



تحلیل پایداری دینامیکی ارتعاشات عرضی تیر تحت عبور متوالی جرم- های متحرک

مصطفی پیرمردیان^۱

نویسنده مسئول: pirmoradian@iaukhsh.ac.ir

واژه‌های کلیدی

مسأله‌ی تیر-جرم متحرک،
پایداری دینامیکی، روش
هارمونیک بالانس نمودی، تئوری
فلاکه.

چکیده

در این مقاله تحلیل پایداری دینامیکی تیری با تکیه‌گاه ساده که تحت عبور متوالی جرم‌ها قرار گرفته است بررسی می‌شود. چنین شرایط بارگذاری روی تیر در تحلیل مسائلی از قبیل حرکت و سائل نقلیه و قطارها از روی پل‌ها، جراثقیل‌های حمل بار، لوله‌له‌های حاوی سیال، لوله‌ی انواع اسلحه‌ها حایز اهمیت است. بر اثر عبور مداوم و پیرودیگ جرم‌ها از روی تیر، یک مسأله‌ی خطی پیرودیگ حاصل می‌شود. تئوری فلاکه و روش هارمونیک بالانس نمودی برای به دست آوردن مرز پایدار و ناپایدار مسأله بر حسب پارامترهای جرم‌های عبوری مورد استفاده قرار می‌گیرند. منحنی مشخص کننده‌ی نواحی پایدار و ناپایدار حاصل شده با استفاده از بکارگیری این دو روش به خوبی با یکدیگر مطابقت داشته و شبیه‌سازیهای عددی برای مقادیر عددی پارامترهای انتخابی جرم متحرک، صحت و دقت روش‌های مذکور را تأیید می‌کند.

۱- مقدمه

بسیاری از سیستم‌های مهندسی را می‌توان به مثابه مسأله-ی تیر انعطاف‌پذیری که تحت عبور جرم‌های متحرک است در نظر گرفت و مدل ریاضی آنها را ارائه کرد. بسیاری از کاربردهای عملی از قبیل حرکت وسایل نقلیه و قطارها از روی پل‌ها، جراثیل‌های حمل‌کننده بارهای متحرک، بازوهای ربات‌ها، لوله‌های حامل آب، نفت و دیگر سیال‌ها، سازه‌های فضایی و همچنین عملیات ماشینکاری با سرعت بالا، نمونه‌هایی از این سیستم‌ها هستند. از این رو تعیین رفتار دینامیکی تیرهای تحت عبور جرم، از دیرباز موضوع مورد علاقه‌ی تحقیق و تفحص بسیاری از دانشمندان و محققین بوده است. از نقطه‌نظر تاریخی اولین تلاش‌ها برای حل مسأله‌ی بار متحرک را می‌توان در مطالعات ویلیس [۱] و استوکس [۲] روی مسأله‌ی فرو ریختن پل راه‌آهن چستر جستجو کرد. بعد از آن، تلاش‌های زیادی در این زمینه انجام شده است که به عنوان نمونه می‌توان به تحقیقات آیره [۳] و دو رساله‌ی معروف انگلیس [۴] و هیلبرورگ [۵] اشاره کرد. همچنین اخیراً فریبا [۶] و یانگ [۷] کتاب‌هایی در این زمینه منتشر کرده‌اند و به صورت جامع و کاملی به این موضوع پرداخته‌اند. با توجه به استفاده روزافزون از وسایل نقلیه‌ی سنگین و در عین حال سریع و بکارگیری سازه‌های انعطاف‌پذیر و سبک‌تر به منظور بهینه کردن هزینه‌ها، در مطالعات جدید، محققین [۸ تا ۲۱] توجه بیشتری به در نظر گرفتن ترم‌هایی از قبیل اینرسی و تغییر شکل برشی که در اکثر تحقیق‌های اولیه در نظر گرفته نمی‌شد، دارند.

تحقیق‌ها در زمینه‌ی مسأله‌ی رفتار دینامیکی تیر- ششی متحرک را می‌توان به طور کلی به دو گروه اصلی دسته‌بندی کرد. اولین دسته از این تحقیق‌ها به بررسی پاسخ زمانی یا فرکانسی تیر تحت عبور جرم می‌پردازد. دومین گروه اساساً بر تحلیل پایداری سیستم تمرکز دارد. این دسته از مطالعات شامل شناسایی آن دسته از پارامترهای سیستم است که به ازای آنها در سیستم ناپایداری اتفاق می‌افتد و در نتیجه تیر، ارتعاشاتی با دامنه‌های افزایشی را تجربه می‌کند.

این نوع تحلیل معمولاً به محاسبات تحلیلی یا عددی نتایج بر وضعیت‌های پایدار یا ناپایدار مسأله منتج می‌شود.

