فصلنامه علمي پژوهشي

مهندسی مکانیک جامدات



# : Q. .....

# برهمکنش سیال- سازه در تحلیل ارتعاشات آزاد مخازن استوانهای عمودی با کف انعطافپذیر از جنس مواد متغیر تابعی

على اكبر شفيعي'، مجتبي محزون''"، احسان عسكري"

\* نويسنده مسئول: mahzoon@shirazu.ac.ir

### چکیدہ

# در این مقاله یک روش نیمه تحلیلی برای بررسی مسئله ار تعاش آزاد یک مخزن با جداره استوانهای صلب و کف انعطاف پذیر از جنس مواد متغیر تابعی حاوی سیال ارائه شده است. خصوصیات مواد، مطابق یک تابع توانی، سیگموئید یا نمایی بر حسب کسر حجمی مواد تشکیل دهنده، در راستای ضخامت ورق توزیع شده است. سیال به صورت غیرلزج و تراکم ناپذیر فرض شده و پتانسیل سرعت سیال به صورت بسط توابع ویژه فرمولبندی شده است. در این مطالعه بر همکنش بین سیال و سازه لحاظ شده و مشخصات دینامیکی سیستم در تماس با سیال با استفاده از روش ریلی – ریتز استخراج شده است. به منظور بررسی اعتبار و دقت روش تئوری نتایج به دست آمده، با نتایج آزمایشگاهی و عددی موجود در مقالات قبلی انجام شده در این زمینه مقایسه شده است. همچنین به منظور اعتبار سنجی روش حاضر از یک تحلیل المان محدود نیز استفاده شده است. در نهایت اثر متغیرهای متفاوتی از جمله تعداد قطرها و دوایر گرهی (شماره مودها)، کسر حجمی مواد متغیر تابعی و ارتفاع سیال روی رفتار دینامیکی سیستم در تماس با سیال به مده است. در نهایت اثر متغیرهای

# واژههای کلیدی

ارتعاشات آزاد، برهمکنش سیال-سازه، مواد

متغير تابعي، روش ريلي–ريتز، بسط توابع ويژه.

۱- کارشناسی ارشد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه شیراز، شیراز، ایران.

۲- دانشیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه شیراز، شیراز، ایران.

۳- دانشجوی دکترای، دانشکده مهندسی پزشکی، دانشگاه مک کووری، سیدنی، استرالیا.

#### ۱- مقدمه

در بسیاری از مسائل مهندسی، مسئله برهمکنش سیال– سازه' به چشم میخورد. به عنوان مثال می توان به طراحی و ساخت سدهای آبی، مخازن نگهداری آب و نفت، ساخت هاور کرافت'، راکتورهای هستهای و لولههای انتقال دهنده سیال و درنهایت طیف گستردهای از مسائل بیومکانیک" اشاره کرد. در برخی از این مسائل مانند حمل سیالات در مخازن، سازه دارای حرکت جسم صلب و حرکت ارتعاشی است و درنهایت سیال هم که قسمتی از حرکت خود را به دلیل مجاورت با سازه داراست دارای همین نوع حرکت پیچیده است که این امر به نوبه خود اهمیت و پیچیدگی برهمکنش سیالسازه را مشخص میسازد. بررسی و تحلیل این گونه مسائل فوقالعاده مهم و سرنوشتساز است زیرا در بسیاری از موارد فوق با حفظ جان انسانها در ارتباط است. روش های حل برای ارتعاشات آزاد سازههای در اندرکنش با سیال به سه گروه تقسیم میشوند: روش های تحلیلی، نیمه تحلیلی و عددی. بررسی حاضر بر ارائه کردن روشی نیمه تحلیلی برای مسائل اندر کنش سیال-سازه متمر کز شدهاست. ارتعاشات ورق مدور در تماس با سیال، سالهای زیادی مورد مطالعه قرار گرفته است. ارتعاش آزاد یک ورق مدور قرار گرفته روی سطح آزاد سیال توسط کیم و کواک[۱] برای مودهای متقارن و در حالت کلی توسط کواک[۲] مورد بررسی قرار گرفت. در این مطالعه سیال در تماس با ورق بهصورت نيمه بي نهايت در نظر گرفته شده است.

چیبا[۳] تحقیقی آزمایشگاهی و تئوری در مورد مسئله ارتعاشات هیدروالاستیک مخازن استوانهای حاوی سیال با جداره صلب و ورق کف الاستیک انجام داد. او تأثیر نیروهای درون صفحهای در ورق که به خاطر فشار استاتیکی سیال ایجاد میشود را در نظر گرفت و برای ۹ نوع ورق با مواد و ضخامتهای مختلف مسئله مذکور را حل و بررسی نمود.

باور[۴] یک ورق مدور که کاملا سطح آزاد سیال در یک مخزن صلب را پوشش میدهد، مطالعه کرد. مودهای مربوط به

ارتعاشات سازه، در یک مخزن با جداره صلب و کف مدور الاستیک و پر شده از سیال را آمابیلی[۵] بررسی نمود. اثر عمق سیال قرار گرفته روی یک ورق مدور بهصورت تئوری و آزمایشگاهی توسط کواک و هان[۶] بررسی شد. آمابیلی و کواک[۷] تأثیر امواج سطح آزاد بر روی ارتعاشات آزاد ورق،های دایرهای قرارگرفته بر سطح آزاد سیال را مورد مطالعه قرار دادند. آنها با استفاده از تکنیک اغتشاش ٔ و روش تبدیل هنکل<sup>۵</sup> مسئله مورد نظر را بررسی کردند. چنگ و ژو[۸] ارتعاشات یک ورق مدور الاستیک قرار گرفته درکف یک مخزن استوانهای کاملاً صلب را به روش گالرکین ٔ بررسی كردند. ليانگ و همكارانش [٩] بر يايه فرمول جرم افزوده تجربي و روش رایلی– ریتز<sup>۷</sup>، روشی ساده برای تعیین فرکانس.ها و مودهای طبیعی ورق،های یک سرگیردار غوطهور شده در سیال ارائه کردند. روش تحلیلی دیگر برای ارتعاشات آزاد خطی ورق مدور فرورفته داخل سيال توسط جونگ و کيم[١٠] بررسي شد. جونگ [۱۱] ارتعاشات دو ورق رینگ شکل در تماس با سیال را به كمك روش رايلي-ريتز و تبديل هنكل محدود بررسي كرد. سیال تراکمپذیر و در میان دو ورق و دیوارهای در شعاع خارجی ورقها محدود شده است. اخیراً عسکری و دانشمند[۱۲] ارتعاشات آزاد ورق الاستيك مربوط به كف يك مخزن استوانهای با جداره صلب و همراه با یک جسم داخلی درون مخزن را تحلیل و بررسی کردند. در این تحقیق جسم داخلی هيچ تماسى با مخزن نداشته و داخل آن تا قسمتى غوطهور شده است. همچنین ارگین و همکارانش[۱۳] پاسخ دینامیکی ورق نسبتاً ضخیم در تماس با سیال و قرار گرفته روی بستر پسترناک^ اورتوتروپيک <sup>6</sup>را مورد مطالعه قرار دادند.

از طرفی در سالهای اخیر با توسعه موتورهای پرقدرت صنایع هوافضا، توربینها و راکتورها که مورد کاربردی این مقاله است، نیاز به موادی با مقاومت حرارتی بالا، مقاومتر از لحاظ مکانیکی و همچنین مقاوم در برابر خوردگی احساس شده است. در سالهای قبل از مواد سرامیکی خالص برای پوشش و

- 7- Rayleigh-Ritz
- 8- Pasternak
- 9- Orthotropic

<sup>1-</sup> Fluid-Structure Interaction

<sup>2-</sup> Hovercraft

<sup>3-</sup> Biomechanic

<sup>4-</sup> Perturbation

<sup>5-</sup> Henkel

<sup>6-</sup> Galerkin

روکش قطعات با درجه کارکرد بالا و یا از مواد کامپوزیت لایهای استفاده می شد که هر یک مشکلاتی از قبیل ایجاد حفره و ترک و یا پدیده لایهلایه شدن در کامپوزیتها را به همراه داشت. بنابراین دانشمندان FGM (مواد معتبر تابعی) را پیشنهاد کردند.

