

برهمکنش سیال - سازه در تحلیل ارتعاشات آزاد مخازن استوانه‌ای عمودی با کف انعطاف پذیر از جنس مواد متغیر تابعی

علی اکبر شفیعی^۱، مجتبی محزون^{۱*}، احسان عسکری^۳

* نویسنده مسئول: mahzoon@shirazu.ac.ir

واژه‌های کلیدی

ارتعاشات آزاد، برهمکنش سیال-سازه، مواد متغیر تابعی، روش ریلی-ریتز، بسط توابع ویژه.

چکیده

در این مقاله یک روش نیمه تحلیلی برای بررسی مسئله ارتعاش آزاد یک مخزن با جداره استوانه‌ای صلب و کف انعطاف پذیر از جنس مواد متغیر تابعی حاوی سیال ارائه شده است. خصوصیات مواد مطابق یک تابع توانی، سیگموئید یا نمایی بر حسب کسر حجمی مواد تشکیل دهنده، در راستای ضخامت ورق توزیع شده است. سیال به صورت غیرلزج و تراکم ناپذیر فرض شده و پتانسیل سرعت سیال به صورت بسط توابع ویژه فرمولبندی شده است. در این مطالعه برهمکنش بین سیال و سازه لحاظ شده و مشخصات دینامیکی سیستم در تماس با سیال با استفاده از روش ریلی-ریتز استخراج شده است. به منظور بررسی اعتبار و دقت روش تئوری نتایج به دست آمده، با نتایج آزمایشگاهی و عددی موجود در مقالات قبلی انجام شده در این زمینه مقایسه شده است. همچنین به منظور اعتبارسنجی روش حاضر از یک تحلیل المان محدود نیز استفاده شده است. در نهایت اثر متغیرهای متفاوتی از جمله تعداد قطرها و دوایر گرهی (شماره مودها)، کسر حجمی مواد متغیر تابعی و ارتفاع سیال روی رفتار دینامیکی سیستم در تماس با سیال به دست آمده است.

۱- کارشناسی ارشد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه شیراز، شیراز، ایران.

۲- دانشیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه شیراز، شیراز، ایران.

۳- دانشجوی دکتری، دانشکده مهندسی پزشکی، دانشگاه مک کووری، سیدنی، استرالیا.

۱- مقدمه

در بسیاری از مسائل مهندسی، مسئله برهم‌کنش سیال-سازه^۱ به چشم می‌خورد. به عنوان مثال می‌توان به طراحی و ساخت سدهای آبی، مخازن نگهداری آب و نفت، ساخت هاورکرافت^۲، راکتورهای هسته‌ای و لوله‌های انتقال دهنده سیال و در نهایت طیف گسترده‌ای از مسائل بیومکانیک^۳ اشاره کرد. در برخی از این مسائل مانند حمل سیالات در مخازن، سازه دارای حرکت جسم صلب و حرکت ارتعاشی است و در نهایت سیال هم که قسمتی از حرکت خود را به دلیل مجاورت با سازه داراست دارای همین نوع حرکت پیچیده است که این امر به نوبه خود اهمیت و پیچیدگی برهم‌کنش سیال-سازه را مشخص می‌سازد. بررسی و تحلیل این گونه مسائل فوق‌العاده مهم و سرنوشت‌ساز است زیرا در بسیاری از موارد فوق با حفظ جان انسانها در ارتباط است.

روش‌های حل برای ارتعاشات آزاد سازه‌های در اندرکنش با سیال به سه گروه تقسیم می‌شوند: روش‌های تحلیلی، نیمه تحلیلی و عددی. بررسی حاضر بر ارائه کردن روشی نیمه تحلیلی برای مسائل اندرکنش سیال-سازه متمرکز شده است. ارتعاشات ورق مدور در تماس با سیال، سالهای زیادی مورد مطالعه قرار گرفته است. ارتعاش آزاد یک ورق مدور قرار گرفته روی سطح آزاد سیال توسط کیم و کواک^[۱] برای مودهای متقارن و در حالت کلی توسط کواک^[۲] مورد بررسی قرار گرفت. در این مطالعه سیال در تماس با ورق به صورت نیمه بی‌نهایت در نظر گرفته شده است.

چیا^[۳] تحقیقی آزمایشگاهی و تئوری در مورد مسئله ارتعاشات هیدروالاستیک مخازن استوانه‌ای حاوی سیال با جداره صلب و ورق کف الاستیک انجام داد. او تأثیر نیروهای درون صفحه‌ای در ورق که به خاطر فشار استاتیکی سیال ایجاد می‌شود را در نظر گرفت و برای ۹ نوع ورق با مواد و ضخامت‌های مختلف مسئله مذکور را حل و بررسی نمود.

باور^[۴] یک ورق مدور که کاملاً سطح آزاد سیال در یک مخزن صلب را پوشش می‌دهد، مطالعه کرد. مودهای مربوط به

ارتعاشات سازه، در یک مخزن با جداره صلب و کف مدور الاستیک و پر شده از سیال را آمایلی^[۵] بررسی نمود. اثر عمق سیال قرار گرفته روی یک ورق مدور به صورت تئوری و آزمایشگاهی توسط کواک و هان^[۶] بررسی شد. آمایلی و کواک^[۷] تأثیر امواج سطح آزاد بر روی ارتعاشات آزاد ورق‌های دایره‌ای قرار گرفته بر سطح آزاد سیال را مورد مطالعه قرار دادند. آنها با استفاده از تکنیک اغتشاش^۴ و روش تبدیل هنکل^۵ مسئله مورد نظر را بررسی کردند. چنگ و ژو^[۸] ارتعاشات یک ورق مدور الاستیک قرار گرفته در کف یک مخزن استوانه‌ای کاملاً صلب را به روش گالرکین^۶ بررسی کردند. لیانگ و همکارانش^[۹] بر پایه فرمول جرم افزوده تجربی و روش رایلی-ریتز^۷، روشی ساده برای تعیین فرکانس‌ها و مودهای طبیعی ورق‌های یک سرگیردار غوطه‌ور شده در سیال ارائه کردند. روش تحلیلی دیگر برای ارتعاشات آزاد خطی ورق مدور فرورفته داخل سیال توسط جونگ و کیم^[۱۰] بررسی شد. جونگ^[۱۱] ارتعاشات دو ورق رینگ شکل در تماس با سیال را به کمک روش رایلی-ریتز و تبدیل هنکل محدود بررسی کرد. سیال تراکم‌پذیر و در میان دو ورق و دیواره‌ای در شعاع خارجی ورقها محدود شده است. اخیراً عسکری و دانشمند^[۱۲] ارتعاشات آزاد ورق الاستیک مربوط به کف یک مخزن استوانه‌ای با جداره صلب و همراه با یک جسم داخلی درون مخزن را تحلیل و بررسی کردند. در این تحقیق جسم داخلی هیچ تماسی با مخزن نداشته و داخل آن تا قسمتی غوطه‌ور شده است. همچنین ارگین و همکارانش^[۱۳] پاسخ دینامیکی ورق نسبتاً ضخیم در تماس با سیال و قرار گرفته روی بستر پسترناک^۸ اورتوتروپیک^۹ را مورد مطالعه قرار دادند.

از طرفی در سالهای اخیر با توسعه موتورهای پرقدرت صنایع هوافضا، توربین‌ها و راکتورها که مورد کاربردی این مقاله است، نیاز به موادی با مقاومت حرارتی بالا، مقاومت از لحاظ مکانیکی و همچنین مقاوم در برابر خوردگی احساس شده است. در سالهای قبل از مواد سرامیکی خالص برای پوشش و

4- Perturbation

5- Henkel

6- Galerkin

7- Rayleigh-Ritz

8- Pasternak

9- Orthotropic

1- Fluid-Structure Interaction

2- Hovercraft

3- Biomechanic

نیکخواه بهرامی و همکارانش [۱۹] ارائه گردید. دونگ [۲۰] ارتعاش آزاد سه‌بعدی یک ورق مدور FGM با شرایط مرزی متفاوت و استفاده از روش چیشف-ریتز^۲ بررسی نمود. چن و همکارانش [۲۱]، تحلیل سه‌بعدی ارتعاشات پوسته استوانه‌ای FGM پر شده از سیال را مورد مطالعه قرار دادند. در این بررسی از یک مدل لایه‌ای تقریبی استفاده شده که برای تغییرات مواد در راستای شعاعی مناسب است.

