

کاربرد روش تبدیل ديفرانسیل در بررسی تأثیر بستر ارتجاعی بر جابه‌جایی خارج از صفحه ورق مدور تابعی

سمیه عباسی^۱، فاطمه فرहत نیا^{۲*}، سعید رسولی جزئی^۳

*نویسنده مسئول: farhatnia@iaukhsh.ac.ir

واژه‌های کلیدی

روش تبدیل ديفرانسیل، ورق مدور، بستر
ارتجاعی وینکلر، مواد تابعی، جابه‌جایی
خارج از صفحه.

چکیده

روش تبدیل ديفرانسیلی یک تکنیک حل نیمه تحلیلی - عددی است که با استفاده از آن، معادلات ديفرانسیل حاکم بر ورق به روابط بازگشتی تبدیل شده و شرایط مرزی به معادلات جبری تبدیل می‌شوند. در این مطالعه ورق بر روی بستر ارتجاعی از نوع وینکلر قرار گرفته است. ورق از جنس مواد تابعی است؛ به طوری که خواص آن در راستای ضخامت بر اساس مدل توانی تغییر می‌کند. نتایج تحلیل جابه‌جایی خارج از صفحه ورق تابعی بر روی بستر ارتجاعی تحت بارگذاری گسترده یکنواخت، به ازای مقادیر مختلفی از سفتی بستر ارتجاعی، توان ماده تابعی و شرایط مرزی به دست آمده است. به منظور نشان دادن دقت روش تبدیل ديفرانسیلی و تأیید نتایج حاصل از آن، پاسخ‌ها با نتایج روش اجزا محدود مقایسه شده که تطابق خوبی مشاهده شده است.

۱- کارشناس ارشد، دانشکده مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد خمینی شهر

۲- استادیار، دانشکده مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد خمینی شهر

۳- استادیار، دانشکده مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد خمینی شهر

۱- مقدمه

استفاده گسترده از ورق‌های مدور^۱ در ساخت سازه‌های فضایی و مهندسی، صنایع نظامی، مخازن، دیسک‌های توربین، دیافراگم پمپ‌ها و کلاچ‌ها نشان دهنده اهمیت این ورق‌ها است که با توجه به کاربرد فراوان و مزایای مواد مدرج تابعی^۲ ورق به صورت مدرج تابعی در نظر گرفته شده است. مواد مدرج تابعی موادی هستند که به طور میکروسکوپی ناهمگن بوده [۱] و تغییرات خواص مکانیکی آنها از فلز تا سرامیک به طور پیوسته، به تدریج و بدون هیچ گونه تغییرات ناگهانی صورت می‌گیرد. سرامیک به دلیل ضریب انتقال حرارت کم و مقاومت زیاد در مقابل حرارت، دمای بسیار بالا را تحمل می‌کند و فلز انعطاف پذیری لازم را در این مواد فراهم می‌آورد. دلیل اصلی این دستاورد تغییرات پیوسته و ملایم در کسر حجمی مواد تابعی مدرج از فلز تا سرامیک است. از کاربردهای این مواد می‌توان به استفاده گسترده آنها در سازه‌های هوافضا، راکتورهای هسته‌ای، صنایع الکترونیک و صنایع پزشکی اشاره کرد.

پس از معرفی مواد تابعی توسط محققان ژاپنی [۱] مطالعات زیادی در این زمینه صورت گرفته است. خمش متقارن ورق مدور و حلقوی مدرج تابعی توسط ردی و همکارانش [۲] تحلیل شد. نجف زاده و اسلامی [۳] کمانش ورق‌های مدور مدرج تابعی، تحت فشار شعاعی یکنواخت را بررسی کردند. ابریت [۴] ارتعاش آزاد، کمانش و خیز استاتیکی ورق‌های مدرج تابعی را تجزیه و تحلیل کرده است. خمش دیسک دوار تابعی توسط بیات و همکارانش [۵] بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول ارائه شده است.

مسئله ورق‌هایی که روی بستر ارتجاعی قرار گرفته‌اند اهمیت عملی زیادی در سازه‌های مهندسی مدرن، هوافضا،

بیومکانیک، پتروشیمی، عمران، مکانیک، الکترونیک، هسته‌ای و مهندسی پی دارند.