مفهوم FGM اولین بار در سال ۱۹۸۴ در طول یک پروژه هوا فضا در ژاپن پیشنهاد شد، [۱۴،۱۵]. FGM، مواد کامپوزیتی با ریزساختار ناهمگن هستند، که خواص مکانیکی آنها بهطور ملایم و پیوسته از یک سطح به سطح دیگر جسم تغییر میکند. نوع رایج آن ترکیب پیوستهای از سرامیک و فلز است. این مواد از اختلاط پودر فلز و سرامیک بهدست می آیند و توسط روشهای مختلفی از جمله متالورژی پودر تهیه میشوند[۱۶]. تغییر فلز و سرامیک از یک سطح به سطح دیگر کاملا پیوسته است. به گونهای که یک سطح از جنس سرامیک خالص و سطح دیگر فلز خالص است. بین دو سطح ترکیب پیوستهای از هر دو ماده وجود دارد. خواص مکانیکی نیز با توجه به نوع ترکیب، تغییرات پیوستهای در جهت ضخامت دارد. این مواد با توجه به پیوستگی ترکیب مواد تشکیل دهنده، خواص مکانیکی مؤثرتری نسبت به مواد کامپوزیت لایهای دارند. با توجه به موارد ذکر شده، این مواد نوید کاربردهای فراوان در شرایط سخت و پیچیده را میدهند. بهطوری که این مواد، در سالهای اخیر مورد توجه بیشتری از طرف مجامع مهندسی قرار گرفتهاند.

در زمینه مواد متغیر تابعی تحقیقات زیادی انجام شده است ولی بیشتر این مطالعات به بحث جابهجایی و تنشهای حرارتی محدود شده است. از حدود یک دهه گذشته محققان بحث ارتعاش ورقهای ساخته شده از مواد متغیر تابعی را مورد مطاله قرار دادهاند. ردی[۱۷]، یک رابطه تحلیلی و همچنین یک مدل اجزامحدود برای ورقهای مستطیلی از جنس مواد متغیر تابعی با در نظر گرفتن تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سه ارائه نمود. ارتعاش سهبعدی ورقهای مدور FGM توسط نای و ژونگ [۱۸] به صورت تحلیلی بررسی شد. یک روش نیمه تحلیلی برای ارتعاشات آزاد متقارن و اجباری یک ورق مدور FGM توسط

نیکخواه بهرامی و همکارانش[۱۹] ارائه گردید. دونگ<sup>ن</sup>[۲۰] ارتعاش آزاد سهبعدی یک ورق مدور FGM با شرایط مرزی متفاوت و استفاده از روش چبیشف– ریتز <sup>۲</sup>بررسی نمود. چن و همکارانش[۲۱]، تحلیل سهبعدی ارتعاشات پوسته استوانهای FGM پر شده از سیال را مورد مطالعه قرار دادند. در این بررسی از یک مدل لایهای تقریبی استفاده شده که برای تغییرات مواد در راستای شعاعی مناسب است.

در این مقاله به بررسی ارتعاشات مخزن با جداره استوانهای صلب و کف الاستیک از جنس مواد متغیر تابعی حاوی سیال پرداخته شده است. فرض شده است که سیال غیرلزج و تراکمناپذیر و شرایط مرزی ورق کف مخزن بهصورت گیردار باشد. پتانسیل سرعت برای سیال بهصورت جملات بسط توابع ویژه نوشته شده است. از روش ریلی– ریتز برای محاسبه فرکانس و مودهای طبیعی مخزن حاوی سیال استفاده شده است. همچنین در این مطالعه روی فرکانسهای مربوط به ارتعاش سازه بحث شده است. زیرا بهطور کلی در مخازن حاوی سیال به دو مسئله توجه می شود، یکی فرکانس های مربوط به ارتعاش سازه و دیگری مربوط به ارتعاش سطح سیال. در این بررسی با توجه به اینکه اثر امواج سطح آزاد سیال در مقابل ارتعاش سازه برای سازههایی که بینهایت انعطاف پذیر نیستند بسیار کم است، از اثر امواج سطح آزاد سیال صرف نظر می شود[۲۲]. مشخصه جدید و برجسته این مقاله نسبت به کارهای قبلی انجام شده استفاده از یک روش نیمه تحلیلی با در نظر گرفتن اثر مواد متغیر تابعی مختلف روی ارتعاشات یک ورق مدور در تماس با سیال است. قابل توجه است که در این مقاله مزایای استفاده از این مواد جدید نسبت به مواد همگن قبلی بررسی میشود و همچنین تأثیر نحوه آرایش مواد تشکیل دهنده ورق بر ارتعاش سازه در تماس با سیال، مورد مطالعه قرار گیرد. جنس کف مخزن در این مطالعه، FGM به ازای سه تابع مختلف (توانی، سیگموئید یا نمایی) درنظر گرفته شده است. درستی روش ارائه شده، با مقايسه نتايج حاصل از اين مطالعه با نتايج تحليل المان محدود انجام شدهاست. همچنین نتایج بهدست آمده با نتایج عددی و آزمایشگاهی موجود در سایر مقالات تأیید شده است. تأثیر

<sup>1-</sup> Functionally Graded Materials

<sup>2-</sup> Chebyshev-Ritz method

کسر حجمی مواد متغیر تابعی (پارامتر ماده)، ارتفاع سیال و تعداد قطرها و دوایر گرهای (شماره مودها) بر روی مقدار فرکانس های طبیعی سیستم و همچنین شکل مودها، از جمله نتایجی است که در این مطالعه بررسی شده است.

۲- مدل ریاضی

مطابق شکل (۱) مخزن از یک پوسته استوانهای صلب به شعاع a و ارتفاع L و کف الاستیک به ضخامت h تشکیل شده و کف مخزن از مواد متغیر تابعی با مدولالاستیسیته شده و کف مخزن از مواد متغیر تابعی با مدولالاستیسیته شده و کف مخزن از مواد متغیر تابعی با مدولاستیسیته است. مخزن تا ارتفاع H از سیالی غیرلزج و تراکمناپذیر با چگالی جرمی  $\rho_L$  پر شده است. مختصات شعاعی، محیطی و



۲-۱- مواد متغیر تابعی (FGM) همانطور که پیشتر اشاره شد FGM کامپوزیتی غیرهمگن است و با توجه به شکل (۲) خواص مکانیکی آنها به آرامی و پیوسته از یک سطح به سطح دیگر تغییر می کند و همین تغییر پیوسته تابع یک سطح به سطح دیگر تغییر می کند و همین می سوله استفاده شده است به سه دسته اصلی تقسیم و که در ادامه معرفی می شود.



شکل (۲) هندسه و دستگاه مختصات ورق FGM مربوط به کف مخزن.

برای ورق کف مخزن محور مختصات z از سطح میانی و محور  $\overline{z}$  از سطح بالایی ورق آغاز شده است. مدول الاستیسیته و چگالی جرمی ورق به طور پیوسته در راستای ضخامت ورق (محورz) تغییر می کند. ولی از آنجایی که اثر ضریب پواسون بر تغییر شکل، بسیار کمتر از اثر مدول الاستیسیته است و همچنین در مواد مختلف بازه تغییراتی بسیار کمی دارد بنابراین فرض شده که ضریب پواسون در کل ورق یکسان باشد[۲۳]. انواع مدلهای مورد استفاده در توابع مواد FGM عبارت است از:

– **P-FGM :** در این نوع، خواص ماده از یک تابع توانی پیروی میکند. روابط مربوط به این حالت بهصورت زیر است [۲۴].

$$G(z) = \left(\frac{h/r + z}{h}\right)^p \tag{1}$$

که p پارامتر ماده، h ضخامت ورق و یا پوسته و تابع (G(z) نیز کسر حجمی محلی است. بدین ترتیب خصوصیات این مواد بهصورت زیر بهدست می آید:

$$E(z) = G(z)E_{m} + [1 - G(z)]E_{c}$$

$$\rho(z) = G(z)\rho_{m} + [1 - G(z)]\rho_{c}$$

$$(Y)$$

$$- \mathbf{N} - \mathbf{N} -$$

$$G_{\Upsilon}(z) = \gamma - \frac{\gamma}{\gamma} \left( \frac{h/\Upsilon - z}{h/\Upsilon} \right)^{p} \quad for \quad 0 \le z \le h/\Upsilon$$

$$G_{\Upsilon}(z) = \frac{\gamma}{\gamma} \left( \frac{h/\Upsilon + z}{h/\Upsilon} \right)^{p} \quad for \quad -h/\Upsilon \le z \le 0$$
(F)

– **E-FGM":** در این نوع، از یک تابع نمایی برای توزیع مواد در راستای ضخامت استفاده میشود[۲۴].

