

## تحلیل ارتعاشی دیسک از جنس مواد مدرج تابعی

محبوبه روائی<sup>۱</sup>، حسن نحوی<sup>۲\*</sup>

\* حسن نحوی: nahvi@iaukhsh.ac.ir

### واژه‌های کلیدی

مواد مدرج تابعی، دیسک، تحلیل ارتعاشی،  
نرم‌افزار آباکوس

### چکیده

دیسک‌های سوراخ‌دار در بخش‌های مختلف صنعت کاربردهای فراوان دارند. با ساخت این دیسک‌ها از جنس مواد مدرج تابعی، قابلیت‌های بیشتری از آنها می‌توان به‌دست آورد. تحلیل ارتعاشی این نوع دیسک می‌تواند در ساخت هرچه کارآمدتر آن به ما کمک کند. در این مقاله، مدل‌سازی و بررسی ارتعاشات آزاد دیسک از جنس مواد مدرج تابعی در راستای ضخامت، با نرم‌افزار آباکوس انجام شده‌است. از آن‌جا که در نرم‌افزار آباکوس در زمینه‌ی طراحی و تحلیل مواد مدرج تابعی المان خاصی تعریف نشده‌است، مدل‌سازی این مواد در این نرم‌افزار انجام شده‌است. به منظور صحت‌سنجی، نتایج تحلیل آباکوس با نتایج موجود در مقالات مقایسه شده‌است. نتایج به‌دست آمده نشان می‌دهد که با تعریف لایه‌های بیشتر در راستای تغییرات خواص، نتایج به‌دست آمده به جواب‌های دقیق‌تر نزدیک‌تر می‌شود.

۱- کارشناس ارشد، دانشکده مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد خمینی شهر

۲- دانشیار، دانشکده مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد خمینی شهر

## ۱- مقدمه

در این مقاله ارتعاشات آزاد دیسک ساخته شده از مواد مدرج تابعی ساکن، با استفاده از نرم‌افزار آباکوس مورد بررسی قرار می‌گیرد. مدول الاستیسیته و چگالی دیسک مورد مطالعه در راستای ضخامت تغییر می‌کنند. در مسائل ارتعاش آزاد مهم‌ترین هدف به‌دست آوردن فرکانس‌های طبیعی است که برای دیسک با شرایط مرزی مختلف به‌دست می‌آیند و تاثیر عوامل مختلف بر آن مورد بررسی قرار می‌گیرد.

در سال ۲۰۰۰، لی یو و لی [۱] ارتعاش سه بعدی ورق‌های دایره‌ای و دایره‌ای سوراخ‌دار ضخیم را مورد بررسی قرار دادند و آن را با روش اجزاء محدود حل کردند. در همین سال لی یو و همکارانش [۲] به بررسی ارتعاشات متقارن محوری صفحه‌ای حلقه‌ای چرخان، با روش المان محدود و با شرایط مرزی مختلف پرداختند. در سال ۲۰۰۳، ژو و همکارانش [۴،۳] تحلیل ارتعاش سه بعدی استوانه سوراخ‌دار و ورق‌های دایره‌ای و دایره‌ای سوراخ‌دار را با روش چیشف-ریتز<sup>۱</sup> انجام دادند. آنها روابط مربوطه را بر اساس تئوری الاستیسیته خطی برای تغییر شکل‌های کوچک به‌دست آوردند و سپس حاصلضرب چند جمله‌ای چیشف در تابع مرزی که شرایط مرزی هندسی را ارضا می‌کرد، به عنوان توابع مجاز انتخاب کردند و با روش ریتز معادلات را حل نمودند. شیانگ هو چی و یین لنگک چانگ [۶،۵] در سال ۲۰۰۶ به تحلیل و بررسی رفتار مکانیکی یک صفحه مستطیلی شکل الاستیک بر روی بستری از مواد مدرج تابعی با ضخامت متوسط که در معرض بارگذاری عرضی و با تکیه گاه ساده بود، پرداختند. ضریب پواسون در صفحه مواد مدرج تابعی ثابت بوده و مدول یانگ آن به‌صورت پیوسته در طول ضخامت با توجه به کسر حجمی از ترکیبات با

قانون توانی و یا تابع نمایی تعریف شد. در این مقالات حل معادلات بر اساس تئوری کلاسیک ورق و سری فوریه به‌دست آمده است و نتایج به‌دست آمده با نتایج روش عددی المان محدود محک زده شده است.

