

کمانش خطی و غیرخطی صفحات دایروی/حلقوی گرافن ارتوتروپیک به کمک تئوری الاستیسیته غیرموضعی

مصطفی صادقیان^{۱*}، مهرداد جبارزاده^۲

* نویسنده مسئول: msadeghian@mshdiau.ac.ir

چکیده

واژه‌های کلیدی

کمانش، صفحه دایروی/حلقوی،
ارتوتروپیک، تئوری غیرموضعی الاستیسیته،
روش مربعات دیفرانسیلی

در این مقاله، تحلیل خطی و غیرخطی کمانش صفحات نسبتاً ضخیم دایروی/حلقوی گرافن با خواص ارتوتروپیک بر پایه الاستیک تحت بار مکانیکی مورد بررسی قرار می‌گیرد. به کمک تئوری الاستیسیته غیرموضعی، اصل کار مجازی، تئوری مرتبه اول برشی و کرنش‌های غیرخطی فون-کارمن، روابط حاکم برحسب جابجایی-ها بدست آمده و از روش مربعات دیفرانسیلی (DQ) همراه با توزیع غیریکنواخت نقاط (چیشف-گوس-لوپاتو) استفاده شده است. جهت اعتبار سنجی، نتایج بدست آمده با نتایج کمانش در مراجع دیگر مقایسه شده و اثرات ضریب غیرموضعی، ضخامت، شعاع و پایه الاستیک، بر بارهای بی بعد کمانش مورد بررسی قرار گرفته است. و همچنین نتایج تحلیل به روش تئوری غیر موضعی و موضعی با یکدیگر مقایسه شده است. از نتایج مشاهده می‌شود که بار بی‌بعد کمانش صفحات گرافن با کاهش انعطاف پذیری از نظر شرط مرزی، با افزایش ضریب غیرموضعی، افزایش بیشتری می‌یابد و همچنین با افزایش شعاع صفحه، اختلاف نتایج تحلیل غیر موضعی و موضعی بیشتر می‌گردد.

۱- دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشکده مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی مشهد

۲- استادیار، دانشکده مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی مشهد

۱- مقدمه

اصلاح شده [۱۲]^۵ و تئوری تنش کوپل اصلاح شده [۱۳] می باشد که برای ساختارهای نانو در سیستم‌هایی با مقیاس بزرگ استفاده می‌شوند [۱۴]. به این خاطر از مدل‌سازی به روش محیط پیوسته به عنوان راهی در تحلیل ساختارهایی نظیر کمانش می توان استفاده کرد. در این بین، تئوری الاستیسته غیر موضعی ارینگن دارای روابط حاکم نسبتاً ساده تری می‌باشد و اثر مقیاس کوچک در ساختارهایی با مقیاس نانو و میکرو را محاسبه می‌کند.

تحقیقات گسترده ای در زمینه صفحات نانو بر اساس تئوری غیر موضعی ارینگن صورت گرفته است. از جمله این محققین می توان به پرادهان و همکارانش [۱۵]، اشاره نمود که کمانش ورق‌های مستطیلی تک لایه گرافن را با استفاده از روش DQ بررسی کرده و نشان دادند که ضریب غیر موضعی تاثیر بسزایی بر روی صفحات گرافن دارد و باعث کاهش بارهای کمانش بر آن‌ها می‌شود. سماعی و همکارانش [۱۶]، پاسخ کمانشی صفحات گرافن مستطیلی ایزوتروپیک تحت بارگذاری یکنواخت را به صورت تحلیلی ارائه کردند و در آن برای مدل سازی صفحات گرافن نسبتاً ضخیم از تئوری مرتبه اول برشی میندلین استفاده نمودند. آن‌ها در مقاله خود رفتار کمانشی نانو ورق مستطیلی بر روی بستر پسترناک را با استفاده از مدل غیر موضعی صفحه میندلین به صورت تحلیلی مورد بررسی قرار دادند. فرج پور و همکارانش [۱۷] کمانش صفحات گرافن با ضخامت متغیر را بررسی نموده و نشان دادند رفتار کمانش صفحه گرافن تک لایه بشدت به ضریب غیر موضعی وابسته است. نارندر و گوپالکریشن [۱۸]، به تحلیل دمای کمانش بحرانی در نانو تیوب‌های تک لایه بر اساس مدل تیر تیموشنکو پرداخته و مشاهده کردند که اثرات ضریب غیر موضعی و ضریب پایه وینکلر دو جزء مهم

با توسعه روزافزون علم و فناوری، مواد و ساختارهایی با خواص برتر و پیشرفته مورد نیاز است. فناوری نانو [۱] به مواد و ساختارها در مقیاس نانو می‌پردازد و صفحات گرافن زیر شاخه ای از این ریز ساختارها می‌باشد که در ساخت باطری‌ها [۲]، سنسورهای بیولوژیکی و شیمیایی [۳]، سلول-های خورشیدی [۴] و غیره کاربرد دارد. صفحات گرافنیک لایه ای از دسته کربن هستند که در یک ساختار شش ضلعی (لانه زنبوری) قرار گرفته‌اند و در واقع برای اولین بار به عنوان یک کریستال دو بعدی مطرح و نخستین بار در سال ۲۰۰۴ تولید شدند [۵]. گرافن از نظر تئوری، به دلیل داشتن یک سطح خاص بزرگ، تحرک پذیری ذاتی بالا، مدول یانگ و هدایت حرارتی بالا در سال‌های اخیر توجه بسیاری از محققین را به خود جلب کرده است [۶].

مشاهدات تجربی [۷] یکی از شیوه‌های مدل‌سازی ساختارهای نانو می‌باشد که به دلیل پرهزینه بودن آن از روش‌های دیگری نظیر: مدل‌سازی اتمی، مکانیک محیط پیوسته اتمی هیبرید و مکانیک محیط‌های پیوسته استفاده می‌شود. مدل‌سازی اتمی شامل روش‌هایی مانند دینامیک مولکولی کلاسیک، دینامیک مولکولی اتصال سفت^۳ و تئوری تابعی چگالی^۴ می‌باشد [۹ و ۸]. مکانیک محیط پیوسته اتمی هیبرید این امکان را می‌دهد تا پتانسیل درون اتمی را در تحلیل محیط پیوسته با برابر قرار دادن انرژی پتانسیل ساختار مواد نانو با انرژی کرنش مکانیکی المان حجمی مدل محیط پیوسته بدست آید [۱۰]. مدل‌سازی به روش محیط‌های پیوسته به مراتب نسبت به دو روش قبل کم هزینه‌تر بوده و شامل تئوری‌های کلاسیک (موضعی)، تئوری الاستیسته غیر موضعی ارینگن [۱۱]، تئوری الاستیسته گرادیان کرنشی

⁵Modified Strain Gradient Elasticity⁶Modified Couple Stress Theory³tight-binding molecular dynamics⁴density functional theory

مشاهده نمودند که با افزایش ضریب غیرموضعی بارهای کمانش در ابتدا به صورت غیرخطی سپس به صورت خطی کاهش می‌یابند.