- 1- Power-law FGM
- 2- Sigmoid FGM
- 3- Exponential FGM

$$W(r,\theta) = \cos(n\theta) \sum_{i=0}^{\infty} q_i \left[ J_n \left( \frac{\lambda_{ni}r}{a} \right) + A_{ni} I_n \left( \frac{\lambda_{ni}r}{a} \right) \right]$$
(\$

که  $n \ e \ i$  به ترتیب شماره قطرها و دوایر گرهای و  $q_i$  پارامترهای بسط ریتز میباشد.  $J_n$  و  $J_n$  توابع بسل و شبه بسل مرتبه nمیباشند. توابع مجاز انتخابی از یکدیگر مستقل خطی بوده و یک مجموعه کامل را تشکیل میدهند.  $\lambda_{ni}$  یک پارامتر فرکانسی مرتبط با فرکانس طبیعی ورق مدور گیردار در خلأ بوده و از رابطه زیر حاصل میشود[۲۵].

$$J_{n}(\lambda_{ni})I'_{n}(\lambda_{ni}) - J'_{n}(\lambda_{ni})I_{n}(\lambda_{ni}) = 0$$
 (Y)

که *J'* و *I'* مشتق توابع *J* و *I*، نسبت به متغیر r هستند. ثابت شکل مودها برای ورق مدور گیردار به صورت زیر است:

$$A_{ni} = -\frac{I_n(\lambda_{ni})}{J_n(\lambda_{ni})} \tag{A}$$

همچنین رابطهی <sub>۸ni</sub> با فرکانس طبیعی ورق مدور گیردار در خلأ مطابق زیر است:

$$\omega_{ni} = \lambda_{ni}^{\mathsf{Y}} \sqrt{\frac{D}{Aa^{\mathsf{F}}}} \tag{9}$$

$$A = \int_{-h/\Upsilon}^{h/\Upsilon} \rho(z) dz$$

$$D = \int_{-h/\Upsilon}^{h/\Upsilon} E(z) z^{\Upsilon} dz$$
(1.)

مقادیر A و D برای مواد متغیر تابعی مختلف بهصورت زیر تعیین میشوند:

$$P - FGM:$$

$$\begin{cases}
A = \rho_c h + (\rho_m - \rho_c) \left( \frac{\tau^{-(1+p)} h}{(p+1)} \right) \times \\
(1 + \csc(\pi (p+1)) \sin(\pi p)) \\
D = (E_m - E_c) \left( \frac{\tau^{-(\tau+p)} h^{\tau}}{(1 - \nu^{\tau})(p+1)(p+\tau)(p+\tau)} \right) \times \\
(1 + \csc(\pi (p+1)) \sin(\pi p)) + \frac{E_c h^{\tau}}{1 \tau (1 - \nu^{\tau})}
\end{cases}$$

$$\begin{cases} E(z) = Q_{\gamma}e^{B_{\gamma}(z+h/\gamma)} & Q_{\gamma} = E_{c} \text{ and } B_{\gamma} = \frac{1}{h}\ln(\frac{E_{m}}{E_{c}}) \\ \rho(z) = Q_{\gamma}e^{B_{\gamma}(z+h/\gamma)} & Q_{\gamma} = \rho_{c} \text{ and } B_{\gamma} = \frac{1}{h}\ln(\frac{\rho_{m}}{\rho_{c}}) \end{cases}$$

$$(\Delta)$$

که  $E_m = e_m \alpha$  مدول الاستیسیته و چگالی جرمی فلز در سطح رویی ورق (  $P_m = z = 1$  یا z = 0 است.  $E_c = c$  مدول الاستیسیته و چگالی جرمی سرامیک در سطح زیرین ورق ( (+/-z) است. شکل ( p) تغییرات مدول الاستیسیته در راستای ضخامت ورق برای سه نوع ماده تابعی متفارت را نشان می دهد. در مطابق آن خصوصیات ماده در نزدیکی سطح نزدیکی سطح زیرین ورق به ازای 1 > q و در نزدیکی سطح رویی ورق به ازای 1 > q با نرخ بیشتری نسبت به سایر نقاط روق دچار تغییر می شود.



شكل(٣) تغييرات مدول الاستيسيته در راستاي ضخامت ورق FGM.

## ۲-۲- ورق کف مخزن

در این مقاله به منظور استخراج معادله دینامیکی سیستم و به دنبال آن پیداکردن فرکانس های طبیعی و شکل مودهای مسئله از روش ریلی– ریتز استفاده می شود. به این منظور تغییرات زمانی در مسئله به صورت هارمونیک شده و همچنین از توابع ویژه مربوط به یک ورق مدور گیردار در خلأ به عنوان توابع مجاز<sup>1</sup> برای جابه جایی عرضی ورق (W) در تماس با سیال استفاده می شود[۲۵].

<sup>1-</sup> Admissible function

۲-۳- رفتار دینامیکی بر همکنش سیال-سازه مطابق شکل (۱) مشاهده شد مخزن از سیال تراکمناپذیر غیرلزج تا ارتفاع H از کف مخزن پر شده است. در این بررسی امواج سطحی سیال و اثرات فشار هیدرودینامیکی سیال صرفنظر شده است. برای یک سیال تراکمناپذیر غيرلزج، پتانسيل تغيير مكان سيال بايستي معادله لاپلاس را ارضا نماید[۲۶, ۲۷]. (19)  $\nabla^{\mathsf{T}} \varphi(r, \theta, \overline{z}) = \circ$ پتانسیل تغییر شکل سیال arphi و پتانسیل سرعت سیال  $\widetilde{arphi}$  طبق رابطه زیر با یکدیگر در ارتباطاند.  $, i^{\Upsilon} = -1$  $(\mathbf{1}\mathbf{V})$  $\widetilde{\varphi}(r,\theta,\overline{z},t) = -i\omega\varphi e^{i\omega t}$ در رابطه فوق arphi فرکانس طبیعی میباشد و مسئله با فرض حرکت هارمونیک بررسی شده است. در سطح تماس بین ورق کف مخزن و سیال، سرعت آنها در راستای قائم بایستی با یکدیگر برابر باشد. این شرط برای حالتی که در سطح بین ورق و سيال كاويتاسيون وجود ندارد، برقرار است.  $(\partial \varphi / \partial \bar{z})_{\bar{z}=0} = -W(r,\theta)$  $(\Lambda \Lambda)$ در سطح تماس بین سیال و جداره استوانهای صلب مخزن سرعت شعاعي سيال برابر صفر است.  $(\partial \varphi / \partial r)_{r=a} = 0$ در سطح آزاد سیال ( $\overline{z} = H$ ) فشار دینامیکی سیال صفر  $(\varphi)_{\overline{z}=H} = \circ$ (7.) با اعمال شرایط مرزی ذکر شده، انرژی جنبشی سیال با استفاده از تئوری گرین به صورت زیر نوشته می شود [۲۹].  $T_L^* = \frac{1}{r} \rho_L \iint_{\Omega \to \Omega} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial \chi} dS$  $(\mathbf{1})$  $=\frac{1}{\mathbf{x}}\rho_L \iint_{S_{\mathbf{x}}} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial r} dS - \frac{1}{\mathbf{x}}\rho_L \iint_{S} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial \overline{z}} dS$  $=\frac{1}{2}\rho_L \iint \varphi W dS$ که  $\chi$  جهت عمودی به سمت خارج در هر نقطه روی سطح مرزی از دامنه سیال (S) است. سطح S از دو قسمت S و S

تشکیل شده که <sub>۵</sub>۸ سطح در تماس با پوسته استوانهای مخزن و <sub>۶</sub>۲ سطح در تماس با ورق کف مخزن است. با استفاده از بسط توابع ویژه، پتانسیل تغییر شکل سیال *φ* بهصورت زیر مفروض است [۲۶–۲۷].