نی و ژانگ [۷] در سال ۲۰۰۷ یک راه حل نیمه تحلیلی برای ارتعاشات سه بعدی صفحات مدور از جنس مواد مدرج تابعی به‌دست آوردند. در این مقاله تحلیل ارتعاشات آزاد و اجباری سه بعدی صفحه مدور از مواد مدرج تابعی، با شرایط مرزی مختلف، به‌دست آمده است. در این سال همچنین ابراهیمی و راستگو [۸] ارتعاشات آزاد صفحات حلقوی ساخته شده از مواد مدرج تابعی با لایه‌های پیزوالکتریک<sup>۲</sup> را بررسی کردند و نتایج به‌دست آمده را با مقالات موجود مقایسه نمودند.

اهمیت دیسک‌ها بر همگان واضح است، بنابراین در این مقاله، به مدل‌سازی و تحلیل مسئله با کمک نرم‌افزار آباکوس پرداخته و درستی روش مدل‌سازی و نتایج به‌دست‌آمده را با مقالات و کارهای انجام شده، بررسی خواهیم کرد. با پیشرفت تکنولوژی و طراحی نرم‌افزارهای مختلف می‌توان با در نظر گرفتن فاکتورهای طراحی با هزینه کمتر، سریع‌تر به تحلیل و بررسی اجزاء مختلف دستگاه‌های صنعتی پرداخت. نرم‌افزار آباکوس<sup>۳</sup> یکی از قوی‌ترین نرم‌افزارهای موجود در زمینه تحلیل‌های مکانیکی است که امروزه به عنوان یک نرم‌افزار انعطاف‌پذیر در حل مسائل به روش اجزاء محدود<sup>۴</sup> در پژوهش‌های مهندسی دنیا جایگاه ویژه‌ای پیدا کرده و به عنوان نرم افزار قدرتمند مهندسی در مراکز تحقیقاتی از آن استفاده می‌شود.

<sup>۱</sup> Piezoelectric<sup>۲</sup> Abaqus<sup>۳</sup> Finite Element Method (FEM)<sup>۴</sup> Chebyshev-Ritz

۲- بیان مسئله

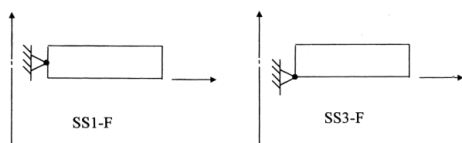
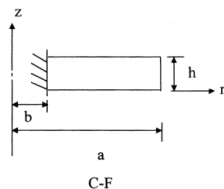
مشخصات هندسی ورق حلقه‌ای به صورت زیر تعریف

شده است:

$$\frac{a}{h} = 5, 10, 20, 50 \quad \frac{b}{a} = 0.1, 0.25, 0.5$$

a و b به ترتیب معرف شعاع بیرونی و داخلی ورق و h

نیز معرف ضخامت ورق است که در مقدار آن ثابت است.



شکل (۲) شرایط مرزی در مرجع [۲]

سرعت چرخشی ورق  $\Omega$  و فرکانس طبیعی  $\omega$

به صورت زیر بی بعد شده اند [۲]:

$$\bar{\Omega} = \Omega a^2 \sqrt{\rho h / 8D} \quad (۳)$$

$$\bar{\omega} = \omega a^2 \sqrt{\rho h / D} \quad (۴)$$

D نیز معرف مقدار سختی خمشی دیسک است.

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (۵)$$

جهت تایید اعتبار روش مدل سازی در نرم افزار

آباکوس، مقایسه‌ای بین نتایج حاضر و نتایج موجود قبلی

انجام شده است. فرکانس‌های طبیعی بی بعد مود اول و دوم

دیسک در سرعت‌های چرخشی متفاوت، به ترتیب در جدول

(۱) و جدول (۲) نشان داده شده است.

نتایج به دست آمده دارای اختلاف ناچیزی با نتایج موجود از

مرجع [۲] هستند که در این جداول ارائه شده اند.