در زمینه کمانش صفحات دایروی گرافن تحت بارهای مکانیکی درون صفحه ای، کارهای اندکی ارائه شده است که از جمله آن‌ها فرج پور و همکارانش [۲۶] می‌باشند که تحلیل کمانش متقارن ورق های دایروی گرافن تحت بارگذاری یکنواخت شعاعی به کمک تئوری کلاسیک را ارائه کردند. همچنین پژوهش راوری و شهیدی [۲۷]، از روش تفاضل محدود برای کمانش نانورق های دایروی حلقوی به کمک تئوری کلاسیک استفاده شده است. بدرود و همکارانش [۲۸]، در پژوهش خود کمانش متقارن و غیرمتقارن نانو ورق های نازک، با بهره گیری از تئوری مرتبه اول برشی غیرموضعی ارینگن همراه با کرنش های خطی، بررسی نمودند. آن‌ها اثرات پارامترهای هندسی نانو ورق، شرایط تکیه گاهی و پارامترهای غیر موضعی بر روی رفتار کمانشی نانو ورق دایروی و حلقوی را ارزیابی نمودند. در پژوهش حاضر تحلیل کمانش مکانیکی صفحات نسبتاً ضخیم دایره‌ای گرافن همراه با خصوصیات ارتوتروپیک و کرنش‌های غیرخطی بررسی می‌شود. اثرات مقیاس کوچک به کمک تئوری الاستیسیته غیرموضعی ارینگن اعمال شده است. معادلات تعادل از روش انرژی محاسبه و برای حل آن‌ها از روش عددی مربعات ديفرانسیلی استفاده شده است.

۲- روابط حاکم

شکل (۱)، یک صفحه گرافن دایره‌ای و شکل ۲ مدل پیوسته آن را نشان می‌دهد. جابجایی‌ها بر اساس تئوری مرتبه اول برشی به صورت رابطه (۱) می‌باشند [۲۹]:

$$\begin{aligned} u(r, \theta, z) &= u_0(r) + z\varphi_r \\ v(r, \theta, z) &= 0 \\ w(r, \theta, z) &= w_0(r) \end{aligned} \quad (1)$$

در تحلیل کمانش حرارتی صفحات گرافن می‌باشند. در تحقیق دیگری، لیم و همکارانش [۱۹]، به بررسی کمانش حرارتی نانو میله‌ها پرداختند. آن‌ها در تحلیل خویش از تئوری غیرموضعی ارینگن برای بررسی نانو میله‌ها و نانو تیوب‌ها و نانو تیرها پرداخته و تاثیر تغییرات دما بر کمانش بحرانی را ارزیابی نمودند. فرج پور و همکاران [۲۰]، کمانش ورق های مستطیلی با خواص ارتوتروپیک را با استفاده از روش DQ ارائه نمودند. تجزیه و تحلیل ارتعاشات حرارتی گرافن تک لایه مستطیل شکل تعبیه شده در محیط الاستیک پلیمر با استفاده از تئوری الاستیسیته غیرموضعی توسط پرسنا کومار و همکارانش [۲۱]، مورد مطالعه قرار گرفت که آن‌ها در تحلیل خود از روش ناویر استفاده نمودند. امام [۲۲]، مدلی برای تحیل کمانش و پس کمانش نانوتیرها ارائه نمود که برای تئوری های گوناگون نظیر تئوری مرتبه اول برش و مراتب بالاتر و کلاسیک مناسب است. محمدی و همکارانش [۲۳]، به تحلیل رفتار کمانشی صفحات ارتوتروپیک مستطیلی تک لایه نانو در محیط حرارتی بر پایه الاستیک به کمک روش DQ بررسی نمود. آن‌ها در تحقیق خود شرط مرزی مختلف را بررسی نمودند و نشان دادند که بارهای کمانش صفحات گرافن به ضریب غیرموضعی وابسته است. سرامی و ازهری [۲۴]، به تحلیل ارتعاشات و کمانش صفحات مستطیلی به روش نوار^۷ محدود پرداختند و صفحه گرافن را با خاصیت ایزوتروپیک و ارتوتروپیک برای شرایط تکیه گاهی مختلف بررسی نمودند. گلمکانی و رضاطلب [۲۵] کمانش صفحات ارتوتروپیک مستطیلی تحت بارهای غیریکنواخت را با استفاده از تئوری مرتبه اول برشی و به کمک روش مربعات ديفرانسیلی (DQ) بررسی نمودند. در مقاله آن‌ها تمام لبه های صفحه گرافن تحت بار متغیر خطی فرض گردیده و

^۷finite strip

$$\varepsilon_{rz} = \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dr} + \varphi \right)$$

در تئوری مکانیک پیوسته موضعی، تنش در یک نقطه به کرنش در همان نقطه وابسته می‌باشد اما ارینگن نشان داد در تئوری مکانیک پیوسته غیر موضعی تنش در یک نقطه به کرنش در تمام محیط پیوسته وابسته است [۱۱]. معادله حاکم در تئوری مکانیک پیوسته غیر موضعی توسط ارینگن به صورت زیر ارائه شده است [۱۱]:

$$\sigma^{nl} - \mu \nabla^2 \sigma^{nl} = \sigma^l \quad (3)$$

در رابطه فوق μ ضریب غیر موضعی بوده و لاپلاسیان توسط رابطه (۴) تعریف می‌شود:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial}{r \partial r} + \frac{\partial^2}{r^2 \partial \theta^2} \quad (4)$$

می‌باشد، σ^{nl} تانسور تنش غیر موضعی و σ^l تانسور تنش موضعی است که به صورت رابطه (۵) بیان می‌شود:

$$\sigma^l = C : \varepsilon \quad (5)$$

در این تحقیق صفحه گرافن به صورت ورق ارتوتروپیک در نظر گرفته شده که C ماتریس سختی بوده و به صورت رابطه (۶) تعیین می‌شود:

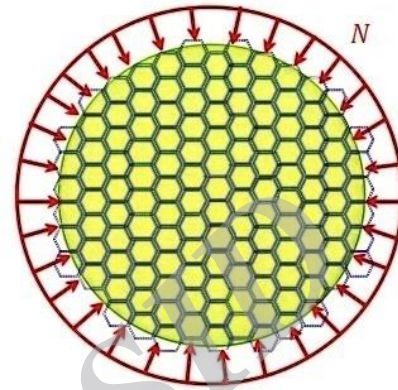
$$C = \begin{bmatrix} E_1 & \nu_{12} E_2 & 0 \\ (1 - \nu_{12} \nu_{21}) & (1 - \nu_{12} \nu_{21}) & 0 \\ \nu_{12} E_2 & E_2 & 0 \\ (1 - \nu_{12} \nu_{21}) & (1 - \nu_{12} \nu_{21}) & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} \end{bmatrix} \quad (6)$$