در این مقاله به بررسی ارتعاشات مخزن با جداره استوانه‌ای صلب و کف الاستیک از جنس مواد متغیر تابعی حاوی سیال پرداخته شده است. فرض شده است که سیال غیرلزج و تراکم‌ناپذیر و شرایط مرزی ورق کف مخزن به صورت گیردار باشد. پتانسیل سرعت برای سیال به صورت جملات بسط توابع ویژه نوشته شده است. از روش ریلی-ریتز برای محاسبه فرکانس و مودهای طبیعی مخزن حاوی سیال استفاده شده است. همچنین در این مطالعه روی فرکانس‌های مربوط به ارتعاش سازه بحث شده است. زیرا به طور کلی در مخازن حاوی سیال به دو مسئله توجه می‌شود، یکی فرکانس‌های مربوط به ارتعاش سازه و دیگری مربوط به ارتعاش سطح سیال. در این بررسی با توجه به اینکه اثر امواج سطح آزاد سیال در مقابل ارتعاش سازه برای سازه‌هایی که بی‌نهایت انعطاف‌پذیر نیستند بسیار کم است، از اثر امواج سطح آزاد سیال صرف نظر می‌شود [۲۲]. مشخصه جدید و برجسته این مقاله نسبت به کارهای قبلی انجام شده استفاده از یک روش نیمه‌تحلیلی با در نظر گرفتن اثر مواد متغیر تابعی مختلف روی ارتعاشات یک ورق مدور در تماس با سیال است. قابل توجه است که در این مقاله مزایای استفاده از این مواد جدید نسبت به مواد همگن قبلی بررسی می‌شود و همچنین تأثیر نحوه آرایش مواد تشکیل دهنده ورق بر ارتعاش سازه در تماس با سیال، مورد مطالعه قرار گیرد. جنس کف مخزن در این مطالعه، FGM به ازای سه تابع مختلف (توانی، سیگموئید یا نمایی) در نظر گرفته شده است. درستی روش ارائه شده، با مقایسه نتایج حاصل از این مطالعه با نتایج تحلیل المان محدود انجام شده است. همچنین نتایج به دست آمده با نتایج عددی و آزمایشگاهی موجود در سایر مقالات تأیید شده است. تأثیر

روکش قطعات با درجه کارکرد بالا و یا از مواد کامپوزیت لایه‌ای استفاده می‌شد که هر یک مشکلاتی از قبیل ایجاد حفره و ترک و یا پدیده لایه‌لایه شدن در کامپوزیتها را به همراه داشت. بنابراین دانشمندان FGM^۱ (مواد معتبر تابعی) را پیشنهاد کردند.

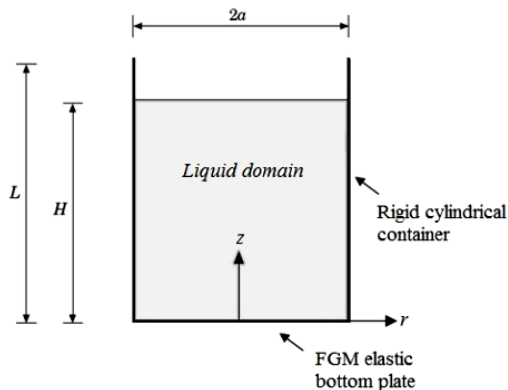
مفهوم FGM اولین بار در سال ۱۹۸۴ در طول یک پروژه هوا فضا در ژاپن پیشنهاد شد، [۱۴، ۱۵]. FGM، مواد کامپوزیتی با ریزساختار ناهمگن هستند، که خواص مکانیکی آنها به طور ملایم و پیوسته از یک سطح به سطح دیگر جسم تغییر می‌کند. نوع رایج آن ترکیب پیوسته‌ای از سرامیک و فلز است. این مواد از اختلاط پودر فلز و سرامیک به دست می‌آیند و توسط روشهای مختلفی از جمله متالورژی پودر تهیه می‌شوند [۱۶]. تغییر فلز و سرامیک از یک سطح به سطح دیگر کاملاً پیوسته است. به گونه‌ای که یک سطح از جنس سرامیک خالص و سطح دیگر فلز خالص است. بین دو سطح ترکیب پیوسته‌ای از هر دو ماده وجود دارد. خواص مکانیکی نیز با توجه به نوع ترکیب، تغییرات پیوسته‌ای در جهت ضخامت دارد. این مواد با توجه به پیوستگی ترکیب مواد تشکیل دهنده، خواص مکانیکی مؤثرتری نسبت به مواد کامپوزیت لایه‌ای دارند. با توجه به موارد ذکر شده، این مواد نوید کاربردهای فراوان در شرایط سخت و پیچیده را می‌دهند. به طوری که این مواد، در سالهای اخیر مورد توجه بیشتری از طرف مجامع مهندسی قرار گرفته‌اند.

در زمینه مواد متغیر تابعی تحقیقات زیادی انجام شده است ولی بیشتر این مطالعات به بحث جابه‌جایی و تنشهای حرارتی محدود شده است. از حدود یک دهه گذشته محققان بحث ارتعاش ورقهای ساخته شده از مواد متغیر تابعی را مورد مطالعه قرار داده‌اند. ردی [۱۷] یک رابطه تحلیلی و همچنین یک مدل اجزای محدود برای ورقهای مستطیلی از جنس مواد متغیر تابعی با در نظر گرفتن تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سه ارائه نمود. ارتعاش سه‌بعدی ورقهای مدور FGM توسط نای و ژونگ [۱۸] به صورت تحلیلی بررسی شد. یک روش نیمه‌تحلیلی برای ارتعاشات آزاد متقارن و اجباری یک ورق مدور FGM توسط

کسر حجمی مواد متغیر تابعی (پارامتر ماده)، ارتفاع سیال و تعداد قطرها و دوائر گره‌ای (شماره مودها) بر روی مقدار فرکانس‌های طبیعی سیستم و همچنین شکل مودها، از جمله نتایجی است که در این مطالعه بررسی شده است.

۲- مدل ریاضی

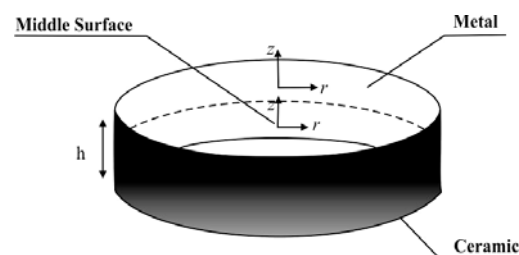
مطابق شکل (۱) مخزن از یک پوسته استوانه‌ای صلب به شعاع a و ارتفاع L و کف الاستیک به ضخامت h تشکیل شده و کف مخزن از مواد متغیر تابعی با مدول الاستیسیته $E(z)$ ، نسبت پواسون ν و چگالی جرمی $\rho(z)$ ساخته شده است. مخزن تا ارتفاع H از سیالی غیرلزج و تراکم‌ناپذیر با چگالی جرمی ρ_L پر شده است. مختصات شعاعی، محیطی و محوری به وسیله r ، θ و z بیان شده است.



شکل (۱) هندسه مسئله.

۲-۱- مواد متغیر تابعی (FGM)

همانطور که پیشتر اشاره شد FGM کامپوزیتی غیرهمگن است و با توجه به شکل (۲) خواص مکانیکی آنها به آرامی و پیوسته از یک سطح به سطح دیگر تغییر می‌کند و همین تغییر پیوسته تابع تغییر خواص مواد متغیر تابعی که در این مقاله استفاده شده است به سه دسته اصلی تقسیم و که در ادامه معرفی می‌شود.



شکل (۲) هندسه و دستگاه مختصات ورق FGM مربوط به کف مخزن.

برای ورق کف مخزن محور مختصات z از سطح میانی و محور \bar{z} از سطح بالایی ورق آغاز شده است. مدول الاستیسیته و چگالی جرمی ورق به‌طور پیوسته در راستای ضخامت ورق (محور z) تغییر می‌کند. ولی از آنجایی که اثر ضریب پواسون بر تغییر شکل، بسیار کمتر از اثر مدول الاستیسیته است و همچنین در مواد مختلف بازه تغییراتی بسیار کمی دارد بنابراین فرض شده که ضریب پواسون در کل ورق یکسان باشد [۲۳]. انواع مدل‌های مورد استفاده در توابع مواد FGM عبارت است از:

۱-P-FGM : در این نوع، خواص ماده از یک تابع توانی پیروی می‌کند. روابط مربوط به این حالت به‌صورت زیر است [۲۴].

$$G(z) = \left(\frac{h/2 + z}{h} \right)^p \quad (1)$$

که p پارامتر ماده، h ضخامت ورق و یا پوسته و تابع $G(z)$ نیز کسر حجمی محلی است. بدین ترتیب خصوصیات این مواد به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned} E(z) &= G(z)E_m + [1 - G(z)]E_c \\ \rho(z) &= G(z)\rho_m + [1 - G(z)]\rho_c \end{aligned} \quad (2)$$

۲-S-FGM : در این نوع، از ترکیب دو تابع توانی به‌صورت زیر استفاده می‌شود [۲۴].

$$\begin{cases} E(z) = G_1(z)E_m + [1 - G_1(z)]E_c \\ \rho(z) = G_1(z)\rho_m + [1 - G_1(z)]\rho_c \end{cases} \text{ for } 0 \leq z \leq h/2$$

$$\begin{cases} E(z) = G_2(z)E_m + [1 - G_2(z)]E_c \\ \rho(z) = G_2(z)\rho_m + [1 - G_2(z)]\rho_c \end{cases} \text{ for } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (3)$$

که

$$G_1(z) = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{h/2 - z}{h/2} \right)^p \text{ for } 0 \leq z \leq h/2$$

$$G_2(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{h/2 + z}{h/2} \right)^p \text{ for } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (4)$$

۳-E-FGM : در این نوع، از یک تابع نمایی برای توزیع مواد در راستای ضخامت استفاده می‌شود [۲۴].