مدل مکانیکی بستر ارتجاعی، که بیشتر مورد استفاده قرار می‌گیرد توسط وینکلر ارائه شده است. بر اساس این مدل، بستر پشتیبانی کننده از ورق، به عنوان مجموعه‌ای از فنرهای خطی ارتجاعی مستقل نزدیک به هم، بدون اثرات کوپلینگ بین آنها مدل سازی شده است [۶]. بستر ارتجاعی مقاومتی را ایجاد می‌کند که ارتباط مستقیم با میزان نیروهای خارجی و خیز ورق دارد و تغییر مکان بر روی سطح بستر را در قسمت‌های بارگذاری شده محدود می‌کند [۷]. در مدل وینکلر، خواص بستر ارتجاعی توسط پارامتر k_{11} توصیف می‌شود که نشان دهنده سفتی فنرهای عمودی است. به برخی از مطالعات انجام شده در زمینه بستر ارتجاعی در ادامه اشاره می‌شود.

کمانش و ارتعاش ورق ارتوتروپیک دایره‌ای بر روی بستر ارتجاعی وینکلر توسط گوپتا و همکارانش [۸] مورد بررسی قرار گرفت. ماستونگا [۹] مطالعه خود را به مسئله ارتعاش و کمانش تیر-ستون عمیق، بر روی بستر ارتجاعی اختصاص داد. ال موسلی [۱۰] تجزیه و تحلیل فرکانس‌های تیرهای تیموشنکو بر روی بستر پاسترناک را ارائه داد. ارتعاش تیرهای منشوری بر روی بستر ارتجاعی توسط چن [۱۱] با استفاده از روش مربعات دیفرانسیلی مورد مطالعه قرار گرفت. کاسکن [۱۲] پاسخ تیر محدود قرار گرفته بر روی بستر ارتجاعی پاسترناک را تحت بار یک هارمونیک به دست آورد. چن و همکارانش [۱۳] یک روش ترکیبی را برای خمش و ارتعاش آزاد تیرهای قرار گرفته بر روی بستر ارتجاعی پاسترناک به کار بردند. کمانش یک ورق مدور بر روی بستر ارتجاعی، تحت جریان برشی، توسط هاگزیانگ لو و همکارانش [۱۴] تحلیل شد. بن یوسف و

1-Circular Plates

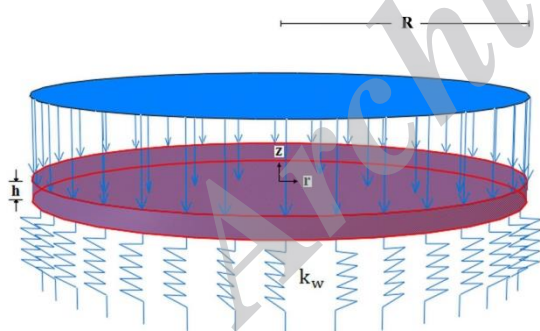
2-Functionally Graded Materials(FGM)

روش تبدیل ديفرانسيل تأثير بستر ارتجاعي وينكلر بر جابجايي خارج از صفحه ورق مدور مدرج تابعي مورد بررسي قرار مي گيرد.

نتايج در شرايط گوناگوني از سفتي بستر ارتجاعي خواص مواد سازنده ورق و شرايط مرزي به دست آمده اند. نتايج به دست آمده با استفاده از روش حل تبدیل ديفرانسيل، دقيق بوده و كاملا منطبق بر نتايج تحلیلی موجود در مقالات معتبر ارائه شده است. همچنين به منظور نشان دادن صحت و دقت روش حل از روش اجزاء محدود استفاده شده که نتايج حاصل توافق بسيار زيادي دارند.

۲- مواد مدرج تابعي و قانون حاکم بر آن:

ورق مدور مدرج تابعي تحت بار گسترده يکنواخت بر روی بستر ارتجاعي در شکل (۱) نشان داده شده است. محور عمود بر صفحه $r-\theta$ است و بار يکنواخت عرضی به سمت پايين، در خلاف جهت محور z وارد می شود. پارامترهای هندسی R و h به ترتيب شعاع و ضخامت ورق بوده و k_w سفتي بستر ارتجاعي است.



شکل (۱) پارامترهای هندسی و بستر ارتجاعي ورق مدور

ضريب پواسون به عنوان يك نسبت ثابت بر طيف وسيعی از كسر حجمی ورق مدرج تابعي در نظر گرفته می شود (به اين معنا که $(v(z) = \nu)$) و خواص مکانیکی ورق مدرج تابعي بر اساس قانون توزيع توان در امتداد ضخامت تغيير می کند. مدول الاستیسیته (E) به عنوان تابعي از كسر حجمی می تواند به صورت زیر بیان شود:

