فصلنامه علمي پژوهشي

مهندسی مکانیک جامدات

www.jsme.ir



تحلیل استاتیکی استوانه های از جنس مواد هدفمند ارتوتروپیک با طول کوتاه به روش بدون المان

رسول مرادي دستجردي'، مهرداد فروتن'`*، سميه عبداللهي بكتاش"

* نویسنده مسئول: foroutan@razi.ac.ir

چکیدہ

در این مقاله تحلیل استاتیکی استوانه هایی از جنس مواد هدفمند ارتو تروپیک با طول کو تاه به روش بدون المان بررسی شده است. در این روش، توابع شکل حداقل مربعات متحرک برای تقریب میدان جابه جایی در فرم ضعیف معادله تعادل استفاده شده و برای اعمال شرایط مرزی اساسی توابع تبدیل به کار رفته است. در این شبیه سازی از یک مدل متقارن محوری استفاده شده است که خواص مکانیکی آن در راستای شعاع، متناسب با تغییرات کسر حجمی مواد تشکیل دهنده، تغییر می کند. در این مقاله اثرات طول و ضخامت استوانه، توان کسر حجمی توزیع مواد، نوع چیدمان مواد و همچنین اعمال شرایط مرزی اساسی بر توزیع تنش و میدان جابه جایی این استوانه ها بررسی شده است. به منظور اعتبار سنجی، نتایج به دست آمده با نتایج حاصل از روش اجزا محدود و همچنین نتایج سایر محققان، مقایسه و مطابقت بسیار خوبی مشاهده شد. همچنین مشخص شد که روش بدون المان نتایج دقیق تر و هموار تری نسبت به مشاهده شد. همچنین مشخص شد که روش بدون المان نتایج دقیق تر و هموار تری نسبت به روش اجزا محدود دارد. میدان تنش استوانه های هدفمند ار تو تروپیک نیز با نتایج استوانه همای روش اجزا محدود دارد. میدان تش استوانه های می دون المان نتایج دقیق تر و هموار تری نسبت به روش اجزا محدود دارد. میدان تنش استوانه هدفمند ار تو تروپیک نیز با نتایج استوانه های روش اجزا معدود دارد. میدان تش استوانه های هدفمند ار تو تروپیک نیز با نتایج استوانه های روش اجزا محدود دارد. میدان تا می استوانه های هدفمند ار تو تروپیک نیز با نتایج استوانه می توان

واژههای کلیدی

مواد هدفمند ارتوتروپیک، روش بدون المان، تحلیل استاتیکی، متقارن محوری.

۱- کارشناس ارشد، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد خمینی شهر، باشگاه پژوهشگران جوان، خمینی شهر، ایران.

۲- دانشیار، گروه مهندسی مکانیک، دانشکده فنی- مهندسی، دانشگاه رازی، کرمانشاه، ایران.

۳- کارشناس ارشد، گروه مهندسی مکانیک، دانشکده فنی- مهندسی، دانشگاه رازی، کرمانشاه، ایران.

۱ – مقدمه

94

مواد هدفمند (FGM) از ترکیب دو مادهٔ مختلف ساخته می شوند که معمولاً یکی فلز و دیگری سرامیک است، به گونهای که خواص ترکیب حاصل بهطور یکنواخت تغییر کرده و باعث ایجاد میکروساختار غیریکنواخت و یک ماكروساختار با تغييرات پيوسته مي شود. اخيراً تحقيقات وسیعی در زمینه تحلیل استاتیکی استوانههای هدفمند ایزوتروپیک به روش های مختلف انجام شده است از جمله مقالههای هوروگان و چان [۱]. آنها حل استاتیکی دقیقی برای استوانهها و دیسکهای توخالی FGM ایزوتروپیک خطی ارائه کردند. توتونکو و اوزتورک [۲] نیز به تحلیل استاتیکی استوانههای FGM ایزوتروپیک پرداختند. آنها با استفاده از تئوری بینهایت کوچک الاستیسیته حل دقیقی برای تحلیل تنش در لولهها و کرههای FGM تحت فشار داخلی ارائه کردند. جباری و همکارانش [۳] یک حل برای میدان تنش مکانیکی و حرارتی استوانههای توخالی FGM ارائه دادند. توتونکو [۴] در کار دیگری یک روش حل با استفاده از سری های توانی برای میدان تنش و جابه جایی استوانههای توخالی FGM معرفی کرد. لی و پنگ [۵] نیز یک روش جدید برای تحلیل تنش استوانههای ایزوتروپیک FGM با تغییرات دلخواه خواص مکانیکی معرفی کردند. آنها ابتدا مسئله را به یک معادله انتگرالی فردهولم تبدیل و سپس آن را با بسط چندجملهای های لژاندر حل کردند. توتونکو و تمل [۶] با استفاده از روش توابع متمم، میدان تنش و جابهجایی را در استوانههای توخالی FGM در حالت متقارن محوری معرفی کردند. نای و باترا [۷] با استفاده از سریهای فوریه و فروبینیوس استوانهای را با سطح داخلی غیر دایروی و سطح خارجی دایروی تحلیل کردند. آنها استوانه را ارتوتروپیک و خواص مکانیکی را بهصورت توانی در راستای شعاعی متغیر در نظر گرفتند. یه و شنگ [۸] نیز اثر لبه های آزاد را در تحلیل استوانه های ارتوتروییک چند لایه تحت بار عرضی متقارن محوری به روش معادله