- 1- Power-law FGM
- 2- Sigmoid FGM
- 3- Exponential FGM

$$W(r, \theta) = \cos(n\theta) \sum_{i=0}^{\infty} q_i \left[J_n \left(\frac{\lambda_{ni} r}{a} \right) + A_{ni} I_n \left(\frac{\lambda_{ni} r}{a} \right) \right] \quad (6)$$

که n و i به ترتیب شماره قطرها و دایر گره‌ای و q_i پارامترهای بسط ریتز می‌باشد. J_n و I_n توابع بسل و شبه بسل مرتبه n می‌باشند. توابع مجاز انتخابی از یکدیگر مستقل خطی بوده و یک مجموعه کامل را تشکیل می‌دهند. λ_{ni} یک پارامتر فرکانسی مرتبط با فرکانس طبیعی ورق مدور گیردار در خلأ بوده و از رابطه زیر حاصل می‌شود [۲۵].

$$J_n(\lambda_{ni}) I_n'(\lambda_{ni}) - J_n'(\lambda_{ni}) I_n(\lambda_{ni}) = 0 \quad (7)$$

که J_n' و I_n' مشتق توابع J_n و I_n ، نسبت به متغیر r هستند. ثابت شکل مودها برای ورق مدور گیردار به صورت زیر است:

$$A_{ni} = -\frac{I_n(\lambda_{ni})}{J_n(\lambda_{ni})} \quad (8)$$

همچنین رابطه λ_{ni} با فرکانس طبیعی ورق مدور گیردار در خلأ مطابق زیر است:

$$\omega_{ni} = \lambda_{ni}^2 \sqrt{\frac{D}{Aa^4}} \quad (9)$$

که A و D به صورت زیر تعریف می‌شود. D همان سختی خمشی ورق است:

$$A = \int_{-h/2}^{h/2} \rho(z) dz \quad (10)$$

$$D = \int_{-h/2}^{h/2} E(z) z^2 dz$$

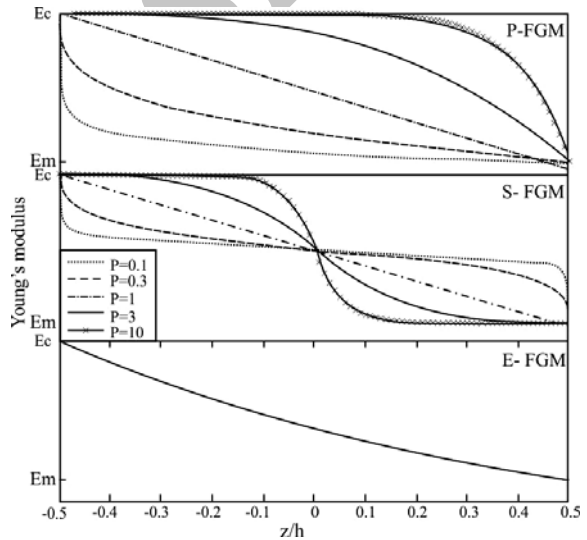
مقادیر A و D برای مواد متغیر تابعی مختلف به صورت زیر تعیین می‌شوند:

$P - FGM$:

$$\left\{ \begin{aligned} A &= \rho_c h + (\rho_m - \rho_c) \left(\frac{\nu^{-(1+p)} h}{(p+1)} \right) \times \\ & \quad (1 + \csc(\pi(p+1)) \sin(\pi p)) \\ D &= (E_m - E_c) \left(\frac{\nu^{-(2+p)} h^3}{(1-\nu^2)(p+1)(p+2)(p+3)} \right) \times \\ & \quad (1 + \csc(\pi(p+1)) \sin(\pi p)) + \frac{E_c h^3}{12(1-\nu^2)} \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} E(z) &= Q_1 e^{B_1(z+h/2)} \quad Q_1 = E_c \text{ and } B_1 = \frac{1}{h} \ln\left(\frac{E_m}{E_c}\right) \\ \rho(z) &= Q_2 e^{B_2(z+h/2)} \quad Q_2 = \rho_c \text{ and } B_2 = \frac{1}{h} \ln\left(\frac{\rho_m}{\rho_c}\right) \end{aligned} \right. \quad (5)$$

که E_m و ρ_m مدول الاستیسیته و چگالی جرمی فلز در سطح رویی ورق ($z = h/2$ یا $\bar{z} = 0$) است. E_c و ρ_c مدول الاستیسیته و چگالی جرمی سرامیک در سطح زیرین ورق ($z = -h/2$) است. شکل (۳) تغییرات مدول الاستیسیته در راستای ضخامت ورق برای سه نوع ماده تابعی متفاوت را نشان می‌دهد. در مطابق آن خصوصیات ماده در P-FGM در نزدیکی سطح زیرین ورق به ازای $p < 1$ و در نزدیکی سطح رویی ورق به ازای $p < 1$ با نرخ بیشتری نسبت به سایر نقاط ورق دچار تغییر می‌شود.



شکل (۳) تغییرات مدول الاستیسیته در راستای ضخامت ورق FGM.

۲-۲- ورق کف مخزن

در این مقاله به منظور استخراج معادله دینامیکی سیستم و به دنبال آن پیدا کردن فرکانس‌های طبیعی و شکل مودهای مسئله از روش ریلی- ریتز استفاده می‌شود. به این منظور تغییرات زمانی در مسئله به صورت هارمونیک شده و همچنین از توابع ویژه مربوط به یک ورق مدور گیردار در خلأ به عنوان توابع مجاز^۱ برای جابه‌جایی عرضی ورق (W) در تماس با سیال استفاده می‌شود [۲۵].

1- Admissible function

۲-۳- رفتار دینامیکی بر همکنش سیال-سازه

مطابق شکل (۱) مشاهده شد مخزن از سیال تراکم‌ناپذیر غیرلزج تا ارتفاع H از کف مخزن پر شده است. در این بررسی امواج سطحی سیال و اثرات فشار هیدرودینامیکی سیال صرف‌نظر شده است. برای یک سیال تراکم‌ناپذیر غیرلزج، پتانسیل تغییر مکان سیال بایستی معادله لاپلاس را ارضا نماید [۲۶، ۲۷].

$$\nabla^2 \varphi(r, \theta, \bar{z}) = 0 \quad (16)$$

پتانسیل تغییر شکل سیال φ و پتانسیل سرعت سیال $\tilde{\varphi}$ طبق رابطه زیر با یکدیگر در ارتباط‌اند.

$$\tilde{\varphi}(r, \theta, \bar{z}, t) = -i\omega\varphi e^{i\omega t}, \quad i^2 = -1 \quad (17)$$

در رابطه فوق ω فرکانس طبیعی می‌باشد و مسئله با فرض حرکت هارمونیک بررسی شده است. در سطح تماس بین ورق کف مخزن و سیال، سرعت آنها در راستای قائم بایستی با یکدیگر برابر باشد. این شرط برای حالتی که در سطح بین ورق و سیال کاویتاسیون وجود ندارد، برقرار است.

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{z}}\right)_{\bar{z}=0} = -W(r, \theta) \quad (18)$$

در سطح تماس بین سیال و جداره استوانه‌ای صلب مخزن سرعت شعاعی سیال برابر صفر است.

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)_{r=a} = 0 \quad (19)$$

در سطح آزاد سیال ($\bar{z} = H$) فشار دینامیکی سیال صفر است.

$$(\varphi)_{\bar{z}=H} = 0 \quad (20)$$

با اعمال شرایط مرزی ذکر شده، انرژی جنبشی سیال با استفاده از تئوری گرین به صورت زیر نوشته می‌شود [۲۹].

$$\begin{aligned} T_L^* &= \frac{1}{2} \rho_L \iint_{S_1+S_2} \varphi \frac{\partial\varphi}{\partial\chi} dS \quad (21) \\ &= \frac{1}{2} \rho_L \iint_{S_1} \varphi \frac{\partial\varphi}{\partial r} dS - \frac{1}{2} \rho_L \iint_{S_2} \varphi \frac{\partial\varphi}{\partial\bar{z}} dS \\ &= \frac{1}{2} \rho_L \iint_{S_2} \varphi W dS \end{aligned}$$

که χ جهت عمودی به سمت خارج در هر نقطه روی سطح مرزی از دامنه سیال (S) است. سطح S از دو قسمت S_1 و S_2 تشکیل شده که S_1 سطح در تماس با پوسته استوانه‌ای مخزن و S_2 سطح در تماس با ورق کف مخزن است. با استفاده از بسط توابع ویژه، پتانسیل تغییر شکل سیال φ به صورت زیر مفروض است [۲۶-۲۷].