۲-۲- دیسک ساکن از جنس مواد مدرج تابعی

با مدل کردن یک دیسک ساکن از جنس مواد مدرج

تابعی، نتایج به دست آمده از نرم افزار با نتایج موجود مقایسه

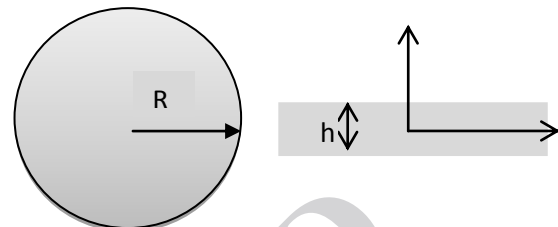
می شوند.

هدف از این قسمت معرفی مسئله و به دست آوردن

معادلات ارتعاشی حاکم بر آن است. همان طور که در شکل

(۱) دیده می شود، هندسه‌ی مسئله عبارت است از یک

دیسک ساکن با شعاع R و ضخامت h است.



شکل (۱) نمای بالا و راست دیسک

فرکانس طبیعی آن‌ها تغییر مدول الاستیک و دانسیته

دیسک در راستای ضخامت به طور پیوسته بوده و طبق روابط

زیر تغییر می کند.

$$E(z) = (E_m - E_c) \left( \frac{z}{2h_f} + \frac{1}{2} \right)^g + E_c \quad (۱)$$

$$\rho(z) = (\rho_m - \rho_c) \left( \frac{z}{2h_f} + \frac{1}{2} \right)^g + \rho_c \quad (۲)$$

برای مدل سازی و تحلیل ارتعاشی دیسک مورد بررسی

قبل از هر چیز دو مدل ساده تر مدل شده و نتایج به

دست آمده با نتایج موجود مقایسه شده است.

۲-۱- دیسک همگن دوار

برای بررسی صحت و دقت روش حل با آباکوس،

چند دیسک با نسبت شعاع داخلی به خارجی متفاوت، نسبت

شعاع به ضخامت، سرعت چرخشی و سه شرط مرزی

مختلف مطابق شکل (۲) را بررسی کرده و به دست آمده

است.

ورق مورد بررسی از جنس استیل با مشخصات زیر است:

$$E = 210Gpa \quad \nu = 0.3 \quad \rho = 7810 \frac{kg}{m^3}$$

E معرف مدول الاستیسیته و  $\rho$  و  $\nu$  به ترتیب بیان گر

چگالی و ضریب پواسون هستند.

جدول (۱) فرکانس های طبیعی بی بعد مود اول مربوط به صفحه ی همگن سوراخ دار [۲]

$\bar{\Omega}$		b/a=۰/۲۵				b/a=۰/۵				
		a/h				a/h				
		۵	۱۰	۲۰	۵۰	۵	۱۰	۲۰	۵۰	
$\bar{\Omega}$	B.C									
	C-F	۱۱/۱۱۹۷	۱۲/۳۱۲۱	۱۲/۶۹۴۳	۱۲/۸۱۱۷	۱۷/۶۳۳۷	۲۰/۰۹۶۶	۲۰/۹۴۴۴	۲۱/۱۸۲۴	Liu [2]
۴	SS1-F	۱۲/۷۱	۱۲/۷۸	۱۲/۸۴	۱۲/۸۵	۲۰/۲۵	۲۰/۹۳	۲۱/۲	۲۱/۲۶	Present
			۹/۶۲۰۲	۱۰/۲۲۴۷	۱۰/۵۲۳۶		۱۴/۴۴۳۶	۱۵/۴۹۳۵	۱۵/۹۳۹	Liu [2]
	SS3-F	۱۰/۵۹	۱۰/۶۹	۱۰/۹۲	۱۱/۰۵	۱۵/۵۶	۱۵/۸۷	۱۶/۲۲	۱۶/۳۷	Present
			۹/۹۷۳۸	۹/۸۱۴۳	۱۰/۱۹۲۵		۱۳/۱۴۵۳	۱۴/۳۰۳۸	۱۴/۸۶۵۵	Liu [2]
	C-F	۹/۶۵۶	۱۰/۱۸	۱۰/۳۲	۱۰/۳۹	۱۲/۹۵	۱۳/۲۲	۱۳/۴۱	۱۳/۴۹	Present
				۲۲/۵۸۹۲	۲۳/۰۱۳۱		۳۲/۵۰۸۴	۳۴/۸۱۵۲	۳۵/۵۶۱۶	Liu [2]
۸	SS1-F		۲۳/۶۵	۲۳/۲۲	۲۳/۱۴		۳۴/۷۷	۳۵/۷۴	۳۵/۷۴	Present
				۱۹/۴۶	۲۰/۲۱		۲۹/۷۴۲	۳۱/۰۴۵۹		Liu [2]
	SS3-F		۲۱/۰۲	۲۱/۱۹	۲۱/۳۲		۳۱/۶۸	۳۱/۷۶	۳۱/۹۳	Present
				۱۸/۱۸۵۱	۱۹/۲۴۷۸		۲۷/۸۸۱۴	۲۹/۴۸۸۵		Liu [2]
	C-F		۱۸/۶۹	۱۸/۴۹	۱۸/۴۳		۲۴/۴	۲۳/۴۸	۲۳/۷۵	Present