روش بدون المان در حل برخي از مسائل نيز به کار گرفته شده است. به عنوان مثال اسلادک و همکارانش [۱۰] با استفاده از روش MLPG به تحلیل استاتیکی در مسائل دو بعدی و جامدات الاستيك/ ويسكوالاستيك خطى و غير ايزوتروييك با تغییرات پیوسته خواص مکانیکی پرداختند. آنها از تابع شکل MLS^۳ برای تقریب کمیتهای فیزیکی در معادلههای انتگرالی مرزی محلی (LBIEs^۴) استفاده کردند. چینگ و ین [۱۱] استوانه FGM ایزوتروپیک تحت فشار داخلی را به روش MLPG و با استفاده از بردار پایه MLS تحلیل کردند. اسلادک و همكارانش [1۲] يك روش بدون المان برمبناي معادلات انتگرالی مرزی محلی و تقریبهای MLS برای تحلیل انتقال حرارت گذرا در محیطهای FGM ارائه کردند. ژیلهولی و همکارانش [۱۳] نیز از روش MLPG برای آنالیز دو بعدی تغییر شکلهای دینامیکی و استاتیکی FGMها استفاده کردند. آنها تحلیل خود را برای دیسک دوار FGM ارتوتروییک و استوانه FGM توخالي تحت فشار انجام دادند. اسلادك و همكارانش [۱۴] فرمولاسيون LIE^a را براي مسائل FGM متقارن محوري بهدست آوردند و برای استوانه تحت فشار داخلی به روش بدون المان توزيع تنش را محاسبه كردند. ژائو و ليو [16] پاسخ کمانش پنل.های پوسته استوانهی FGM را تحت بار فشاری محوری و حرارتی ارائه کردند. فرمولبندی آنها برپایه تئوری تغيير شكل برشي مرتبه اول پوستهها و روش بدون المان kp-Ritz بود. اما در نزدیکترین کارها، تحلیل های استاتیکی، ارتعاشات آزاد و اجباری، دینامیکی و انتشار موج تنش در استوانههای FGM ایزوتروپیک به روش بدون المانی مشابه روش به کار گرفته شده در این مقاله، انجام شده است [۱۶–۱۹].

4- Local Boundary Integral Equations

فضا-حالت ارائه کردند. سبحانی عراق و یاس [۹] تحلیل استاتیکی و ارتعاشات آزاد پوسته استوانههای ارتوتروپیکی را که به طور هدفمند و پیوسته تقویت شدهاند به روش تئوری الاستیسیته سه بعدی ارائه کردند.

²⁻ Meshless Local Petrov-Galerkin

³⁻ Moving Least Square

⁵⁻ Local Integral Equations

¹⁻ Functionally Graded Material

۲- معادلات حاکم

روش بدون المان به کار گرفته شده بر فرم ضعیف معادله تعادل، رابطه (۱)، مبتنى است: $\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{\varepsilon}) \, d\boldsymbol{v} - \int_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\delta} \, \mathbf{u} \, d\boldsymbol{s} = \circ$ (1)در رابطه فوق Ω حوزه حل مسئله و Γ قسمتی از این حوزه است که نیروی سطحی بر آن اثر می کند. همچنین پارامترهای κε،σ و u بهترتیب بردارهای تنش، کرنش، نیروی خارجی و بردار جابهجایی هستند. بردارهای تنش و کرنش در مسائل متقارن محوري به شکل زير است: $\mathbf{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_z, \sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_{rz} \end{bmatrix}^T$ (٢) $\mathbf{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_z, \varepsilon_r, \varepsilon_{\theta}, \varepsilon_{rz} \end{bmatrix}^T$ در این مسائل بردار تنش با بردار کرنش به شکل زیر در ارتباط است: (٣) $\sigma = D\epsilon$ برای مسائل ارتوتروییک در حالت تقارن محوری، ماتریس D طبق رابطه زير بيان مي شود: $\mathbf{D} = \begin{vmatrix} c_{1\gamma} & c_{\gamma\gamma} & c_{\gamma\psi} & \circ \\ c_{1\psi} & c_{\gamma\psi} & c_{\psi\psi} & \circ \\ \circ & \circ & \circ & c_{\lambda\lambda} \end{vmatrix}$ $c_{11} = \frac{1 - v_{\rm YY} v_{\rm YY}}{E_{\rm Y} E_{\rm Y} \Delta} \ , \ c_{\rm YY} = \frac{1 - v_{\rm Y1} v_{\rm YY}}{E_{\rm 1} E_{\rm Y} \Delta}$ $c_{\rm yyy}=\frac{1-\nu_{\rm Y1}\,\nu_{\rm 1Y}}{E_{\rm Y}\,E_{\rm Y}\,\Delta}$, $c_{\rm dd}=G_{\rm 1Y}$ $c_{1Y} = \frac{\nu_{Y1} + \nu_{Y1} \nu_{YY}}{E_Y E_Y \Delta}, c_{YY} = \frac{\nu_{YY}}{E_Y}$ (۵) E. E. A $c_{1\psi} = \frac{\nu_{\psi 1} + \nu_{\gamma 1} \nu_{\psi \gamma}}{E_{\gamma} E_{\psi} \Delta}$ $\Delta = \frac{1 - v_{\mathbf{r}\mathbf{r}}v_{\mathbf{r}\mathbf{r}} - v_{\mathbf{r}\mathbf{1}}v_{\mathbf{1}\mathbf{r}} - v_{\mathbf{1}\mathbf{r}}v_{\mathbf{r}\mathbf{r}}}{E_{\mathbf{1}}E_{\mathbf{r}}E_{\mathbf{r}}}$

۳- فرمول بندی روش بدون المان

برای تقریب میدان جابهجایی از توابع کل MLS (حداقل مربعات متحرک) استفاده شده است که بر اساس این تقریب متغیر میدان، (u(X)، در نقطه X(r,z) بهصورت زیر تقریب زده می شود:

 $\mathbf{u}(\mathbf{X}) = \sum \boldsymbol{\Phi}_i \hat{\mathbf{u}}_i \tag{9}$

در این مقاله، در کاری جدید تحلیل استاتیکی استوانههای FGM ارتوتروپیک تحت فشار داخلی بررسی شده است. علاوه بر اینکه این استوانهها کوتاه (دارای شرایط مرزی اساسی) است از یک روش بدون المان نیز استفاده شده است. به این منظور یک مدل متقارن محوری در نظر گرفته شده که خواص مکانیکی ماده در راستای شعاع متناسب با تغییرات کسر حجمی مواد، متغیر میباشد. یکی از مزایای روش های بدون المان در مقابل روش های اجزا محدود، به کار گرفتن توابع شکل هموار است. از آنجایی که میدان تنش با مشتق گرفتن از میدان جابه جایی به دست می آید بنابراین در روشهای بدون المان علاوه بر میدان جابهجایی، میدان تنش پیوسته و همواری ارائه می شود. با توجه به این ویژگی منحصر به فرد در روش های بدون المان به محاسبات اضافی بعد از حل، نیاز نیست. نتایج حاصل از روشهای بدون المان می تواند در طراحی دقیق استوانه های FGM بسيار مفيد باشد. در اين مقاله يك روش بدون المان ابتكاري به کار گرفته شده است. این روش تا حد زیادی به روش بدون المان گالرکین (EFG) شباهت دارد، با این تفاوت که برای اعمال شرایط مرزی اساسی، از تابع تبدیل استفاده شده است. در روش EFG بهواسطه اینکه شرایط مرزی توسط ضرایب لاگرانژ اعمال می شود، ابعاد دستگاه معادلات و متعاقب آن حجم محاسبات افزایش چشمگیری پیدا خواهد كرد. اما استفاده از تابع تبديل در اين مقاله، موجب ثابت ماندن ابعاد دستگاه معادلات شده و متعاقب آن حجم محاسبات نسبت به روش EFG کاهش می یابد. لذا در کار حاضر علاوه بر اینکه یک روش بدون المان جدید و بسیار دقیق برای تحلیل استوانههای ارتوتروپیک FGM بهکار گرفته شده است، این مسئله برای استوانه های کوتاه دارای تکیه گاه (اعمال شرایط مرزی اساسی) نیز انجام شده است. همچنین برنامهای برای روش اجزا محدود توسعه داده شده و نتایج دو روش در شرایط شبکه گرهی یکسان (با المانهای مستطیلی دوخطی) با یکدیگر و با کارهای قبلی مقایسه شده است. اثرات طول و ضخامت استوانه، توان کسر حجمي توزيع مواد، نوع چيدمان مواد و همچنين اعمال شرايط مرزی اساسی بر توزیع تنش و میدان جابه جایی این استوانه ها بررسی شده است.

û =

در رابطه فوق
$$\mathbf{i}$$
 بردار تغییر مکان مجازی (تعمیم یافته)
 $\hat{\mathbf{u}} = [\hat{u}_1, \hat{u}_{\mathsf{X}}, \dots, \hat{u}_n]^T$ (V)
 $\hat{\mathbf{u}} = [\hat{u}_1, \hat{u}_{\mathsf{X}}, \dots, \hat{u}_n]^T$ (V)
 $\hat{\mathbf{u}} = [\hat{u}_1, \hat{u}_{\mathsf{X}}, \dots, \hat{u}_n]^T$ (V)
 $\Phi_i(\mathbf{X}) = \Phi_i(\mathbf{X})$ در نقطه X است و
 $\Phi_i(\mathbf{X}) = \mathbf{P}^{\mathbf{T}}(\mathbf{X})[\mathbf{M}(\mathbf{X})]^{-1}\mathbf{W}(\mathbf{X}-\mathbf{X}_i)\mathbf{P}(\mathbf{X}_i)$
 $(\mathbf{X}) \qquad (\mathbf{X}) = \mathbf{P}^{\mathbf{T}}(\mathbf{X})[\mathbf{M}(\mathbf{X})]^{-1}\mathbf{W}(\mathbf{X}-\mathbf{X}_i)\mathbf{P}(\mathbf{X}_i)$
 $(\mathbf{X}) \qquad (\mathbf{X})$
 $(\mathbf{X}) \qquad (\mathbf{X}) = \mathbf{Y}(\mathbf{X})[\mathbf{M}(\mathbf{X})]^{-1}\mathbf{W}(\mathbf{X}-\mathbf{X}_i)\mathbf{P}(\mathbf{X}_i)$
 $\mathbf{Y}(\mathbf{X}) \qquad (\mathbf{Y})$
 $\mathbf{Y}(\mathbf{X}) = \mathbf{U}_i$
 $\mathbf{Y}(\mathbf{Y}) = \mathbf{U}_i$
 $\mathbf{Y}(\mathbf{Y}$

که در رابطه فوق:

$$[(\hat{u}_{r})_{1}, (\hat{u}_{z})_{1}, \dots, (\hat{u}_{r})_{n}, (\hat{u}_{z})_{n}]^{T}$$
 (۱۲)
 $[\Phi_{1} \circ \Phi_{2} \circ \dots \circ \Phi_{n} \circ]$

$$\mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 & \Phi_3 & \Phi_1 \\ \circ & \Phi_1 & \circ & \Phi_2 & \dots & \circ & \Phi_n \end{bmatrix}$$
(177)

بردار کرنش بهوسیله جملههای مقادیر مجازی کرهها، بهصورت زیر بیان میشود:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\hat{\mathbf{u}} \tag{14}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi_{I}}{\partial r} & \circ & \frac{\partial \Phi_{\Upsilon}}{\partial r} & \circ & \cdots & \frac{\partial \Phi_{n}}{\partial r} & \circ \\ \frac{\Phi_{I}}{r} & \circ & \frac{\Phi_{\Upsilon}}{r} & \circ & \cdots & \frac{\Phi_{n}}{r} & \circ \\ \circ & \frac{\partial \Phi_{I}}{\partial z} & \circ & \frac{\partial \Phi_{\Upsilon}}{\partial z} & \cdots & \circ & \frac{\partial \Phi_{n}}{\partial z} \\ \frac{\partial \Phi_{I}}{\partial z} & \frac{\partial \Phi_{I}}{\partial r} & \frac{\partial \Phi_{\Upsilon}}{\partial z} & \frac{\partial \Phi_{\Upsilon}}{\partial r} & \cdots & \frac{\partial \Phi_{n}}{\partial z} & \frac{\partial \Phi_{n}}{\partial r} \end{bmatrix}$$
(14)

که در ماتریس فوق *n* تعداد گرههای مؤثر است که در هر گره بهصورت مجزا محاسبه میشود. با جایگذاری روابط (۳)، (۱۱) و (۱۴) در رابطه (۱) این رابطه بهدست میآید: $\delta(\hat{\mathbf{u}})^T (\int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dv) \hat{\mathbf{u}} - \delta(\hat{\mathbf{u}})^T \int_{\Gamma} \mathbf{\Phi}^T \mathbf{F} ds = \circ$ (۱۶)