$S-FGM$:

$$\begin{cases} A = \frac{h}{\nu} (\rho_m + \rho_c) \\ D = \frac{h^3}{24(1-\nu^2)} (E_m + E_c) \end{cases}$$

$E-FGM$:

$$\begin{cases} A = \frac{h(\rho_m - \rho_c)}{\ln\left(\frac{\rho_m}{\rho_c}\right)} \\ D = \frac{h^3 (E_m - E_c) \left(\nu + 0.25 \ln\left(\frac{E_m}{E_c}\right) \right)^2}{\ln\left(\frac{E_m}{E_c}\right)^3 (1-\nu^2)} - \frac{h^3 (E_m + E_c) \ln\left(\frac{E_m}{E_c}\right)}{\ln\left(\frac{E_m}{E_c}\right)^3 (1-\nu^2)} \end{cases} \quad (11)$$

انرژی جنبشی مربوط به ورق، T_P^* به صورت زیر محاسبه می‌شود [۱۲].

$$T_P^* = \frac{1}{2} \int_{-h/2}^{h/2} \int_0^{2\pi} \int_0^a \rho(z) W^2 r dr d\theta dz \quad (12)$$

با جایگذاری روابط قبلی در رابطه (۱۲)، انرژی جنبشی ورق T_P^* به صورت زیر ساده می‌شود.

$$T_P^* = \frac{1}{2} A a^3 \psi_n \sum_{i=0}^{\infty} q_i^2 \quad (13)$$

که

$$\psi_n = \begin{cases} 2\pi & \text{if } n=0 \\ \pi & \text{if } n>0 \end{cases} \quad (14)$$

با استناد به رابطه نسبت ریلی^۱، بیشینه انرژی پتانسیل ورق را می‌توان به صورت حاصل ضرب انرژی جنبشی ورق در حالت خلأ در مجذور فرکانس طبیعی آن نوشت.

$$\begin{aligned} U_P &= \frac{1}{2} A a^3 \psi_n \sum_{i=0}^{\infty} q_i^2 \omega_{ni}^2 \quad (15) \\ &= \frac{1}{2} \frac{D}{a^2} \psi_n \sum_{i=0}^{\infty} q_i^2 \lambda_{ni}^4 \end{aligned}$$

1- Rayleigh quotient

$$\xi_{nik} = \frac{1}{a^2} \int_0^a J_n \left(\varepsilon_{nk} \frac{r}{a} \right) I_n \left(\lambda_{ni} \frac{r}{a} \right) r dr$$

انرژی جنبشی سیال T_L^* برای مودهای نامتقارن به صورت زیر ساده می‌شود:

$$T_L^* = \frac{1}{2} \rho_L a^2 \psi_n \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} q_i q_h \times \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\zeta_{nik} + A_{ni} \xi_{nik}) (\zeta_{nhk} + A_{nh} \xi_{nhk}) \tanh \left(\varepsilon_{nk} \frac{H}{a} \right)}{\zeta_{nk} \varepsilon_{nk}} \quad (29)$$

برای مودهای متقارن رابطه (۲۶) به صورت زیر به دست می‌آید:

$$-X_{oi0} + \sum_{k=1}^{\infty} X_{oik} J_0 \left(\varepsilon_{ok} \frac{r}{a} \right) \frac{\varepsilon_{ok}}{a \tanh(\varepsilon_{ok} H/a)} \quad (30)$$

$$= \left[J_0 \left(\lambda_{oi} \frac{r}{a} \right) + A_{oi} I_0 \left(\lambda_{oi} \frac{r}{a} \right) \right]$$

و ثابت X_{oi0} طبق رابطه زیر حاصل می‌شود.

$$X_{oi0} = -\frac{2}{a^2} \int_0^a \left[J_0 \left(\lambda_{oi} \frac{r}{a} \right) + A_{oi} I_0 \left(\lambda_{oi} \frac{r}{a} \right) \right] r dr$$

$$= -\frac{1}{2\lambda_{oi}} \left[J_1(\lambda_{oi}) + A_{oi} I_1(\lambda_{oi}) \right] \quad (31)$$

ثابت X_{oik} برای $k > 0$ و $n = 0$ از رابطه (۲۷) به دست می‌آید.

بنابراین انرژی جنبشی سیال T_L^* ، برای مودهای متقارن، به صورت زیر است.

$$T_L^* = \frac{1}{2} \rho_L a^2 \psi_n \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} q_i q_h \left[\frac{1}{2} \frac{H}{a} X_{oi0} X_{oh0} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\zeta_{oik} + A_{oi} \xi_{oik}) (\zeta_{ohk} + A_{oh} \xi_{ohk}) \tanh \left(\varepsilon_{ok} \frac{H}{a} \right)}{\zeta_{ok} \varepsilon_{ok}} \right] \quad (32)$$

در این قسمت نسبت ریلی به صورت زیر معرفی می‌شود [۲۸].

$$\omega^2 = \frac{U_P}{T_P^* + T_L^*} \quad (33)$$

۲-۴- مسئله مقدار ویژه

برای محاسبات عددی فرکانس طبیعی و ضرایب بسط ریتز،

تنها $M+1$ جمله از بسط مربوط به جابه‌جایی عرضی ورق W

(۶) و N جمله از بسط مربوط به پتانسیل تغییر شکل سیال φ

($N+1$) جمله برای مودهای متقارن) لحاظ شده است. مقدار N

$$\varphi = \sum_{i=0}^{\infty} q_i \Phi_i \quad (22)$$

با حل معادله لاپلاس با استفاده از روش جداسازی متغیرها تابع Φ_i برای مودهای متقارن ($n=0$) به شکل زیر به دست می‌آید.

$$\Phi_i(r, \theta, \bar{z}) = X_{oi0}(\bar{z} - H) + \sum_{k=1}^{\infty} X_{oik} J_0(\varepsilon_{ok} r/a) \times \left[\cosh(\varepsilon_{ok} \bar{z}/a) - \frac{\sinh(\varepsilon_{ok} \bar{z}/a)}{\tanh(\varepsilon_{ok} H/a)} \right] \quad (23)$$

و برای مودهای نامتقارن ($n > 0$) به شکل زیر است.

$$\Phi_i(r, \theta, \bar{z}) = \cos(n\theta) \sum_{k=1}^{\infty} X_{nik} J_n(\varepsilon_{nk} r/a) \times \left[\cosh(\varepsilon_{nk} \bar{z}/a) - \frac{\sinh(\varepsilon_{nk} \bar{z}/a)}{\tanh(\varepsilon_{nk} H/a)} \right] \quad (24)$$

که پارامتر ε_{nk} از حل معادله زیر حاصل می‌شود.

$$J_n'(\varepsilon_{nk}) = 0, \quad k = 1, \dots, \infty \quad (25)$$

برای مودهای نامتقارن مسئله، تابع Φ_i شرایط مرزی (۱۹) و

(۲۰) و معادله لاپلاس (۱۶) را ارضا می‌نماید. با اعمال شرط

مرزی (۱۸)، ثابت X_{nik} به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$\sum_{k=1}^{\infty} X_{nik} J_n(\varepsilon_{nk} r/a) \frac{\varepsilon_{nk}}{a \tanh(\varepsilon_{nk} H/a)} = \left[J_n \left(\lambda_{ni} \frac{r}{a} \right) + A_{ni} I_n \left(\lambda_{ni} \frac{r}{a} \right) \right] \quad (26)$$

معادله (۲۶) بایستی در تمام بازه $0 \leq r \leq a$ برقرار باشد. با

ضرب رابطه $(1/a^2) J_n(\varepsilon_{nk} r/a) r$ در دو طرف رابطه و

انتگرالگیری در بازه ۰ و a و همچنین استفاده از خصوصیت

تعامد توابع بسط رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$X_{nik} = \frac{(\zeta_{nik} + A_{ni} \xi_{nik})}{\zeta_{nk} \varepsilon_{nk}} a \tanh \left(\varepsilon_{nk} \frac{H}{a} \right) \quad (27)$$

که متغیرهای استفاده شده در رابطه بالا به صورت زیر بیان

می‌شوند.

$$\varepsilon_{nk} = \frac{1}{a^2} \int_0^a J_n' \left(\varepsilon_{nk} \frac{r}{a} \right) r dr$$

$$\zeta_{nik} = \frac{1}{a^2} \int_0^a J_n \left(\varepsilon_{nk} \frac{r}{a} \right) J_n \left(\lambda_{ni} \frac{r}{a} \right) r dr \quad (28)$$

با جایگذاری روابط (۳۵)، (۳۷) و (۳۹) در رابطه نسبت ریلی (۳۳) و سپس کمینه کردن آن نسبت به ضرایب q_i ، رابطه ماتریسی زیر حاصل است.

$$(\mathbf{K}^P)q - \Omega^2 (\mathbf{M}^P + \mathbf{M}^L)q = 0 \quad (42)$$

معادله (۴۲) یک مسئله مقدار ویژه خطی با ماتریس‌های حقیقی است که Ω فرکانس زاویه‌ای مخزن حاوی سیال است.

۳- نتایج و بحث

بر پایه تحلیل انجام گرفته، مسئله مقدار ویژه معادله (۴۲)، برای پیدا کردن فرکانسهای طبیعی و شکل مودهای مخزن استوانه‌ای حاوی سیال از جنس مواد متغیر تابعی حل شده است. برای حصول اطمینان از درستی و دقت روش ارائه شده، نتایج به دست آمده از روش حاضر با نتایج تحلیل المان محدود (FEM) و نتایج آزمایشگاهی و عددی موجود در مقالات قبلی مقایسه شده است.

در تحلیل المان محدود، یک مدل سه بعدی با المانهای پوسته کامپوزیتی چهار گوش (S4R) برای سازه و المانهای سه بعدی آکوستیک (AC3D8) برای ناحیه سیال استفاده شده است. المان پوسته دارای چهار گره و المان سیال از هشت گره تشکیل شده است. المان بندی سیال و سازه در محل تماس با یکدیگر به گونه‌ای است که گره‌های المانهای سازه و سیال کاملاً بر یکدیگر منطبق هستند و در سطح تماس بین سیال و سازه در دیواره خیس مخزن از قید تماس گره‌ای در راستای عمود استفاده شده است. در مقاله حاضر از تأثیرات امواج سطح آزاد چشم پوشی شده است، در نتیجه پتانسیل سرعت مستقل از زمان $\varphi(r, \theta, x)$ در گره‌های سیال روی سطح آزاد صفر است. همچنین برای مدل‌سازی مواد متغیر تابعی از مدل لایه‌ای با تعداد لایه کافی استفاده شده است [۲۹].

