

## مدلسازی استاتیکی غیرخطی ورق هدفمند تابعی نسبتاً ضخیم با استفاده از روش آزادسازی دینامیکی

محمدجواد محمودی<sup>۱\*</sup>، وحید محلوچی<sup>۲</sup>

\* نویسنده مسئول: mj\_mahmoudi@sbu.ac.ir

### واژه‌های کلیدی

روش آزادسازی دینامیکی، ورق هدفمند  
تابعی، تئوری مرتبه اول برشی میندلین، تغییر  
شکل بزرگ الاستیک

### چکیده

در این مقاله تحلیل استاتیکی غیرخطی ورق نسبتاً ضخیم ساخته شده از مواد هدفمند تابعی با استفاده از روش آزادسازی دینامیکی صورت گرفته است. این امر به کمک تئوری مرتبه اول برشی میندلین به منظور ضخیم در نظر گرفتن ورق انجام شده است. جهت تحلیل رفتار غیرخطی هندسی معادلات گسسته شده استخراج شده است. شرایط بارگذاری و شرایط مرزی ورق به ترتیب به صورت بارگستره عرضی یکنواخت و تکیه گاه ساده در چهار لبه ورق ضخیم در نظر گرفته شده است. جهت عمومیت بخشیدن به نتایج به دست آمده، این معادلات به صورت بدون بعد با اعمال روش آزادسازی دینامیکی بر مبنای تفاضلات محدود مرکزی حل شده‌اند. اثر پارامترهای مسأله نظیر ثابت توانی ماده هدفمند تابعی و نسبت ضلع به ضخامت ورق بر نتایج تحلیل مورد بررسی قرار گرفته است. با توجه به نتایج به دست آمده، لزوم در نظر گرفتن رفتار غیرخطی هندسی و استفاده از تئوری ای که اثرات ضخامت ورق روی پاسخ خمش ورق را در نظر بگیرد و همچنین در نهایت لزوم استفاده از روش حل آزادسازی دینامیکی با وجود جملات غیرخطی ناشی از تغییر شکل زیاد ورق ضخیم هدفمند تابعی بحث شده است.

۱- استادیار، دانشکده مهندسی مکانیک و انرژی، دانشگاه شهید بهشتی، تهران

۲- دانشجوی دکتری، دانشکده مهندسی مکانیک و انرژی، دانشگاه شهید بهشتی، تهران

## ۱- مقدمه

یک ماده به تنهایی نمی‌تواند جوابگوی خواص مورد نیاز در صنایع پیشرفته باشد. امروزه استفاده ترکیبی از مواد برای دستیابی به خواص مطلوب روزه‌روز افزایش یافته‌است. به منظور ارضای این خواسته، مواد مرکب لایه‌ای تولید شدند که در دو سطح خود خواص متفاوتی داشتند ولی آنها نیز در اثر تنش‌های پسماند لایه لایه شده و دارای عمر کمی بودند.

به دنبال گسترش روز افزون استفاده از مواد مرکب در صنایع مختلف، ایده ساخت نسل جدیدی از مواد به نام ماده هدفمند تابعی برای اولین بار در ژاپن مطرح گردید. در سال ۱۹۸۴ در لابراتوار هوافضای ژاپن موادی با ریز ساختار ناهمگن تولید شد که خواص مکانیکی آن به طور تدریجی و پیوسته از سطحی به سطح دیگر تغییر می‌نمود. مواد با تغییر تدریجی خواص یا مواد هدفمند تابعی (FGM) کامپوزیت‌های غیر همگنی هستند که دارای تغییرات پیوسته در ترکیب اجزای تشکیل دهنده خود (فلز و سرامیک) می‌باشند. ایده ساخت مواد هدفمند تابعی اولین بار توسط کویزومی به منظور کاربردهایی که در آن مقاومت مکانیکی بالا به همراه تحمل حرارتی عالی مورد نیاز باشد، توسعه داده شد [۱]. یکی از موارد مهم استفاده از این مواد در فرایند شکافت راکتورهای هسته‌ای می‌باشد.

پس از گذشت چند سال از ساخت ورق‌های هدفمند تابعی تخمین‌های زیادی جهت تحلیل رفتار آنها پیشنهاد شد. ابودی و همکاران با استفاده از تئوری‌های برشی مرتبه بالا<sup>۲</sup>، تحلیل ترموالاستیک ورق‌های هدفمند تابعی تغییر خواص در یک، دو و سه جهت متعامد را ارائه نمودند [۲ تا ۴]. پراوین و ردی روش المان محدود را جهت یافتن پاسخ استاتیکی و دینامیکی ورق‌های هدفمند تابعی فلز-سرامیک به کار بردند که در آن از روابط غیر خطی فن-کارمن استفاده شده بود [۵]. ردی و همکاران خمش متقارن ورق‌های دایروی هدفمند تابعی را تحلیل کردند که بر پایه تئوری میندلین بود [۶]. ردی رفتار استاتیکی ورق‌های مستطیلی هدفمند تابعی

را مورد بررسی قرار داد که پایه آن تئوری برشی مرتبه سوم<sup>۳</sup> بود [۷]. ردی و چنگک تحلیل ترمومکانیکی ورق‌های مستطیلی هدفمند تابعی را ارائه دادند [۸]. چنگک و باتر از یک روش گسترش داده شده جهت تحلیل سه‌بعدی ترموالاستیک ورق‌های هدفمند تابعی با تابع بیضوی استفاده کردند که ورق دارای لبه‌های گیردار بود [۹]. باتر و چنگک خیز ورق‌های چند ضلعی هدفمند تابعی با شرایط تکیه‌گاه ساده را بوسیله تئوری برشی مرتبه اول و تئوری برشی مرتبه سوم فرمول‌بندی نمودند [۱۰]. کشتالیان با استفاده از معادلات پلواکو<sup>۴</sup> یک تحلیل دقیق برای خمش ورق‌های مستطیلی هدفمند تابعی ارائه نمود [۱۱]. وو و مگود یک حل تحلیلی برای تغییر شکل زیاد ورق‌های هدفمند تابعی نازک ارائه دادند [۱۲]. یانگ و شن تغییر شکل بزرگ و پاسخ پس‌کمانش ورق‌های مستطیلی نازک هدفمند تابعی را تحت بار عرضی و داخل صفحه با استفاده از روش نیمه-تحلیلی اختلال<sup>۵</sup> به همراه تقریب تفاضل مربعی<sup>۶</sup> و روش گلرکین، مطالعه کردند [۱۳]. در تحقیق ایشان از ورق هدفمند تابعی با دو تکیه‌گاه گیردار در دو لبه مقابل و همچنین فرم ساده توانی برای توزیع اجزاء استفاده شده است. قنادپور و علی‌نیا رفتار تغییر شکل بزرگ ورق نازک هدفمند تابعی را تحت بار عرضی با حداقل کردن انرژی پتانسیل کل سیستم به دست آوردند [۱۴]. بیگلو تحلیل ترموالاستیک دقیق سه‌بعدی ورق مستطیلی هدفمند تابعی با تغییر شکل‌های کوچک روی تکیه‌گاه‌های ساده را ارائه کرد. در این تحقیق تابع نمایی جهت مدل کردن تغییرات خواص ماده هدفمند تابعی در طول ضخامت ورق در نظر گرفته شده است و حل تحلیلی با استفاده از سری فوریه دوگانه نسبت به مختصات داخل صفحه روش فضای حالت ارائه شده است [۱۵]. کومار و همکارانش تحلیل خمش ورق هدفمند تابعی ضخیم با تغییر شکل زیاد را با روش عددی ساده و غیر دقیق نیوتن-رافسون بررسی کردند [۱۶].

3. Third order Shear Deformation Theory (TSDT)

4. Plevako

5. Perturbation

6. Differential quadrature approximation

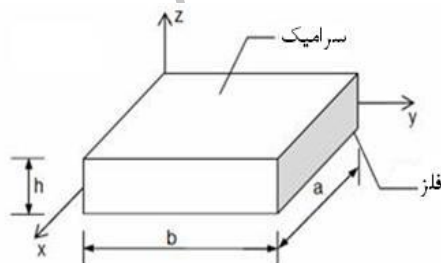
1. Functionally Graded Material (FGM)

2. Higher order Shear Deformation Theory (HSDT)

خواهد شد، مسئله استاتیکی را از دیدگاه دینامیکی تحلیل نموده و رفتار حالت ماندگار را متناظر با حل استاتیکی در نظر می‌گیرد. جهت در نظر گرفتن اثرات ضخامت ورق و تغییر شکل برشی عرضی از تئوری برشی مرتبه اول<sup>۲</sup> استفاده می‌شود. از آنجا که ماهیت معادلات حاکم بر ورق‌های هدفمند تابعی به نحوی است که نمی‌توان برای ورق‌های مستطیلی با شرایط مرزی دلخواه در دو لبه موازی پاسخ کاملاً تحلیلی ارائه نمود، لذا در این مقاله شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده در دو لبه موازی و ورق میندین مورد نظر است. به این ترتیب ابتدا مدل توزیع خواص ماده هدفمند تابعی مطرح می‌گردد و در ادامه به ارائه معادلات ورق مستطیلی هدفمند تابعی ضخیم با تغییر شکل بزرگ پرداخته می‌شود. سپس روش عددی آزادسازی دینامیکی برای ورق هدفمند تابعی معرفی و گسترش می‌یابد. در نهایت به ارائه نتایج، مقایسه آن با تحقیقات موجود پرداخته می‌شود و اثرات نسبت ضلع به ضخامت ورق و پارامتر رفتاری مدل ماده هدفمند تابعی روی پاسخ استاتیکی ورق مورد نظر بررسی می‌شود.