همکارانش [۱۵] خمش ورق های ضخيم تابعي را بر روی بستر ارتجاعي وينكلرو پاسترناك مورد بررسي قرار دادند. روش حل به كار رفته در اين مقاله روش تبدیل ديفرانسيل^۱ است که برای اولین بار در سال ۱۹۸۶ توسط ژو معرفی شد [۱۶]. اوبا استفاده از اين روش حل مسائل مقدار اوليه خطی و غير خطی را در زمينه تحليل مدارهای الكتریکی ارائه کرد. روش حل تبدیل ديفرانسيل يك روش نیمه تحلیلی- عددی، بر اساس بسط سری تیلور است که برای انواع مختلفی از معادلات ديفرانسيل پیشنهاد شده است. اين روش نسبت به روش تیلور سری ها را بسیار سریع تر و کوتاه تر حل می کند و علاوه بر این که به راحتی قابل اجرا است به میزان قابل توجهی محاسبات مربوط به مسائل خطی و غير خطی را کاهش می دهد. با استفاده از روش تبدیل ديفرانسيل، معادلات ديفرانسيل حاکم به روابط بازگشتی کاهش می یابند و شرايط مرزی به مجموعه ای از معادلات جبری تبدیل می شوند [۱۷ تا ۱۹]. اخیراً روش تبدیل ديفرانسيل مورد توجه محققان زيادي قرار گرفته است که به تعدادی از آنها اشاره خواهد شد.

چن و هو [۲۰]، روش تبدیل ديفرانسيل را برای معادلات ديفرانسیلی با مشتقات جزئی به كار گرفتند و برای حل مسائل مقدار اوليه خطی و غير خطی راه حلی به صورت سری به دست آوردند. ارتعاشات آزاد ورق با استفاده از روش تفاضل محدود و تبدیل ديفرانسيل توسط یه و همکارانش [۲۱] مورد تجزیه و تحليل قرار گرفت. ازدمیر و کایا [۲۲]، به بررسی ارتعاشات خمشی تیر مخروطی دوار اویلر- برنولی با استفاده از روش تبدیل ديفرانسيل پرداختند. ادیبت و همکارش [۲۳]، با استفاده از روش تبدیل ديفرانسيل تعمیم یافته، حل معادلات ديفرانسيل خطی با مشتقات جزئی و مرتبه كسری را ارائه دادند. در این مقاله، با به كار گیری

با استفاده از پارامترهای بدون بعد زیر، می‌توان معادله دیفرانسیل بدون بعد حاکم بر ورق را مطابق رابطه زیر نوشت:

$$\varphi = \frac{r}{R}, W = \frac{w}{R}, K_w = \frac{k_w R^4}{D}, q = \frac{PR^3}{D} \quad (6)$$

$$\varphi^3 \frac{d^4 W}{d\varphi^4} + 2\varphi^2 \frac{d^3 W}{d\varphi^3} - \varphi \frac{d^2 W}{d\varphi^2} + \frac{dW}{d\varphi} + K_w \varphi^3 W - q\varphi^3 = 0 \quad (7)$$

۳-۱- شرایط مرزی^۱ و قاعده‌ای^۲ حاکم بر ورق

شرایط مرزی حاکم بر لبه خارجی ورق شامل تکیه گاه‌های گیردار^۳ و ساده^۴ و شرط قاعده‌ای در مرکز ورق در نظر گرفته خواهد شد.

- شرایط مرزی ورق مدور با تکیه گاه گیردار، عبارت است از:

$$w|_{r=R} = 0, \quad \frac{dw}{dr}|_{r=R} = 0 \quad (8)$$

- شرایط مرزی ورق مدور با تکیه گاه ساده، عبارت است از:

$$w|_{r=R} = 0, \quad M_r|_{r=R} = -D \left[\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dw}{dr} \right] = 0 \quad (9)$$

شرط قاعده‌ای حاکم بر مرکز ورق مدور (R.C) عبارت است از:

$$\frac{dw}{dr}|_{r=0} = 0 \quad (10)$$

۳-۲- شکل بدون بعد شرایط مرزی و قاعده‌ای ورق

با استفاده از پارامترهای بدون بعد ارائه شده در رابطه (۶)، می‌توان شکل بدون بعد شرایط مرزی و قاعده‌ای ورق را به دست آورد.

- شکل بدون بعد شرایط مرزی گیردار:

$$E(z) = (E_c - E_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^g + E_m \quad (1)$$

که در آن E_c و E_m به ترتیب مدول الاستیسیته فلز و سرامیک (آلومینیوم/آلومینا) می‌باشند و g شاخص کسر حجمی ماده است، که حالت $g=0$ ($g \rightarrow \infty$) نشان دهنده ورق سرامیکی (آلومینیوم) است.

