Pb(Zr0.52Ti0.48)O3 thin film microcantilever for the detection of C-reactiveprotein, *Applied Physic Letters*, 84, 2004, pp. 3187-3189.

[8] He J., Lilley C.M., Surface Effect on the Elastic Behavior of Static Bending Nanowires, *Nano Letters*, 2008, pp. 1798–1802.

[9] Wang G.F, Feng X.Q., Effects of surface elasticity and residual surface tension on the natural frequency of microbeams, *Applied Physic Letters*, 90, 2007, pp. 2319041-2319044.

[10] Abbasion S., Rafsanjani A., Avazmohammadi R., Farshidianfar A., Free vibration of microscaled Timoshenko beams, *Applied Physic Letters*, 95, 2009, pp. 1431221-1431224.

[11] Zhang Y.Y., Wang C.M., Tan V.B.C., Assessment of Timoshenko beam models for vibrational behaviour of single-walled carbon nanotubes using molecular dynamics, *Advances in Applied Mathematics and Mechanics*, 1, 2009, pp. 89-106.

[12] Fu Y. M., Hong J. W., Wang X. Q., Analysis of nonlinear vibration for embedded carbon nanotubes, *Journal of Sound and Vibration*, 96, 2006, pp. 746-756.

[13] Gibbs J. W., The Scientific Papers of J. Willard Gibbs, Vol. 1: Thermodynamics: Longmans and Green, New York, 1906.

[14] Cammarata R.C., Surface and interface stresses effects in thin films, *Prog. Surf. Sci*, 46, 1994, pp. 1–38 .

[15] Gurtin ME, Murdoch AI, A continuum theory of elastic material surfaces, *Arch Rat Mech Anal*, 57, 1975, pp. 291-323.

[16] Gurtin ME, Struthers A., Multiphase thermomechanics with interfacial structure, *Arch Rat Mech Anal*,112, 1990, PP. 97-160.

[17] Wang G.F., Feng X.Q., Effects of surface elasticity and residual surface tension on the natural frequency of microbeams, *Applied Physics Letters*, 90, 2007, pp. 231904.

[18] Ke L.L., Yang J., Kitipornchai S., An analytical study on the nonlinear vibration of functionally graded beams, *Meccanica*, 45, 2009, pp. 743-752.

[19] Byrd P.F., Friedman M.D., Handbook of Elliptic Integrals for Engineers and Scientists, Springer, Berlin, 1991.

[20] Miller R.E., Shenoy V.B., Size-dependent elastic properties of nanosized structural elements, *Nanotechnology*, 11, 2000, pp. 139-147.

[21] Shenoy V.B., Atomistic calculations of elastic properties of metallic fcc crystal surfaces, *Phys. Rev.* B 71, 2005, pp. 0941041-09410411.