## ۲- مدل خواص ماده هدفمند تابعی

مطابق شکل (۱) سازه مورد بررسی شامل ورق مستطیلی هدفمند تابعی‌ای به ضخامت  $h$ ، عرض  $b$  و طول  $a$  به ترتیب در راستاهای  $x$ ،  $y$  و  $z$  محور مختصات دکارتی انتخابی که صفحه  $z - x$  و مبدأ محور  $z$  آن منطبق بر صفحه میانی ورق است، می‌باشد. این ورق تحت بارگذاری عرضی یکنواخت  $q$  قرار دارد و دارای تکیه‌گاه‌های ساده در لبه‌های آن است.



شکل (۱) هندسه و دستگاه مختصات انتخابی ورق مستطیلی هدفمند تابعی

در روش‌های معمول حل معادلات تعادل استاتیکی فرض می‌شود که نیروهای داخلی از ابتدا در سازه وجود داشته‌اند. در چنین حالتی می‌توان فرض کرد که نیروهای خارجی به طور بسیار آهسته به گونه‌ای اعمال می‌شوند که رفتار دینامیکی سازه قابل چشم پوشی باشد. بیان مشابهی برای اولین بار توسط ریلی مطرح و منجر به ایده‌ای فیزیکی شد که هم‌اکنون پایه و اساس روش آزادسازی دینامیکی<sup>۱</sup> است. کاربردهای اولیه این ایده بوسیله آتر و دی در سالهای ۱۹۶۰ جهت آنالیز مسائل مربوط به جذر و مد و آبنگری انجام گرفت [۱۷]. از حدود سالهای اواسط دهه ۶۰ به تدریج مقالات در مورد این روش جدید شکل گرفت که مهمترین آنها مقاله‌ای است که توسط دی در سال ۱۹۶۵ نوشته شد [۱۸]. بعدها آتر در مقاله خود از یک روش کامپیوتری جدید برای محاسبه تنش و تغییر مکان در مخازن فشاری جدار ضخیم نام برد که بر اساس تفاضل محدود با کاربرد تفاضل مرکزی شکل گرفته بود [۱۹]. تروی تحلیل استاتیکی ورق میندین مستطیلی ایزوتروپ را با خیز زیاد با استفاده از روش آزادسازی دینامیکی انجام داد [۲۰]. سپس فلاحتگر تحلیل ورق قطاعی ویسکوالاستیک غیرخطی را با استفاده از روش آزادسازی دینامیکی انجام داد [۲۱]. در ادامه تحقیقات حل ورق دایروی و قطاعی از دایره با استفاده از روش آزادسازی دینامیکی انجام گرفت [۲۲ تا ۲۵]. تنها مورد استفاده از روش آزادسازی دینامیکی در تحلیل ورق‌های هدفمند تابعی دایروی شامل کار گلمکانی و کدخداییان می‌شود [۲۶]. استفاده از روش آزادسازی دینامیکی در تحلیل ورق‌های هدفمند تابعی مستطیلی چه نازک و چه ضخیم در تحقیقات پیشین مورد بررسی قرار نگرفته است.

در این مقاله، بر خلاف روش‌های سنتی حل مسائل ورق-ها، روش نسبتاً جدید و مؤثر آزادسازی دینامیکی جهت تحلیل استاتیکی ورق مستطیلی ضخیم هدفمند تابعی با تغییر شکل زیاد مورد استفاده قرار گرفته و توانایی‌ها و قابلیت‌های آن در حل مسائلی از این قبیل، نشان داده شده‌است. این روش، آن‌گونه که در ادامه مقاله به صورت مشروح بیان

$$u(x, y, z) = u^0(x, y) + z\theta_x(x, y)$$

$$v(x, y, z) = v(x, y) + z\theta_y(x, y) \quad (۳)$$

$$w(x, y, z) = w(x, y)$$

که  $u$ ،  $v$  و  $w$  نشان‌دهنده مؤلفه بردار تغییر مکان به ترتیب در راستاهای  $x$ ،  $y$  و  $z$  هستند.  $u^0$  و  $v^0$  تغییر مکان داخل صفحه نقطه‌ای روی صفحه‌میان‌ی ورق به ترتیب در راستاهای  $x$  و  $y$  هستند و توابع  $\theta_x$  و  $\theta_y$  نشان‌دهنده دوران حول محورهای  $x$  و  $y$  می‌باشند. با فرض اینکه در ورق‌ها تغییر مکان‌های داخل صفحه خیلی کوچک هستند اما تغییر مکان عرضی  $w$  نسبتاً بزرگ است، روابط غیرخطی کرنش-تغییر مکان فنکارمن به صورت زیر نوشته می‌شود [۲۸]:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ 2\varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} e_x^0 \\ e_y^0 \\ 2e_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \quad (۴)$$

$$\begin{Bmatrix} 2\varepsilon_{xz} \\ 2\varepsilon_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} e_{xz}^0 \\ e_{yz}^0 \end{Bmatrix}$$

$$\varepsilon_z = 0$$

که در آن:

$$e_x^0 = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, \quad k_x = \frac{\partial \theta_x}{\partial x}$$

$$e_y^0 = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2, \quad k_y = \frac{\partial \theta_y}{\partial y}$$

$$e_{xy}^0 = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}, \quad k_{xy} = \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \quad (۵)$$

$$e_{zx}^0 = \theta_x + \frac{\partial w}{\partial x}, \quad e_{zy}^0 = \theta_y + \frac{\partial w}{\partial y}$$

کرنش عمودی صفحه‌میان‌ی  $\varepsilon_z$  برابر صفر است. بنابراین طبق قانون هوک تعمیم‌یافته برای ورق ایزوتروپ مورد نظر روابط تنش و کرنش صفحه‌ای به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu \\ \nu & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \end{Bmatrix} \quad (۶)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} = \frac{E}{2(1+\nu)} \begin{Bmatrix} 2\varepsilon_{xy} \\ 2\varepsilon_{xz} \\ 2\varepsilon_{yz} \end{Bmatrix}$$

ورق مستطیلی از مخلوط سرامیک و فلز ساخته شده است. خواص ماده ترکیب شده به صورت پیوسته و آرام در طول ضخامت ورق تغییر می‌کند. مدل‌های تحلیلی و محاسباتی زیادی که در مورد به دست آوردن توابع مناسب به منظور مدلسازی خواص مواد هدفمند تابعی بحث می‌کنند، ارائه شده‌اند. یک ماده هدفمند تابعی با یک کسر حجمی متغیر تعریف می‌شود. بیشتر محققان از توابع توانی، توابع نمایی و یا قانون ساده مخلوط‌ها<sup>۱</sup> استفاده می‌کنند. در این تحقیق، مدل ردیبه‌عنوان یک مدل تعیین خواص به صورت واقعی تر استفاده می‌شود. بر طبق قانون ساده مخلوط‌ها خواص ماده در طول ضخامت ورق  $P$  به صورت زیر بیان می‌شود [۵]:

$$P(z) = P_c V_c + P_m V_m \quad (۱)$$

که زیر نویس  $m$  و  $c$  به ترتیب به اجزاء فلزی و سرامیکی اشاره دارد. در مدل ردی، کسر حجمی فلز  $V_m$  و سرامیک  $V_c$  به صورت زیر فرض می‌شوند [۵]:

$$V_c = \left( \frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^n, \quad V_m = 1 - V_c \quad (۲)$$

که  $z$  مختصات ضخامت  $(-h/2 \leq z \leq h/2)$  و  $n$  ثابت توانی ماده هدفمند تابعی است، که نحوه تغییرات خواص در ضخامت را اعمال می‌کند. در میان خواص مورد بررسی، مدول یانگ در ضخامت ورق متغیر بوده و از سطح بالایی تا سطح پایینی از سرامیک به فلز یا برعکس تغییر می‌کند. تاثیر نسبت پواسون روی تغییر شکل خیلی کمتر از مدول یانگ است که این مقدار ثابت در نظر گرفته می‌شود [۵ تا ۱۰].