 $\mathbf{k}\hat{\mathbf{U}} = \mathbf{f}$ (17)

$$\hat{\mathbf{U}} = [(\hat{u}_r)_1, (\hat{u}_z)_1, \dots, (\hat{u}_r)_N, (\hat{u}_z)_N]^T$$

$$\sum_{x \in N} N \text{ subset } N \text{$$

$$\mathbf{k} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dv \quad , \ \mathbf{f} = \int_{\Gamma} \mathbf{\Phi}^T \mathbf{F} ds \tag{1A}$$

برای انتگرالگیری عددی در رابطه فوق، حوزه حل مسئله توسط سلولهای پس زمینه دو بعدی، که داخل هر کدام نقاط گوس قرار دارد، شبکهبندی میشود. سپس ماتریس سختی کل، k، بهواسطه انتگرالگیری بر روی تمام نقاط گوس داخل حوزه حل مسئله، Ω، بهصورت عددی بهدست میآید. بردار نیرو، f، نیز بهصورت مشابه بهواسطه انتگرالگیری بر

روی تمام نقاط گوس روی مرز Γ شکل می گیرد. همانگونه که مشاهده شد، رابطه (۱۷) برحسب میدان جابهجایی تعمیم یافته ارائه شده است زیرا توابع شکل *MLS* فاقد خاصیت دلتای کرونیکر هستند. لذا رابطه (۱۷) باید برحسب میدان جابهجایی حقیقی ارائه شود تا شرایط مرزی اساسی در آن اعمال شود. در این گونه مسائل استفاده از تابع تبدیل یکی از مهمترین شیوههای اعمال شرایط مرزی اساسی است. در این روش با تصحیح مقادیر توابع شکل در گرهها، خاصیت دلتای کرونیکر برای تابع شکل ایجاد می شود[۲1]. بنابراین با ایجاد خاصیت دلتای کرونیکر، شرایط مرزی اساسی مانند روش اجزا محدود اعمال می شود. در این روش بردارهای جابهجایی حقیقی و تعمیم یافته طبق رابطه زیر در ارتباط هستند:

$$\mathbf{U} = \mathbf{T}\hat{\mathbf{u}} \tag{19}$$

 $\mathbf{U} = \begin{bmatrix} (u_r)_1, (u_z)_1, \dots, (u_r)_N, (u_z)_N \end{bmatrix}^T$ (Y.) c, (1) the begin the observation of the observat

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \Phi_{1}(\mathbf{x}_{1}) & \circ & \Phi_{\gamma}(\mathbf{x}_{1}) & \cdot & \cdot & \Phi_{N}(\mathbf{x}_{1}) & \circ \\ \circ & \Phi_{1}(\mathbf{x}_{1}) & \circ & \Phi_{\gamma}(\mathbf{x}_{1}) & \cdot & \cdot & \Phi_{N}(\mathbf{x}_{1}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \Phi_{1}(\mathbf{x}_{N}) & \circ & \Phi_{\gamma}(\mathbf{x}_{N}) & \circ & \cdot & \Phi_{N}(\mathbf{x}_{N}) & \circ \\ \circ & \Phi_{1}(\mathbf{x}_{N}) & \circ & \Phi_{\gamma}(\mathbf{x}_{N}) & \cdot & \circ & \Phi_{N}(\mathbf{x}_{N}) \end{bmatrix}$$

$$(\mathbf{Y})$$

با استفاده از رابطه (۱۹) رابطه (۱۷) به صورت زیر تغییر می کند: $\hat{\mathbf{k}}\mathbf{U} = \hat{\mathbf{f}}$ (۲۲) $\hat{\mathbf{k}} = \mathbf{T}^{-\mathbf{T}} \cdot \mathbf{k} \cdot \mathbf{T}^{-1}$, $\hat{\mathbf{f}} = \mathbf{T}^{-\mathbf{T}} \cdot \mathbf{f}$

با توجه به اینکه رابطه فوق برحسب میدان جابهجایی حقیقی ارائه شده لذا در این معادله، شرایط مرزی اساسی با منطقی مشابه منطق روش اجزا محدود اعمال می شود.

٤- خواص مکانیکی در استوانههای FGM

استوانهای با شعاع داخلی r_i شعاع خارجی r_o و طول L را در نظر بگیرید. خواص مکانیکی این استوانه در راستای شعاعی به طور پیوسته تغییر می کند. نوع این تغییرات تأثیر بسیار زیادی بر رفتار استاتیکی استوانه دارد که در ادامه بررسی می شود. تاکنون چندین مدل برای این تغییرات ارائه شده که پر کاربردترین آنها، مدل کسر حجمی است. در این مدل، خواص مکانیکی در راستای شعاع، طبق رابطه زیر تغییر می کند:

$$V_f(r) = \left(\frac{r^n - r_i^n}{r_o^n - r_i^n}\right)$$
(iei)

$$p = p_i + V_f(r)(p_o - p_i) \qquad (-YY)$$

در روابط فوق V_f بیانگر کسر حجمی ماده (جنس لایه خارجی)، n توان کسر حجمی، p بیانگر خواص مکانیکی ماده و اندیس های i و o بیانگر لایه داخلی و لایه خارجی جسم هستند.