۳- معادله دیفرانسیل حاکم بر خمش ورق بر روی بستر ارتجاعی

بر اساس تئوری کلاسیک ورق (CPT) [۲۵]، معادله دیفرانسیل حاکم بر خمش ورق مدور بر روی بستر ارتجاعی وینکلر از رابطه‌ی زیر تبعیت می‌کند:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right) \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) = \frac{P - k_w w}{D} \quad (2)$$

شکل بسط داده شده معادله دیفرانسیل فوق عبارت است از:

$$\frac{d^4 w}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3 w}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{dw}{dr} = \frac{P - k_w w}{D} \quad (3)$$

که در آن w خیز ورق، k_w سفتی بستر وینکلر، P بار گسترده یکنواخت و D صلبیت خمشی ورق هستند. با توجه به اینکه خواص مکانیکی ورق مدرج تابعی نسبت به سطح میانی نامتقارن بوده و محل سطح خنثی فیزیکی (که در آن کرنش و تنش صفر می‌باشند)، بر روی سطح میانی واقع نشده [۲۴]، موقعیت این سطح نسبت به سطح میانی با z_0 معرفی شده است:

$$z_0 = \frac{\int_{-h/2}^{h/2} z E(z) dz}{\int_{-h/2}^{h/2} E(z) dz} \quad (4)$$

با استفاده از پارامتر فوق، صلبیت خمشی ورق مدرج تابعی به صورت زیر تعیین می‌شود:

$$D = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{(z - z_0)^2 E(z)}{1 - \nu^2} dz \quad (5)$$

1- Boundary Conditions(B.C.)
2-Regularity condition
3- Clamped B.C
4 -Simply supported B.C

۴-۱- تبدیل ديفرانسيل معادله حاکم بر خمش ورق

با استفاده از روابط تبدیل ديفرانسيلي مشتق مرتبه k ام تابع و فضايای تبدیل ديفرانسيل جدول (۱) در $r_0 = 0$ ، می توان معادله ديفرانسيل خمش ورق بر روی بستر ارتجاعی (معادله (۷)) را حل کرد. رابطه بازگشتی به دست آمده از روند حل این معادله مطابق رابطه زیر است:

$$W[k+1] + K_w \sum_{k_1=0}^k [\delta(k_1-3)W[k-k_1]] \quad (16)$$

$$-q\delta(k-3) = 0 \text{ for } k \geq 3$$

۴-۲- تبدیل ديفرانسيل شرايط مرزی و قاعده ای ورق

به منظور ادامه روند حل، تبدیل ديفرانسيل معادلات بدون بعد شرايط مرزی و قاعده ای، با استفاده از فضايای روش تبدیل ديفرانسيل به صورت زیر به دست آمده اند.

- تبدیل ديفرانسيل شرايط مرزی گیردار

$$\sum_{k=0}^N W[k] = 0, \quad \sum_{k=0}^N kW[k] = 0 \quad (17)$$

- تبدیل ديفرانسيل شرايط مرزی ساده

$$\sum_{k=0}^N W[k] = 0, \quad \sum_{k=0}^N k(k-1+\nu)W[k] = 0 \quad (18)$$

- تبدیل ديفرانسيل شرط قاعده ای مرکز ورق

$$W[1] = 0 \quad (19)$$

۴-۳- حل مسأله با استفاده از روش تبدیل ديفرانسيل

به منظور استخراج نتایج نهایی خمش ورق مدور بر روی بستر ارتجاعی، رابطه بازگشتی (۱۶) و شرايط مرزی و قاعده ای ارائه شده در روابط (۱۹-۱۷)، به طور همزمان مورد نیاز می باشند. با استفاده از معادله تبدیل ديفرانسيل شرط قاعده ای (معادله (۱۹)) و تبدیل ديفرانسيل معادله، برای $0 \leq k \leq 2$ خواهیم داشت:

$$W[0] = a, W[1] = 0, W[2] = b, W[3] = 0 \quad (20)$$

با استفاده از رابطه بازگشتی (۱۶)، روابط $W[k]$ برای $k=3, 4, 5, \dots, N$ به دست خواهد آمد. بر اساس معادله

$$W|_{\varphi=1} = 0, \quad \frac{dW}{d\varphi}|_{\varphi=1} = 0 \quad (11)$$

- شکل بدون بعد شرايط مرزی ساده:

$$W|_{\varphi=1} = 0, \quad -D \left[\varphi \frac{d^2W}{d\varphi^2} + \nu \frac{dW}{d\varphi} \right] = 0 \quad (12)$$