### ۳- تحلیل

#### ۳-۱- معادلات حاکم ورق

در ورق‌های ضخیم که مورد نظر این تحقیق است، فرض عمود ماندن خط عمود عرضی در حین تغییر شکل حذف می‌شود و اثر تنش‌های برشی عرضی در نظر گرفته می‌شود. در نتیجه خیز ورق می‌تواند در طول ضخامت تغییر کند. بر این مبنا در تئوری مرتبه اول برشی، مؤلفه‌های تغییر مکان به صورت زیر تابع مختصات جهت عرضی  $z$  بیان می‌شوند [۲۸]:

1. Rule of mixture

$$M_y = [k_y + \nu k_x] \frac{1}{1 - \nu^2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} E z^2 dz$$

$$Q_x = \frac{1}{1 + \nu} (e_{zx}^\circ) \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} E dz$$

$$Q_y = \frac{1}{1 + \nu} (e_{yx}^\circ) \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} E dz$$

با توجه به تکیه گاه که بصورت تکیه گاه ساده در چهار ضلع ورق است، شرایط مرزی به صورت زیر نوشته می شود:

روی لبه های  $a, \alpha = 0$  داریم:

$$u = v = w = \theta_y = M_x = 0$$

روی لبه های  $b, \gamma = 0$  داریم:

$$u = v = w = \theta_x = M_y = 0$$

### ۳-۲- روش حل آزادسازی دینامیکی

سیستم معادلات بیان شده در بخش قبل که پاسخ غیرخطی تغییر مکان بزرگ ورق مستطیلی هدفمند تابعاً تشریح می-کند، پیچیده هستند و حل تحلیلی آنها به راحتی امکان پذیر نیست. بنابراین استفاده از روش های حل عددی می تواند مفید باشد. در این قسمت، روش آزادسازی دینامیکی [۲۸ و ۲۹] به-همراه یک طرح گسسته سازی تفاضل محدود برای حل معادلات دیفرانسیل غیرخطی ورق هدفمند تابعاً مستطیلی استفاده می شود. آزادسازی دینامیکی یک روش تکراری است که عموماً یک مسأله استاتیکی را به فرم دینامیکی آن برای به-دست آوردن یک حل پایا تبدیل می کند. این روش خصوصاً برای مسائل با غیرخطی هندسی و رفتار ماده بالا مورد توجه است. در ضمن به دلیل طبیعت صریح آن و همچنین به این دلیل-که در این روش با همه کمیت ها به صورت بردار رفتار شود، این روش بسیار مناسب برای کامپیوتر و قابل برنامه ریزی آسان با ملزومات ذخیره داده کم و پایداری حل آن بسیار مطلوب است. به واسطه این فواید محققان بسیاری از این روش برای حل هم معادلات خطی و هم غیرخطی استفاده می کنند.

الگوریتم روش آزادسازی دینامیکی بر اساس تبدیل یک مسأله شرط مرزی به مسأله شرط اولیه و مرزی معادل آن استوار

که در آن برای ورق هدفمند تابعی مورد نظر  $E = E(z)$  است.

با استفاده از اصل تغییر مکان مجازی معادلات تعادل خطی و دورانی ورق به صورت زیر نوشته می شود [۲۸]:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + q = 0 \quad (۷)$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x = 0$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_y = 0$$

که در آنها  $N_{ij}, M_{ij}, Q_i$  به ترتیب متجه های تنش داخل صفحه، تنش برشی عرضی و گشتاور هستند که به صورت زیر تعریف می شوند:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} (1, z) dz \quad (۸)$$

$$\begin{pmatrix} Q_x \\ Q_y \end{pmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \begin{pmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{pmatrix} dz$$

با جایگزینی قانون هوک (۶) در انتگرال های (۸) و استفاده از روابط (۴) و (۵) برای کرنش روابط زیر بدست می آیند:

$$N_x = \frac{1}{1 - \nu} (e_x^\circ + \nu e_y^\circ) \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} E dz$$

$$N_y = \frac{1}{1 - \nu} (e_y^\circ + \nu e_x^\circ) \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} E dz \quad (۹)$$

$$N_{xy} = \frac{1}{1 + \nu} (e_{xy}^\circ) \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} E dz$$

$$M_x = [k_x + \nu k_y] \frac{1}{1 - \nu^2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} E z^2 dz$$

$$\frac{\partial \bar{N}_x}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{N}_{xy}}{\partial \bar{y}} = \bar{\rho}_u \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{t}^2} + \bar{k}_u \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}}$$

$$\frac{\partial \bar{N}_y}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \bar{N}_{xy}}{\partial \bar{x}} = \bar{\rho}_v \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{t}^2} + \bar{k}_v \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{t}}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{L^2}{h^2}\right) \left(\frac{\partial \bar{Q}_x}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{Q}_y}{\partial \bar{y}}\right) + \bar{N}_x \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2} + 2\bar{N}_{xy} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} \\ + \bar{N}_y \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{y}^2} + \bar{q} \\ = \bar{\rho}_w \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{t}^2} + \bar{k}_w \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{t}} \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{M}_x}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{M}_{xy}}{\partial \bar{y}} - \left(\frac{L^2}{h^2}\right) \bar{Q}_x \\ = \bar{\rho}_{\theta_x} \frac{\partial^2 \bar{\theta}_x}{\partial \bar{t}^2} + \bar{k}_{\theta_x} \frac{\partial \bar{\theta}_x}{\partial \bar{t}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{M}_y}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \bar{M}_{xy}}{\partial \bar{x}} - \left(\frac{L^2}{h^2}\right) \bar{Q}_y \\ = \bar{\rho}_{\theta_y} \frac{\partial^2 \bar{\theta}_y}{\partial \bar{t}^2} + \bar{k}_{\theta_y} \frac{\partial \bar{\theta}_y}{\partial \bar{t}} \end{aligned}$$

جهت اعمال روش آزادسازی دینامیکی تقریب زیر برای

سرعت و شتاب در نظر گرفته می‌شود:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \gamma}{\partial t} = \dot{\gamma} = \frac{\dot{\gamma}^a + \dot{\gamma}^b}{2}, \quad \frac{\partial^2 \gamma}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \gamma}{\partial t}\right) = \frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial t} \\ = \frac{\dot{\gamma}^a - \dot{\gamma}^b}{\Delta t} \gamma = \bar{u}, \bar{v}, \bar{w}, \bar{\theta}_x, \bar{\theta}_y \end{aligned}$$

که در آن بالانویس  $a$  و  $b$  به مقادیر متغیرها به ترتیب به بعد

و قبل از نمو زمانی  $\Delta t$  اشاره دارد.

اولین معادله تعادل شبه دینامیکی، به صورت زیر نوشته می-

شود:

$$\frac{\partial \bar{N}_x}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{N}_{xy}}{\partial \bar{y}} = \bar{\rho}_u \frac{\dot{\bar{u}}^a - \dot{\bar{u}}^b}{\Delta t} + \bar{k}_u \frac{\dot{\bar{u}}^a + \dot{\bar{u}}^b}{2}$$

با اعمال کمی عملیات ریاضی، به صورت زیر درمی‌آید:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{u}}^a = \left(\frac{1}{1 + k^*_u}\right) [(1 - k^*_u) \dot{\bar{u}}^b \\ + \frac{\Delta t}{\bar{\rho}_u} \left(\frac{\partial \bar{N}_x}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{N}_{xy}}{\partial \bar{y}}\right)] \end{aligned}$$

که در آن  $k^*_u = \frac{\bar{k}_u \Delta t}{2\bar{\rho}_u}$  به این ترتیب معادلات متناظر

معادلات دیگر تعادل شبه دینامیکی را می‌توان به دست آورد.

این معادله و سایر معادلات تعادل شبه دینامیکی پس از

اعمال تفاضلات محدود مرکزی به صورت زیر نوشته می‌شوند:

است. این تبدیل با اضافه کردن جملات اینرسی و میرایی به سمت راست معادلات تعادل ورق حاصل می‌شود. قبل از اعمال این روش، مشابه مطالعات پیشین جهت بدون بعد نمودن معادلات، متغیرهای بدون بعد، با علامت خط بالای آنها به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$x = a\bar{x}, y = b\bar{y}, z = h\bar{z}, E = E_m \bar{E},$$

$$E_m = \min(E_c, E_m), h = h_0 \bar{h}, t = t_0 \bar{t}$$

$$\begin{aligned} u = \frac{h^2}{L} \bar{u}, v = \frac{h^2}{L} \bar{v}, w = h\bar{w}, e_x = \frac{h^2}{L^2} \bar{e}_x, e_y = \frac{h^2}{L^2} \bar{e}_y, e_{xy} = \frac{h^2}{L^2} \bar{e}_{xy}, \theta_x = \frac{h}{L} \bar{\theta}_x, \theta_y = \frac{h}{L} \bar{\theta}_y, e_{yz} = \frac{h}{L} \bar{e}_{yz}, e_{zx} = \frac{h}{L} \bar{e}_{zx}, k_x = \frac{h}{L^2} \bar{k}_x, k_y = \frac{h}{L^2} \bar{k}_y, k_{xy} = \frac{h}{L^2} \bar{k}_{xy}, N_x = \frac{Eh^3}{L^2} \bar{N}_x, N_y = \frac{Eh^3}{L^2} \bar{N}_y, N_{xy} = \frac{Eh^3}{L^2} \bar{N}_{xy}, M_x = \frac{Eh^4}{L^2} \bar{M}_x, M_y = \frac{Eh^4}{L^2} \bar{M}_y, M_{xy} = \frac{Eh^4}{L^2} \bar{M}_{xy}, Q_x = \frac{Eh^2}{L} \bar{Q}_x, Q_y = \frac{Eh^2}{L} \bar{Q}_y, q = \frac{Eh^4}{L^4} \bar{q} \end{aligned}$$

عبارت‌های دانسیته مجازی انتقالی در راستاهای  $x$  و  $y$  و

به ترتیب  $\rho_u$  و  $\rho_v$  و  $\rho_w$  و دانسیته مجازی دورانی حول محورهای  $x$  و  $y$ ، به ترتیب  $\rho_{\theta_x}$  و  $\rho_{\theta_y}$  هستند. عبارت‌های

ضریب میرایی مجازی انتقالی در راستاهای  $x$  و  $y$  و ضریب میرایی مجازی دورانی حول محورهای  $x$  و  $y$ ، به ترتیب  $k_{\theta_x}$  و  $k_{\theta_y}$  و  $k_u$  و  $k_v$  و  $k_w$  هستند. این عبارت‌ها در