٥- مثالهای حل شده و نتایج آن

در این مرحله ابتدا دقت روش بدون المان به کار گرفته با مقایسه نتایج حاصل برای استوانههای FGM ایزوتروپیک از این روش با نتایج حاصله از FEM و کارهای قبلی منتشر شده و نیز نتایج حاصل از استوانههای FGM ارتوتروپیک با استوانههای ارتوتروپیک چند لایه بررسی شده است. در نهایت میدان تنش و جابهجایی برای استوانههای FGM ارتوتروپیک با طول بلند (حالت کرنش صفحهای) و طول کوتاه (اعمال شرایط مرزی اساسی) ارائه میشود. در تحلیلهای مذکور برای استوانههای بلند (حالت کرنش صفحهای) یک شبکه

۶۹×۶۶ در نظر گرفته شد. در دو روش بدون المان و اجزا محدود، شبکههای گرهی یکسان در نظر گرفته شده است. در روش بدون المان برای استوانههای بلند (حالت کرنش صفحهای) سلولهایی به تعداد ۲۵×۵۵ و برای استوانههای حوتاه به تعداد ۲۵×۵۵ و برای استوانههای مسلولها نیز نقاط گوس ۲×۲ چیده شده است. همچنین در مرز داخلی استوانه به دلیل اعمال فشار داخلی، سلولهای یک داخلی استوانه به دلیل اعمال فشار داخلی، سلولهای یک نمونهای از شبکه گرهی ۸×۱۰ را با نقاط توپر، توزیع نقاط گوس با علامت × را به تعداد ۵۵ محدی با علامت * را مماهدی از می محدی با علامت * را شهاهده میشود که دو سر این استوانه در دو جهت محوری و برای استوانه می مقید و تحت فشار داخلی به تعداد ۵۵ محدی با علامت * را شهاهده میشود که دو سر این استوانه در دو جهت محوری و برای استوانه می مقید و تحت فشار داخلی آور دارد.



شکل (۱) طرح شماتیک از ناحیه حل مسئله، توزیع گره و نقاط گوس.

٥-١- اعتبار سنجي نتايج

ابتدا استوانه ی FGM ایزوتروپیک که مدول الاستیسیته آن از شعاع داخلی تا شعاع خارجی طبق رابطه (۲۳) تغییر می کند در نظر گرفته شده است. این استوانه بلند (حالت کرنش صفحه ای) و تحت فشار داخلی، P_i ، قرار دارد. در این استوانه نسبت مدول الاستیسیته سطح خارجی به مدول الاستیسیته سطح داخلی، $e_o/E_i = 1$ ، ضریب پواسون ثابت و $r_i - \gamma$ است. همچنین در این استوانه نسبت شعاع داخلی به شعاع خارجی $r_i/r_o = \gamma/0, \gamma$ است. تغییرات



FGM شکل (۲−الف) تنش محیطی نرمالیزه در راستای شعاع استوانه FGM ایزوتروپیک برای ۲/۰ = ۰/۱.



FGM شکل (۲-ب) تنش محیطی نرمالیزه در راستای شعاع استوانه FGM ایزوتروپیک برای ۲۰/۵ .

تنش محیطی (σ_{θ}/P_i) در راستای شعاع استوانه و به ازای توان کسر حجمی (γ_{θ}/P_i) در شکل های (γ_{θ}/P_i) و (γ_{-}) آمده است. در این شکل مشاهده می شود که نوع تغییرات مدول الاستیسیته تأثیر به سزایی بر توزیع تنش دارد. ضمن اینکه از مقایسه نتایج حاصله از دو روش بدون المان و اجزا محدود و نتایج ارائه شده توسط لی و پنگ [۵]، مشخص می شود که روش بدون المان به کار گرفته شده از دقت کافی و بسیار بالایی در تحلیل این نوع مسائل برخوردار است. علاوه بر این از مقایسه شکلهای (γ_{-} الف) و (γ_{-}) اثر توان کسر حجمی و ضخامت استوانه بر توزیع تنش محیطی قابل استنباط است.

در مرحله دوم اعتبار سنجی، توزیع تنش استوانه FGM ارتوتروپیک و استوانه همگن چند لایه ارتوتروپیک مقایسه شده است. توان کسر حجمی استوانه FGM، ۱=۱ و ترکیبی از دو ماده ارتوتروپیک گرافیت– اپوکسی در لایه داخلی و شیشه– اپوکسی در لایه خارجی است. خواص مکانیکی این دو ماده در جدول (۱) گزارش شده است. استوانههای دو و سه لایه همگن نیز تغییرات استوانه FGM را تقريب مي زند. اين استوانه ها بلند (شرايط كرنش صفحه اي) تحت فشار داخلی، P_i، و با نسبت شعاع داخلی به شعاع خارجی، ۲_i/r_o=۱/۵، در نظر گرفته شده است. توزیع تنش های محیطی و شعاعی حاصله از روش بدون المان و اجزا محدود برای این استوانهها به ترتیب در شکل های (۳– الف) و (۳– ب) آمده است. همانطور که مشاهده می شود افزایش تعداد لایه ها در استوانه های چند لایه از دو به سه باعث نزدیکتر شدن میدان تنش به میدان تنش استوانه FGM می شود و همچنین مشاهده می شود که دو روش بدون المان و اجزا محدود جوابهای بسیار مشابهی دارند. از طرفی همانطور که مشاهده می شود برای استوانه های چند لایه تغییرات تنش محيطي در بين لايهها ناپيوسته ولي براي تنش شعاعي پيوسته (شرط جدا نشدن لايه ها) است.

شیشه-اپوکسی	گرافیت- اپوکسی	خاصیت مکانیکی
۵۰	۱۵۵	E ₁ (GPa)
10/1	17/1	E _y (GPa)
۱۵/۲	14/1	E _r (GPa)
•/۴۲۸	•/۴۵٨	$v_{\gamma\gamma}$
•/754	•/۲۴۸	v _{Ir}
•/۲۵۴	•/۲۴۸	v ₁₇
۴/۷	۴/۴	G ₁₇ (GPa)

جدول (۱) خواص مكانيكي مواد ارتوتروپيك مورد مطالعه.



شکل (۳–الف) تنش محیطی نرمالیزه در راستای شعاع استوانههای FGM و چند لایه ارتوتروپیک برای ۲_i/r_o = ۰٫۵.



شکل (۳-ب) تنش شعاعی نرمالیزه در راستای شعاع استوانههای FGM و چند لایه ار توتروییک برای ۲₁/r_o = ۰،۵.

۰-۲- استوانههای *FGM* ارتوتروپیک در حالت کرنش صفحهای

در این مرحله، به منظور بررسی اثرات توان کسر حجمی، ضخامت استوانه و نوع چیدمان مواد، سه مدل استوانه FGM ارتوتروپیک بلند (شرایط کرنش صفحهای) که ترکیبی از دو ماده گرافیت– اپوکسی و شیشه– اپوکسی در نظر گرفته شده است. این استوانهها تحت فشار داخلی ۳*۹۰۸ P_i* قرار دارد و خواص مکانیکی آنها در راستای شعاع، طبق رابطه (۲۳) تغییر میکند.