جدول (۲) فرکانس های طبیعی بی بعد مود دوم مربوط به صفحه ی همگن سوراخ دار [۲]

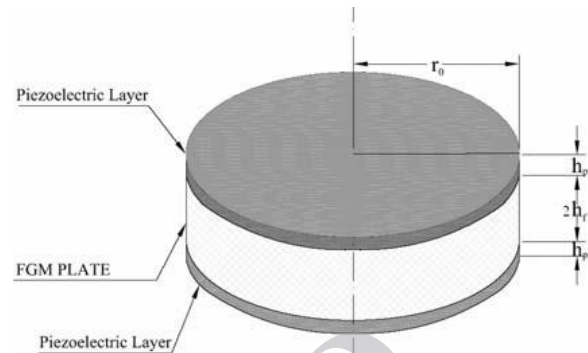
$\bar{\Omega}$		b/a=۰/۲۵				b/a=۰/۵				
		a/h				a/h				
		۵	۱۰	۲۰	۵۰	۵	۱۰	۲۰	۵۰	
$\bar{\Omega}$	B.C									
	C-F	۳۲/۹۳۵۱	۴۳/۶۳۹۳	۴۷/۰۱۲	۴۸/۱۹۵	۴۷/۶۴۹	۷۷/۹۰۹	۸۹/۶۹۸۷	۹۲/۰۲۵	Liu [2]
۴	SS1-F	۴۱/۱۳	۴۵/۸	۴۷/۸۴	۴۸/۵۲	۶۴/۳۸	۸۱/۹	۹۱/۲۴	۹۴/۷۲	Present
			۳۶/۴۹۲۸	۳۹/۵۶۲۴	۴۰/۶۵۵۸		۶۱/۱۳۲۹	۷۰/۷۱۵۴	۷۳/۶۰۶	Liu [2]
	SS3-F	۳۷/۲۲	۴۰/۰۳	۴۱/۳۱	۴۱/۹۷	۵۸/۸۲	۶۸/۸۴	۷۳/۱۴	۷۴/۶۸	Present
			۳۴/۶۲۹۳	۳۸/۹۵۲۲	۴۰/۴۳۹۴		۵۱/۶۳۵۹	۶۸/۰۵۹۵	۷۲/۶۲۳	Liu [2]
	C-F	۳۵/۵۷	۳۸/۷۳	۴۰/۷۳	۴۱/۳۹	۴۷/۷۲	۵۷/۰۴	۶۸/۴۶	۷۱/۴۳	Present
				۷۰/۳۹۶۲	۷۲/۳۲۴۲		۹۴/۵۸۳۳	۱۱۲/۵۷۸	۱۱۸/۷۹	Liu [2]
۸	SS1-F		۷۲/۰۶	۷۲/۵۳	۷۲/۸		۱۰۹/۷	۱۱۷/۱	۱۱۹/۸	Present
				۶۳/۳۸۵۲	۶۵/۵۰۲۸			۹۶/۵۹۶۲	۱۰۲/۶	Liu [2]
	SS3-F		۶۷/۲	۶۷/۴۵	۶۷/۹۱		۹۹/۹۶	۱۰۳/۵	۱۰۴/۹	Present
				۶۰/۹۰۰۷	۶۳/۷۲۱۸			۹۱/۸۸۰۱	۹۹/۴۳۱	Liu [2]
	C-F		۶۰/۶۲	۶۲/۳	۶۲/۵۵		۹۴/۲۷	۸۶/۷	۸۹/۶۷	Present

دیده می‌شود که نتایج به دست آمده از حل و مدل‌سازی با نرم‌افزار آباکوس با حل تحلیلی مرجع [۸] اختلاف بسیار ناچیزی دارند.