محل مناسب در سمت راست معادلات تعادل (۷) قرار می‌گیرند. نحوه محاسبه آنها در پیوست مقاله با توجه به فرم گسسته سازی تفاضل محدود که در ادامه بحث می‌شود، آورده شده است. فرم بی‌بعد شده آنها به شکل زیر است:

$$k_u = \frac{Eh^3 t}{L^4} \bar{k}_u, k_v = \frac{Eh^3 t}{L^4} \bar{k}_v, k_w = \frac{Eh^3 t}{L^4} \bar{k}_w,$$

$$k_{\theta_x} = \frac{Eh^3 t}{L^2} \bar{k}_{\theta_x}, k_{\theta_y} = \frac{Eh^3 t}{L^2} \bar{k}_{\theta_y}, \rho_u = \frac{Eh^3 t^2}{L^4} \bar{\rho}_u,$$

$$\rho_v = \frac{Eh^3 t^2}{L^4} \bar{\rho}_v, \rho_w = \frac{Eh^3 t^2}{L^4} \bar{\rho}_w, \rho_{\theta_x} = \frac{Eh^3 t^2}{L^2} \bar{\rho}_{\theta_x},$$

$$\rho_{\theta_y} = \frac{Eh^3 t^2}{L^2} \bar{\rho}_{\theta_y}.$$

با اضافه کردن عبارت‌های دانسیته مجازی و ضرایب میرایی

مجازی در سمت راست معادلات تعادل (۷) به عنوان ضرایب به ترتیب جملات شتاب و سرعت و با اعمال کمیت‌های بدون بعد، معادلات تعادل به صورت زیر در می‌آیند:

تبدیل معادلات تعادل به شکل مسأله مقدار اولیه باعث وارد کردن متغیر زمان  $t$  شد. بنابراین لازم است که جهت برقراری سازگاری تغییر مکان-زمان از روابط (۱۲) استفاده شود: با استفاده از انتگرال گیری از مؤلفه های سرعت طبق روابط زیر می توان تغییر مکان های هر گره را محاسبه نمود:

$$\gamma^a = \gamma^b(i, j) + \Delta t \dot{\gamma}^a(i, j) \gamma = \bar{u}, \bar{v}, \bar{w}, \bar{\theta}_x, \bar{\theta}_y \quad (12)$$

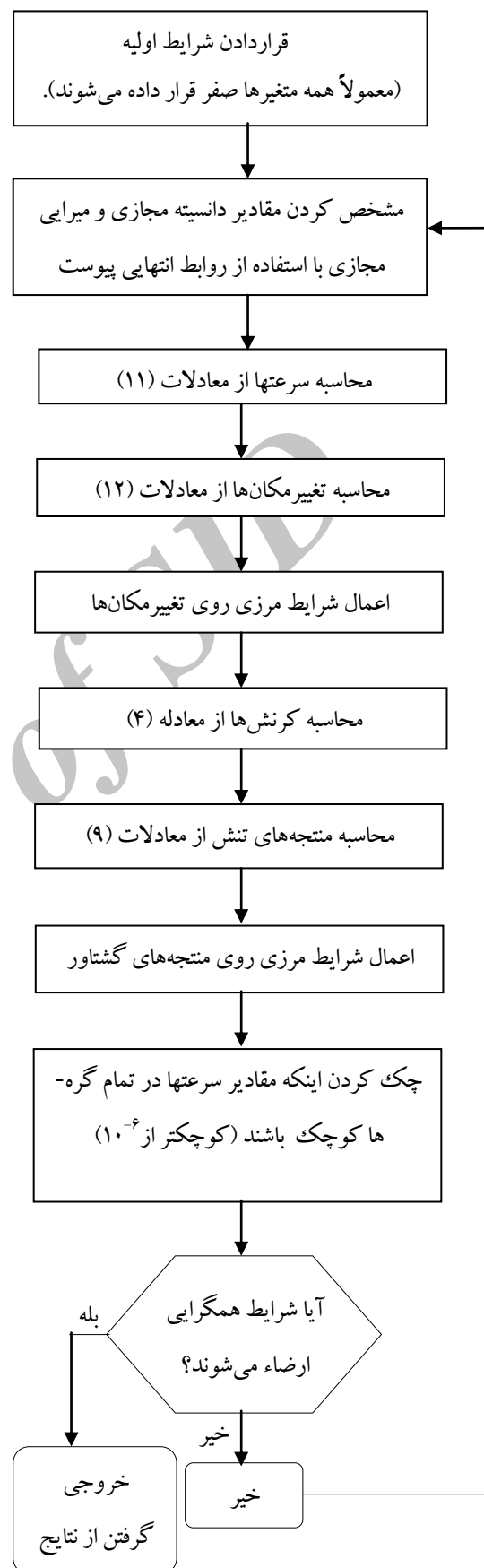
با تکرار محاسبات، روند فوق آن قدر ادامه می یابد تا سرعت ها به مقدار ناچیز مثلاً  $10^{-6}$  یا کمتر از آن برسند. در این شرایط تعادل استاتیکی حاکم شده و نوسانات تقریباً به صفر میرا می شوند. در نتیجه مقادیر تغییر مکان و تنش با تقریب بسیار خوبی محاسبه می گردند. بنابراین برای جمع بندی و تشریح دقیق نحوه اعمال روش آزادسازی دینامیکی، الگوریتم این روش روی معادلات پیشین به صورت نمودار جریان شکل (۲) قابل ارائه است. عملکرد موفق روش آزادسازی دینامیکی به انتخاب مناسب مقادیر ضرایب میرایی و دانسیته مجازی و همچنین زمانی بستگی دارد. مقادیر این کمیت ها در اوایل ابداع روش آزادسازی دینامیکی به طریقه سعی و خطا مورد استفاده قرار می گرفتند. اما به تدریج روش هایی برای محاسبه این ضرایب به وجود آمد [۲۰ و ۳۰]. در مطالعه حاضر، جهت حصول یک حل رضایت بخش، ۱۱ کمیت باید در ابتدا بصورت بهینه انتخاب شوند. عبارت های تقریب برای دانسیته های مجازی با استفاده از تکنیک بیان شده در [۳۰] با فرض مقدار واحد برای نمو زمانی  $\Delta t$  در تحقیق حاضر برای ماده هدفمند تابعی در بخش پیوست ارائه شده است. همچنین ارتباط با ضرایب میرایی از طریق یک ضریب مشترک امکان پذیر است.

$$\begin{aligned} \dot{u}^a(i, j) &= \left( \frac{1}{1 + k^*_u(i, j)} \right) [(1 - k^*_u) \dot{u}^b(i, j) \\ &+ \frac{\Delta t}{\bar{\rho}_u(i, j)} \left( \frac{\bar{N}_x(i + 1, j) - \bar{N}_x(i - 1, j)}{2\Delta x} \right. \\ &\left. + \frac{\bar{N}_{xy}(i, j + 1) - \bar{N}_{xy}(i, j - 1)}{2\Delta y} \right)] \\ \dot{v}^a(i, j) &= \left( \frac{1}{1 + k^*_v(i, j)} \right) [(1 - k^*_v) \dot{v}^b(i, j) \\ &+ \frac{\Delta t}{\bar{\rho}_v(i, j)} \left( \frac{\bar{N}_y(i, j + 1) - \bar{N}_y(i, j - 1)}{2\Delta x} \right. \\ &\left. + \frac{\bar{N}_{xy}(i + 1, j) - \bar{N}_{xy}(i - 1, j)}{2\Delta y} \right)] \\ \dot{w}^a(i, j) &= \left( \frac{1}{1 + k^*_w(i, j)} \right) [(1 - k^*_w) \dot{w}^b(i, j) \\ &+ \frac{\Delta t}{\bar{\rho}_w(i, j)} \left( \left( \frac{L^2}{h^2} \right) \left( \frac{\bar{Q}_x(i + 1, j) - \bar{Q}_x(i - 1, j)}{2\Delta x} \right. \right. \\ &\left. \left. + \frac{\bar{Q}_y(i, j + 1) - \bar{Q}_y(i, j - 1)}{2\Delta y} \right) + \bar{N}_x(i, j) \right. \\ &\left. \times \left( \frac{\bar{w}(i - 1, j) - 2\bar{w}(i, j) + \bar{w}(i + 1, j)}{\Delta x^2} \right) \right. \\ &\left. + 2\bar{N}_{xy}(i, j) \times \left( \frac{\bar{w}(i + 1, j + 1) - \bar{w}(i - 1, j + 1)}{4\Delta x \Delta y} \right. \right. \\ &\left. \left. + \frac{-\bar{w}(i + 1, j - 1) + \bar{w}(i - 1, j - 1)}{4\Delta x \Delta y} \right) \right. \\ &\left. + \bar{N}_y(i, j) \left( \frac{\bar{w}(i, j - 1) - 2\bar{w}(i, j) + \bar{w}(i, j + 1)}{\Delta y^2} \right) \right. \\ &\left. + \bar{q}(i, j) \right) \\ \dot{\theta}_x^a(i, j) &= \left( \frac{1}{1 + k^*_{\theta_x}(i, j)} \right) [(1 - k^*_{\theta_x}) \dot{\theta}_x^b(i, j) \\ &+ \frac{\Delta t}{\bar{\rho}_{\theta_x}(i, j)} \left( \frac{\bar{M}_x(i + 1, j) - \bar{M}_x(i - 1, j)}{2\Delta x} \right. \\ &\left. + \frac{\bar{M}_{xy}(i, j + 1) - \bar{M}_{xy}(i, j - 1)}{2\Delta y} \right)] \\ \dot{\theta}_y^a(i, j) &= \left( \frac{1}{1 + k^*_{\theta_y}(i, j)} \right) [(1 - k^*_{\theta_y}) \dot{\theta}_y^b(i, j) \\ &+ \frac{\Delta t}{\bar{\rho}_{\theta_y}(i, j)} \left( \frac{\bar{M}_y(i, j + 1) - \bar{M}_y(i, j - 1)}{2\Delta x} \right. \\ &\left. + \frac{\bar{M}_{xy}(i + 1, j) - \bar{M}_{xy}(i - 1, j)}{2\Delta y} \right)] \end{aligned} \quad (11)$$