مدل اول استوانههایی با ابعاد $r_i = \cdot \cdot \circ, r_o = \cdot \circ (m)$ است که گرافیت– اپوکسی در سطح داخلی و شیشه– اپوکسی در سطح خارجی استوانه قرار دارد. توزیع تنش محیطی و شعاعی نرمالیزه و همچنین توزیع جابهجایی شعاعی برای استوانههای همگن از جنس شیشه– اپوکسی و گرافیک– اپوکسی و همچنین استوانه های FGM با توان کسر حجمی ۲۰٫۱۰ – n بهترتیب در شکل های (۴- الف) تا (۴- ج) ارائه شده است. همانطور که مشاهده می شود مقدار توان کسر حجمی تأثیر بزرگتری بر توزیع تنش محیطی و میدان جابهجایی شعاعی نسبت به توزیع تنش شعاعی دارد. چنان که مشاهده می شود مقدار تنش شعاعی از مقدار فشار داخلی در سطح داخلی تا صفر در سطح خارجی بهصورت یکنواخت تغییر میکند (شکل ۴- الف). از طرفی قابل مشاهده است که میدان تنش برای دو ماده همگن یکسان است ولی برای مواد FGM با توان كسر حجمي متفاوت ميدان تنش متفاوتي ديده میشود. لذا مقدار توان کسر حجمی بر مقدار و مکان ماکزیمم و مینیمم تنش تأثیر گذار است که با انتخاب بهترین مقدار توان، مناسبترین توزیع تنش را هم میتوان بهدست آورد. از طرفی مشاهده میشود که میدان جابهجایی برای استوانههای FGM مابین استوانههای همگن بهدست می آید و افزایش مقدار توان کسر حجمی میدان جابهجایی نزدیک تر به پاسخ گرافیت- اپوکسی میدهد، شکل (۴- ج)، که می تواند به دلیل افزایش مقدار این ماده در استوانه باشد. در نمودار توزیع تنش محیطی مشاهده میشود که به ازای مقدار توان کسر حجمی، ۲۰ = ۱، بیشترین تغییرات از نمودار مربوط به استوانه همگن در سطح خارجی و نزدیکی آن می باشد در حالی که این انحراف برای توان کسر

حجمی، ۱۰– = n ، در نزدیکی شعاع داخلی است. (شکل (۴–الف)). دلیل این پدیده میتواند وجود تغییرات شدید خواص مکانیکی و کسر حجمی FGM در این ناحیه باشد.

1.6 n = -10Graphite Or Glass - Epoxy 1.4 1.2 $\sigma_{\!\!\!\!\!\!_{\theta}}^{}/\mathbf{P_{\!\!\!\!\!\!_{1}}}$ 0.8 0.5 0.6 0.9 0.7 0.8 \mathbf{r}/\mathbf{r} شکل (۴-الف) تنش محیطی نرمالیزه در راستای شعاع استوانههای FGM و همگن ارتو تر ويېک بلند مدل اول. -0.2 -0.4 $\sigma_{\! heta}/\mathrm{P_i}$ -0.6 n= 10 -0.8 n= -10 ······ Graphite Or Glass - Epoxy -1 0.5 0.7 0.8 0.6 r/r_{o} شکل (۴-ب) تنش شعاعی نرمالیزه در راستای شعاع استوانههای FGM و همگن ارتوتروپيک بلند مدل اول. x10⁻⁴ n= 10 n = -10Graphite - Epoxy u_r(m) Glass - Epoxy 0.5 0.9 0.6 0.7 0.8 شکل (۴- ج) جابهجایی شعاعی در راستای شعاع استوانههای FGM و همگن ارتوتروپيک بلند مدل اول.

در استوانه مدل دوم با کاهش ضخامت نسبت به استوانههای مرحله قبل تأثیر ضخامت استوانه بر توزیع تنش و میدان جابهجایی بهدست می آید. در این مرحله برای شعاع داخلی و خارجی استوانه به ترتیب، $(m)^{1} = -\sqrt{\lambda}, r_o = 1$ ، در نظر گرفته شده است. نتایج حاصل از این تحلیل در شکلهای (۵- الف) تا (۵- ج) ارائه شده است. همانطور که مشاهده میشود باز هم تغییرات تنش شعاعی تقریباً یکسان و یکنواخت از فشار داخلی در سطح داخلی تا فشار خارجی (صفر) در سطح خارجی میباشد (شکل ۵- ب)، ولی در مقایسه با شکل (۴- ب) تغییرات سریعتر انجام میشود. تنش محیطی تغییرات شدیدتری نسبت به مرحله قبل و نسبت به مقادیر میدان جابهجایی نسبت به مرحله قبل خیلی بالاتر است. از طرفی با افزایش مقدار توان کسر حجمی، مقدار جابهجایی نیز افزایش میابد.



و همگن ارتوتروييک بلند مدل دوم.



شکل (۶- الف) تنش محیطی نرمالیزه در راستای شعاع استوانههای FGM و همگن ارتوتروپیک بلند مدل سوم.



شکل (۶- ج) جابهجایی شعاعی در راستای شعاع استوانههای FGM و همگن ارتوتروپیک بلند مدل سوم.