بنابراین با ترکیب معادلات (۳) و (۵) روابط تنش-کرنش عبارت است از:

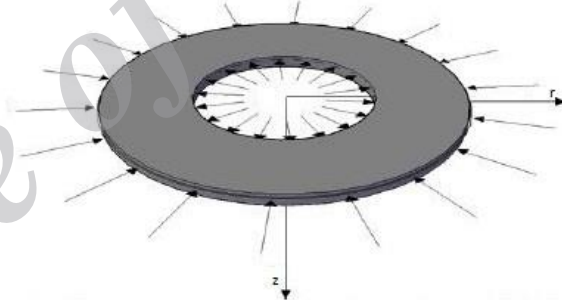
$$\begin{Bmatrix} \sigma_r^{nl} \\ \sigma_\theta^{nl} \\ \sigma_{rz}^{nl} \end{Bmatrix} - \mu \nabla^2 \begin{Bmatrix} \sigma_r^{nl} \\ \sigma_\theta^{nl} \\ \sigma_{rz}^{nl} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 & \nu_{12} E_2 & 0 \\ (1 - \nu_{12} \nu_{21}) & (1 - \nu_{12} \nu_{21}) & 0 \\ \nu_{12} E_2 & E_2 & 0 \\ (1 - \nu_{12} \nu_{21}) & (1 - \nu_{12} \nu_{21}) & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \\ \gamma_{rz} \end{Bmatrix} \quad (7)$$

E_1 و E_2 مدول الاستیسیته در جهات ۱ و ۲ و ν_{12} و ν_{21} ضریب پواسون در جهات مذکور و G_{12} مدول برشی می‌باشد.

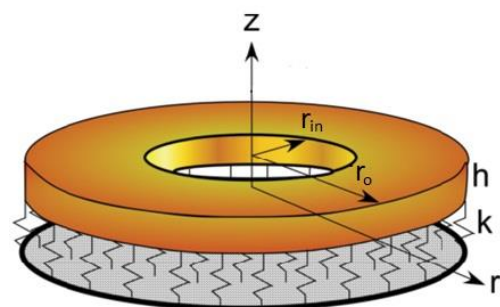
که در آن u ، v و w مولفه‌های جابجایی هر نقطه دلخواهی در فاصله Z از صفحه میانی، به ترتیب در جهات r ، θ و Z می‌باشند. همچنین u_0 و w_0 مولفه‌های جابجایی صفحه میانی ورق بوده که خود تابعی از متغیر r می‌باشند و عبارت φ_r چرخش المان حول محور θ می‌باشد.



شکل (۱) صفحه گرافن دایروی تحت بار N



شکل (۲) حلقه دایروی تحت بارگذاری



شکل (۳) مدل سه بعدی محیط پیوسته حلقه دایروی بر پایه الاستیک

با استفاده از فرضیات فون کارمن برای روابط غیر خطی کرنش-جابجایی، مولفه‌های کرنش بر حسب جابجایی به صورت رابطه (۲) بدست می‌آیند [۲۹]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{du}{dr} + z \frac{d\varphi}{dr} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dr} \right)^2 \\ \varepsilon_\theta &= \frac{u}{r} + z \frac{\varphi}{r} \end{aligned} \quad (2)$$

که k ضریب پایه الاستیک می باشد. با استفاده از معادلات

فوق، روابط تعادل بر حسب متجه های تنش غیر موضعی به

صورت رابطه (۱۵) حاصل می شوند:

$$\delta u: \quad -N_r^{nl} - r \frac{dN_r^{nl}}{dr} + N_\theta^{nl} + N \quad (15)$$

$$= 0$$

$$\delta \varphi: \quad -r \frac{dM_r^{nl}}{dr} + M_\theta^{nl} + rQ_r^{nl} \quad (16)$$

$$- M_r^{nl} = 0$$

$$\delta w: \quad Q_r^{nl} + r \frac{dQ_r^{nl}}{dr} + \frac{d}{dr} \left(rN_r^{nl} \frac{dw}{dr} \right) \quad (17)$$

$$- kw = 0$$

به کمک رابطه (۳) معادلات تعادل بر حسب متجه های

تنش موضعی از روابط (۱۸) تا (۱۹) بدست می آیند:

$$-N_r - r \frac{dN_r}{dr} + N_\theta + N = 0 \quad (18)$$

$$-r \frac{dM_r}{dr} + M_\theta + rQ_r - M_r = 0 \quad (19)$$

$$Q_r + r \frac{dQ_r}{dr} + (1 - \mu V^2) \left[\frac{d}{dr} \left(rN_r \frac{dw}{dr} \right) \right] \quad (20)$$

$$- kw = 0$$

متجه های تنش موضعی به کمک روابط (۲)، (۴) و (۵) بر

حسب جابجایی ها به صورت:

$$N_r^l = A_{11} \left(\frac{du_0}{dr} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dr} \right)^2 \right) + A_{12} \left(\frac{u_0}{r} \right) \quad (21)$$

$$N_\theta^l = A_{12} \left(\frac{du_0}{dr} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dr} \right)^2 \right) + A_{22} \left(\frac{u_0}{r} \right)$$

$$Q_r^l = A_{33} \left(\frac{dw}{dr} \right)$$

$$M_r^l = D_{11} \left(\frac{d\varphi}{dr} \right) + D_{12} \left(\frac{\varphi}{r} \right)$$

$$M_\theta^l = D_{12} \left(\frac{d\varphi}{dr} \right) + D_{22} \left(\frac{\varphi}{r} \right)$$

می باشند، که ضرایب این معادلات عبارتند از:

$$A_{11} = \frac{E_1 h}{(1 - \nu_{12} \nu_{21})}, \quad A_{12} = \frac{\nu_{12} E_2 h}{(1 - \nu_{12} \nu_{21})}$$

$$A_{33} = (5/6) G_{12} h \quad (22)$$

$$D_{11} = \frac{E_1 h^3}{12(1 - \nu_{12} \nu_{21})}, \quad D_{22} = \frac{E_2 h^3}{12(1 - \nu_{12} \nu_{21})}$$

$$D_{12} = \frac{\nu_{12} E_2 h^3}{12(1 - \nu_{12} \nu_{21})}$$

به کمک روابط (۲۱) و (۲۲) معادلات تعادل بر اساس

جابجایی ها به صورت روابط (۲۲) تا (۲۴) بدست می آیند:

متجه های تنش به صورت زیر تعریف می شوند [۱۱]:

$$(N_r, N_\theta, Q_r)^{nl} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_r^{nl}, \sigma_\theta^{nl}, \sigma_{rz}^{nl}) dz \quad (8)$$

$$(M_r, M_\theta)^{nl} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_r^{nl}, \sigma_\theta^{nl}) z dz \quad (9)$$