جزئیات این روند برای انتخاب درستو بهینه ضرایب میرایی در [۲۰] آورده شده است. لازم به ذکر است که در تحلیل آزادسازی دینامیکی همواره دو پارامتر، میرایی ویسکوز و دانسیته مجازی شامل تابع ساده‌ای از نمو زمان و دانسیته-به صورت  $\frac{\Delta t^2}{\rho}$  ظاهر می‌شوند [۲۰ و ۳۰]. همان‌طور که اشاره شد میرایی معمولاً به گونه‌ای تعیین می‌شود که حل استاتیکی هرچه سریعتر حاصل گردد و سایر پارامترها باید با در نظر گرفتن پایداری عددی به حد کافی بزرگ باشند تا تعداد تکرار مورد نیاز به حداقل برسد. در برخی حالت‌ها تعداد تکرار برای همگرا شدن کمیت‌های مورد نظر در حل مسئله ممکن است زیاد باشد ولی سادگی این روش آنرا همچنان به‌عنوان یک روش موثر و کارآمد در حل مسائل خطی و غیرخطی مطرح می‌نماید. در عمل ضریب میرایی به میزان ناچیزی کمتر از مقدار بحرانی آن به گونه‌ای انتخاب می‌شود که یک همگرایی نوسانی ایجاد شود که در پایان به مقدار استاتیکی میل کند. به این ترتیب محدوده-ای به گونه‌ای مشخص می‌شود که جواب واقعی همواره در این محدوده است. به‌طور کلی فرمول‌بندی اشاره شده از نظر پارامتر زمان خطی بوده و در نتیجه در این روش فقط نیاز به جاگذاری مستقیم مقادیر از تکرار قبلی برای محاسبه مقادیر جدید می-باشد.

#### ۴- نتایج و بحث

نتایج حل عددی ورق ضخیم مستطیلی هدفمند تابعیه کمک الگوریتم آزادسازی دینامیکی بر مبنای یک شبکه حل بر اساس تفاضلات محدود مرکزی در این قسمت ارائه شده و با تحقیق در دسترس پیشین [۱۶] مورد مقایسه و اعتبارسنجی قرار می‌گیرد. شرایط بارگذاری نیز به‌صورت یکنواخت بوده و شرایط تکیه گاهی نیز به‌صورت ساده در چهار لبه ورق فرض گردیده و تمامی نتایج به صورت بی‌بعد ارائه می‌شود. در تحقیق مذکور از تئوری مرتبه بالاتر برشی جهت مدلسازی ورق ضخیم استفاده شده، اثرات غیرخطی تغییر شکل بزرگ ورق مشابه تحقیق حاضر در نظر گرفته شده و جهت حل معادلات غیرخطی از روش نیوتن-رافسون استفاده شده است. مصالح ورق هدفمند تابعی/سرامیک/فلز مورد مطالعه به-صورت ترکیب زیرکونیا/آلومینیوم منطبق بر تحقیق مورد بحث



شکل (۲) نمودار جریان الگوریتم اعمال روش آزادسازی دینامیکی

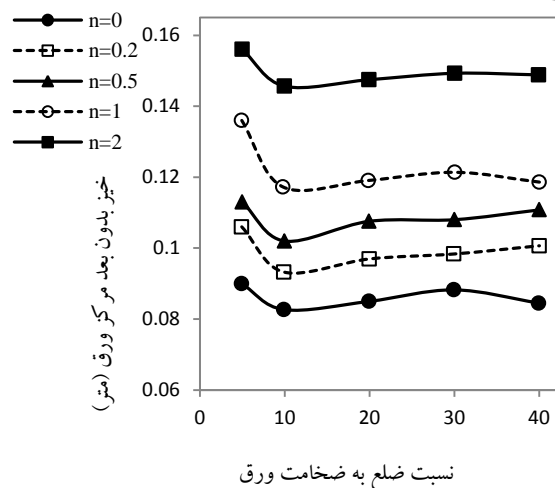


جدول (۲) اثر ثابت توانی ماده هدفمند تابعی،  $n$ ، روی تغییرات خیز عرضی و مقایسه نتایج به دست آمده از الگوریتم آزادسازی دینامیکی با نتایج کومار و همکاران [۱۶]

نتایج حاصل از کار کومار		نتایج حاصل از روش آزادسازی دینامیکی	
همکاران [۱۶]	$n$	دینامیکی	$n$
خیز بدون بعد مرکز ورق	۰	۰/۰۹۰	۰
۰/۱۱۲	۰/۲	۰/۱۰۶	۰/۲
۰/۱۲۰	۰/۵	۰/۱۱۳	۰/۵
۰/۱۴۵	۱	۰/۱۳۶	۱
۰/۱۶۸	۲	۰/۱۵۶	۲

با توجه به جدول (۲) ضمن تأیید نتایج تحقیق حاضر در مقایسه با تحقیق مورد اشاره می توان مشاهده کرد که مطابق انتظار با توجه به جایگاه  $n$  و با توجه به مقادیر خواص آلومینیوم و زیرکونیم، با افزایش مقدار  $n$  رفتار ورق نرم تر شده و خیز ورق افزایش پیدا می کند و در نتیجه اثرات غیرخطی هندسی بیشتر خود را نشان می دهند.

در شکل (۴) وابستگی خیز بدون بعد مرکز ورق به نسبت ضلع به ضخامت ورق در مقادیر  $n$  برابر ۰، ۰/۲، ۰/۵، ۱ و ۲ نشان داده شده است.



شکل (۴) اثر پارامتر ماده  $n$  بر تغییرات خیز بدون بعد مرکز ورق مستطیلی هدفمند تابعی بر حسب نسبت ضلع به ضخامت ورق

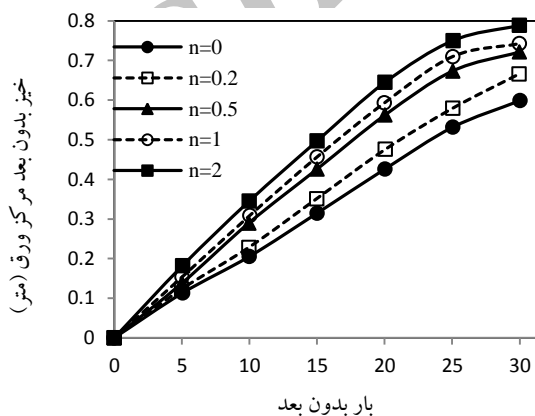
همان طور که در شکل (۴) مشاهده می شود، ضمن تأیید نحوه وابستگی خیز ورق به نسبت ضلع به ضخامت آن در  $n$ های مختلف، ملاحظه می شود که با افزایش پارامتر ماده هدفمند تابعی،  $n$ ، ورق رفتار نرم تری از خود نشان می دهد.

در نظر گرفته می شود. خواص این مواد در جدول ۱ ارائه شده است.

جدول (۱) خواص اجزاء ماده هدفمند تابعی زیرکونیا/آلومینیوم [۱۶]

نام فاز	مدول الاستیسیته (GPa)	ضریب پواسون	چگالی (Kg/m <sup>3</sup> )
آلومینیوم	۷۰	۰/۳	۲۷۰۷
زیرکونیا	۱۵۱	۰/۳	۳۰۰۰

در شکل (۳) نحوه تغییرات خیز بدون بعد مرکز ورق مربعی با نسبت ضلع به ضخامت ۱۰۰ بر حسب بار گسترده عرضی بدون بعد در مقادیر  $n$  برابر ۰، ۰/۲، ۰/۵، ۱ و ۲ نشان داده شده است. مقدار نسبت ضلع به ضخامت زیاد ۱۰۰، اثرات تغییر شکل ناشی از کرنش های برشی عرضی را کاهش می دهد.



شکل (۳) اثر پارامتر ماده  $n$  بر تغییرات خیز بدون بعد مرکز ورق مستطیلی هدفمند تابعی بر حسب بار عرضی بدون بعد وارده به ورق

همان طور که در شکل (۳) مشاهده می شود، ضمن تأیید مشابه نحوه وابستگی خیز ورق به بار بدون بعد وارده در  $n$ های مختلف، ملاحظه می شود که با افزایش پارامتر ماده هدفمند تابعی،  $n$ ، ورق رفتار نرم تری از خود نشان می دهد، همچنین مشابه جدول (۲) از این نمودار می توان نتیجه گرفت که با افزایش  $n$  اثرات غیرخطی هندسی ناشی از خیز بزرگ ورق بیشتر می شود.