- شکل بدون بعد شرط قاعده ای مرکز ورق:

$$\frac{dW}{d\varphi}|_{\varphi=0} = 0 \quad (13)$$

۴- روش تبدیل ديفرانسيل

روش تبدیل ديفرانسيل یک روش حل تحلیلی در شکل چند جمله ای است که دامنه محاسباتی آن بسیار کوتاه تر از روش سری های تیلور است. این روش برای حل معادلات ديفرانسيل معمولی، معادلات ديفرانسيل با مرتبه بالا و جزئی به کار گرفته می شود. تبدیل ديفرانسيل مشتق مرتبه k ام تابع $f(r)$ به صورت زیر تعریف می شود [۱۹]، که در آن $f(r)$ و $F[k]$ به ترتیب تابع اصلی و تابع تبدیل می باشند:

$$F[k] = \frac{1}{k!} \left(\frac{d^k f(r)}{dr^k} \right)_{r=r_0} \quad (14)$$

تابع $f(r)$ توسط سری های توانی نشان داده می شود که مرکز آن در r_0 قرار دارد و چون در عمل تابع $f(r)$ به عنوان یک سری محدود استفاده می شود، می توان آن را به صورت زیر بیان کرد:

$$f(r) = \sum_{k=0}^N F[k](r-r_0)^k \quad (15)$$

فضايای اساسی روش تبدیل ديفرانسيل که از روابط (۱۴) و (۱۵) مشتق شده اند، در جدول زیر ارائه می شوند:

جدول (۱) فضايای اساسی روش تبدیل ديفرانسيل (DTM) [۱۹]

تابع اصلی	تابع تبدیل
$f(r) = y(r) \pm z(r)$	$F[k] = Y[k] \pm Z[k]$
$f(r) = \lambda y(r)$	$F[k] = \lambda Y[k]$
$f(r) = y(r) \cdot z(r)$	$F[k] = \sum_{k_1=0}^k Y[k_1] Z[k-k_1]$
$f(r) = \frac{d^m y(r)}{dr^m}$	$F[k] = \frac{(m+k)!}{k!} Y[k+m]$
$f(r) = r^n$	$F[k] = \delta(k-n) = \begin{cases} 0 & \text{if } k \neq n \\ 1 & \text{if } k = n \end{cases}$

$$W(\varphi) = \frac{q}{64} - \frac{q\varphi^2}{32} + \frac{q\varphi^4}{64} \quad (24)$$

پس از قرار دادن کمیت‌های بدون بعد (معادله (۶)) در معادله بالا و ساده کردن روابط، تابع خیز به صورت زیر تبدیل خواهد شد:

$$w = \frac{Pl^4}{64D} - \frac{Pl^2r^2}{32D} + \frac{Pr^4}{64D} = \frac{P}{64D} (l^2 - r^2)^2 \quad (25)$$

رابطه خیز به دست آمده در معادله فوق، دقیقاً همان رابطه خیزی است که بر اساس تئوری کلاسیک ورق (CPT) توسط تیموشنکو [۲۵] به دست آمده است.

۵- بحث و نتایج عددی

مقادیر عددی اعمال شده برای کسب نتایج عبارت‌اند از

$$h = 0.1 \text{ m}, \quad R = 0.6 \text{ m}, \quad P = -0.1 \text{ MPa} \quad (26)$$

از آنجایی که ورق مدور از مواد مدرج تابعی ساخته شده است و خواص مواد تشکیل دهنده ورق در راستای ضخامت آن به‌طور یکنواخت از فلز (آلومینیوم) تا سرامیک (آلومینا) تغییر می‌کند، در جدول (۲) مدول الاستیسیته فلز و سرامیک و ضریب پواسون (ثابت فرض شده) ارائه شده است.

جدول (۲) خواص ورق مدرج تابعی.

$E_m (Pa)$	$E_c (Pa)$	ν
70×10^9	380×10^9	0.3

به منظور نشان دادن صحت نتایج حاصل از روش تبدیل دیفرانسیل، نتایج خیز ماکزیمم بدون بعد مرکز ورق همگن ایزوتروپیک تحت شرایط مرزی مختلف با نتایج حاصل از روش اجزاء محدود مقایسه شده است. قدر مطلق نتایج به دست آمده تحت شرط مرزی گیردار C و ساده S.S برای مقادیر مختلفی از سفتی بستر ارتجاعی k_w (MPa/m) در جدول (۳) ارائه شده است.

(۱۵) تابع خیز $W[\varphi]$ در $r_0 = 0$ مطابق رابطه زیر خواهد بود:

$$W(\varphi) = \sum_{k=0}^N W[k] \varphi^k = W[0] \varphi^0 + W[1] \varphi^1 + W[2] \varphi^2 + \dots \quad (21)$$

پس از جایگزین کردن روابط $W[k]$ در معادله فوق، برای $N = 10$ معادله خیز به صورت زیر تبدیل خواهد شد:

$$W(\varphi) = a + b\varphi^2 + \frac{q - aK_w}{(4 \times 2)^2} \varphi^4 - \frac{bK_w}{(6 \times 4)^2} \varphi^6 - \frac{(q - aK_w)K_w}{(8 \times 6 \times 4 \times 2)^2} \varphi^8 + \frac{bK_w^2}{(10 \times 8 \times 6 \times 4)^2} \varphi^{10} + O(\varphi)^{12} \quad (22)$$