H ضخامت صفحه گرافن است. برای تعیین معادلات تعادل از

اصل حداقل انرژی پتانسیل استفاده می شود:

$$\Pi = U + \Omega \quad (10)$$

که Π انرژی پتانسیل کل سیستم، U انرژی کرنشی سیستم

و Ω انرژی پتانسیل بارهای خارجی است. طبق این اصل، وقتی

سیستمی در حال تعادل است، تغییرات انرژی پتانسیل آن سیستم

صفر است:

$$\delta \Pi = \delta U + \delta \Omega \cong 0 \quad (11)$$

مقادیر تغییرات انرژی کرنشی سیستم [۲۸] و انرژی پتانسیل

بارهای خارجی به صورت روابط (۱۲) و (۱۳) تعیین می شوند:

$$U = \frac{1}{2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^r \sigma_{ij}^{nl} \varepsilon_{ij} r dr d\theta dz \quad (12)$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^r (\sigma_r^{nl} \varepsilon_{rr} + \sigma_\theta^{nl} \varepsilon_{\theta\theta} + \sigma_{r\theta}^{nl} \varepsilon_{r\theta} + \sigma_{rz}^{nl} \varepsilon_{rz} + \sigma_{\theta z}^{nl} \varepsilon_{\theta z}) r dr d\theta dz$$

$$\Omega = - \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^r N \left(\frac{d(ru_r)}{dr} + \frac{du_\theta}{d\theta} \right) dr d\theta dz \quad (13)$$

انرژی پتانسیل پایه الاستیک به صورت رابطه (۱۴) می-

باشد [۳۰]:

$$V_w = \frac{1}{2} \int_A kw^2 dA \quad (14)$$

در نتیجه دلیل آن که در حالت پیش کمانش تغییر شکل عمودی وجود ندارد ($w^0 = 0$) معادلات پیش کمانش به صورت روابط (۲۸) تا (۳۰) بدست می آید:

$$-N_r^0 - r \frac{dN_r^0}{dr} + N_\theta^0 - N = 0 \quad (28)$$

$$-r \frac{dM_r^0}{dr} + M_\theta^0 + rQ_r^0 - M_r^0 = 0 \quad (29)$$

$$Q_r^0 + r \frac{dQ_r^0}{dr} = 0 \quad (30)$$

با حل معادلات پیش کمانش نتیجه می شود:

$$N_r^0 = N_\theta^0 = N \quad (31)$$

همچنین معادلات پایداری به صورت روابط (۳۲) تا (۳۴)

بدست می آیند:

$$-N_r^1 - r \frac{dN_r^1}{dr} + N_\theta^1 = 0 \quad (32)$$

$$-r \frac{dM_r^1}{dr} + M_\theta^1 + rQ_r^1 - M_r^1 = 0 \quad (33)$$

$$Q_r^1 + r \frac{dQ_r^1}{dr} + (1 - \mu\nabla^2) \left[\left(N_r^0 \frac{dw^1}{dr} \right) + \left(N_r^1 \frac{dw^1}{dr} \right) + r \frac{dN_r^0}{dr} \left(\frac{dw^1}{dr} \right) + r \frac{dN_r^1}{dr} \left(\frac{dw^1}{dr} \right) + rN_r^0 \frac{d^2w^1}{dr^2} + rN_r^1 \frac{d^2w^1}{dr^2} - kw^1 \right] = 0 \quad (34)$$

برای بی بعد سازی معادلات پایداری رابطه (۳۴) تعریف

می شوند:

$$r^* = \frac{r}{r_0}, u^* = \frac{u}{h}, w^* = \frac{w}{r_0}, \varphi^* = \varphi, \gamma = \frac{r_0}{h} \quad (35)$$

$$(A_{11}, A_{12}, A_{33}) = \frac{(\bar{A}_{11}, \bar{A}_{12}, \bar{A}_{33})}{Eh}$$

$$\bar{N} = \frac{N}{Eh}, \bar{k} = \frac{kr^4}{D}$$

معادلات بی بعد پایداری بر حسب جابجایی ها از

روابط (۳۶) تا (۳۸) بدست می آیند:

$$A_{11} \left(\frac{du_0}{dr} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dr} \right)^2 \right) + A_{12} \left(\frac{u_0}{r} \right) + rA_{11} \left(\frac{d^2u_0}{dr^2} + \frac{d^2w}{dr^2} \frac{dw}{dr} \right) + A_{12} \left(\frac{du_0}{dr} \right) - A_{12} \frac{u_0}{r} \quad (23)$$

$$- A_{12} \left(\frac{du_0}{dr} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dr} \right)^2 \right) - A_{22} \left(\frac{u_0}{r} \right) = 0$$

$$-rD_{11} \frac{d^2\varphi}{dr^2} + D_{22} \left(\frac{\varphi}{r} \right) + rA_{33} \left(\frac{dw}{dr} \right) - D_{11} \left(\frac{d\varphi}{dr} \right) = 0 \quad (24)$$

$$r \left(A_{11} \left(\frac{du_0}{dr} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dr} \right)^2 \right) + A_{12} \left(\frac{u_0}{r} \right) \right) \frac{d^2w}{dr^2} + \left(A_{11} \left(\frac{du_0}{dr} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dr} \right)^2 \right) + A_{12} \left(\frac{u_0}{r} \right) \right) \frac{dw}{dr}$$

$$+ r \left[A_{11} \left(\frac{d^2u_0}{dr^2} + \frac{d^2w}{dr^2} \frac{dw}{dr} \right) + A_{12} \left[\frac{-u_0}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{du_0}{dr} \right] \right] \left(\frac{dw}{dr} \right) + A_{33} \left(\frac{dw}{dr} \right) + rA_{33} \frac{d^2w}{dr^2} + (1 - \mu\nabla^2) \left[\left(N_{cr} \left(r \frac{d^2w}{dr^2} + \frac{dw}{dr} \right) - kw \right) \right] = 0 \quad (25)$$

در اینجا برای تحلیل کمانش از روش تعادل همسایگی استفاده می شود. در این روش معادله تعادل را می توان از تغییر بسیار کوچک در نزدیکی حالت تعادل بدست آورد. بدین منظور متوجه های جابجایی، نیرو و گشتاور به صورت زیر در نظر گرفته می شوند:

$$u = u^0 + u^1 \quad (26)$$

$$w = w^0 + w^1$$

$$\varphi = \varphi^0 + \varphi^1$$

$$N_r = N_r^0 + N_r^1$$

$$N_\theta = N_\theta^0 + N_\theta^1$$

$$Q_r = Q_r^0 + Q_r^1 \quad (27)$$

$$M_r = M_r^0 + M_r^1$$

$$M_\theta = M_\theta^0 + M_\theta^1$$

که در این روابط بالانویس 0 مربوط به حالت پیش کمانش

و بالانویس 1 ناشی از تغییر بسیار ناچیز در حالت پایداری است.

$$C_{ii}^{(1)} = - \sum_{\substack{k=1, \neq i \\ i=1, 2, \dots, N}}^N C_{ki}^{(n)} \quad (42)$$

در رابطه فوق N تعداد گره‌ها در راستای شعاع است.