در تحلیل عددی مسئله، آب با چگالی جرمی $\rho_L = 1000 \text{ kg/m}^3$ به عنوان سیال در نظر گرفته شده است و خصوصیات مواد متغیر تابعی استفاده شده در ساخت مخزن نیز مطابق جدول (۱) است. شعاع ورق کف مخزن $a = 0.144 \text{ m}$ ، ضخامت ورق $h = 0.002 \text{ m}$ و ارتفاع مخزن $L = 0.2 \text{ m}$ در نظر گرفته شده است همچنین جنس ورق فولاد با مدول

M به اندازه کافی بزرگ انتخاب می‌شود تا جوابهای مسئله از دقت مورد نیاز بهره مند باشند. بنابراین تمام جمله‌های انرژی به صورت مجموعه‌های محدودی به دست می‌آیند. در این مرحله برای سادگی کار، نماد برداری q که درایه‌های آن ضرایب بسط ریتز است معرفی می‌شود.

$$\mathbf{q} = \begin{Bmatrix} q_0 \\ \vdots \\ q_N \end{Bmatrix} \quad (34)$$

بیشینه انرژی پتانسیل مربوط به ورق کف مخزن (۱۶) را می‌توان به صورت زیر نوشت.

$$U_P = \frac{1}{2} \psi_n \mathbf{q}^T \mathbf{K}^P \mathbf{q} \quad (35)$$

که درایه‌های ماتریس قطری \mathbf{K}^P از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$\mathbf{K}_{ih}^P = (D/a^2) \lambda_{ni}^2 \delta_{ih} \quad i, h = 1, \dots, M \quad (36)$$

انرژی جنبشی مربوط به ورق کف مخزن (۱۲) را می‌توان به صورت زیر نوشت.

$$T_P^* = \frac{1}{2} \psi_n \mathbf{q}^T \mathbf{M}^P \mathbf{q} \quad (37)$$

که

$$\mathbf{M}_{ih}^P = A a^2 \delta_{ih} \quad (38)$$

انرژی جنبشی سیال که در رابطه (۲۱) معرفی شد را می‌توان به صورت زیر بیان کرد.

$$T_L^* = \frac{1}{2} \psi_n \mathbf{q}^T \mathbf{M}^L \mathbf{q} \quad (39)$$

درایه‌های ماتریس \mathbf{M}^L برای مودهای نامتقارن از رابطه زیر استخراج می‌شود.

$$\mathbf{M}_{ih}^L = \rho_L a^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\zeta_{nik} + A_{ni} \xi_{nik})}{\zeta_{nk} \varepsilon_{nk}} (\zeta_{nhk} + A_{nh} \xi_{nhk}) \times \tanh\left(\varepsilon_{nk} \frac{H}{a}\right) \quad \text{for } i, h = 0, \dots, M \quad (40)$$

برای مودهای متقارن ($n=0$) ماتریس \mathbf{M}^L به صورت زیر خواهد بود.

$$\mathbf{M}_{ih}^L = \rho_L a^2 \left(\frac{1}{2} \frac{H}{a} X_{oi0} X_{oh0} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\zeta_{oik} + A_{oi} \xi_{oik})}{\zeta_{ok} \varepsilon_{ok}} \right) \times (\zeta_{ohk} + A_{oh} \xi_{ohk}) \tanh\left(\varepsilon_{ok} \frac{H}{a}\right) \quad \text{for } i, h = 0, \dots, M \quad (41)$$

خوب در نتایج، پنج جمله از بسط مربوط به جابه‌جایی عرضی ورق ($M=5$) و پنج جمله در بسط مربوط به پتانسیل تغییر شکل سیال ϕ ($N=5$)، کافی است.

به منظور بررسی صحت و درستی روش ارائه شده در این مقاله، مسئله را با در نظر گرفتن جنس فولاد برای مخزن حل شده‌است و نتایج حاصل با نتایج تحلیلی، آزمایشگاهی و عددی موجود در مطالعات قبلی که توسط عسکری و دانشمند[۱۲]، چیا[۳] و ارگین و اوگورلو[۳۰] در جداول (۵) و (۶) مقایسه شده است. این جداول بیانگر این است که بیشترین خطا بین نتایج، به ترتیب نویسندگان ذکر شده در بالا کمتر از ۰/۳۱٪، ۲/۳٪ و ۳/۸٪ است. همچنین تحلیل المان محدود برای بررسی صحت نتایج ارائه شده در این مقاله به‌ازای حالتی که جنس مخزن از مواد متغیر تابعی ارائه شده است، که جداول (۴) و (۵) بیانگر اختلاف قابل قبول میان نتایج نیمه‌تحلیلی و المان محدود است. به‌گونه‌ای که بیشترین اختلاف میان نتایج کمتر از ۴/۷٪ شده‌است.

الاستیسیته 206 GPa ، ضریب پواسون $0/25$ و چگالی جرمی 7850 kg/m^3 در نظر گرفته شده است و برای اعتبارسنجی نتیجه مقاله حاضر با مقالات مرجع مقایسه شده است.

جدول (۱) خصوصیات مواد استفاده شده در ورق FGM.

خواص ماده	فلز		سرامیک
	آلومینیوم (Al)	زیرکونیا (ZrO_2)	
مدول الاستیسیته (GPa)	۷۰	۲۰۰	۳۸۰
چگالی (kg/m^3)	۲۷۰۲	۵۷۰۰	۳۸۰۰

۳-۱- تحقیق همگرایی و صحت روش

برای بررسی همگرایی و درستی روش ارائه شده، مخزنی با ابعاد معرفی شده و پر شده از سیال تا ارتفاع $a = H$ مورد بررسی قرار گرفته است. جداول (۲) و (۳) همگرایی روش ارائه شده برای اعداد مختلف از جملات استفاده شده در بسطها را نشان می‌دهند. دیده می‌شود که برای داشتن دقت

جدول (۲) تحقیق همگرایی فرکانس‌های طبیعی (Hz)، تأثیر جملات N با $M=5$.

نوع ماده FGM	شماره مود		N		
	m	n		۲	۳
P-FGM	۰	۰	۸۰/۰۶	۸۰/۰۱	۷۹/۹۹
	۱		۵۵۰/۲۵	۴۷۲/۸۹	۴۷۲/۱۷
	۰	۱	۲۲۱/۲۰	۲۲۱/۰۴	۲۲۱/۰۳
	۱		۹۵۲/۶۳	۸۲۱/۷۵	۸۱۹/۷۸
S-FGM	۰	۰	۷۶/۸۳	۷۶/۷۸	۷۶/۷۶
	۱		۵۳۷/۴۱	۴۵۷/۰۵	۴۵۶/۴۶
	۰	۱	۲۱۳/۰۶	۲۱۲/۹۰	۲۱۲/۸۹
	۱		۹۲۷/۷۷	۷۹۶/۸۲	۷۹۴/۸۳
E-FGM	۰	۰	۷۵/۳۵	۷۵/۳۲	۷۵/۳۱
	۱		۵۳۱/۷۱	۴۵۳/۱۴	۴۵۲/۴۷
	۰	۱	۲۱۰/۱۱	۲۰۹/۹۵	۲۰۹/۹۴
	۱		۹۲۹/۵۱	۷۹۳/۳۰	۷۹۱/۲۰

جدول (۳) تحقیق همگرایی فرکانس‌های طبیعی (H_z)، تأثیر جملات M با $N = 5$.

نوع ماده	شماره مود		M			
	n	m	۲	۳	۴	۵
P -FGM	۰	۰	۸۰/۰۵	۸۰/۰۰	۷۹/۹۹	۷۹/۹۹
	۱	۱	۴۷۴/۴۳	۴۷۲/۷۹	۴۷۲/۲۶	۴۷۲/۱۷
	۰	۱	۲۲۱/۱۵	۲۲۱/۰۶	۲۲۱/۰۴	۲۲۱/۰۳
S -FGM	۰	۰	۷۶/۸۴	۷۶/۸۰	۷۶/۷۷	۷۶/۷۶
	۱	۱	۴۵۹/۰۱	۴۵۷/۰۳	۴۵۶/۵۱	۴۵۶/۴۶
	۰	۱	۲۱۳/۰۲	۲۱۲/۹۲	۲۱۲/۹۰	۲۱۲/۸۹
E -FGM	۰	۰	۷۵/۳۶	۷۵/۳۲	۷۵/۳۱	۷۵/۳۱
	۱	۱	۴۵۴/۵۳	۴۵۳/۰۸	۴۵۲/۵۱	۴۵۲/۴۷
	۰	۱	۲۱۰/۰۷	۲۰۹/۹۷	۲۰۹/۹۴	۲۰۹/۹۴
						۷۹۱/۲۰

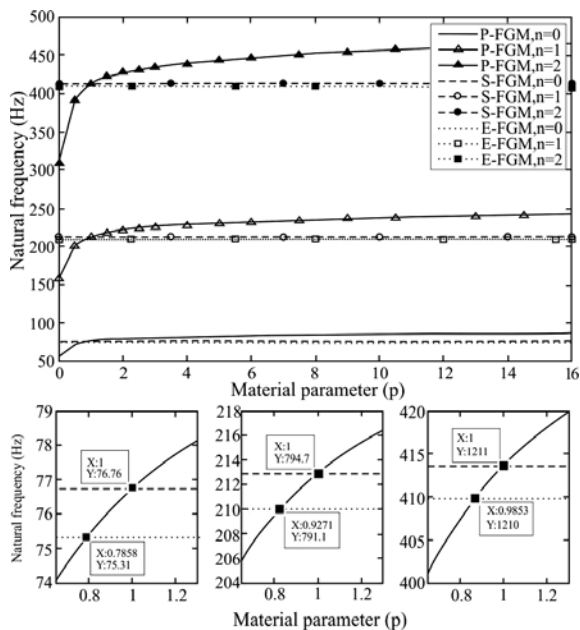
جدول (۴) فرکانس طبیعی مخزن از جنس مخزن Al/ZrO_2 حاوی سیال به ارتفاع $H=a$ و پارامتر ماده $p = 2$.