جدول (۳) سه مود اول به دست آمده از مدل‌سازی و نتایج مرجع [۸]

اندیس	درجه بندی	شماره مود	FGM دیسک		خطا %
			نتایج مقاله [۱۰]	نتایج مدل‌سازی	
g	m				
۰ (فلز)	۱	۱۳۹/۲۸	۱۳۹/۲۷	۰/۰۰۷۱۸	
	۲	۲۸۹/۸۵	۲۸۹/۷۰	۰/۰۵۱۷۷۸	
	۳	۴۷۴/۶۱	۴۷۳/۴۵	۰/۲۴۵۰۱	
۱	۱	۱۳۵/۶۶۷	۱۳۵/۴۳	۰/۱۷۴۹۹۸	
	۲	۲۸۱/۶۶	۲۸۱/۷۸	۰/۰۴۲۵۹	
	۳	۴۶۰/۳۰۸	۴۶۰/۴۵	۰/۰۳۰۸۴	
۳	۱	۱۳۳/۷۳۹	۱۳۳/۶۳	۰/۰۸۱۵۶۹	
	۲	۲۷۷/۶۶۱	۲۷۸/۰۴	۰/۱۳۶۳۱	
	۳	۴۵۳/۷۷۹	۴۵۴/۳۴	۰/۱۲۳۴۸	
۵	۱	۱۳۳/۱۴۱	۱۳۳/۰۶	۰/۰۶۰۸۷۵	
	۲	۲۷۶/۴۲	۲۷۶/۸۵	۰/۱۵۵۳۲	
	۳	۴۵۱/۷۵۲	۴۵۲/۳۹	۰/۱۴۱۰۳	
۷	۱	۱۳۲/۸۶۴	۱۳۲/۷۸	۰/۰۶۳۲۶۳	
	۲	۲۷۵/۸۴۶	۲۷۶/۲۵	۰/۱۴۶۲۴	
	۳	۴۵۰/۸۱۲	۴۵۱/۴۶	۰/۱۴۳۵۳	
۹	۱	۱۳۲/۷۰۹	۱۳۲/۷۰	۰/۰۰۶۷۸۲	
	۲	۲۷۵/۵۲۳	۲۷۶/۰۹	۰/۲۰۵۳۷	
	۳	۴۵۰/۲۸۴	۴۵۰/۸۴	۰/۱۲۳۳۳	
۱۰	۱	۱۳۲/۶۵۵	۱۳۲/۵۵	۰/۰۷۹۲۱۵	
	۲	۲۷۵/۴۱	۲۷۵/۷۹	۰/۱۳۷۷۹	
	۳	۴۵۰/۱	۴۵۰/۶۶	۰/۱۲۴۲۶	

شکل (۳) یک دیسک از جنس مواد مدرج تابعی را با دو لایه‌ی پیزوالکتریک در بالا و پایین دیسک نشان می‌دهد [۸].



شکل (۳) دیسک ساخته شده از مواد مدرج تابعی با دو لایه‌ی پیزوالکتریک [۸]

خواص دیسک ساخته شده از مواد مدرج تابعی در جهت ضخامت تغییر می‌کند و از روابط زیر پیروی می‌کند:

$$E(z) = (E_m - E_c) \left( \frac{z}{2h_f} + \frac{1}{2} \right)^g + E_c \quad (6)$$

$$\rho(z) = (\rho_m - \rho_c) \left( \frac{z}{2h_f} + \frac{1}{2} \right)^g + \rho_c \quad (7)$$