۴-۳- بررسی همگرایی و صحت روش حل برای ورق مدور با تکیه‌گاه گیردار

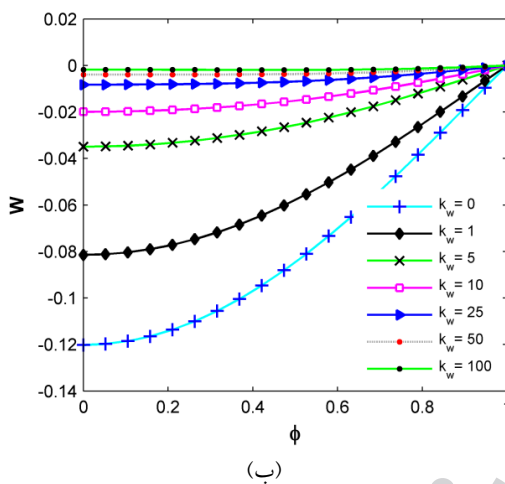
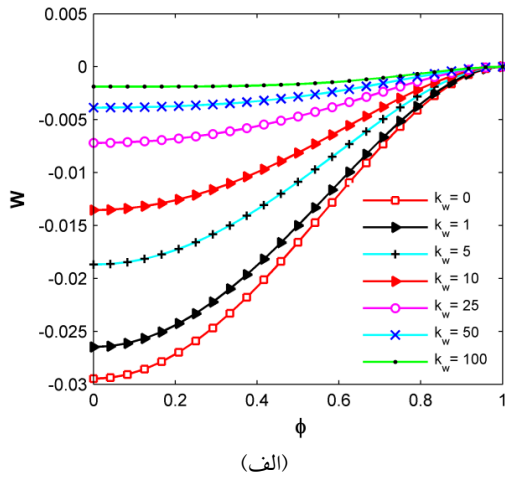
برای نشان دادن سرعت همگرایی روش تبدیل دیفرانسیل، در این بخش، نتایج برای ورق تحت شرط مرزی گیردار آورده شده است.

از آنجایی که جملات فرد $W(k)$ مثل $W(1)$ ، $W(3)$ ، ... صفر شدند و جملات زوج همگی بر حسب $W(0)$ یا $W(2)$ به دست آمدند، برای به دست آوردن تابع خیز باید $W(0)$ و $W(2)$ محاسبه شوند.

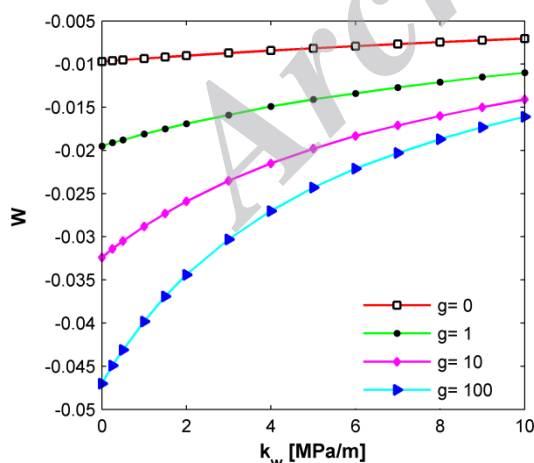
با قرار دادن مقادیر عددی، نتایج حاصل از همگرایی نتایج $W(0)$ و $W(2)$ مطابق زیر به دست آمده است:

$$W[0] = -0.009698, \quad W[2] = 0.019397 \quad (23)$$

به منظور ثابت کردن صحت و دقت روش حل، تابع خیز برای ورق همگن ایزوتروپیک با بارگذاری یکنواخت در نظر گرفته می‌شود، که نتایج حاصله با نتایج به دست آمده توسط تیموشنکو [۲۵] مقایسه خواهند شد. با فرض این‌که سفتی بستر ارتجاعی صفر باشد $k_w = 0$ ، تابع خیز به صورت زیر به دست می‌آید:



شکل (۳) اثر تغییرات سفتی بستر ارتجاعی بر خیز بدون بعد ورق مدرج تابعی (g = 5) در راستای شعاع بدون بعد، (الف) شرایط مرزی گیردار (ب) شرایط مرزی ساده.