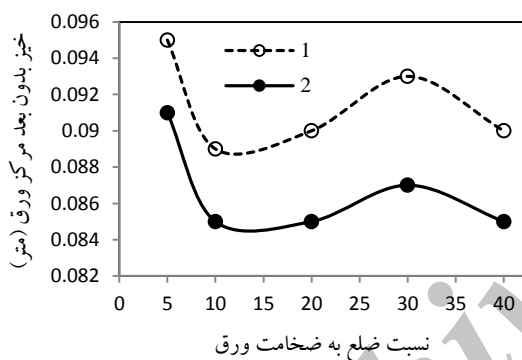
در جدول (۲) یک مطالعه پارامتری در مورد اثر ثابت توانی ماده هدفمند تابعی،  $n$ ، روی تغییرات خیز عرضی برای ورق مربعی با نسبت ضلع به ضخامت برابر ۵، تحت بار عرضی بدون بعد  $\bar{q} = 20$  انجام شده و نتایج حاصل با نتایج کومار مورد مقایسه قرار گرفته است.

جدول (۳) مقایسه نتایج روش آزادسازی دینامیکی با نتایج کومار و همکاران [۱۶] برای تغییرات خیز بدون بعد مرکز ورق تحت بار بدون بعد مختلف

نتایج حاصل از روش آزادسازی دینامیکی		نتایج حاصل از کار کومار و همکاران [۱۶]	
خیز بدون بعد	بار بدون بعد	خیز بدون بعد مرکز ورق	بار بدون بعد
۰/۱۱۹	۵	۰/۱۱۲	۵
۰/۲۱۶	۱۰	۰/۲۰۴	۱۰
۰/۳۳۱	۱۵	۰/۳۱۴	۱۵
۰/۴۴۸	۲۰	۰/۴۲۶	۲۰
۰/۵۵۷	۲۵	۰/۵۳۱	۲۵
۰/۶۳۰	۳۰	۰/۶۰۳	۳۰

در شکل (۶) یک مطالعه پارامتری در مورد اثر نسبت ضلع

به ضخامت روی تغییرات خیز عرضی انجام شده است.

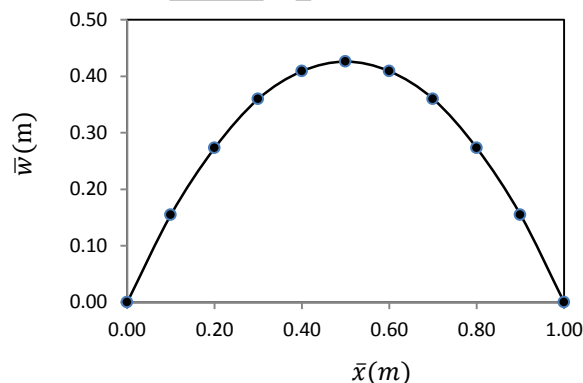


شکل (۶) مقایسه نحوه تغییرات خیز بدون بعد مرکز ورق مستطیلی هدفمند تابعی بر حسب نسبت ضلع به ضخامت ورق: ۱ کار کومار و همکاران [۱۶]، ۲ تحقیق حاضر

همان‌طور که در شکل (۶) مشاهده می‌شود، ضمن تأیید روند نتایج مطالعه حاضر با تحقیق کومار و همکاران، مشاهده می‌شود که با افزایش نسبت ضلع به ضخامت ورق، یعنی با نازک‌تر شدن ورق، اثرات غیرخطی در صفحات کامپوزیتی هدفمند تابعی، خیز مرکزی را کاهش داده و رفتار سفت‌تری از خود نشان می‌دهد. این اثر در کاهش خیز صفحات نازک با نسبت ضلع به ضخامت بیشتر از ۳۰ برجسته و غالب است.

البته این کاهش برای نسبت ضلع به ضخامت بیشتر از ۳۰ چندان محسوس نیست و در این حالت می‌توان از تئوری ساده-تر کلاسیک ورق‌ها به‌جای تئوری تغییرشکل برشی مرتبه اول حاضر جهت بررسی رفتار غیرخطی ورق استفاده کرد.

در شکل (۵) نتایج حل ورق مربعی مورد نظر ( $a/b = 1$ ) با نسبت ضلع به ضخامت ۱۰۰ ( $L/h = 100$ ) و ترکیب ماده هدفمند تابعی با  $n = 0$  تحت بار گسترده یکنواخت عرضی  $\bar{q} = 20$  با استفاده از روش آزادسازی دینامیکی برای حل شبکه  $10 \times 10$  نشان داده شده است. در این شکل تغییرات خیز عرضی بدون بعد واقع بر محور تقارن افقی ورق بر حسب  $\bar{x}$  رسم شده است. از این شکل رفتار مطابق انتظار تغییرشکل ورق با تکیه‌گاه ساده در چهار لبه مشاهده می‌شود که حداکثر خیز در وسط ورق و تغییر مکان در لبه‌ها صفر است. شایان ذکر است که نمودارهای مشابه با رفتارهای منطقی در مورد تغییر مکان‌ها در راستاهای  $x$  و  $y$ ، دوران‌ها حول محورهای  $x$  و  $y$  و مؤلفه‌های تنش استخراج شده‌اند، که تنها به‌ارائه نمودار شکل (۵) بسنده شده است.



شکل (۵) خیز عرضی بدون بعد ورق مستطیلی هدفمند تابعی واقع بر محور تقارن افقی

در جدول (۳) نتایج حاصل از اعمال روش آزادسازی دینامیکی برای ورق مربعی ذکر شده در بارهای گسترده بدون بعد مختلف استخراج و با نتایج تحقیق کومار و همکارانش مورد مقایسه قرار گرفته است.

جدول (۳) تطابق خوبی بین نتایج تحقیق حاضر با اعمال روش آزادسازی دینامیکی بر روی ورق ضخیم در مقایسه با نتایج اعمال روش نیوتن-رافسون روی ورق ضخیم با تئوری مرتبه بالاتر برشی در تحقیق کومار نشان می‌دهد. به‌طوریکه خطای نسبی روش آزادسازی دینامیکی در بیشترین حالت ۶ درصد می‌باشد. از اعداد این جدول می‌توان ملاحظه کرد که در خیز بیشتر، اثرات غیرخطی هندسی بیشتر آشکار می‌گردند.

### ۵- نتیجه گیری

در این مقاله قابلیت‌های روش آزادسازی دینامیکی در تحلیل غیرخطی استاتیکی ورق هدفمند تابعینستاً ضخیم مستطیلی با ضخامت یکنواخت در سرتاسر ورق تحت بارگذاری مکانیکی عرضی یکنواخت ارائه شده است. با استفاده از روابط کرنش-تغییر مکان فنکارمن، معادلات تعادل غیرخطی جدیدی براساس تئوری مرتبه اول برشی توسعه داده شده و روش آزادسازی دینامیکی به همراه تکنیک گسسته‌سازی تفاضل محدود برای حل معادلات استفاده شده است. صحت و اعتبارسنجی الگوریتم و نتایج خروجی برای شرایط معلوم با مقاله‌ای که با روش تئوری مرتبه بالاتر برشی برای ورق هدفمند تابعی ضخیم، تحت خمش غیرخطی حل شده، کنترل گردیده و حداکثر خطای ۷ درصد برای روش آزادسازی دینامیکی ارزیابی شده است.

### فهرست علائم

$\rho_u$	دانشیته مجازی انتقالی در راستای $x$ ( $\text{kg/m}^3$ )
$\rho_v$	دانشیته مجازی انتقالی در راستای $y$ ( $\text{kg/m}^3$ )
$\rho_w$	دانشیته مجازی انتقالی در راستای $z$ ( $\text{kg/m}^3$ )
$\rho_{\theta_x}$	دانشیته مجازی دورانی حول محور $x$ ( $\text{kg.rad/m}^3$ )
$\rho_{\theta_y}$	دانشیته مجازی دورانی حول محور $y$ ( $\text{kg.rad/m}^3$ )
$\sigma_x$	تنش در راستای $x$
$\sigma_y$	تنش در راستای $y$
$a$	طول ورق (m)
$b$	عرض ورق (m)
$E$	مدول الاستیسیته (Pa)
$e_x^\circ$	کرنش در راستای $x$

در جدول (۴) یک تحلیل حساسیت روی تعداد گره‌های ورق مربعی ذکر شده انجام شده است. سه شبکه‌بندی  $10 \times 10$ ،  $16 \times 16$  و  $24 \times 24$  در بارگذاری‌های مختلف مورد تحلیل قرار گرفته است و نتایج برای خیز عرضی بدون بعد در جدول (۴) نشان داده شده است.