$$S - FGM:$$

$$\begin{cases}
A = \frac{h}{r}(\rho_m + \rho_c) \\
D = \frac{h^r}{r \epsilon (1 - \nu^r)}(E_m + E_c) \\
E - FGM:
\end{cases}$$
(11)

$$\begin{cases} A = \frac{h(\rho_m - \rho_c)}{\ln\left(\frac{\rho_m}{\rho_c}\right)} \\ B = \frac{h^{\mathsf{r}}(E_m - E_c) \left(\mathsf{r} + \cdot \cdot \mathsf{r} \Delta \ln\left(\frac{E_m}{E_c}\right)^{\mathsf{r}}\right)}{\ln\left(\frac{E_m}{E_c}\right)^{\mathsf{r}} (\mathsf{l} - v^{\mathsf{r}})} \\ - \frac{-h^{\mathsf{r}}(E_m + E_c) \ln\left(\frac{E_m}{E_c}\right)}{\ln\left(\frac{E_m}{E_c}\right)^{\mathsf{r}} (\mathsf{l} - v^{\mathsf{r}})} \\ \ln\left(\frac{E_m}{E_c}\right)^{\mathsf{r}} (\mathsf{l} - v^{\mathsf{r}}) \end{cases}$$

$$T_P^* = \frac{1}{r} \int_{-h/r}^{h/r} \int_{\circ}^{r\pi} \int_{\circ}^{a} \rho(z) W^{\mathsf{Y}} r dr d\theta dz \qquad (1\mathsf{Y})$$

با جایگذاری روابط قبلی در رابطه (۱۲)، انرژی جنبشی ورق <sup>\*</sup>T بهصورت زیر ساده میشود.

$$T_P^* = \frac{1}{r} A a^r \psi_n \sum_{i=0}^{\infty} q_i^r \tag{17}$$

$$\psi_n = \begin{cases} \forall \pi & if \quad n = \circ \\ \pi & if \quad n > \circ \end{cases}$$
(14)

با استناد به رابطه نسبت ریلی<sup>۱</sup>، بیشینه انرژی پتانسیل ورق را میتوان بهصورت حاصلضرب انرژی جنبشی ورق در حالت خلاً در مجذور فرکانس طبیعی آن نوشت.

$$U_{P} = \frac{1}{r} A a^{r} \psi_{n} \sum_{i=0}^{\infty} q_{i}^{r} \omega_{ni}^{r}$$

$$= \frac{1}{r} \frac{D}{a^{r}} \psi_{n} \sum_{i=0}^{\infty} q_{i}^{r} \lambda_{ni}^{r}$$
(15)

1- Rayleigh quotient

www.SID.ir

که

$$\xi_{nik} = \frac{1}{a^{Y}} \int_{0}^{a} J_{n} \left( \varepsilon_{nk} \frac{r}{a} \right) I_{n} \left( \lambda_{ni} \frac{r}{a} \right) r dr$$

$$I_{n} \left( \lambda_{n$$

$$T_{L}^{*} = \frac{1}{r} \rho_{L} a^{r} \psi_{n} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} q_{i} q_{h}$$

$$\times \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\zeta_{nik} + A_{ni} \xi_{nik})}{\varsigma_{nk} \varepsilon_{nk}} (\zeta_{nhk} + A_{nh} \xi_{nhk}) \tanh\left(\varepsilon_{nk} \frac{H}{a}\right)$$
(Y9)

برای مودهای متقارن رابطه (۲۶) بهصورت زیر بهدست می آید:

$$\begin{split} -\mathbf{X}_{\circ i \circ} + \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{X}_{\circ i k} J_{\circ} \bigg( \varepsilon_{\circ k} \frac{r}{a} \bigg) \frac{\varepsilon_{\circ k}}{a \tanh(\varepsilon_{\circ k} H / a)} & (\mathbf{T} \cdot \mathbf{)} \\ = & \bigg[ J_{\circ} \bigg( \lambda_{\circ i} \frac{r}{a} \bigg) + A_{\circ i} I_{\circ} \bigg( \lambda_{\circ i} \frac{r}{a} \bigg) \bigg] \\ \mathbf{e} \ \ \mathbf{t}_{\circ i \circ} \mathbf{t}_{\circ i \circ i \circ \circ} \mathbf{t}_{\circ i \circ} \mathbf{t}_{\circ i \circ \circ} \mathbf{t}_{\circ i \circ} \mathbf{t}_{\circ i \circ \circ} \mathbf{t}_{\circ i \circ} \mathbf{t}_{\circ i \circ} \mathbf{t}_{\circ i \circ \circ} \mathbf{t}_{\circ i \circ} \mathbf{t}_{\circ} \mathbf{t}_{\circ i \circ} \mathbf{t}_{\circ i \circ} \mathbf{t}_{\circ i \circ} \mathbf{t}_{\circ} \mathbf{t}_{\circ i \circ} \mathbf{t}_{\circ} \mathbf{t}_{\circ$$

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{\circ i \circ} &= -\frac{\mathbf{Y}}{a^{\mathbf{Y}}} \int_{\circ}^{a} \left[ J_{\circ} \left( \lambda_{\circ i} \frac{r}{a} \right) + A_{\circ i} I_{\circ} \left( \lambda_{\circ i} \frac{r}{a} \right) \right] r dr \\ &= -\frac{\mathbf{Y}}{\mathbf{Y} \lambda_{\circ i}} \left[ J_{\mathbf{Y}} (\lambda_{\circ i}) + A_{\circ i} I_{\mathbf{Y}} (\lambda_{\circ i}) \right] \end{aligned}$$

(۳۱)  
ثابت 
$$X_{oik}$$
 برای  $< k < 0$  و  $< n$  از رابطه (۲۷) بهدست می آید.  
ثابت  $X_{oik}$  برای مودهای متقارن،  
بنابراین انرژی جنبشی سیال  $T_L^*$ ، برای مودهای متقارن،  
 $T_L^* = \frac{1}{2} \rho_L a^{\intercal} \psi_n \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} q_i q_h [\frac{1}{2} \frac{H}{a} X_{\circ i \circ} X_{\circ h \circ}$   
 $+ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\zeta_{\circ ik} + A_{\circ i} \xi_{\circ ik})}{\varsigma_{\circ k} \varepsilon_{\circ k}} (\zeta_{\circ hk} + A_{\circ h} \xi_{\circ hk}) \tanh\left(\varepsilon_{\circ k} \frac{H}{a}\right)]$ 

$$\omega^{\mathbf{Y}} = \frac{U_P}{T_P^* + T_L^*} \tag{(YY)}$$

# ۲-٤- مسئله مقدار ویژه برای محاسبات عددی فرکانس طبیعی و ضرایب بسط ریتز، برای محاسبات عددی فرکانس طبیعی و ضرایب بسط ریتز، ۳ جمله از بسط مربوط به جابهجایی عرضی ورق Ø (۶) و N جمله از بسط مربوط به پتانسیل تغییر شکل سیال Ø ۱+N جمله برای مودهای متقارن) لحاظ شده است. مقدار N

$$\varphi = \sum_{i=0}^{\infty} q_i \Phi_i \tag{YY}$$

با حل معادله لاپلاس با استفاده از روش جداسازی متغیرها تابع
$$\Phi_i$$
 برای مودهای متقارن (  $n=0$  ) به شکل زیر بهدست می آید.

$$\Phi_{i}(r,\theta,\bar{z}) = X_{\circ i \circ}(\bar{z}-H) + \sum_{k=1}^{\infty} X_{\circ ik} J_{\circ}(\varepsilon_{\circ k}r/a) \times \left[ \cosh(\varepsilon_{\circ k}\bar{z}/a) - \frac{\sinh(\varepsilon_{\circ k}\bar{z}/a)}{\tanh(\varepsilon_{\circ k}H/a)} \right]$$
(YT)

$$\Phi_{i}(r,\theta,\bar{z}) = \cos(n\theta) \sum_{k=1}^{\infty} X_{nik} J_{n}(\varepsilon_{nk}r/a) \times \left[ \cosh(\varepsilon_{nk}\bar{z}/a) - \frac{\sinh(\varepsilon_{nk}\bar{z}/a)}{\tanh(\varepsilon_{nk}H/a)} \right]$$
(YF)