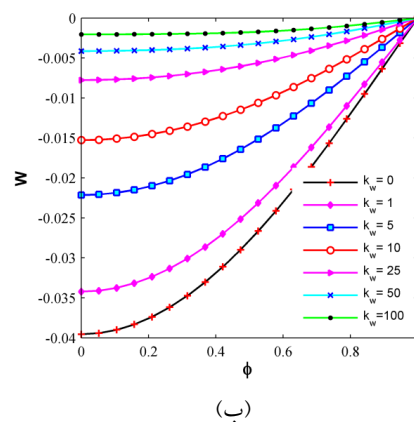
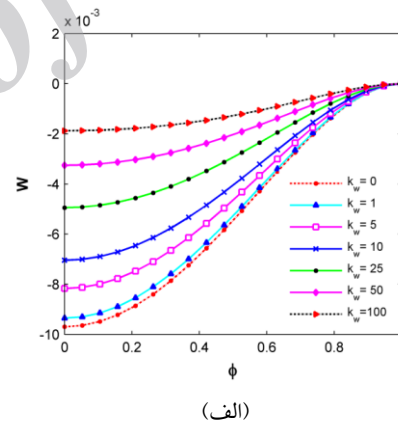


شکل (۴) ماکزیمم خیز ورق های مدرج تابعی و ایزوتروپیک بر حسب سفتی بستر ارتجاعی وینکلر تحت شرایط مرزی گیردار به ازای مقادیر مختلف g

جدول (۳) ماکزیمم خیز بدون بعد ورق مدور همگن ایزوتروپیک (مقادیر بر حسب mm هستند).

B.C.	$k_w = 0$		$k_w = 5$		$k_w = 50$	
	DTM	FEM	DTM	FEM	DTM	FEM
C	۵۲/۶	۵۲/۳	۲۵/۷	۲۵/۷	۳/۸	۳/۸
S.S	۲۱۴/۲۱۴۵/۶		۳۹/۳۹۳/۳		۳/۳۷/۶	

نمودارهای مربوط به خمش ورق مدور آیزوتروپیک همگن تحت بارگسترده یکنواخت با مقادیر مختلفی از سفتی بستر ارتجاعی برای شرایط مرزی گیردار و ساده در شکل (۲) نشان داده شده است. در شکل (۳) نیز ورق مدور مدرج تابعی (g = 5) در نظر گرفته شده و منحنی های مربوط به خمش آن رسم شده است. همچنین مقایسه ای از تغییرات مقدار ماکزیمم خیز ورق های مدرج تابعی و ایزوتروپیک گیردار به ازای مقادیر مختلفی از سفتی بستر ارتجاعی وینکلر در شکل (۴) ارائه شده است.



شکل (۲) اثر تغییرات سفتی بستر ارتجاعی بر خیز بدون بعد ورق سرامیکی ایزوتروپیک (g = 0) در راستای شعاع بدون بعد، (الف) شرایط مرزی گیردار (ب) شرایط مرزی ساده.

۶- نتیجه‌گیری

با توجه به نتایج ارائه شده مشاهده شد که میزان خمش ورق های مدرج تابعی به شدت تحت تاثیر بستر ارتجاعی قرار می‌گیرد و افزایش سفتی بستر ارتجاعی وینکلر به طور قابل توجهی خیز ماکزیمم مرکز ورق را کاهش می‌دهد. همچنین افزایش شاخص کسر حجمی g ، منجر به افزایش خیز می‌شده زیرا با افزایش g ، صلیبت خمشی ورق کاهش یافته و در نتیجه خمش ورق افزایش خواهد یافت. همان‌طور که نشان داده شده، در ورق‌های مدور مدرج تابعی برای مقادیر بالاتری از شاخص کسر حجمی g ، بستر ارتجاعی خیز را با شدت بیشتری محدود می‌کند.

فهرست علائم

$r - \theta$	مختصات قطبی
$R (m)$	شعاع ورق مدور
φ	شعاع بدون بعد
W	خیز بدون بعد
$w (r)$	تابع خیز
$P (Pa)$	بار عرضی یکنواخت
$E_c, E_m (Pa)$	مدول الاستیسیته یانگ سرامیک و فلز
ν	ضریب پواسون
$h (m)$	ضخامت ورق
$D (Pa.m^3)$	صلیبت خمشی
$k_w (MPa / m)$	سفتی بستر الاستیک
g	شاخص کسر حجمی