شکل (۵- ج) جابهجایی شعاعی در راستای شعاع استوانههای FGM و

همگن ار تو تروپيک بلند مدل دوم. در استوانه مدل سوم، تأثير نحوه چيدمان مواد بررسی شده است، بهطوری که در لایه داخلی شیشه-ایوکسی و در لایه خارجی گرافیت- اپوکسی قرار گرفته است. در این استوانه شعاع داخلی و شعاع خارجی، (r_i = ۰/۸, r_o = ۱(m)، در نظر گرفته شده است، لذا از مقایسه نتایج حاصل از این استوانه در شکلهای (۶) و استوانه مرحله قبل در شکلهای (۵) تأثیر نحوه چیدمان بر توزیع تنش و میدان جابهجایی پدیدار میشود. همانطور که مشاهده میشود بازهم تغییرات تنش شعاعی تقریباً یکسان و یکنواخت از فشار داخلی در سطح داخلی تا فشار خارجی (صفر) در سطح خارجی است (شکل ۶– ب)، ولى در مقايسه با شكل (۵– ب) مشاهده مىشود که روند معکوس شده است. بدین معنا که این بار همواره منحنى تغييرات تنش شعاعي براي استوانه همكن همواره بالاتر از دو منحنی دیگر قرار دارد. این نتیجه به دلیل معکوس شدن تغييرات كسر حجمي است. در شكل (۶-الف) مشاهده مي شود که دامنه تغییرات تنش محیطی در استوانه های FGM بر خلاف قبل نسبت به استوانه همگن بیشتر شده و تنشها نیز افزایش یافته است در حالی که همچنان بیشترین انحرافات از حالت همگن نیز نشانگر نحوه تغییرات کسر حجمی است. در شکل (۴- ج) مشاهده می شود که میدان جابه جایی استوانه FGM مابین استوانههای همگن قرار دارد و افزایش توان کسر حجمي موجب كاهش ميدان جابهجايي شده است كه نشانگر این است که هرچه حجم ماده با مدول بالاتر در استوانه بیشتر باشد، استوانه جابه جايي كمترى را از خود نشان مي دهد.



FGM شکل (۷–الف) توزیع تنش محیطی نرمالیزه (σ_{θ}/P_i) استوانه السوانه (۱–۱) ارتوتروپیک کوتاه (n = ۱۰).



FGM شکل (σ_z / P_i) شکل (σ_z / P_i) ارتوتروپیک کوتاه (n = 1.0).

0–۳– استوانه های FGM از تو ترو پیک با طول کو تاه در این مرحله استوانه ای با طول ((m) = L و شعاعهای داخلی و خارجی ($(m) = r_i + r_i$ در نظر گرفته شده است. در این استوانه، گرافیت–اپو کسی در سطح داخلی و شیشه– اپو کسی در سطح خارجی قرار دارد و خواص مکانیکی در راستای شعاعی طبق رابطه (۲۳) با مقدار توان مکانیکی در راستای شعاعی طبق رابطه (۲۳) با مقدار توان داخلی n=1۰ تغییر می کند. این استوانه در حالی تحت فشار داخلی $P_i = 1 \cdot MPa$ قرار دارد که دو سر آن در دو جهت محوری و شعاعی طبق شکل (۱) مقید شده است.

توزیع تنشهای محیطی، ون میزز، محوری و برشی نرمالیزه در شکلهای (۷– الف) تا (۷– د) و همچنین میدانهای جابهجایی شعاعی و محوری در شکل های (۸- الف) و (۸-ب) ارائه شده است. از شکل های (۷) و (۸) مشاهده می شود که نتايج دو روش بدون المان و اجزا محدود مطابقت بسيار نزدیکی با یکدیگر دارند و همچنین نتایج روش بدون المان به علت استفاده از توابع شکل هموار، بسیار پیوستهتر و یکنواختتر از نتایج روش اجزا محدود است. با توجه به تقارن تکیه گاهها و بار گذاریها نسبت به صفحه z/L=۰/۵ توزبع تنشهای محیطی، محوری و ون میزز و همچنین میدان جابه جایی شعاعی نسبت به این صفحه متقارن می باشد. شکلهای (۷- الف) و (۷- ب) نشان میدهد که ماکزیمم تنش محیطی در سطح خارجی و ماکزیمم تنش ون میزز در سطح داخلی استوانه اتفاق میافتد. همچنین در شکلهای (۷– ج) و (۷– د) هیچ تنش محوری و برشی به ترتیب در شعاع میانی و صفحه z/L=۰/۵ استوانه دیده نمی شود. در شکل (۸) مشاهده میشود که ماکزیمم جابهجایی شعاعی در صفحه $z/L = \cdot / 0$ اتفاق می افتد در حالی که در این صفحه جابهجایی محوری وجود ندارد. همچنین مشاهده میشود که مقادیر جابهجایی شعاعی بزرگتر از مقادیر جابهجایی محوری میباشد. از مقایسه شکلهای (۵– الف) و (۷– الف) و همچنین شکلهای (۵– ج) و (۸– الف) مشاهده می شود که کاهش طول استوانه و اعمال شرایط مرزی اساسی باعث کاهش نسبی مقادیر تنش محیطی و جابهجایی شعاعی مي شود.

در نهایت به منظور بررسی اثر طول استوانه بر توزیع تنش محیطی و جابهجایی شعاعی استوانه قبلی به ازای مقادیر مختلف طول استوانه، *L*، تحلیل شده است. توزیع تنش محیطی نرمالیزه و جابهجایی شعاعی در صفحه ۲/۰= *z/L* و در راستای شعاع به ترتیب در شکلهای (۹–الف) و (۹–ب) ارائه شده است. مشاهده می شود که با افزایش مقدار نسبت طول به شعاع خارجی، *L/r*، مقادیر تنش محیطی و جابهجایی شعاعی افزایش یافته و به حالت کرنش صفحهای نزدیک تر می شود.



 L/r_0 ارتوتروييک به ازای مقادير مختلف



شکل (۸- الف) میدان جابه جایی شعاعی ((*u_r (mm*)) استوانه FGM

ارتوتروپيک کوتاه (۱۰=n).



FGM شکل (۸− ب) میدان جابهجایی محوری ((u_z (mm)) استوانه FGM ارتوتر وییک کوتاه (۱۰ = ۱۰).