شماره مود	P -FGM		S -FGM		E -FGM	
	مطالعه فعلی	اجزا محدود	مطالعه فعلی	اجزا محدود	مطالعه فعلی	اجزا محدود
اول (۰ و ۰)	۷۹/۷۹	۷۷/۵۶	۷۶/۷۶	۷۴/۵۹	۷۵/۳۱	۷۳/۲۴
دوم (۰ و ۱)	۲۲۱/۰۳	۲۱۲/۱۴	۲۲۱/۸۹	۲۱۴/۱۱	۲۰۹/۹۴	۲۰۴/۸۱
سوم (۰ و ۲)	۴۲۷/۹۴	۴۱۰/۱۳	۴۱۳/۱۶	۴۰۳/۱۰	۴۰۹/۸۰	۳۹۳/۰۴
چهارم (۰ و ۰)	۴۷۲/۱۷	۴۵۷/۳۳	۴۵۶/۴۶	۴۴۴/۶۸	۴۵۲/۴۷	۴۳۶/۷۷
پنجم (۰ و ۳)	۶۹۴/۰۶	۶۶۸/۸۰	۶۷۲/۶۴	۶۴۱/۹۹	۶۶۹/۱۳	۶۵۱/۸۹
ششم (۰ و ۱)	۸۱۹/۷۸	۷۹۴/۴۹	۷۹۴/۸۳	۷۶۰/۶۴	۷۹۱/۲۰	۷۷۱/۴۹

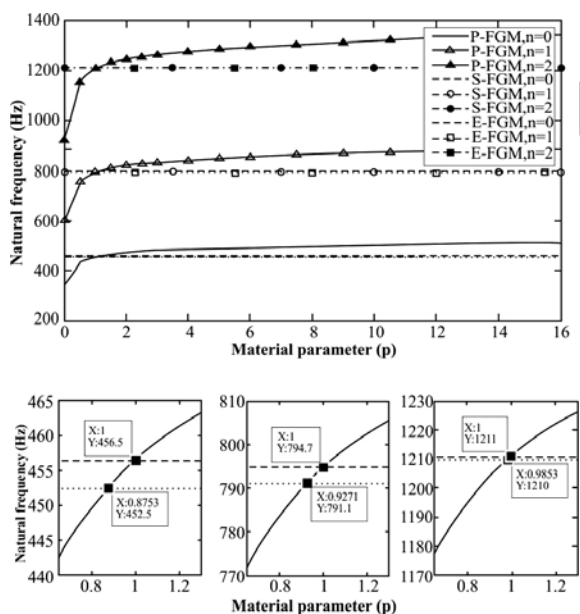
^a (n,m).

جدول (۵) فرکانس طبیعی مخزن از جنس Al/Al_2O_3 حاوی سیال به ارتفاع $H=a$ و پارامتر ماده $p = 2$.

شماره مود	P -FGM		S -FGM		E -FGM	
	مطالعه فعلی	اجزا محدود	مطالعه فعلی	اجزا محدود	مطالعه فعلی	اجزا محدود
اول (۰ و ۰)	۱۰۶/۵۰	۱۰۳/۰۹	۱۰۰/۰۲	۹۶/۸۸	۹۵/۵۵	۹۳/۳۱
دوم (۰ و ۱)	۲۹۷/۰۹	۲۸۵/۱۵	۲۷۹/۴۲	۲۶۹/۴۷	۲۷۰/۰۳	۲۵۸/۶۲
سوم (۰ و ۲)	۵۸۰/۳۱	۵۶۴/۶۹	۵۴۶/۵۴	۵۳۴/۳۴	۵۳۴/۱۹	۵۲۱/۴۸
چهارم (۰ و ۰)	۶۴۰/۷۹	۶۲۵/۲۱	۶۰۳/۵۸	۵۷۵/۱۷	۵۹۰/۶۴	۵۶۲/۴۰
پنجم (۰ و ۳)	۹۴۸/۱۱	۹۰۸/۰۲	۸۹۳/۹۶	۸۶۱/۹۹	۸۸۲/۳۱	۸۴۲/۶۹
ششم (۰ و ۱)	۱۱۲۱/۲۰	۱۰۸۱/۲۹	۱۰۵۷/۳۷	۱۰۲۴/۵۷	۱۰۴۵/۵۷	۱۰۰۰/۹۰



شکل (۵) تغییرات فرکانس طبیعی سیستم با تغییر پارامتر ماده (p) و نمای نزدیک محل برخورد نمودارهای مربوط به مواد تابعی مختلف با یکدیگر (به ازای جنس مخزن $H = a, Al/ZrO_2$ و $m = 0$).

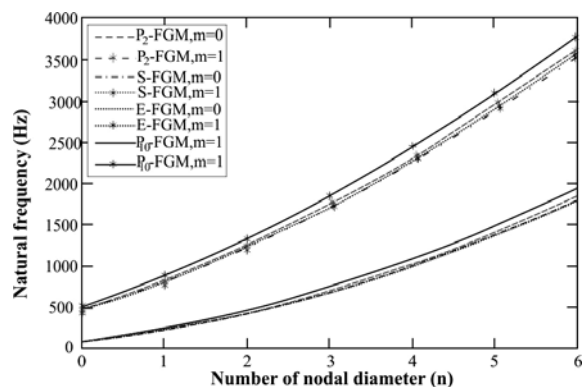


شکل (۶) تغییرات فرکانس طبیعی سیستم با تغییر پارامتر ماده (p) و نمای نزدیک محل برخورد نمودارهای مربوط به مواد تابعی مختلف با یکدیگر (به ازای جنس مخزن $H = a, Al/ZrO_2$ و $m = 1$).

در حالت $E-FGM$ ، چون در این مورد خواص ماده تابعیتی از پارامتر p ندارد، مقدار فرکانس های طبیعی وابسته به متغیر p نیست. ولی در مورد ورق $S-FGM$ مشاهده می شود که با تغییر

۳-۲- اثر تعداد قطره های گرهی (n)

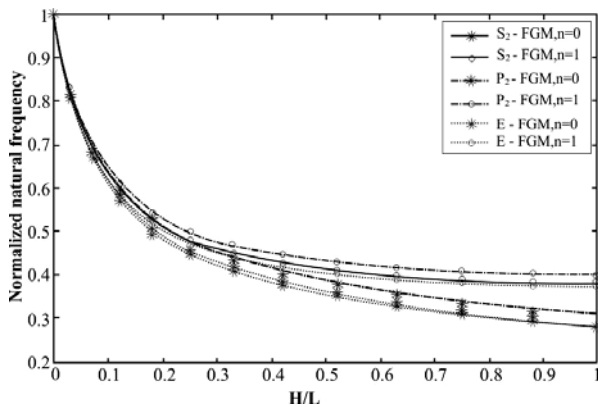
تغییرات فرکانس طبیعی با افزایش تعداد قطره های گرهی (n) در شکل (۴) نشان داده شده است. این شکل بیانگر این است که با افزایش تعداد قطره های گرهی، فرکانس طبیعی سیستم افزایش می یابد. همچنین به ازای تعداد قطره های گرهی (n) یکسان، با افزایش تعداد دایر گرهی (m)، فرکانس طبیعی افزایش می یابد. بنابراین در این مسئله فرکانس طبیعی پایه همواره در m و n مساوی صفر اتفاق می افتد.



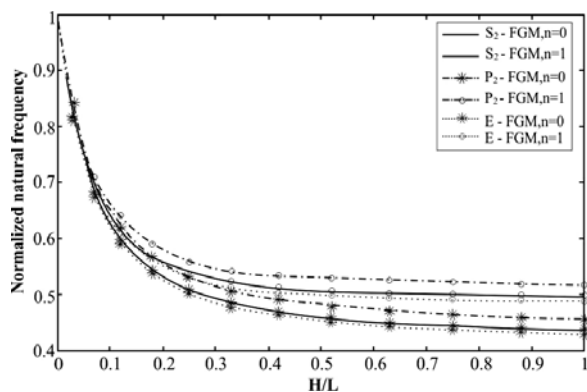
شکل (۴) تغییرات فرکانس طبیعی سیستم با افزایش تعداد قطره های گرهی متفاوت (برای $H = a$ و جنس مخزن Al/ZrO_2).