مراجع

- [1] Yamanouchi M., Koizumi M., Shiota I., Proceedings of the first international symposium on functionally gradient materials, Sendai, Japan, 1990.
- [2] Reddy J.N., Wang C.M., Kitipornchai S., Axisymmetric bending of functionally graded circular and annular plate, *European Journal of Mechanics A/Solids*, vol. 18, 1999, pp.185–199.
- [3] Najafzadeh M.M., Eslami M.R., Buckling analysis of circular plates of functionally graded materials under uniform radial compression, *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 44, 2002, pp. 2479–2493
- [4] Abrate S., Free vibration, buckling, and static deflections of functionally graded plates, *Composites Science and Technology*, vol. 66, 2006, pp. 2383–2394.
- [5] Bayat M., Sahari B.B., Saleem M., Ali A., Wong S.V., Bending analysis of a functionally graded rotating disk based on the first order shear deformation theory, *Applied Mathematical Modeling*, vol. 33, 2009, pp. 4215–4230.
- [6] Bodaghi M., Saidi A.R., Stability analysis of functionally graded rectangular plates under nonlinearly varying in-plane loading resting on elastic foundation, *Archive of Applied Mechanics*, vol. 81, 2011, pp. 765–780.
- [7] Zenkour A.M., Allam M.N.M., Shaker M.O, Radwan A.F, On the simple and mixed first-order theories for plates resting on elastic foundations, *Acta Mechanical*, vol. 220, 2011, pp. 33–46.
- [8] Gupta U.S., Ansari A.H., Sharma S, Buckling and vibration of polar orthotropic circular plate resting on Winkler foundation, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 297, 2006, pp. 457–476.
- [9] Matsunaga H., Vibration and buckling of deep beam-columns on two-parameter elastic foundations, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 228, 1999, pp. 359–376.
- [10] El-Mously M., Fundamental frequencies of Timoshenko beams mounted on Pasternak foundation, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 228, 1999, pp. 452–457.

- [21] Yeh Y., Jang M.J., Wang Ch., Analyzing the free vibrations of a plate using finite difference and differential transformation method, *Applied Mathematics and Computation*, vol. 178, 2006, pp. 493–501.
- [22] Özdemir Ö, Kaya MO, Flap wise bending vibration analysis of a rotating tapered cantilever Bernoulli–Euler beam by differential transform method, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 289, 2006, pp. 413–420.
- [23] Odibat Z., Momani Sh., A generalized differential transform method for linear partial differential equations of fractional order, *Applied Mathematics Letters*, vol. 21, 2008, pp. 194–199.
- [24] Zhang D.G., Zhou Y.H., A theoretical analysis of FGM thin plates based on physical neutral surface, *Computational Materials Science*, vol. 44, 2008, pp. 716–720.
- [25] Timoshenko S., Woinowsky- Krieger S., Theory of Plates and Shells, second ed., McGraw-Hill Inc., New York, 1959, pp. 259–281.
- [26] Li X.Y., Ding H.J., Chen W.Q., Elasticity solutions for a transversely isotropic functionally graded circular plate subject to an axisymmetric transverse load qr^k , *International Journal of Solids Structures*, vol. 45, 2008, pp. 191–210.
- [11] Chen C.N., Vibration of prismatic beam on an elastic foundation by the differential quadrature element method, *Computers and Structures*, vol. 77, 2000, pp. 1–9.
- [12] Coşkun İ, The response of a finite beam on a tensionless Pasternak foundation subjected to a harmonic load, *European Journal of Mechanics A/Solids*, vol. 22, 2003, pp. 151–161.
- [13] Chen W.Q., Lü C.F., Bian Z.G., A mixed method for bending and free vibration of beams resting on a Pasternak elastic foundation, *Applied Mathematical Modeling*, vol. 28, 2004, pp. 877–890.
- [14] Luo H., Pozrikidis C., Buckling of a circular plate resting over an elastic foundation in simple shear flow, *Journal of Applied Mechanics*, vol. 75, 2008, pp. 1–6.
- [15] Benyoucef S., Mechab I., Tounsi A., Fekrar A., Atmane H.A., Bedia E.A., Bending of thick functionally graded plates resting on Winkler- Pasternak elastic foundations, *Mechanics of Composite Materials*, vol. 4, 2010, pp. 425–434.
- [16] Zhou J.K., Differential transformation and its applications for electrical circuits, Huarjung University Press, Wuuhahn, China, 1986.
- [17] Arikoglu A., Ozkol I., Solution of boundary value problems for integro-differential equations by using differential transform method, *Applied Mathematics and Computation*, vol. 168, 2005, pp. 1145–1158.
- [18] Momani Sh., Noor M.A., Numerical comparison of methods for solving a special fourth-order boundary value problem, *Applied Mathematics and Computation*, vol. 191, 2007, pp. 218–224.
- [19] Yalcin H.S., Arikoglu A., Ozkol I., Free vibration analysis of circular plates by differential transformation method, *Applied Mathematics and Computation*, vol. 212, 2009, pp. 377–386.
- [20] Chen C.K., Ho S.H., Solving partial differential equations by two dimensional differential transform, *Applied Mathematics and Computation*, vol. 106, 1999, pp. 171–179.