که پارامتر 
$$\varepsilon_{nk}$$
 از حل معادله زیر حاصل می شود.  
 $J'_n(\varepsilon_{nk}) = \circ$  ,  $k = 1, \dots, \infty$  (۲۵)  
برای مودهای نامتقارن مسئله، تابع  $\Phi_i$  شرایط مرزی (۱۹) و  
(۱۰) و معادله لاپلاس (۱۶) را ارضا می نماید. با اعمال شرط  
مرزی (۱۸)، ثابت  $X_{nik}$  به صورت زیر محاسبه می شود.

$$\sum_{k=1}^{\infty} X_{nik} J_n(\varepsilon_{nk}r/a) \frac{\varepsilon_{nk}}{a \tanh(\varepsilon_{nk}H/a)} = \left[ J_n\left(\lambda_{ni}\frac{r}{a}\right) + A_{ni} I_n\left(\lambda_{ni}\frac{r}{a}\right) \right]$$
(Y9)

معادله (۲۶) بایستی در تمام بازه  $a \ge r \ge 0$  برقرار باشد. با ضرب رابطه  $J_n(\varepsilon_{nk}r/a)r$  در دو طرف رابطه و انتگرالگیری در بازه ۰ و a و همچنین استفاده از خصوصیت تعامد توابع بسل رابطه زیر حاصل میشود:  $X_{nik} = \frac{(\zeta_{nik} + A_{ni}\xi_{nik})}{\varsigma_{nk}\varepsilon_{nk}} a \tanh\left(\varepsilon_{nk}\frac{H}{a}\right)$  (۲۷) که متغیرهای استفاده شده در رابطه بالا به صورت زیر بیان

$$\begin{aligned} \zeta_{nk} &= \frac{1}{a^{\mathsf{Y}}} \int_{\circ}^{a} J_{n}^{\mathsf{Y}} \bigg( \varepsilon_{nk} \frac{r}{a} \bigg) r dr \\ \zeta_{nik} &= \frac{1}{a^{\mathsf{Y}}} \int_{\circ}^{a} J_{n} \bigg( \varepsilon_{nk} \frac{r}{a} \bigg) J_{n} \bigg( \lambda_{ni} \frac{r}{a} \bigg) r dr \end{aligned} \tag{YA}$$

www.SID.ir

و M به اندازه کافی بزرگ انتخاب می شود تا جوابهای مسئله از دقت مورد نیاز بهره مند باشند. بنابراین تمام جملههای انرژی به صورت مجموعه های محدودی به دست می آیند. در این مرحله برای سادگی کار، نماد برداری q که درایه های آن ضرایب بسط ریتز است معرفی می شود.

$$\mathbf{q} = \begin{cases} q_{\circ} \\ \vdots \\ q_N \end{cases}$$
(٣٤)

بیشینه انرژی پتانسیل مربوط به ورق کف مخزن (۱۶) را می توان به صورت زیر نوشت.

$$U_P = \frac{1}{r} \psi_n \mathbf{q}^T \mathbf{K}^P \mathbf{q} \tag{75}$$

که درایه های ماتریس قطری 
$$\mathbf{K}^{\mathbf{I}}$$
 از رابطه زیر به دست می آید.  
 $\mathbf{K}_{ih}^{P} = (D/a^{\mathsf{T}})\lambda_{ni}^{\mathsf{f}}\delta_{ih}$   $i,h = 1,..., M$  (۳۶)  
انرژی جنبشی مربوط به ورق کف مخزن (۱۲) را می توان  
به صورت زیر نوشت.

$$r_P^* = \frac{1}{r} \psi_n \mathbf{q}^T \mathbf{M}^P \mathbf{q} \tag{(44)}$$

که

$$\mathbf{M}_{ih}^{P} = Aa^{\mathsf{T}}\delta_{ih} \tag{TA}$$

$$T_L^* = \frac{1}{r} \psi_n \mathbf{q}^T \mathbf{M}^L \mathbf{q} \tag{(4)}$$

درایههای ماتریس M<sup>L</sup> برای مودهای نامتقارن از رابطه زیر استخراج میشود.

$$\mathbf{M}_{ih}^{L} = \rho_{L}a^{r} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\zeta_{nik} + A_{ni}\xi_{nik})}{\varsigma_{nk}\varepsilon_{nk}} (\zeta_{nhk} + A_{nh}\xi_{nhk})$$
$$\times \tanh\left(\varepsilon_{nk}\frac{H}{a}\right) \qquad for \, i, h = \circ, \dots, M$$
$$(\mathbf{f} \cdot \mathbf{)}$$

برای مودهای متقارن ( n=۰) ماتریس 
$$\mathbf{M}^L$$
 بهصورت زیر  
خواهد بو د.

$$\mathbf{M}_{ih}^{L} = \rho_{L}a^{\mathsf{r}}\left(\frac{1}{\mathsf{r}}\frac{H}{a}\mathbf{X}_{\circ i\circ}\mathbf{X}_{\circ h\circ} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\zeta_{\circ ik} + A_{\circ i}\xi_{\circ ik})}{\varsigma_{\circ k}\varepsilon_{\circ k}}\right)$$
$$\times \left(\zeta_{\circ hk} + A_{\circ h}\xi_{\circ hk}\right) \tanh\left(\varepsilon_{\circ k}\frac{H}{a}\right)$$
for  $i, h = \circ, \dots, M$  (F1)

با جایگذاری روابط(۳۵)، (۳۷) و (۳۹) در رابطه نسبت ریلی (۳۳) و سپس کمینه کردن آن نسبت به ضرایب  $q_i$ ، رابطه ماتریسی زیر حاصل است. (۴۲) =  $(\mathbf{K}^P)q - \Omega^{\Upsilon}(\mathbf{M}^P + \mathbf{M}^L)q = \circ$ معادله (۴۲) یک مسئله مقدار ویژه خطی با ماتریس های حقیقی است که Ω فرکانس زاویهای مخزن حاوی سیال است.

## ۳- نتایج و بحث

بر پایه تحلیل انجام گرفته، مسئله مقدار ویژه معادله (۴۲)، برای پیدا کردن فرکانسهای طبیعی و شکل مودهای مخزن استوانهای حاوی سیال از جنس مواد متغیر تابعی حل شده است. برای حصول اطمینان از درستی و دقت روش ارائه شده، نتایج بهدست آمده از روش حاضر با نتایج تحلیل المان محدود (FEM) و نتایج آزمایشگاهی و عددی موجود در مقالات قبلی مقایسه شده است.

در تحلیل المان محدود، یک مدل سه بعدی با المانهای پوسته کامپوزیتی چهار گوش (*S4R*) برای سازه و المانهای سه بعدی *Tکوستیک* ( *AC3D8*) برای ناحیه سیال استفاده شده است. المان پوسته دارای چهار گره و المان سیال از هشت گره تشکیل شده است. المان بندی سیال و سازه در محل تماس با یکدیگر به گونهای است که گرههای المانهای سازه و سیال کاملاً بر یکدیگر منطبق هستند و در سطح تماس بین سیال و سازه در دیواره خیس مخزن از قید تماس گرهای در راستای ممود استفاده شده است. در مقاله حاضر از تأثیرات امواج سطح آزاد چشم پوشی شده است، در نتیجه پتانسیل سرعت مفر است. همچنین برای مدلسازی مواد متغیر تابعی از مدل لایهای با تعداد لایه کافی استفاده شده است[۲۹].

می به عنوان سیال در نظر گرفته شده است و  $\rho_L = 1 \cdots kg/m^r$  به عنوان سیال در نظر گرفته شده است و خصوصیات مواد متغیر تابعی استفاده شده در ساخت مخزن نیز مطابق جدول (۱) است. شعاع ورق کف مخزن  $a = \cdot/146 m$  در نظر ضخامت ورق  $h = \cdot/\cdot\cdot T$  در نظر گرفته شده است همچنین جینس ورق فیولاد با میدول

www.SID.ir

الاستیسیته GPa ۲۰۶، ضریب پواسون ۲۵/۰ و چگالی جرمی ۷۸۵۰kg/m<sup>۳</sup> در نظر گرفته شده است و برای اعتبارسنجی نتیجه مقاله حاضر با مقالات مرجع مقایسه شده است.