۳-۳- اثر پارامتر ماده روی فرکانس

در شکل های (۵) و (۶)، اثر تغییر پارامتر ماده متغیر تابعی (p) روی فرکانس های طبیعی مسئله، به ازای $m=0$ و $m=1$ و مقادیر مختلف n ، در بازه وسیعی مورد مطالعه قرار گرفته است. مطابق این اشکال در وضعیتی که ماده تابعی از نوع $P-FGM$ باشد، با افزایش پارامتر ماده (p)، فرکانس های طبیعی افزایش می یابد. علت این افزایش این است که با بزرگ شدن پارامتر ماده متغیر تابعی، ماده غالب ورق از فلز به سمت سرامیک میل می کند و با توجه به خواص مواد انتخابی این افزایش فرکانس طبیعی قابل توجه است. در واقع به ازای $p = 0$ ورق کف مخزن خاصیت کاملاً فلزی و زمانی که p به بی نهایت میل می کند ورق خاصیت کاملاً سرامیکی دارد. بیشترین تغییر در فرکانس طبیعی به ازای افزایش پارامتر ماده در بازه $0 < p < 3$ رخ می دهد. همچنین دیده می شود که اثر افزایش پارامتر ماده بر روی فرکانس طبیعی، به ازای $m=1$ بیشتر از $m=0$ است.



شکل (۷) اثر ارتفاع سیال بر فرکانس طبیعی نرمال شده (به ازای جنس مخزن Al/ZrO_2 و $m=0$).



شکل (۸) اثر ارتفاع سیال بر فرکانس طبیعی نرمال شده (به ازای جنس مخزن Al/ZrO_2 و $m=1$).

۳-۵- شکل مودها

چهار شکل مود اول ورق انعطاف پذیر $P-FGM$ در تماس با سیال برای تعداد قطرهای گره‌های ۱ و $n=0$ و به ازای مقادیر مختلف ارتفاع سیال به ترتیب در شکل‌های (۹) و (۱۰) ارائه شده است. $n=0$ شکل مودهای متقارن و $n=1$ شکل مودهای غیرمتقارن در $\theta=0$ و $\theta=\pi$ می‌باشند. همانطور که مشاهده می‌شود با افزایش ارتفاع سیال دامنه جابه‌جایی ورق کاهش یافته و نقاط گره کمی جابه‌جا شده‌اند. شکل مودهای متقارن نسبت به غیر متقارن تأثیر بیشتری از مقدار سیال می‌پذیرند. همچنین اثر ارتفاع سیال بر شکل مودها با افزایش تعداد دایر گره‌ای (m) افزایش می‌یابد.

۴- نتیجه گیری

در این مقاله ارتعاشات یک ورق مدور از جنس مواد متغیر تابعی مختلف در تماس با سیال، مربوط به کف یک مخزن

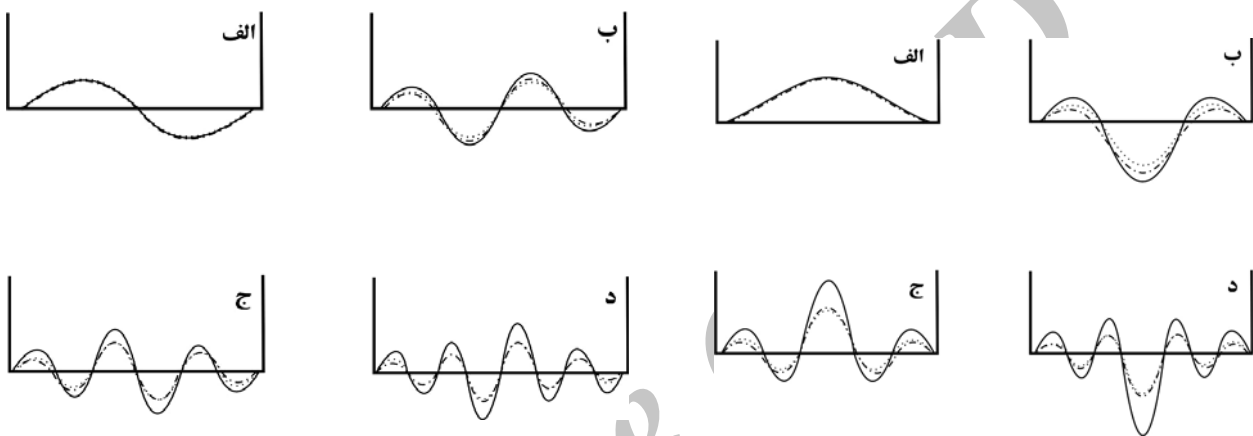
پارامتر ماده فرکانس طبیعی ثابت است، به دلیل آنکه پارامترهای A و D که با تغییر پارامتر p ثابت می‌ماند. به عبارتی سختی خمشی ورق و انتگرال چگالی جرمی ورق در راستای ضخامت آن با تغییر p ثابت می‌ماند. همچنین مشاهده می‌شود که در تمامی مودها همواره به ازای $p=1$ فرکانس طبیعی $P-FGM$ با $S-FGM$ برابر می‌باشد. به ازای $p < 1$ فرکانس $P-FGM$ کمتر از $S-FGM$ بوده و به ازای $p > 1$ فرکانس $P-FGM$ از $S-FGM$ بیشتر می‌باشد. با افزایش تعداد قطرهای گره‌ای، اختلاف بین فرکانس‌های $S-FGM$ و $E-FGM$ کاهش می‌یابد و همچنین نمودارهای مربوط به تغییر فرکانس $P-FGM$ و $E-FGM$ ، به ازای پارامتر p بزرگتری یکدیگر را قطع می‌کنند.

۳-۴- تأثیر عمق سیال

برای تخمین زدن تأثیر مقدار سیال روی فرکانس‌های طبیعی مخزن حاوی سیال، فرکانس طبیعی نرمالیزه شده‌ای به صورت f_2 / f_1 تعریف شده است که f_2 و f_1 به ترتیب فرکانس‌های طبیعی مخزن خالی و حاوی سیال برای مودهای متناظر خاص هستند. شکل‌های شماره (۷) و (۸) فرکانس‌های طبیعی مخزن حاوی سیال را به عنوان تابعی از نسبت پر بودن (H/L) برای تعداد قطرها و دایر گره‌ای مختلف نشان می‌دهد. همانطور که دیده می‌شود، فرکانس‌ها با افزایش نسبت پر بودن مخزن کاهش می‌یابند. اولین فرکانس طبیعی مخزن استوانه‌ای کاملاً پر از سیال ($m, n=0$) حدود ۷۰٪ نسبت به فرکانس متناظر مخزن خالی از سیال کاهش می‌یابد. نکته قابل توجه این است که نرخ تغییر فرکانس طبیعی با افزایش (H/L) کاهش می‌یابد به گونه‌ای که به ازای ($H/L < 0.2$) با افزایش ارتفاع سیال، تغییرات چشمگیری در مقدار فرکانس طبیعی مشاهده می‌شود و با افزایش بیشتر ارتفاع سیال این تغییر فرکانس کمتر شده و به ازای ($H/L > 0.5$) تغییر اندازه فرکانس بسیار ناچیز می‌شود. همچنین تأثیر سیال بر فرکانس‌های مخزن حاوی سیال برای مودهای با تعداد قطرها و دایر گره‌ای کمتر، بیشتر است. این نتیجه در توافق با نتایج به دست آمده توسط کروک و کوال [۳۱] است.

با افزایش ارتفاع سیال فرکانس طبیعی سیستم کاهش می‌یابد به گونه‌ای که نرخ تغییر فرکانس طبیعی با افزایش ارتفاع سیال کاهش می‌یابد. تأثیر ارتفاع سیال بر فرکانس طبیعی ورق به تعداد قطرها و دوائر گره‌ای وابسته است به گونه‌ای که این اثر در تعداد قطرها و دوائر گره‌ای کوچکتر، بزرگتر است. همچنین با افزایش ارتفاع سیال، دامنه میزان جابه‌جایی ورق در شکل مودها کاهش یافته و نقاط گره کمی جابجا شده‌اند. در ضمن شکل مودهای متقارن نسبت به غیر متقارن تأثیر بیشتری از مقدار سیال می‌پذیرند.

عمودی مورد بررسی قرار گرفت. در این مطالعه یک روش نیمه‌تحلیلی قوی و آسان با در نظر گرفتن برهمکنش سیال-سازه و خواص مواد متغیر تابعی ارائه شد. صحت و دقت روش مذکور با اطلاعات عددی و آزمایشگاهی مقالات قبلی و همچنین تحلیل المان محدود انجام شده در این بررسی، مقایسه شد و نتایج انطباق بسیار خوبی را نشان داد. افزایش پارامتر ماده موجب افزایش فرکانس‌های طبیعی در $P-FGM$ و در عین حال کاهش نرخ تغییر فرکانس می‌شود. تغییرات این پارامتر تأثیر مهمی به روی شکل مودها ندارد.



شکل (۱۰) چهار مود اول مخزن حاوی سیال با تعداد قطر گره‌ای $n=1$ به ازای مقادیر مختلف ارتفاع سیال (جنس مخزن Al/ZrO_2 و $p=2$):
 (الف) $m=0$ (ب) $m=1$ (ج) $m=2$ (د) $m=3$ (الف) $H=0$...
 . $(H=L - . - و H=0, \lambda L .$

شکل (۹) چهار مود اول مخزن حاوی سیال با تعداد قطر گره‌ای $n=0$ به ازای مقادیر مختلف ارتفاع سیال (جنس مخزن Al/ZrO_2 و $p=2$):
 (الف) $m=0$ (ب) $m=1$ (ج) $m=2$ (د) $m=3$ (الف) $H=0$...
 . $(H=L - . - و H=0, \lambda L .$

جدول (۶) فرکانس طبیعی مخزن از جنس فولاد (Hz) .