ضرایب وزنی برای مشتق‌های بالاتر به صورت رابطه

(۴۳) می‌باشد:

$$C_{ij}^{(n)} = n \left[A_{ij}^{n-1} A_{ij}^{(1)} - \frac{A_{ij}^{n-1}}{x_i - x_j} \right] \quad i \neq j \quad (43)$$

$$C_{ii}^{(n)} = - \sum_{\substack{k=1, \neq i \\ i=1, 2, \dots, N}}^N C_{ki}^{(n)} \quad i = j$$

توزیع نقاط شبکه بر اساس نقاط چپیشف-گوس-لوباتو

به صورت زیر می‌باشد:

$$r_i = \frac{a}{2} \left[1 - \cos \left(\frac{\pi i}{N-1} \right) \right] \quad i=0, 1, \dots, N \quad (44)$$

شرایط مرزی که در این مقاله مورد بررسی قرار گرفته به

صورت تکیه‌گاه گیردار و ساده در نظر گرفته شده است:

$$C: \begin{cases} w(r) = 0, \varphi(r) = 0, u(r) = 0 \\ u(0) = 0, \varphi(0) = 0 \end{cases} \quad (45)$$

$$S: \begin{cases} w(r) = 0, M_r(r) = 0, u(r) = 0 \\ u(0) = 0, \varphi(0) = 0, \frac{dw}{dr} = 0 \end{cases} \quad (46)$$

۴- بحث و نتیجه گیری

برای تعیین نتایج عددی، صفحه ارتوتروپیک تک لایه

دایره‌ای توپر با شعاع $r = 10\text{nm}$ ضخامت صفحه

$E_1 = 1765\text{Gpa}$ مدول الاستیسیته

و $E_2 = 1588\text{Gpa}$ ضرایب پواسون $\nu_{12} = 0.3$ در نظر

گرفته شده است.

در ابتدا برای بررسی دقت نتایج، از عبارات‌های غیرخطی

صرف نظر شده و تغییرات بارهای بی بعد کمانش بر اساس

ضرایب غیرموضعی مختلف به ترتیب برای شرایط مرزی

تکیه‌گاهی گیردار و ساده با مرجع [۲۸] مقایسه و در جدول

(۱) ارائه شده است که تطابق خوبی را نشان می‌دهد.

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 \bar{u}_0}{dr^{*2}} (r^* \cdot \bar{A}_{11}) + \frac{d\bar{u}_0}{dr^*} (\bar{A}_{11}) + \frac{\bar{u}_0}{r^*} (-\bar{A}_{22}) \\ & + \frac{d^2 \bar{w}}{dr^{*2}} \left(\frac{d\bar{w}}{dr^*} \cdot \bar{A}_{11} \cdot r^* \cdot \delta \right) \\ & + \frac{d\bar{w}}{dr^*} \frac{\delta}{2} (\bar{A}_{11} - \bar{A}_{12}) \\ & = 0 \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} & -r^* \bar{D}_{11} \frac{d^2 \bar{\varphi}}{dr^{*2}} + \bar{D}_{22} \left(\frac{\bar{\varphi}}{r^*} \right) + r^* \bar{A}_{33} \left(\frac{d\bar{w}}{dr^*} \right) \\ & - \bar{D}_{11} \left(\frac{d\bar{\varphi}}{dr^*} \right) = 0 \end{aligned} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} & r^* (\bar{A}_{11} \left(\frac{du_0^*}{dr^*} + \frac{\gamma}{2} \left(\frac{dw^*}{dr^*} \right)^2 \right) + \bar{A}_{12} \left(\frac{u_0^*}{r^*} \right) \frac{d^2 w^*}{dr^{*2}} \\ & + \left(\bar{A}_{11} \left(\frac{du_0^*}{dr^*} + \frac{\gamma}{2} \left(\frac{dw^*}{dr^*} \right)^2 \right) \right. \\ & \left. + \bar{A}_{12} \left(\frac{u_0^*}{r^*} \right) \right) \frac{dw^*}{dr^*} \\ & + r^* [\bar{A}_{11} \left(\frac{d^2 u_0}{dr^{*2}} \right. \\ & \left. + \gamma \frac{d^2 w^*}{dr^{*2}} \frac{dw^*}{dr^*} \right] + \bar{A}_{12} \left[\frac{-u_0^*}{r^{*2}} \right. \\ & \left. + \frac{1}{r^*} \frac{du_0^*}{dr^*} \right] \left(\frac{dw^*}{dr^*} \right) \\ & + \gamma \bar{A}_{33} \left(\frac{dw^*}{dr^*} \right) \\ & + r^* \gamma \bar{A}_{33} \frac{d^2 w^*}{dr^{*2}} + \gamma (1 \\ & - \bar{\mu} \bar{V}^2) \left[\bar{N} \left(r^* \frac{d^2 w^*}{dr^{*2}} \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{dw^*}{dr^*} \right) - \bar{k} w^* \right] = 0 \end{aligned} \quad (38)$$

۳- روش مربعات دیفرانسیلی

در روش مربعات دیفرانسیلی مشتق یک تابع به صورت

جمع جبری مقادیر گره ای در طول دامنه نوشته می‌شود که

به صورت رابطه (۳۹) بیان می‌شود [۳۱]:

$$\frac{d^n F}{dr^n} = \sum_{j=1}^N C_{ij}^{(n)} F(r_j) \quad (39)$$

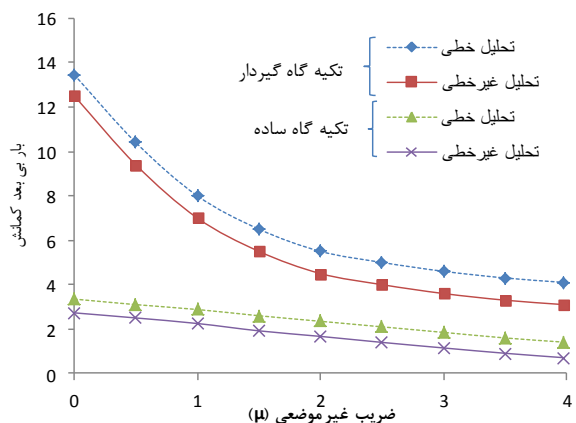
به طوری که $C_{ij}^{(n)}$ ضریب وزنی بوده و برای مشتق مرتبه

اول به صورت زیر بدست می‌آید:

$$c_{ij}^{(1)} = \frac{P(r_i)}{(r_i - r_j)P(r_j)} \quad i \neq j \quad (40)$$

$$p(r_i) = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^N (r_i - r_k) \quad (41)$$