جدول(۱)خصوصیات مواد استفاده شده در ورق FGM.

	سراميك	فلز	
آلومينا	زيركونيا	آلومينيوم	خواص ماده
$(Al_{r}O_{r})$	$(ZrO_{Y})$	(Al)	
۳۸۰	۲۰۰	٧.	مدول الاستيسيته
			(GPa)
****	۵۷۰۰	20.2	چگالی ( <i>kg/m</i> <sup>r</sup> )

۳–۱– تحقیق همگرائی و صحت روش برای بررسی همگرائی و درستی روش ارائه شده، مخزنی با ابعاد معرفی شده و پر شده از سیال تا ارتفاع A = H مورد بررسی قرار گرفته است. جداول (۲) و (۳) همگرایی روش ارائه شده برای اعداد مختلف از جملات استفاده شده در بسطها را نشان میدهند. دیده می شود که برای داشتن دقت

عرضی ورق (۵=*M*) و پنج جمله در بسط مربوط به پتانسیل تغییر شکل سیال *Φ*(۵=*N*)، کافی است. به منظور بررسی صحت و درستی روش ارائه شده در این مقاله، مسئله را با در نظر گرفتن جنس فولاد برای مخزن حل شده است و نتایج حاصل با نتایج تحلیلی، آزمایشگاهی و عددی موجود در مطالعات قبلی که توسط عسکری و دانشمند[۱۲]، چیبا[۳] و ارگین و اوگورلو[۳۰] در جداول (۵) و (۶) مقایسه شده است. این جداول بیانگر این است که بیشترین خطا بین نتایج، به تر تیب نویسندگان ذکر شده در بالا کمتر از //۳/۰، //۳/۲ و //۳ است. همچنین تحلیل المان محدود برای بررسی صحت نتایج ارائه شده در این مقاله به ازای حالتی که جنس مخزن از مواد متغیر تابعی ارائه شده نتایج نیمه تحلیلی و المان محدود است. به گونه ای که بیشترین

اختلاف میان نتایج کمتر از ۴/۷٪ شدهاست.

خوب در نتایج، پنج جمله از بسط مربوط به جابه جایی

			Ν	مود	شماره	نوع مادہ FGM
۵	۴	٣	۲	т	п	
٧٩/٩٩	V9/99	۸۰/۰۱	٨٠/٠۶	0	0	
441/14	471/14	421/24	00.120	١		P-FGM
۲۲۱/۰۳	221/04	221/08	**1/**	0	١	_
۸۱۹/۷۸	A19/9V	۸۲۱/۷۵	907/98	١		-
٧٦/٧٦	٧٦/٧٦	٧٦⁄٧٨	٧٦/٨٣	0	0	
409/49	409/01	40V/•0	540/61	١		S-FGM
212/14	212/24	212/9.	212/09	0	١	_
V94/14	V90/•Y	V9۶/۸۲	9YV/VV	١		_
۷۵/۳۱	۷۵/۳۱	۷۵/۳۲	۷۵/۳۵	0	0	
401/47	401/04	404/14	531/21	١		E-FGM
7.9/94	2.9/94	2.4/90	11./11	0	١	-
V91/Y.	V۹۱/۴۰	۷۹۳/۳۰	979/01	١		-

جدول(۲) تحقیق همگرائی فرکانس های طبیعی(Hz)، تأثیر جملات N با M = ۵.

			M	مود	شماره	نوع مادہ
۵	۴	٣	۲	т	п	FGM
٧٩/٩٩	<b>४</b> ९/९९	٨٠/٠٠	٨٠/٠۵	•	٠	
441/14	471/18	421/29	FVF/FT	١		P-FGM
221/08	221/.4	221/19	221/10	•	١	_
۸۱۹/۷۸	۸۱۹/۹۹	۸۲۰/۶۹	۸۲۳/۹۳	١		-
V9/V9	V9/VV	٧٦/٨٠	٧٦/٨٤	•	•	
409/49	409/01	401/04	409/01	١		S-FGM
212/19	212/9.	212/92	212/02	•	١	_
۷۹۴/۸۳	V90/۰۴	<b>۷۹۵/۷۶</b>	V99/·F	١		
۷۵/۳۱	V0/T1	V0/TT	۷۵/۳۶	•		
401/40	401/01	404/•4	404/08	١		E-FGM
7.9/94	2.9/94	7.9/97	Y1./.V	•	-1	
٧٩١/٢٠	V91/47	747/19	V90/9V	1	$\mathbf{J}$	-

جدول(۳) تحقیق همگرائی فرکانس،های طبیعی(Hz)، تأثیر جملات M با N = ۵.

جدول(۴) فرکانس طبیعی مخزن از جنس مخزن ب*All/ZrO* حاوی سیال به ارتفاع H=a و پارامتر ماده ۲ = p .

E-F	'GM	S-FGM		P-FGM		شماره مود
اجزا محدود	مطالعه فعلى	اجزا محدود	مطالعه فعلى	اجزا محدود	مطالعه فعلى	
VT/TF	V0/M1	٧۴/۵٩	V9/V9	VV/۵۶	٧٩/٧٩	اول <sup>a</sup> (۰ و ۰)
2.6/21	7.9/94	¥144/11	111/24	212/16	221/08	دوم (٥ و ١)
397/.4	4.9/1.	4.4/1.	413/19	41./18	471/94	سوم (٥ و٢)
439/VV	401/40	FFF/91	409/49	400/88	441/14	چهارم(او ٥)
601/29	<i>\$</i> \$ <b>9</b> /18	941/99	9VY/94	<del></del>	694/19	پنجم (٥ و٣)
VV1/F9	V91/T.	V9•/94	۷۹۴/۸۳	V9F/F9	A19/VA	ششم (او۱)
						1 100

(n,m).	
--------	--

جدول(۵) فرکانس طبیعی مخزن از جنس ۲*۰/۸۱، ح*اوی سیال به ارتفاع H=a و پارامتر ماده p=۲.

E-FGM		S-F	S-FGM		P-FGM		
اجزا محدود	مطالعه فعلى	اجزا محدود	مطالعه فعلى	اجزا محدود	مطالعه فعلى		
۹۳/۳۱	۹۵/۵۵	٩٦/٨٨	۱۰۰/۰۲	1.4/.9	1.9/0.	اول <sup>a</sup> (∘و ∘)	
YQV/&L	۲۷۰/۰۳	799/47	209/62	120/10	Y9V/+9	دوم (٥ و ١)	
521/62	5346/19	536/26	549/54	094/99	۵۸۰/۳۱	سوم (° و ۲)	
۵۶۲/۴۰	69./94	۵۷۵/۱۷	۶۰۳/۵۸	820/21	۶۴۰/V۹	چهارم(او٥)	
841/99	۸۸۲/۳۱	181/99	<b>۸۹۳/۹۶</b>	٩.٨/.٢	941/11	پنجم (٥ و٣)	
۱۰۰۰/۹۰	1.40/00	1.74/00	1.04/44	1.1/29	1111/5.	ششم (او۱)	

۳–۲– اثر تعداد قطرهای گرهی (n) تغییرات فرکانس طبیعی با افزایش تعداد قطرهای گرهی (n) در شکل (۴) نشان داده شده است. این شکل بیانگر این است که با افزایش تعداد قطرهای گرهی، فرکانس طبیعی سیستم افزایش مییابد. همچنین به ازای تعداد قطرهای گرهای (n) یکسان، با افزایش تعداد دوایر گرهای (m)، فرکانس طبیعی افزایش مییابد. بنابراین در این مسئله فرکانس طبیعی پایه همواره در mوn مساوی صفر اتفاق میافتد.