$H/a=0,5$				$H/a=0,1$				شماره مود	
ارگین و اوگورلو [۳۰]	چیا [۳]	عسکری و دانشمند [۱۲]	مطالعه حاضر	ارگین و اوگورلو [۳۰]	چیا [۳]	عسکری و دانشمند [۱۲]	مطالعه حاضر	m	n
۱۱۲/۸	۱۱۰	۱۱۲/۷	۱۱۲/۶۹	۱۷۳/۵	۱۷۷	۱۷۳/۹	۱۷۳/۸۸	۰	۰
۲۶۴/۶		۲۶۲/۲	۲۶۲/۲۲	۳۶۵/۷		۳۶۴/۴	۳۶۴/۴۳	۰	۱
۵۴۰/۶	۵۴۰	۵۳۸/۶	۵۳۸/۷۰	۶۸۸/۱	۶۹۴	۶۸۹/۱	۶۸۹/۱۱	۱	۰
۹۰۲/۵		۸۹۱/۹	۸۹۲/۱۷	۱۰۷۲/۳		۱۰۶۶/۱	۱۰۶۶/۲۴	۱	۱
۱۳۹۳/۹	۱۴۱۰	۱۳۸۶/۲	۱۳۸۷/۳۰	۱۵۸۵/۲	۱۶۲۰	۱۵۸۳/۰	۱۵۸۳/۴۰	۲	۰
۱۹۹۱/۳		۱۹۶۲/۲	۱۹۶۸/۰۱	۲۱۸۳/۰		۲۱۶۲/۲	۲۱۶۶/۱۵	۲	۱

جدول (۷) فرکانس طبیعی مخزن از جنس فولاد (Hz).

H/a=۲			H/a=۱			شماره مود		
ارگین و اوگورلو [۳۰]	عسکری و دانشمند [۱۲]	مطالعه حاضر ۶۹/۱۲	ارگین و اوگورلو [۳۰]	چیبا [۳]	عسکری و دانشمند [۱۲]	مطالعه حاضر	m	n
۷۱/۸	۶۹/۱	۶۹/۱۲	۹۱/۳	۹۲	۹۰/۳	۹۰/۳۰	۰	۰
۲۴۴/۲	۲۴۱/۰	۲۴۰/۹۸	۲۴۷/۴		۲۴۴/۳	۲۴۴/۳۱	۰	۱
۴۹۹/۵	۴۹۵/۷	۴۹۵/۸۰	۵۱۵/۱	۵۲۰	۵۱۱/۶	۵۱۱/۷۲	۱	۰
۸۸۳/۶	۸۷۲/۱	۸۷۲/۰۸	۸۸۶/۳		۸۷۴/۹	۸۷۵/۲۵	۱	۱
۱۳۵۶/۲	۱۳۵۰/۲	۱۳۵۱/۷۱	۱۳۷۲/۳	۱۳۹۰	۱۳۶۳/۰	۱۳۶۴/۳۶	۲	۰
۱۹۷۴/۵	۱۹۴۵/۰	۱۹۴۴/۵۲	۱۹۷۶/۹		۱۹۷۴/۴	۱۹۵۳/۵۳	۲	۱

مراجع

- [8] Cheung Y.K., Zhou D., Hydroelastic vibration of a circular container bottom plate using the Galerkin method, *Journal of Fluids and Structures*, 16, 2002, pp. 561–580.
- [9] Liang C. C., Liao C. C., Tai Y. S., The free vibration analysis of submerged cantilever plates, *Ocean Engineering*, 28, 2001, pp. 1225–1245.
- [10] Jeong K.H., Kim K.J., Hydroelastic vibration of a circular plate submerged in a bounded compressible fluid, *Journal of Sound and Vibration*, 283, 2005, pp. 153–172.
- [11] Jeong K.H., *Hydroelastic vibration of two annular plates coupled with a bounded compressible fluid*, *Journal of Fluids and Structures*, 22, 2006, pp. 1079–1096.
- [12] Askari E., Daneshmand F., Free vibration of an elastic bottom plate of a partially fluid-filled cylindrical container with an internal body, *European Journal of Mechanics A/Solids*, 29, 2010, pp. 68–80.
- [13] Kutlu A., Ugurlu B., Omurtag M.H., Ergin A., Dynamic response of Mindlin plates resting on arbitrarily orthotropic Pasternak foundation and partially in contact with fluid, *Ocean Engineering*, 42, 2012, pp. 112–125.
- [14] Yamanouchi M., Koizumi M., Hirai T., Shiota, *Resonances of an air-filled elastic cylindrical shell immersed in a fluid*, Proceedings of the First International Symposium on Functionally Gradient Materials, Japan, 1990.
- [1] Kwak M.K., Kim K.C., Axisymmetric vibration of circular plates in contact with fluid, *Journal of Sound and Vibration*, 146, 1991, pp. 381–389.
- [2] Kwak M.K., Vibration of circular plates in contact with water, Transactions of the American Society of Mechanical Engineers, *Journal of Applied Mechanics*, 58, 1991, pp. 480–483.
- [3] Chiba M., Nonlinear hydroelastic vibration of a cylindrical tank with an elastic bottom, containing liquid. Part II: linear axisymmetric vibration analysis, *Journal of Fluids and Structures*, 7, 1993, pp. 57–73.
- [4] Bauer H.F., Coupled frequencies of a liquid in a circular cylindrical container with elastic liquid surface cover, *Journal of Sound and Vibration*, 180, 1995, pp. 689–704.
- [5] Amabili M., Bulging modes of circular bottom plates in rigid cylindrical containers filled with a liquid, *Shock and Vibration*, 4, 1997, pp. 51–68.
- [6] Kwak M.K., Han S.B., Effect of fluid depth on the hydroelastic vibration of free-edge circular plate, *Journal of Sound and Vibration*, 230, 2000, pp. 171–185.
- [7] Amabili M., Kwak, M.K., Vibration of circular plates on a free fluid surface; effect of surface waves, *Journal of Sound and Vibration*, 226, 1999, pp. 407–424.

- [25] Leissa A.W., , Vibration of Plates, NASA SP-160. U.S Government Printing Office, Washington, DC., 1969.
- [26] Askari E., Daneshmand, F., , Coupled vibration of a partially fluid-filled cylindrical container with a cylindrical internal body, *Journal of Fluids and Structures*, 25, 2009, pp. 389–405.
- [27] Amabili M., Shell-plate interaction in the free vibrations of circular cylindrical tanks partially filled with a liquid: the artificial spring method, *Journal of Sound and Vibration*, 199, 1997, pp.431–452.
- [28] Zhu F., Rayleigh quotients for coupled free vibrations, *Journal of Sound and Vibration*, 171, 1994, pp. 641–649.
- [29] Virella J., Godoy L., Su´arez, L., Fundamental modes of tank-liquid systems under horizontal motions, *Engineering Structures*, 28, 2006, pp. 1450–1461.
- [30] Ergin A., Ugurlu B., Hydroelastic analysis of fluid storage tanks by using a boundary integral equation method, *Journal of Sound and Vibration*, 17, 2004, pp. 927–939.
- [31] Koval’chuk, Kruk P. S., On the spectrum of natural frequencies of circular cylindrical shells completely filled with a fluid, *International Applied Mechanics*, 42, 2006, pp. 529–535.
- [15] Koizumi M., The concept of FGM, Ceramic Transactions, *Functionally Gradient Materials*, 1993, pp. 34, 3–10.
- [16] Anon, FGM components: PM meets the challenge, *Metal Powder Report*, 51, 1996, pp. 28–32.
- [17] Reddy J. N., , Analysis of functionally graded plates, *International journal for numerical method in engineering-International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 47, 2000, pp. 663–684.
- [18] Nie G.J., Zhong Z., Semi-analytical solution for three-dimensional vibration of functionally graded circular plates, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196, 2007, pp. 4901–4910.
- [19] Allahverdizadeh A., Naei M. H., Nikkhah Bahrami M., *Nonlinear free and forced vibration analysis of thin circular functionally graded plates*, *Journal of Sound and Vibration*, 310, 2008, pp. 966–984.
- [20] Dong C. Y., *Three-dimensional free vibration analysis of functionally graded annular plates using the Chebyshev–Ritz method*, *Materials and Design*, 29, 1995, pp.1518–1525.
- [21] Chen W.Q., Bian Z.G., Ding H.J., 3D free vibration analysis of a functionally graded piezoelectric hollow cylinder filled with compressible fluid, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 41, 2004, pp. 947–964.
- [22] Morand H.J.P., Ohayon, R., Fluid–Structure Interaction: Applied Numerical Methods, Wiley, New York, 1995.
- [23] Delale F., Erdogan, F., The crack problem for a nonhomogeneous plane, *ASME Journal of Applied Mechanics*, 50, 1983, pp.609–614.
- [24] Shyang-Ho Chi., Yen-Ling Chung., Mechanical behavior of functionally graded material plates under transverse load—Part I: Analysis, *International Journal of Solids and Structures*, 43, 2006, pp. 3657–3674.