جدول (۴) اثر حساسیت به تعداد شبکه بندی روی خیز عرضی حاصل از الگوریتم آزادسازی دینامیکی برای ورق ضخیم‌هدفمند تابعی

خیز بدون بعد مرکز ورق	شبکه بندی	بار بدون بعد
۰/۱۱۲۲۳	$10 \times 10$	
۰/۱۱۲۱۳	$16 \times 16$	۵
۰/۱۱۲۲۳	$24 \times 24$	
۰/۲۰۴۳۹	$10 \times 10$	
۰/۲۰۴۶۰	$16 \times 16$	۱۰
۰/۲۰۴۸۹	$24 \times 24$	
۰/۳۱۴۰۱	$10 \times 10$	
۰/۳۱۴۵۲	$16 \times 16$	۱۵
۰/۳۱۴۷۷	$24 \times 24$	
۰/۴۲۶۳۰	$10 \times 10$	
۰/۴۲۶۶۹	$16 \times 16$	۲۰
۰/۴۲۶۹۵	$24 \times 24$	
۰/۵۳۱۲۹	$10 \times 10$	
۰/۵۳۲۵۱	$16 \times 16$	۲۵
۰/۵۳۳۰۶	$24 \times 24$	
۰/۶۰۳۴۵	$10 \times 10$	
۰/۶۰۴۰۸	$16 \times 16$	۳۰
۰/۶۰۴۹۴	$24 \times 24$	

طبق جدول (۴) ملاحظه می‌شود که با افزایش شبکه‌ها، مقدار خیز بدون بعد مرکز ورق افزایش یافته و مطابق انتظار سازه رفتار نرم‌تری از خود نشان می‌دهد و نتایج به داده‌های حاصل از کار کومار و همکارانش [۱۶] نزدیک می‌شود. همچنین با دقت بر روی اعداد جدول می‌توان تأثیر رفتار غیرخطی ورق را در تعداد شبکه بالاتر واضح‌تر مشاهده کرد. شایان ذکر است خطای روش آزادسازی دینامیکی در بیشترین حالت ۷ درصد و در کمترین حالت ۴ درصد می‌باشد. همچنین با مقایسه شکل (۶) و جدول (۴) مشاهده می‌شود که حساسیت جابجایی بدون بعد ورق به تغییرات بار بدون بعد، بیشتر از تغییرات نسبت ضلع به ضخامت ورق می‌باشد.

پیوست‌ها		
	$e_y^\circ$	کرنش در راستای $y$
	$e_{xy}^\circ$	کرنش در راستای $xy$
	$h$	ضخامت ورق (m)
	$k_u$	ضرب میرایی مجازی انتقالی در راستای $x$ (rad/m)
	$k_v$	ضرب میرایی مجازی انتقالی در راستای $y$ (rad/m)
	$k_w$	ضرب میرایی مجازی انتقالی در راستای $z$ (rad/m)
	$k_{\theta_x}$	ضرب میرایی مجازی دورانی حول محور $x$ (rad/m)
	$k_{\theta_y}$	ضرب میرایی مجازی دورانی حول محور $y$ (rad/m)
	$M_{ij}$	منتجه تنش برشی عرضی (Pa)
	$n$	ثابت توانی ماده هدفمند تابعی
	$N_{ij}$	منتجه تنش داخل صفحه (Pa)
	$q$	بار گذاری عرضی (N)
	$Q_i$	گشتاور (N.m)
	$u$	مؤلفه بردار تغییر مکان در راستای $x$ (m)
	$u^0$	تغییر مکان داخل صفحه نقطه‌ای روی صفحه میانی ورق در راستای $x$
	$v$	مؤلفه بردار تغییر مکان در راستای $y$ (m)
	$v^0$	تغییر مکان داخل صفحه نقطه‌ای روی صفحه میانی ورق در راستای $y$
	$V_m$	کسر حجمی فلز
	$V_c$	کسر حجمی سرامیک
	$w$	مؤلفه بردار تغییر مکان در راستای $z$ (m)
	$z$	مختصات ضخامت (m)

**پیوست‌ها**

**الف- محاسبه دانسیته مجازی**

با نوشتن روابط کرنش و انحنا بر اساس تفاضل محدود، می‌توان مؤلفه‌های کرنش و انحنا را بر حسب تغییر مکان طبق روابط ذیل در هر گره محاسبه نمود.

$$e_x^\circ(i, j) = \left[ \frac{u(i+1, j) - u(i-1, j)}{2\Delta x} \right]^2 + \frac{1}{2} \left[ \frac{w(i+1, j) - w(i-1, j)}{2\Delta x} \right]^2$$

$$e_y^\circ(i, j) = \left[ \frac{v(i, j+1) - v(i, j-1)}{2\Delta y} \right]^2 + \frac{1}{2} \left[ \frac{w(i, j+1) - w(i, j-1)}{2\Delta y} \right]^2$$

$$e_{xy}^\circ(i, j) = \left[ \frac{u(i, j+1) - u(i, j-1)}{2\Delta y} \right] + \left[ \frac{v(i+1, j) - v(i-1, j)}{2\Delta x} \right] + \left[ \frac{w(i+1, j) - w(i-1, j)}{2\Delta x} \right] \times \left[ \frac{w(i, j+1) - w(i, j-1)}{2\Delta y} \right]$$

$$e_{yz}^\circ(i, j) = \theta_y(i, j) + \left[ \frac{w(i, j+1) - w(i, j-1)}{2\Delta y} \right]$$

$$e_{zx}^\circ(i, j) = \theta_x(i, j) + \left[ \frac{w(i+1, j) - w(i-1, j)}{2\Delta x} \right]$$

$$k_x(i, j) = \frac{\theta_x(i+1, j) - \theta_x(i-1, j)}{2\Delta x}$$

$$k_y(i, j) = \frac{\theta_y(i, j+1) - \theta_y(i, j-1)}{2\Delta y}$$

$$k_{xy}(i, j) = \frac{\theta_x(i, j+1) - \theta_x(i, j-1)}{2\Delta y} + \frac{\theta_y(i+1, j) - \theta_y(i-1, j)}{2\Delta x}$$

بر اساس روش ارائه شده در [۳۰]، با جاگذاری روابط بالا در معادلات (۹) به دست می‌آوریم:

$$M_{xy}(i, j) = \left\{ \frac{\theta_x(i, j+1) - \theta_x(i, j-1)}{2\Delta y} + \frac{\theta_y(i+1, j) - \theta_y(i-1, j)}{2\Delta x} \right\} \frac{1}{1+\nu} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Ez^2 dz$$

$$Q_x(i, j) = \left\{ \theta_x(i, j) + \left[ \frac{w(i+1, j) - w(i-1, j)}{2\Delta x} \right] \right\} \frac{1}{1+\nu} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Edz$$

$$Q_y(i, j) = \left\{ \theta_y(i, j) + \left[ \frac{w(i, j+1) - w(i, j-1)}{2\Delta y} \right] \right\} \frac{1}{1+\nu} \int_{-h/2}^{h/2} Edz$$

با در نظر گرفتن قدرمطلق مؤلفه‌های تغییر مکان برابر واحد نتیجه می‌شود:

$$\tilde{N}_x(i, j) = \left\{ \frac{1}{\Delta x} + \frac{1}{2\Delta x^2} |w(i+1, j) - w(i-1, j)| + \frac{\nu}{\Delta y} + \frac{\nu}{2\Delta y^2} |w(i, j+1) - w(i, j-1)| \right\} \frac{1}{1-\nu^2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Edz$$

$$\tilde{N}_y(i, j) = \left\{ \frac{1}{\Delta y} + \frac{1}{2\Delta y^2} |w(i, j+1) - w(i, j-1)| + \frac{\nu}{\Delta x} + \frac{\nu}{2\Delta x^2} |w(i, j+1) - w(i, j-1)| \right\} \frac{1}{1-\nu^2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Edz$$

$$\tilde{N}_{xy}(i, j) = \left\{ \frac{1}{\Delta y} + \frac{1}{\Delta x} + \frac{1}{2\Delta y\Delta x} |w(i, j+1) - w(i, j-1)| + \frac{1}{2\Delta y\Delta x} |w(i+1, j) - w(i-1, j)| \right\} \frac{1}{1+\nu} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Edz$$

$$N_x(i, j) = \left[ \frac{u(i+1, j) - u(i-1, j)}{2\Delta x} \right] + \frac{1}{2} \left[ \frac{w(i+1, j) - w(i-1, j)}{2\Delta x} \right]^2 + \nu \left[ \frac{v(i, j+1) - v(i, j-1)}{2\Delta y} \right] + \frac{1}{2} \left[ \frac{w(i, j+1) - w(i, j-1)}{2\Delta y} \right]^2 \left\{ \frac{1}{1-\nu^2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Edz \right.$$

$$N_y(i, j) = \left[ \frac{v(i, j+1) - v(i, j-1)}{2\Delta y} \right] + \frac{1}{2} \left[ \frac{w(i, j+1) - w(i, j-1)}{2\Delta y} \right]^2 + \nu \left[ \frac{u(i, j+1) - u(i, j-1)}{2\Delta x} \right] + \frac{1}{2} \left[ \frac{w(i, j+1) - w(i, j-1)}{2\Delta x} \right]^2 \left\{ \frac{1}{1-\nu^2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Edz \right.$$

$$N_{xy}(i, j) = \left\{ \left[ \frac{u(i, j+1) - u(i, j-1)}{2\Delta y} \right] + \left[ \frac{v(i+1, j) - v(i-1, j)}{2\Delta x} \right] + \left[ \frac{w(i+1, j) - w(i-1, j)}{2\Delta x} \right] + \left[ \frac{w(i, j+1) - w(i, j-1)}{2\Delta y} \right] \right\} \frac{1}{1+\nu} \int_{-h/2}^{h/2} Edz$$

$$M_x(i, j) = \left[ \frac{\theta_x(i+1, j) - \theta_x(i-1, j)}{2\Delta x} + \nu \frac{\theta_y(i, j+1) - \theta_y(i, j-1)}{2\Delta y} \right] \frac{1}{1-\nu^2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Ez^2 dz$$