مراجع

- Horgan C.O., Chan A.M., The pressurized hollow cylinder or disk problem for functionally graded isotropic linearly elastic materials, *Journal of Elasticity*, 55(1), 1999, pp. 43–59.
- [2] Tutuncu N., Ozturk M., Exact solutions for stresses in functionally graded pressure vessels, *Journal of Composite part B*, 32(8), 2001, pp. 683-686.
- [3] Jabbari M., Bahtui A., Eslami M.R., Axisymmetric mechanical and thermal stresses in thick long FGM cylinders, *Journal* of Thermal Stresses, 29(7), 2006, pp. 643–63.
- [4] Tutuncu N., Stresses in thick-walled FGM cylinders with exponentially-varying properties, *Engineering Structures*, 29(9), 2007, pp. 2032-35.
- [5] Li, X, Peng X., A Pressurized Functionally Graded Hollow Cylinder with Arbitrarily Varying Material Properties, *Journal of Elasticity*, 96, 2009, pp. 81-95.
- [6] Tutuncu N., Temel B., A novel approach to stress analysis of pressurized FGM cylinders, disks and spheres, *Composite Structures*, 91(3), 2009, pp. 385-90.
- [7] Nie G.J., Batra R.C., Static deformations of functionally graded polar-orthotropic cylinders with elliptical inner and circular outer surfaces, *Composites Science and Technology*, 70, 2010, pp. 450–457.
- [8] Ye, J.Q., Sheng, H.Y., Free-edge effect in cross-ply laminated hollow cylinders subjected to axisymmetric transverse loads, *International Journal of Mechanical Sciences*, 45, 2003, pp. 1309–1326.
- [9] Sobhani Aragh B., Yas, M. H., Static and free vibration analyses of continuously graded fiber-reinforced cylindrical shells using generalized power-law distribution, *Acta Mechanica*, 215, 2010, pp. 155–173.

٦- نتيجه گيري در این مقاله یک روش بدون المان برای تحلیل استاتیکی استوانههای FGM ارتوتروییک تحت فشار داخلی به کار گرفته شد. (به این منظور یک مدل متقارن محوری که خواص مکانیکی ماده در راستای شعاع متناسب با تغییرات کسر حجمی مواد متغیر است، در نظر گرفته شد.) در روش بدون المان به کار گرفته شده از توابع شکل MLS به منظور تقريب ميدان جابهجايي و از تابع تبديل براي اعمال شرايط مرزی اساسی استفاده شد. در تحلیلهای صورت گرفته، ابتدا نتایج حاصل برای استوانههای FGM ایزوتروپیک از دو روش بدون المان و اجزا محدود با هم و با کارهای قبلی منتشر شده، مقایسه و مطابقت بسیار خوبی دیده شد. همچنین میدان تنش استوانههای FGM ارتوتروپیک نیز با نتایج استوانههای ارتوتروپیک همگن چند لایه تأیید و نیز اثرات طول و ضخامت استوانه، توان کسر حجمی توزیع مواد، نوع چیدمان مواد و اعمال شرایط مرزی اساسی بر توزیع تنش و میدان جابهجایی این استوانهها بررسی و نتایج زیر مشاهده شد:

- نتایج روش بدون المان به علت استفاده از توابع شکل هموار، بسیار پیوسته تر و یکنواخت تر از نتایج روش اجزا محدود است، در حالی که حجم محاسبات در این روش بیشتر از روش اجزا محدود می باشد.
- مقدار توان کسر حجمی و نوع چیدمان مواد نقش مؤثری بر میدان تنش و جابه جایی دارد. لذا با انتخاب مقدار مناسب برای توان می توان در استوانه های FGM ار تو تروپیک، طراحی بهینه داشت.
- جابهجایی شعاعی در استوانههای FGM ارتوتروپیک، رفتاری نزدیک به استوانههای ایزوتروپیک ساخته از جنس غالب دارد.
- کاهش طول استوانه و اعمال شرایط مرزی اساسی موجب
 کاهش مقادیر تنش محیطی و جابهجایی شعاعی می شود.

- [19] Foroutan M., Moradi-Dastjerdi R., Dynamic analysis of functionally graded material cylinders under an impact load by a mesh-free method, *Acta Mechanica*, 219, 2011, pp. 281-290.
- [20] Lancaster P., Salkauskas K., Surface Generated by Moving Least Squares Methods. *Mathematics of Computation*, 37, 1981, pp. 141-158.
- [21] Li S., Liu W.K., Meshfree and particle methods and their applications., *Applied Mechanics Reviews*, 55, 2002, pp. 1-34.

- [10] Sladek J., Sladek, Zhang V., Stress analysis in anisotropic functionally graded materials by the MLPG method, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 29, 2005, pp. 597–609.
- [11] Ching H.K. Yen, S.C. Meshless local Petrov-Galerkin analysis for 2d functionally graded elastic solids under mechanical and thermal loads, *Journal Composite part B*, 36(3), 2005, pp. 223-40.
- [12] Sladek J., Sladek V., Zhang Ch., Transient heat conduction analysis in functionally graded materials by the meshless local boundary integral equation method, *Computational Materials Science*, 28(3-4), 2003, pp. 494–504.
- [13] Gilhooley D.F., Xiao, Batra J.R., McCarthy R.C., Two-dimensional stress analysis of functionally graded solids using the MLPG method with radial basis functions, *Computational Materials Science*, 41(4), 2008, pp. 467-81.
- [14] Sladek V., Sladek J., Zhang Ch., Local integral equation formulation for axially symmetric problems involving elastic FGM, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 32(12), 2008, pp. 1012-24.
- [15] Zhao X., Liew K.M., A mesh-free method for analysis of the thermal and mechanical buckling of functionally graded cylindrical shell panels, *Computational Mechanics*, 45, 2010, pp. 297–310.
- [16] Foroutan M., Moradi-Dastjerdi R., Sotoodeh-Bahreini R., Static analysis of FGM cylinders by a mesh-free method, *Steel and Composite Structures*, 12, 2012, pp. 1-11.
- [17] Mollarazi H.R., Foroutan M., Moradi-Dastjerdi R., Analysis of free vibration of functionally graded material (FGM) cylinders by a meshless method, *Journal of Composite Materials*, 46(5) 2011, pp. 507–515.

[۱۸] مرادی دستجردی ر.، فروتن م.، پوراصغر ۱.، تحلیل ارتعاشات آزاد و اجباری استوانههایی از جنس مواد هدفمند به روش بدون المان، فصلنامه علمی پژوهشی مهندسی مکانیک جامدات، شماره ۵، ۱۳۸۸، صص ۷۷–۶۹.