## ۳-۳- اثر پارامتر ماده روی فرکانس

در شکل های (۵) و (۶)، اثر تغییر پارامتر ماده متغیر تابعی (p) روی فرکانس های طبیعی مسئله، بهازای m = 0 = m = 0 مقادیر مختلف m در بازه وسیعی مورد مطالعه قرار گرفته است. مطابق این اشکال در وضعیتی که ماده تابعی از نوع *P-FGM* باشد، با افزایش پارامتر ماده (q)، فرکانس های طبیعی افزایش می یابد. علت این افزایش این است که با بزرگ شدن پارامتر ماده متغیر تابعی، ماده منایب در واقع شدن پارامتر ماده متغیر تابعی میل می کند و با توجه به خواص مواد انتخابی این افزایش فرکانس طبیعی قابل توجه به خواص مواد انتخابی این افزایش میل می کند و با توجه به خواص مواد انتخابی این افزایش فرکانس طبیعی قابل توجه است. در واقع بهازای p = q ورق میل می کند و رق خاصیت کاملاً فلزی و زمانی که q به بی نهایت فرکانس طبیعی از این تغییر که محزن خاصیت کاملاً سرامیکی دارد. بیشترین تغییر در فرکانس طبیعی به ازای افزایش پارامتر ماده در بازه q > 0 میل می کند ورق خاصیت کاملاً سرامیکی دارد. بیشترین تغییر می می می می دور قرانی که q به بی نهایت میل می کند ورق خاصیت کاملاً سرامیکی دارد. بیشترین تغییر می میل می کند ورق خاصیت کاملاً سرامیکی دارد. بیشترین تغییر میل می کند ورق خاصیت کاملاً سرامیکی دارد. بیشترین تغییر می می می می می می دور قانس طبیعی به ازای افزایش پارامتر ماده در بازه q > 0



شکل (۶) تغییرات فرکانس طبیعی سیستم با تغییر پارامتر ماده (p) و نمای نزدیک محل برخورد نمودارهای مربوط به مواد تابعی مختلف با یکدیگر (بهازای جنس مخزن ۲۰٫*H=a و H=a)* .

در حالتE-FGM، چون در این مورد خواص ماده تابعیتی از پارامتر p ندارد، مقدار فرکانس های طبیعی وابسته به متغیر p نیست. ولی در مورد ورقS-FGM مشاهده می شود که با تغییر

500

www.SID.ir

پارامتر ماده فرکانس طبیعی ثابت است، بهدلیل آنکه پارامترهای *A* و *D* که با تغییر پارامتر *q* ثابت می ماند. به عبار تی سختی خمشی ورق و انتگرال چگالی جرمی ورق در راستای ضخامت آن با تغییر *q*، ثابت می ماند. همچنین مشاهده می شود که در تمامی مودها همواره به ازای ۱=*q* فرکانس طبیعی -*P* که در تمامی مودها همواره به ازای ۱=*q* فرکانس طبیعی -*P FGM* با *FGM* با می باشد. به ازای ۱>*q* فرکانس -*P FGM* با *FGM* با افزایش تعداد قطرهای گرهای، اختلاف بین فرکانس های *FGM* و *FGM* کاهش می یابد اختلاف بین نمودارهای مربوط به تغییر فرکانس *FGM و* -*F GM* به ازای پارامتر *q* بزرگتری یکدیگر را قطع می کنند.

### ۳–٤– تأثير عمق سيال

برای تخمین زدن تأثیر مقدار سیال روی فرکانس،های طبیعی مخزن حاوی سیال، فرکانس طبیعی نرمالیزه شدهای بهصورت fi / fi تعریف شده است که fi و ft به ترتیب فرکانس های طبیعی مخزن خالی و حاوی سیال برای مودهای متناظر خاص هستند. شکلهای شماره (۷) و (۸) فرکانسهای طبیعی مخزن حاوی سیال را به عنوان تابعی از نسبت پر بودن (H/L) برای تعداد قطرها و دوایر گرهای مختلف نشان میدهد. همانطور که دیده می شود، فرکانس ها با افزایش نسبت پر بودن مخزن کاهش می یابند. اولین فرکانس طبیعی مخزن استوانهای کاملاً پر از سیال (m,n= °) حدود ۲۰٪ نسبت به فرکانس متناظر مخزن خالی از سیال کاهش مییابد. نکته قابل توجه ایناست که نرخ تغییر فرکانس طبیعی با افزایش (H/L) کاهش مییابد به گونهای که به ازای (۲/۱ </۱/۲) با افزایش ارتفاع سیال، تغییرات چشمگیری در مقدار فرکانس طبیعی مشاهده میشود و با افزایش بیشتر ارتفاع سیال این تغییر فرکانس کمتر شده و به ازای (H/L>۰/۵) تغيير اندازه فركانس بسيار ناچيز ميشود. همچنين تأثير سيال بر فرکانس،های مخزن حاوی سیال برای مودهای با تعداد قطرها و دوایر گرهای کمتر، بیشتر است. این نتیجه در توافق با نتایج بهدست آمده توسط كروك و كوال[۳۱] است.



شکل (۸) اثر ارتفاع سیال بر فرکانس طبیعی نرمال شده (به ازای جنس مخزن <sub>۲</sub>*All/ZrO* (*m*=1).

### ۳-0- شکل مودها

چهار شکل مود اول ورق انعطاف پذیر P-FGM در تماس با سیال برای تعداد قطرهای گرهای ۱ و  $\circ = n$  و بهازای مقادیر مختلف ارتفاع سیال به ترتیب در شکلهای (۹) و (۱۰) ارائه شده است.  $\circ = n$  شکل مودهای متقارن و 1=n شکل مودهای غیرمتقارن در  $\circ = \Theta$  و  $\pi = \theta$  میباشند. همانطور که مشاهده میشود با افزایش ارتفاع سیال دامنه جابه جایی ورق کاهش یافته و نقاط گره کمی جابه جا شدهاند. شکل مودهای متقارن نسبت به غیر متقارن تأثیر بیشتری از مقدار سیال می پذیرند. همچنین اثر ارتفاع سیال بر شکل مودها با افزایش تعداد دوایر گرهای (*m*) افزایش مییابد.

### ٤- نتیجه گیری

در این مقاله ارتعاشات یک ورق مدور از جنس مواد متغیر تابعی مختلف در تماس با سیال، مربوط به کف یک مخزن با افزایش ارتفاع سیال فرکانس طبیعی سیستم کاهش می یابد به گونهای که نرخ تغییر فرکانس طبیعی با افزایش ارتفاع سیال کاهش می یابد. تأثیر ارتفاع سیال بر فرکانس طبیعی ورق به تعداد قطرها و دوایر گرهای وابسته است به گونهای که این اثر در تعداد قطرها و دوایر گرهای کوچکتر، بزرگتر است. همچنین با افزایش ارتفاع سیال، دامنه میزان جابهجایی ورق در شکل مودها کاهش یافته و نقاط گره کمی جابجا شدهاند. در ضمن شکل مودهای متقارن نسبت به غیر متقارن تأثير بيشتري از مقدار سيال مي پذيرند.

عمودی مورد بررسی قرار گرفت. در این مطالعه یک روش نیمه تحلیلی قوی و آسان با در نظر گرفتن برهمکنش سیال– سازه و خواص مواد متغیر تابعی ارائه شد. صحت و دقت روش مذکور با اطلاعات عددی و آزمایشگاهی مقالات قبلی و همچنین تحلیل المان محدود انجام شده در این بررسی، مقایسه شد و نتایج انطباق بسیار خوبی را نشان داد. افزایش پارامتر ماده موجب افزایش فرکانس.های طبیعی در P-FGM و در عین حال کاهش نرخ تغییر فرکانس میشود. تغييرات اين پارامتر تأثير مهمي به روى شكل مودها ندارد.







شکل (۹) چهار مود اول مخزن حاوی سیال با تعداد قطر گرهای∘*n* به ازای مقادیر مختلف ارتفاع سیال ( جنس مخزن Al/ZrO<sub>r</sub>): ..., $H=\circ$  ---- ) m = r (د) m = r (د) m = r (د)  $m = \circ$  (الف)  $m = \circ$ . ( H=L - . - و H=۰/۱L.







شکل (۱۰) چهار مود اول مخزن حاوی سیال با تعداد قطر گرهای n=۱ به

ازای مقادیر مختلف ارتفاع سیال ( جنس مخزن ،Al/ZrO و p= ): ..., $H=\circ$  ---- )  $m = \mathfrak{r}$  (د)  $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}$  (ج)  $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}$  (د)  $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}$  (د)  $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}$ .  $(H=L-.-)H=\circ/L$ .