$$M_y(i, j) = \left[ \frac{\theta_y(i, j+1) - \theta_y(i, j-1)}{2\Delta y} + \nu \frac{\theta_x(i+1, j) - \theta_x(i-1, j)}{2\Delta x} \right] \frac{1}{1-\nu^2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Ez^2 dz$$

$$\rho_{\theta_x}(i, j) = \frac{1}{4} \left\{ \left[ \frac{M_x(i+1, j) + M_x(i-1, j)}{2\Delta x} + \frac{M_{xy}(i, j+1) + M_{xy}(i, j-1)}{2\Delta y} \right] + \left(\frac{l}{h}\right)^2 Q_x(i, j) \right\}$$

$$\rho_{\theta_y}(i, j) = \frac{1}{4} \left\{ \left[ \frac{M_y(i, j+1) + M_y(i, j-1)}{2\Delta y} + \frac{M_{xy}(i+1, j) + M_{xy}(i-1, j)}{2\Delta x} \right] + \left(\frac{l}{h}\right)^2 Q_y(i, j) \right\}$$

$$\tilde{M}_x(i, j) = \left[ \frac{\nu}{\Delta y} + \frac{1}{\Delta x} \right] \frac{1}{1-\nu^2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} E z^2 dz$$

$$\tilde{M}_y(i, j) = \left[ \frac{1}{\Delta y} + \frac{\nu}{\Delta x} \right] \frac{1}{1-\nu^2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} E z^2 dz$$

$$\tilde{M}_{xy}(i, j) = \left\{ \frac{1}{\Delta y} + \frac{1}{\Delta x} \right\} \frac{1}{1+\nu} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} E z^2 dz$$

$$\tilde{Q}_x(i, j) = \left\{ 1 + \frac{1}{\Delta x} \right\} \frac{1}{1+\nu} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} E dz$$

$$\tilde{Q}_y(i, j) = \left\{ 1 + \frac{1}{\Delta y} \right\} \frac{1}{1+\nu} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} E dz$$

مراجع:

- [1] Koizumi M., The concept of FGM, *Ceramic Transactions, Functionally Graded Materials*, vol. 34, 1993, pp. 3-10.
- [2] Aboudi J., Pindera M.J., Arnold S.M., Thermoelastic theory for the response of materials functionally graded in Two Directions, *International Journal of Solid and Structures*, vol. 33, 1996, pp. 931-966.
- [3] Aboudi J., Pindera M.J., Arnold S.M., Elastic response of metal matrix composites with tailored microstructures to thermal gradient, *International Journal of Solid and Structures*, vol. 31, 1994, pp. 1393-1428.
- [4] Aboudi J., Pindera M.J., Arnold S.M., Higher order theory for functionally graded materials, *Composites Part B*, vol. 30, 1999, pp. 777-832.
- [5] Reddy J.N., Praveen G.N., Nonlinear transient thermoelastic analysis of functionally graded ceramic-metal plates, *International Journal of Solid and Structures*, vol. 35, 1998, pp. 4457-4476.
- [6] Reddy J.N., Wang C.M., Kitipornchai S., Axisymmetric bending of functionally graded circular and annular plates, *European Journal of Mechanics A/Solids*, vol. 18, 1999, pp. 185-199.
- [7] Reddy J.N., Analysis of functionally graded plates, *International Journal for Numerical Method in Engineering*, vol. 47, 2000, pp. 663-684.
- [8] Reddy J.N., Cheng Z.Q., Three-dimensional thermo-mechanical deformation of functionally graded rectangular plate, *European Journal of Mechanics A/Solids*, vol. 20, 2001, pp. 841-855.
- [9] Cheng Z.Q., Batra R.C., Three-dimensional deformation of a functionally graded elliptic plate, *Composite Part B*, vol. 31, 2000, pp. 97-106.

بر این اساس مولفه‌های دانسیته مجازی عبارت خواهند بود

از:

$$\rho_u(i, j) = \frac{1}{4} \left\{ \left[ \frac{N_x(i+1, j) + N_x(i-1, j)}{2\Delta x} + \frac{N_{xy}(i, j+1) + N_{xy}(i, j-1)}{2\Delta y} \right] \right\}$$

$$\rho_v(i, j) = \frac{1}{4} \left\{ \left[ \frac{N_{xy}(i+1, j) + N_{xy}(i-1, j)}{2\Delta x} + \frac{N_y(i, j+1) + N_y(i, j-1)}{2\Delta y} \right] \right\}$$

$$\begin{aligned} \rho_w(i, j) &= \frac{1}{4} \left\{ \left(\frac{l}{h}\right)^2 \left[ \frac{Q_x(i+1, j) + Q_x(i-1, j)}{2\Delta x} \right] \right. \\ &+ \left. \left[ \frac{Q_y(i, j+1) + Q_y(i, j-1)}{2\Delta y} \right] + N_x(i, j) \left[ \frac{w(i-1, j) - 2w(i, j) + w(i+1, j)}{\Delta x^2} \right] \right. \\ &+ N_x(i, j) \left( \frac{4}{\Delta x^2} \right) \\ &+ 2N_{xy}(i, j) \left[ \frac{w(i+1, j+1) - w(i-1, j+1)}{2\Delta x \Delta y} \right. \\ &+ \left. \frac{-w(i+1, j-1) + w(i-1, j-1)}{2\Delta x \Delta y} \right] + N_x(i, j) \left( \frac{4}{\Delta x^2} \right) \\ &+ 2N_{xy}(i, j) \left( \frac{1}{\Delta x \Delta y} \right) \\ &+ N_y(i, j) \left[ \frac{w(i, j-1) - 2w(i, j) + w(i, j+1)}{\Delta y^2} \right] \\ &+ N_y(i, j) \left( \frac{4}{\Delta y^2} \right) \end{aligned}$$

- [25] Turvey G.J., Salehi M., Circular plates with one diametral stiffener-an elastic large deflection analysis, *Computers and Structures*, vol. 63, 1997, pp. 775-783.
- [26] Golmakani E., Kadkhodayan M., Nonlinear bending analysis of annular FGM plates using higher-order shear deformation plate Theories, *Composite Structures*, vol. 93, 2011, pp. 973-982.
- [27] Delale F., Erdogan F., The crack problem for a nonhomogeneous plane, *ASME Journal of Applied Mechanics*, vol. 50, 1983, pp. 609-614.
- [28] Reddy J.N., *Mechanics of laminated Composite Plates and Shells Theory and Analysis*, Second Edition, CRC Press, 2004, Boca Raton, FL.
- [29] Chajes A., *Principles of Structural Stability Theory*, Prentice-Hall, 1974.
- [30] Cassel A.C., Hobbs R.E., Numerical stability of dynamic relaxation analysis of non-linear structures, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 10, 1976. pp. 1407-1410.
- [10] Cheng Z.Q., Batra R.C., Deflection relationships between the homogeneous Kirchhoff plate theory and different functionally graded plate theories, *Archive of mechanics*, vol. 52, 2000, pp. 143-158.
- [11] Kashtalyan M., Three-dimensional elasticity solution for bending of functionally graded rectangular plates, *European Journal of Mechanics A/Solids*, vol. 23, 2004, pp. 853-864.
- [12] Woo J., Meguid S.A., Nonlinear analysis of functionally graded plates and shallow shells, *International Journal of Solid and Structures*, vol. 38, 2001, pp. 9-21.
- [13] Yang J., Shen H.S., Non-linear analysis of functionally graded plates under transverse and in-plane loads, *International Journal of Non-linear Mechanics*, vol. 38, 2003, pp. 467-482.
- [14] Ghannad Pour S.A.M., Alinia M.M., Large deflection behavior of functionally graded plates under pressure loads, *Composite Structures*, 75, 2006, pp. 67-71.
- [15] Alibeigloo A., Exact solution for thermo-elastic response of functionally graded rectangular plates, *Composite Structures*, vol. 92, 2010, pp. 113-121.
- [16] Kumar J.S., Reddy B.S., Reddy C.E., Nonlinear bending analysis of functionally graded plates using higher order theory, *International Journal of Engineering Science and Technology*, vol. 3, 2012, pp. 3010-3022.
- [17] Otter J.R.H., Day A.S., Tidal flow computations, *The Engineer*, 209, 1960, pp. 177-182.
- [18] Day A.S., An introduction to dynamic relaxation, *The Engineer*, vol. 19, 1965, pp. 218-221.
- [19] Otter J.R.H., Computations for prestressed concrete reactor pressure vessels using dynamic relaxation, *Nuclear Structural Engineering*, vol. 1, 1965, pp. 61-75.
- [20] Turvey G.J., Osman M.Y., Elastic large deflection analysis of isotropic rectangular Mindlin plates, *International Journal of Mechanical sciences*, vol. 32, 1990, pp. 315-328.
- [21] Falahatgar S.R., Salehi M., Dynamic relaxation nonlinear viscoelastic analysis of annular sector composite plate, *Journal of Composite Materials*, vol. 43, 2009, pp. 257-275.
- [22] Turvey G.J., Salehi M., DR large deflection analysis of sector plates, *Computers and Structures*, vol. 34, 1990, pp. 101-112.
- [23] Turvey G.J., Salehi M., Computer-generated elasto-plastic design data for pressure loaded circular plates, *Computers and Structures*, vol. 41, 1991, pp. 1329-1340.
- [24] Salehi M., Shahidi A.G., Large deflection analysis of sector Mindlin plates, *Computers and Structures*, vol. 52, 1994, pp. 987-998.