در روابط فوق  $g$  معرف اندیس درجه بندی،  $E_c$  و  $\rho_c$  به ترتیب معرف مدول الاستیسیته و چگالی سرامیک و  $E_m$  و  $\rho_m$  نیز به ترتیب معرف مدول الاستیسیته و چگالی فلز هستند که مقادیر آنها برابرند با:

$$E_c = 205Gpa \quad \rho_c = 8900 \frac{kg}{m^3}$$

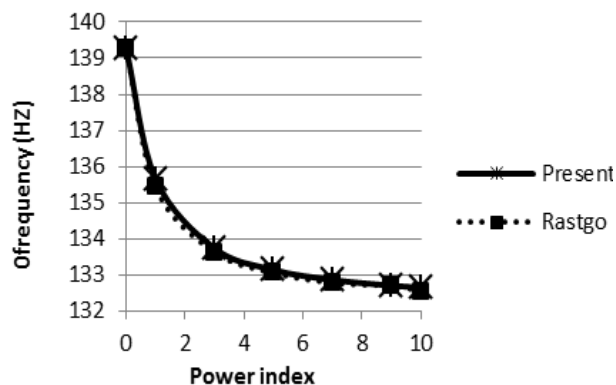
$$E_m = 200Gpa \quad \rho_m = 7800 \frac{kg}{m^3}$$

$$r_o = 600mm \quad h_f = 10mm \quad h_p = 2mm$$

برای مدل کردن قسمتی از دیسک که از جنس مواد مدرج تابعی است، در نرم‌افزار باید دیسک را در جهت ضخامت لایه‌بندی کرد. با لایه‌بندی دیسک به تعداد ۳۲ لایه در راستای ضخامت و تخصیص دادن خواص مربوط به هر لایه، جواب‌های قابل قبولی، با اختلاف ناچیز نسبت به نتایج مرجع [۸]، به دست آمد. مقایسه نتایج تحلیل آباکوس با نتایج مرجع [۸] در جدول (۳) ارائه شده است. از شکل (۴)

## مراجع:

- [1] Liu C.F., Lee Y.T., Finite element analysis of three-dimensional vibration of thick circular and annular plates, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 233, 2000, pp.63-80.
- [2] Liu C.F., Lee J.F., Lee Y.T., Axisymmetric vibration analysis of rotating annular plates by a 3D finite element, *Journal of Solid and Structures*, Vol. 37, 2000, pp. 5813-5827.
- [3] Zhou D., Cheung Y.K., Lo S.H., Au F.T.K., 3D vibration analysis of solid and hollow circular cylinders via Chebyshev-Ritz method, *Journal of Computer Method in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 192, 2003, pp. 1575-1589.
- [4] Zhou D., Cheung Y.K., Lo S.H., Au F.T.K., Three-dimensional vibration analysis of circular and annular plates via Chebyshev-Ritz method, *Journal of Solid and Structures*, Vol. 40, 2003, pp. 3089-3105.
- [5] Chi S., Chung Y., Mechanical behavior of functionally graded material plates under transverse load-Part I: Analysis, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 43, 2006, pp 3657-3674.
- [6] Chi S., Chung Y., Mechanical behavior of functionally graded material plates under transverse load-Part II: Numerical results, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 43, 2006, pp 3674-3691.
- [7] Nie G.J., Zhong Z., Semi-analytical solution for three-dimensional vibration of functionally graded circular plates, *Journal of Computer Method in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 196, 2007, pp. 4901-4910.
- [8] Ebrahimi F., Rastgoo A., Free vibration analysis of smart annular FGM plates integrated with piezoelectric layers, *Smart Materials and Structures*, Vol. 17, 2008, pp. 13.



شکل (۴) اثر اندیس درجه بندی بر فرکانس اول و مقایسه با مرجع [۸]

## ۳- نتیجه گیری

در مقاله‌ی ارائه شده به بررسی و تحلیل ارتعاشی دیسک ساخته شده از مواد مدرج تابعی در راستای ضخامت با کمک آباکوس پرداخته شده است. با توجه به نتایج به دست آمده، تاثیر پارامترهای مختلف بر فرکانس‌های طبیعی دیسک به صورت زیر جمع بندی شده است:

۱. برای دیسک ساخته شده از مواد مدرج تابعی با تابع توانی در راستای ضخامت، با افزایش تعداد لایه بندی، فرکانس به سمت مقدار مشخصی همگرا می شود و جواب‌های دقیق تری را نتیجه می دهد.

۲. با افزایش اندیس درجه بندی  $g$  از ۰ تا ۱۰، طبق رابطه تعریف شده، خواص دیسک به ماده تعریف شده در سطح بالایی دیسک (در این مقاله سرامیک) میل می کند و فرکانس های طبیعی کاهش می یابند.

۳. با افزایش سرعت چرخشی دیسک، فرکانس طبیعی

نیز افزایش می یابد.