و هنگامی $j = i$ می‌باشد داریم:



شکل (۵) تغییرات بارهای بی بعد کمانش به ضریب های غیر موضعی $(\bar{k}=0)$

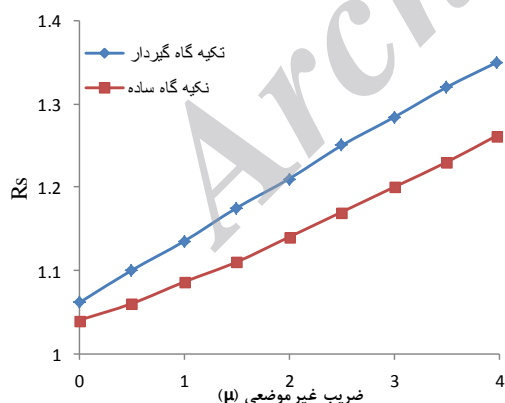
برای مقایسه بارهای بی بعد کمانش در حالت غیرخطی به

خطی متغیر R_s به صورت زیر تعریف می شود:

$$R_s = \frac{\text{بار بی بعد کمانش غیرخطی}}{\text{بار بی بعد کمانش خطی}}$$

شکل (۶) نسبت تغییرات بارهای بی بعد کمانش در حالت

غیرخطی به خطی را به ضریب های غیرموضعی در شرایط بدون پایه الاستیک برای شرایط تکیه گاهی گیردار و ساده را نشان می دهد. مشاهده می شود که تاثیر تحلیل غیرخطی بر تکیه گاه گیردار بیشتر بوده و با افزایش ضریب غیرموضعی نتایج دو تحلیل از یکدیگر فاصله می گیرند.



شکل (۶) تغییرات بارهای بی بعد کمانش به ضریب های غیر موضعی مختلف در شرایط تکیه گاهی گیردار و ساده $(\bar{k}=0)$

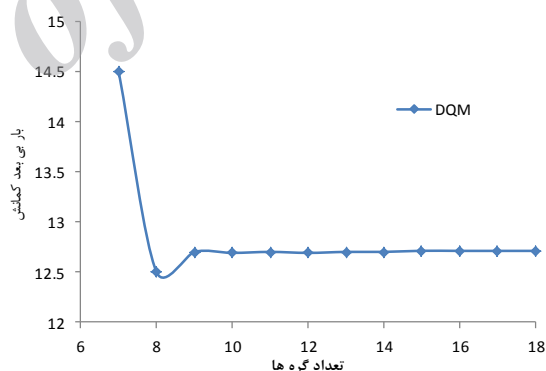
در شکل (۷) تغییرات بارهای بی بعد کمانش به ضریب-

های غیرموضعی، برای ضرایب پایه الاستیک گوناگون مختلف ترسیم شده است. مشاهده می شود با افزایش سختی

جدول (۱) مقایسه بار بی بعد کمانش تحقیق حاضر با مرجع [۲۸]

μ	بار بی بعد کمانش			
	تکیه گاه گیردار (تحقیق حاضر)	تکیه گاه ساده [۲۸]	تکیه گاه ساده (تحقیق حاضر)	تکیه گاه ساده (تحقیق حاضر)
۰	۱۴/۶	۱۴/۵۹۸	۴/۱۵۱	۴/۱۵۱
۰/۵	۱۱/۰۰۱	۱۱	۳/۶۵۱	۳/۶۵۱
۱	۸/۷	۸/۶۹۸	۳/۱۵	۳/۱۴۹
۱/۵	۷/۱۳	۷/۱۲۹	۲/۶۵۳	۲/۶۵۲
۲	۶/۲۹۹	۶/۲۹۹	۲/۱۴	۲/۱۴
۲/۵	۵/۷	۵/۶۹۸	۱/۵۹۱	۱/۵۹۱
۳	۵/۱۱۱	۵/۱۱۱	۱/۱۱	۱/۱۱
۳/۵	۴/۶	۴/۵۹۷	۰/۶۱۲	۰/۶۱۱۹
۴	۴/۳۱۲	۴/۳۱۱	۰/۲۶	۰/۲۶

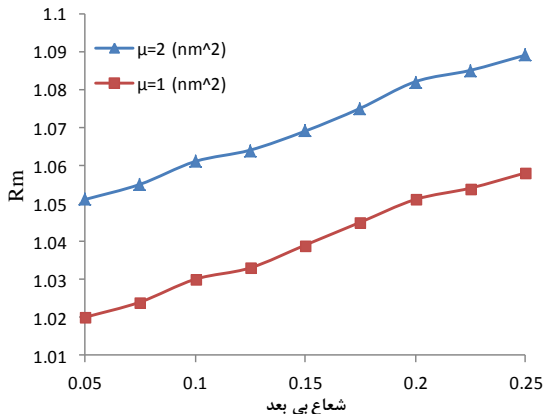
به دلیل آن که نتایج روش عددی مربعات دیرانسیلی به تعداد گره ها وابسته است، نتایج عددی همگرایی تحقیق حاضر به صورت شکل (۴) می باشد. مطابق شکل، از تعداد گره های ۹ به بعد، همگرایی مطلوب حاصل می شود



شکل (۴) بررسی همگرایی بار بی بعد کمانش بر حسب تعداد گره ها

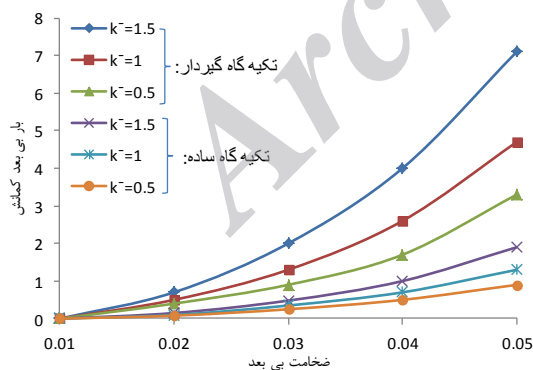
در شکل (۵) تغییرات بارهای بی بعد کمانش خطی و غیرخطی به ضریب های غیر موضعی گوناگون در شرایط بدون پایه الاستیک برای شرایط تکیه گاهی گیردار و ساده نشان داده شده است. ملاحظه می شود که در شرایط تکیه گاهی گیردار تغییرات بارهای بی بعد کمانش خطی و غیرخطی به صورت غیرخطی تغییر می کنند اما در شرایط مرزی تکیه گاه ساده با شیب نسبتا ثابتی کاهش می یابد. همچنین تاثیر افزایش ضریب غیرموضعی با کاهش انعطاف پذیری شرایط تکیه گاهی، افزایش می یابد.