$H/a=\cdot$ ,s			$H/a=\cdot/N$				، مود	شماره	
ارگین و اوگورلو[۳۰]	چيبا [۳]	عسکری و دانشمند[۱۲]	مطالعه حاضر	ارگین و اوگورلو[۳۰]	چيبا [۳]	عسکری و دانشمند[۱۲]	مطالعه حاضر	т	п
117/A	11.	117/V	117/89	172/0	١٧٧	۱۷۳/۹	177/74	•	•
266/6		262/2	222/22	390/V		394/4	366/64	•	١
54.19	54.	547/8	544/11.	۶۸۸/۱	594	<b>۶</b> ۸۹/۱	۶ <b>۸۹/۱۱</b>	١	٠
٩.٢/۵		٨٩١/٩	14Y/1V	۱۰۷۲/۳		1.99/1	1.99/14	١	١
1898/9	141.	1389/5	۱۳۸۷/۳۰	1010/1	188.	1017/.	1017/4.	۲	٠
1991/٣		1987/7	1988/•1	2122.		2182/2	2188/10	۲	١

جدول (۴) فرکانس طبیعی مخزن از جنس فولاد(Hz).

۵٩

<i>H/a</i> =Y			-		H/a=\		مود	شماره
ارگين و	عسکری و دانشمند	•1 tit	ارگين و	چيبا	عسکری و دانشمند	مطالعه	_	
او گورلو[۳۰]	[17]	مطالعه حاصر	او گورلو[۳۰]	[٣]	[17]	حاضر	т	п
۷۱/۸	۶٩/١	۶٩/۱۲	۹١/٣	٩٢	٩٠/٣	٩٠/٣٠	•	٠
744/7	741/.	26./98	7FV/F		744/4	144/41	•	١
499/0	490/V	490/1.	010/1	۵۲۰	611/9	011/VY	١	•
۸۸۳/۶	AVY/1	٨٧٢/٠٨	۸۸۶/۳		٨٧٤/٩	AV0/Y0	١	١
1208/1	120.12	1801/01	13777	139.	1387/.	1386/39	۲	•
1986/0	1940/.	1944/01	1976/9		1976/6	1908/08	۲	١

جدول(V) فركانس طبيعي مخزن از جنس فولاد (Hz).

- [8] Cheung Y.K., Zhou D., Hydroelastic vibration of a circular container bottom plate using the Galerkin method, *Journal of Fluids* and Structures, 16, 2002, pp. 561–580.
- [9]Liang C. C., Liao C. C., Tai Y. S., The free vibration analysis of submerged cantilever plates, *Ocean Engineering*, 28, 2001, pp.1225–1245.
- [10] Jeong K.H., Kim K.J., Hydroelastic vibration of a circular plate submerged in a bounded compressible fluid, *Journal of Sound and Vibration*, 283, 2005, pp. 153–172.
- [11] Jeong K.H., Hydroelastic vibration of two annular plates coupled with a bounded compressible fluid, Journal of Fluids and Structures, 22, 2006, pp. 1079–1096.
- [12] Askari E., Daneshmand F., Free vibration of an elastic bottom plate of a partially fluidfilled cylindrical container with an internal body, *European Journal of Mechanics A/Solids*, 29, 2010, pp. 68–80.
- [13]Kutlu A., Ugurlu B., Omurtag M.H., Ergin A., Dynamic response of Mindlin plates resting on arbitrarily orthotropic Pasternak foundation and partially in contact with fluid, *Ocean Engineering*, 42, 2012, pp. 112–125.
- [14] Yamanouchi M., Koizumi M., Hirai T., Shiota, Resonances of an air-filled elastic cvlindrical shell immersed in a fluid. Proceedings of the First International Functionally Symposium Gradient on Materials, Japan ,1990.

- Kwak M.K., Kim K.C., Axisymmetric vibration of circular plates in contact with fluid, *Journal of Sound and Vibration*, 146, 1991, pp. 381–389.
- [2] Kwak M.K., Vibration of circular plates in contact with water, Transactions of the American Society of Mechanical Engineers, *Journal of Applied Mechanics*, 58, 1991, pp.480–483.
- [3] Chiba M., Nonlinear hydroelastic vibration of a cylindrical tank with an elastic bottom, containing liquid. Part II: linear axisymmetric vibration analysis, *Journal of Fluids and Structures*, 7, 1993, pp. 57–73.
- [4] Bauer H.F., Coupled frequencies of a liquid in a circular cylindrical container with elastic liquid surface cover, *Journal of Sound and Vibration*, 180, 1995, pp. 689–704.
- [5] Amabili M., Bulging modes of circular bottom plates in rigid cylindrical containers filled with a liquid, *Shock and Vibration*, 4, 1997, pp. 51–68.
- [6] Kwak M.K., Han S.B., Effect of fluid depth on the hydroelastic vibration of free-edge circular plate, *Journal of Sound and Vibration*, 230, 2000, pp. 171–185.
- [7] Amabili M., Kwak, M.K., Vibration of circular plates on a free fluid surface; effect of surface waves, *Journal of Sound and Vibration*, 226, 1999, pp. 407–424.

- [25] Leissa A.W., Vibration of Plates, NASA SP-160. U.S Government Printing Office, Washington, DC., 1969.
- [26] Askari E., Daneshmand, F., ,Coupled vibration of a partially fluid-filled cylindrical container with a cylindrical internal body, *Journal of Fluids and Structures*, 25, 2009, pp. 389–405.
- [27] Amabili M., Shell-plate interaction in the free vibrations of circular cylindrical tanks partially filled with a liquid: the artificial spring method, *Journal of Sound and Vibration*, 199, 1997, pp.431–452.
- [28] Zhu F., Rayleigh quotients for coupled free vibrations, *Journal of Sound and Vibration*, 171, 1994, pp. 641–649.
- [29] Virella J., Godoy L., Su'arez, L., Fundamental modes of tank-liquid systems under horizontal motions, *Engineering Structures*, 28, 2006, pp. 1450–1461.
- [30] Ergin A., Ugurlu B., Hydroelastic analysis of fluid storage tanks by using a boundary integral equation method, *Journal of Sound and Vibration*, 17, 2004, pp. 927–939.
- [31] Koval'chuk, Kruk P. S., On the spectrum of natural frequencies of circular cylindrical shells completely filled with a fluid, *International Applied Mechanics*, 42, 2006, pp. 529-535.

- [15] Koizumi M., The concept of FGM, Ceramic Transactions, *Functionally Gradient Materials*, 1993, pp. 34, 3–10.
- [16] Anon, FGM components: PM meets the challenge, Metal Powder Report, 51, 1996, pp. 28–32.
- [17] Reddy J. N., Analysis of functionally graded plates, International journal for numerical method in engineering-International Journal for Numerical Methods in Engineering, 47, 2000, pp. 663–684.
- [18] Nie G.J., Zhong Z., Semi-analytical solution for three-dimensional vibration of functionally graded circular plates, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196, 2007, pp. 4901–4910.
- [19] Allahverdizadeh A., Naei M. H., Nikkhah Bahrami M., Nonlinear free and forced vibration analysis of thin circular functionally graded plates, Journal of Sound and Vibration, 310, 2008, pp. 966–984.
- [20] Dong C. Y., Three-dimensional free vibration analysis of functionally graded annular plates using the Chebyshev–Ritz method, Materials and Design, 29, 1995, pp.1518–1525.
- [21] Chen W.Q., Bian Z.G., Ding H.J., 3D free vibration analysis of a functionally graded piezoelectric hollow cylinder filled with compressible fluid, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 41, 2004, pp. 947–964.
- [22] Morand H.J.P., Ohayon, R., Fluid–Structure Interaction: Applied Numerical Methods, Wiley, New York, 1995.
- [23] Delale F., Erdogan, F., The crack problem for a nonhomogeneous plane, *ASME Journal of Applied Mechanics*, 50, 1983, pp.609–614.
- [24] Shyang-Ho Chi., Yen-Ling Chung., Mechanical behavior of functionally graded material plates under transverse load—Part I: Analysis, *International Journal of Solids and Structures*, 43, 2006, pp. 3657–3674.