در شکل (۹) نسبت تغییرات بارهای بی بعد کمانش در حالت غیرموضعی به موضعی در $\mu=1.2nm^2$ ، برای شعاع‌های مختلف ترسیم شده است. مشاهده می‌شود که افزایش شعاع، اختلاف نتایج تحلیل کمانش به کمک تئوری‌های موضعی و غیرموضعی بیشتر می‌شود.



شکل (۹) تغییرات R_m به شعاع‌های بی بعد

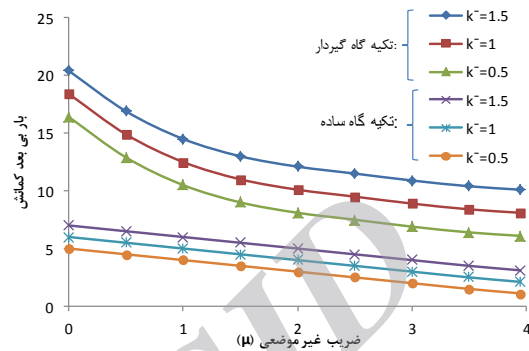
در شکل (۱۰) تغییرات بارهای بی بعد کمانش به ضخامت بی بعد، برای ضریب‌های مختلف پایه الاستیک برای شرایط تکیه گاهی گیردار و ساده نشان داده شده است. با توجه به شکل، با افزایش ضخامت، بار بی بعد کمانش افزایش یافته و همچنین در یک ضخامت معین با کاهش سختی پایه الاستیک، بار بی بعد کمانش کاهش می‌یابد.



شکل (۱۰) تغییرات بارهای بی بعد کمانش به ضخامت برای ضرایب پایه

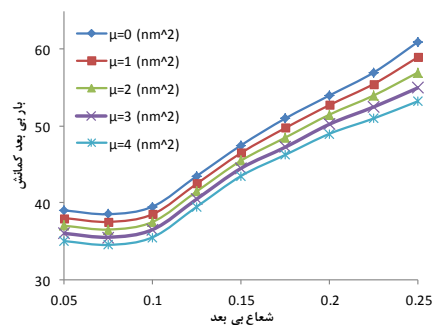
الاستیک گوناگون در شرایط تکیه گاهی گیردار و ساده

پایه الاستیک بار بی بعد کمانش افزایش یافته و تاثیر افزایش سختی پایه الاستیک بر تکیه گاه گیردار بیشتر از مفصلی می‌باشد. همچنین در تکیه گاه ساده شیب تغییرات به صورت غیرخطی بوده اما در تکیه گاه ساده تغییرات به صورت شیب نسبتاً ثابت می‌باشد.



شکل (۱۱) تغییرات بارهای بی بعد کمانش به ضریب‌های غیرموضعی، برای ضرایب پایه الاستیک گوناگون

شکل ۸ تغییرات بارهای بی بعد کمانش به شعاع بی بعد، برای ضریب‌های غیرموضعی گوناگون نشان داده شده است. ملاحظه می‌شود که در شعاع‌های کوچک (در حدود ۰/۱) تقریباً بار بی بعد ثابت مانده و سپس با شیب نسبتاً زیاد بار بی بعد کمانش افزایش می‌یابد.



شکل (۱۲) تغییرات بارهای بی بعد کمانش به شعاع بی بعد ($\bar{\mu}$)، برای ضریب‌های غیرموضعی مختلف در شرایط تکیه گاهی گیردار ($\bar{k}=0$)

برای بررسی اختلاف تئوری موضعی و غیرموضعی، متغیر

R_m به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$R_m = \frac{\text{بار بی بعد کمانش غیرموضعی}}{\text{بار بی بعد کمانش موضعی}}$$

- با کاهش انعطاف پذیری شرایط مرزی، تاثیر افزایش ضریب غیر موضعی بر تحلیل غیر خطی، افزایش می یابد. لذا تاثیر افزایش ضریب غیر موضعی بر تحلیل غیر خطی گیردار بیشتر از مفصلی می باشد.

- با افزایش شعاع صفحه، تاثیر ضریب غیر موضعی بر بار بی بعد کمانش افزایش می یابد و اختلاف نتایج تحلیل غیر موضعی و موضعی بیشتر می شود.

فهرست علائم

n	تعداد کل گره ها
w	جابه جایی در جهت ضخامت (nm)
v	جابه جایی در جهت محیطی (nm)
u	جابه جایی در جهت شعاعی (nm)
K	سفتی بستر الاستیک (kN/m)
r	شعاع صفحه (nm)
h	ضخامت ورق (m)
E	مدول الاستیسیته (Gpa)
R_m	نسبت بار غیر موضعی به موضعی
R_s	نسبت بار کمانش غیر خطی به خطی

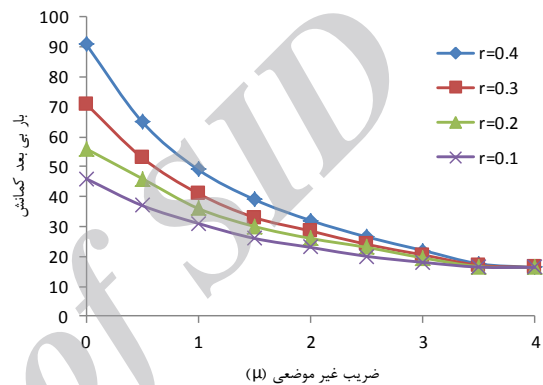
مراجع:

[1] Taniguchi N., On the Basic Concept of Nanotechnology, Proceedings of the International Conference of Production Engineering, London, 1974, pp.18-23.

[2] Ma M., Tu J.P., Yuan Y.F., Wang X.L., Li K.F., Mao F., Zeng Z.Y., Electrochemical Performance of ZnONanoplates as Anode Materials for Ni/Zn Secondary Batteries, *Journal of Power Source*, Vol. 179, 2008, pp. 395-400.

[3] J. Yguerabide, E. E. Yguerabide, Resonance Light Scattering Particles as Ultrasensitive Labels for Detection of Analytes in a wide Range of Applications, *Journal of Cellular Biochemistry-Supplement*, 37, 2001, pp.71-81.

در شکل (۱۱) تغییرات بارهای بی بعد کمانش برای صفحه حلقوی (با فرض ثابت بودن شعاع داخلی) به ضریب های غیر موضعی برای شعاع های بی بعد گوناگون در شرایط تکیه گاهی گیردار نشان داده شده است. همانطور که مشاهده می شود در حالت موضعی نتایج بار کمانش در شعاع های بی بعد گوناگون، مختلف هستند اما با افزایش ضریب غیر موضعی تاثیر نسبت ابعادی کاهش یافته و نتایج بار بی بعد کمانش در هر نسبت شعاعی به سمت عدد ثابت میل می کند.



شکل (۱۱) تغییرات بارهای بی بعد کمانش به ضریب های غیر موضعی در شعاع های بی بعد مختلف برای صفحه حلقوی در شرایط تکیه گاهی گیردار ($\bar{k}=0$)

۵- نتیجه گیری

در این تحقیق تحلیل خطی و غیر خطی کمانش صفحات دایروی/حلقوی گرافن به کمک تئوری الاستیسیته غیر موضعی تحلیل شده است. از مهمترین نتایج می توان به موارد زیر اشاره نمود:

- با کاهش انعطاف پذیری شکل از نظر شرط مرزی، تاثیر افزایش ضریب غیر موضعی بر بار بی بعد کمانش بیشتر است.

- افزایش ضریب غیر موضعی موجب کاهش نیروی بی بعد کمانش می شود.

- با افزایش ضخامت، تاثیر ضریب غیر موضعی و اثر ضریب پایه الاستیک بر بار بی بعد کمانش کاهش می یابد.

- [17] Farajpour A., Danesh M., Mohammadi M., Buckling analysis of variable thickness nanoplates using nonlocal continuum mechanics, *Physica E.*, Vol. 44, 2011, pp.719–727.
- [18] Narendar S., Gopalakrishnan S., Critical buckling temperature of single-walled carbon nanotubes embedded in a one-parameter elastic medium based on nonlocal continuum mechanics, *Physica E.*, Vol. 43, 2011, pp. 1185–1191.
- [19] Lim C.W., Yang Q., Zhang J.B., Thermal buckling of nanorod based on non-local elasticity theory, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 47, 2012, pp. 496-505.
- [20] Farajpour A., Shahidi A.R., Mohammadi M., Mohzoon M., Buckling of Orthotropic Micro/Nanoscale Plates under Linearly varying in-plane load via nonlocal continuum mechanics, *Composite Structures*, Vol. 94, 2012, pp. 1605-1615.
- [21] Prasanna Kumar T.J., Narendar S., Gopalakrishnan S., Thermal vibration analysis of monolayer graphene embedded in elastic medium based on nonlocal continuum mechanics. *Composite Structures*, Vol. 100, 2013, pp. 332–342.
- [22] Emam S.A., A general nonlocal nonlinear model for buckling of nanobeams, *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 37, 2013, pp. 6929–6939.
- [23] Mohammadi M., Farajpour A., Moradi A., Ghayour M., Shear buckling of orthotropic rectangular graphene sheet embedded in an elastic medium in thermal environment, *Composites: Part B*, Vol. 56, 2014, pp. 629–637.
- [24] Sarrami-Foroushani S., Azhari M., Nonlocal vibration and buckling analysis of single and multi-layered graphene sheets using finite strip method including van der Waals effects, *Physica E.*, Vol. 57, 2014, pp. 83–95
- [25] Golmakania M.E., Rezatalaba J., Nonuniform biaxial buckling of orthotropic nanoplates embedded in an elastic medium based on nonlocal Mindlin plate theory, *Composite Structures*, Vol. 119, 2015, pp. 238–250.
- [26] Farajpour A., Mohammadi M., Shahidi A.R., Mahzoon M., Axisymmetric Buckling of the Circular Graphene Sheets with the Nonlocal continuum plate model, *Physica E.*, Vol. 43, 2011, pp. 1820–1825.
- [27] Karamooz Ravari M.R., Shahidi A.R., Axisymmetric buckling of the circular annular nanoplates using finite difference method. *Meccanica*, Vol. 48, 2013, pp. 135–144.
- [28] Bedroud M., Hosseini-Hashemi S., Nazemnezhad R., Buckling of circular/annular Mindlin nanoplates via nonlocal elasticity, *Acta Mechanica*, Vol. 224, 2013, pp. 2663-2676.
- [4] Agesen M., Sorensen C.B., Nanoplates and Their Suitability for Use as Solar Cells, Proceeding of Clean Technology, Boston Secondary Batteries, *Journal of Power Source*, Vol. 179, 2008, pp. 395-400.
- [5] Novoselov K.S., Geim A.K., Morozov S.V., Jiang D., Zhang Y., Dubonos S.V., Grigorieva I.V., Firsov A.A., Electric Field Effect in Atomically Thin Carbon Films, *Science*, vol. 306, 2004, pp. 666–669.
- [6] Xu Z.P., Buehler M.J., Geometry controls conformation of graphene sheets: membranes, ribbons, and scrolls, *ACS-Nano*, Vol. 4, 2010, pp. 3869–3876.
- [7] Chiu H.Y., Hung P., Postma H.W.Ch., Bockrath M., Atomic-Scale Mass Sensing Using Carbon Nanotube Resonators, *Nano Letters*, Vol.8, 2008, pp. 4342–4346.
- [8] Hernandez E., Goze C., Bernier P., Rubio A., Elastic Properties of C and BxCyNz Composite Nanotubes, *Physics Review Letters*, Vol. 80, 1998, pp. 4502–4505.
- [9] Li C.Y., Chou T.W., Elastic wave velocities in single-walled carbon nanotubes, *Physics Review B*, Vol. 73, 2006, pp. 245-407.
- [10] Li C., Chou T.W., Single-walled carbon nanotubes as ultrahigh frequency nanomechanical resonators, *Physics Review B*, Vol. 68, 2003, pp. 073405.
- [11] Eringen A.C., *Nonlocal Continuum Field Theories*, Newyork, Springer-Verlag.
- [12] Fleck N.A., Hutchinson J.W., Strain Gradient Plasticity, *Advance applied mechanics*, Vol. 33, 2002, pp. 295-361.
- [13] F. Yang, A.C.M. Chong, D.C.C. Lam, P. Tong, Couple Stress Based Strain Gradient Theory for Elasticity, *International journal of solid structs*, 39, 2002, pp. 2731-2743.
- [14] Parnes R., Chiskis A., Buckling of nano-fibre reinforced composites: a re-examination of elastic buckling, *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 50, 2002, pp. 855–879.
- [15] Pradhan S.C., Murmu T., Small Scale Effect on the Buckling of Single-Layered Graphene Sheets under Biaxial Compression via Nonlocal Continuum Mechanics, *Computational Materials Science*, Vol. 47, 2009, pp. 268-274.
- [16] Samaei A.T., Abbasion S., Mirsayar M.M., Buckling Analysis of a Single-Layer Graphene Sheet Embedded in an Elastic Medium Based on Nonlocal Mindlin Plate Theory, *Mechanics Research Communications*, Vol. 38, 2011, pp.481-485.

[29] Nosier A., Fallah F., Non-linear Analysis of Functionally Graded Circular Plates under Asymmetric Transverse Loading, *International journal of non-Linear mechanics*, Vol. 44 , 2009, pp. 928-942.

[30] Naderi A., Saidi A.R., Exact solution for stability analysis of moderately thick functionally graded, *Composite Structures*, Vol. 93, 2011, pp. 629–638.

[31] Shu C., *Differential Quadrature and Its Application in Engineering*, Berlin, Springer.

Archive of SID