در مقایسه با تعداد زیاد مقالات منتشر شده در زمینه‌ی پاسخ دینامیکی سیستم تیر-جرم متحرک [۱ تا ۲۱]، تعداد تحقیقات در زمینه پایداری دینامیکی این مسأله محدود می‌باشد [۲۲ تا ۲۸]. نلسون و کنور [۲۲] با استفاده از تئوری فلاکه به تحلیل پایداری دینامیکی تیر یکنواختی با شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده که با یک سری پیوسته از جرم‌های متحرک تحریک می‌شد پرداختند. بندتی [۲۳] مطالعه‌ی نلسون و کنور را گسترش داد و نواحی دیگری از ناپایداری را برای برخی شرایط فاصله بین جرم‌های عبوری گزارش داد. کتر و همکارانش [۲۴] پایداری دینامیکی ارتعاش عرضی تیر با تکیه‌گاه ساده تحریک شده با بارهای متحرک متغیر ایجاد شده در اثر نیروهای برش هنگام عملیات ماشینکاری را بررسی کردند. آنها تغییر مقدار بارها را متناسب با تغییر شکل تیر در نظر گرفتند. ماکرتیج [۲۵] پایداری دینامیکی تیر تیموشنکوی واقع بر محیط الاستیک تحت عبور جرم‌های متحرک را مطالعه کرد. او برای به دست آوردن ناحیه‌ی پایدار مسأله از تئوری فلاکه استفاده کرد. آلدرایهم و باز [۲۶] پایداری دینامیکی تیر پله‌ای واقع بر عبور جرم‌های متحرک را بررسی کردند. آنها از تئوری تحریک پارامتریک تکانشی برای پیش‌بینی پایداری تیر هنگامی که تحت تحریک پارامتریک پرلودیک قرار می‌گیرد استفاده کردند. با مروری بر مطالعات انجام شده در زمینه مسأله‌ی تیر-جرم متحرک مشخص می‌شود که در اکثر آنها از تئوری فلاکه برای تحلیل پایداری مسأله استفاده می‌شود. در این مطالعه سعی می‌شود با استفاده از روش‌های هارمونیک بالانس‌نوی و تئوری فلاکه تحلیل پایداری مسأله انجام شود و در یک مطالعه‌ی مقایسه‌ای نتایج حاصل مقایسه شوند.

در ادامه‌ی مطالب این مقاله، ابتدا مدل ریاضی تیری با تکیه‌گاه ساده که با یک دسته جرم‌های متوالی تحریک شده است استخراج می‌شود. سپس، روش گالرکین برای گسسته‌سازی حوزه مکانی و به دست آوردن معادله

استفاده از توابع ویژه تیر با تکیه گاه ساده برای φ_i ها، انتگرالگیری بر روی طول تیر و در نظر گرفتن شرط تعادل، معادله‌ی دیفرانسیل پاره‌ای (۱) به مجموعه‌ی معادلات دیفرانسیل عادی حاکم بر مختصات مودال بیان شده در (۳) تبدیل می‌شود

$$\mathbf{M}(t)\ddot{\mathbf{q}}+\mathbf{B}(t)\dot{\mathbf{q}}+\mathbf{K}(t)\mathbf{q}=\mathbf{f}(t), \quad (3)$$

که $\mathbf{q}=[q_1(t), q_2(t), \dots, q_n(t)]^T$ بردار مختصات مودال است. اجزای ضرائب ماتریس‌های \mathbf{M} ، \mathbf{B} ، \mathbf{K} و بردار \mathbf{f} عبارتند از

$$\begin{aligned} M_{ij} &= \delta_{ij} + \frac{M_0}{m} \varphi_i(Vt) \varphi_j(Vt), \\ B_{ij} &= \frac{2M_0 v}{m} \varphi_i(Vt) \frac{d\varphi_j(Vt)}{dx}, \\ K_{ij} &= \omega_i^2 \delta_{ij} + \frac{M_0 V^2}{m} \varphi_i(Vt) \frac{d^2\varphi_j(Vt)}{dx^2}, \end{aligned} \quad (4)$$

$$f_i = \frac{M_0 g}{m} \varphi_i(Vt),$$

که δ_{ij} و ω_i بترتیب دلتای کرونکر و i -امین فرکانس طبیعی تیر $(\omega_i = (\frac{i^2 \pi^2}{l^2}) \sqrt{EI/m})$ هستند. با در نظر گرفتن یک تابع شکل نرمالیزه تطبیقی به شکل $\varphi_1(x) = \sqrt{2/l} \sin(\pi x/l)$ و معرفی پارامترهای بدون بعد $\alpha = M_0/ml$ و $\beta = \pi v/l\omega_1$ معادله‌ی حاکم بر مختصات مودال به فرم رابطه‌ی (۵) در می‌آید

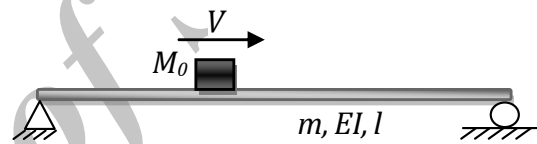
$$\begin{aligned} [1+2\alpha \sin^2(\tilde{\omega}t)]\dot{q} + [2\alpha \tilde{\omega} \sin(2\tilde{\omega}t)]q \\ + [\omega^2 - 2\alpha \tilde{\omega}^2 \sin^2(\tilde{\omega}t)]q = \sqrt{2l} \alpha g \sin(\tilde{\omega}t), \end{aligned} \quad (5)$$

که در این رابطه $\tilde{\omega}_1 = \beta \omega_1 = \pi v/l$ می‌باشد. معادله‌ی (۵) تا زمانی که جرم روی تیر حرکت می‌کند معادله‌ای خطی با ضرائب متغیر با زمان است. به محض اینکه جرم تیر را ترک کند دیگر اثری بر آن نداشته و ضرائب متغیر با زمان موجود در رابطه‌ی (۵) حذف شده و در نتیجه شرایط برای تشدید ارتعاشات از بین خواهد رفت. بنابراین با در نظر گرفتن این شرایط که هنگامیکه یک جرم تیر را ترک کند جرم بعدی روی تیر قرار گرفته و حرکتش را آغاز کند یک تحریک تکراری ایجاد می‌شود که در نتیجه ضرایب معادله-

دیفرانسیل معمولی حاکم بر مسأله استفاده می‌شود. سپس روش هارمونیک بالانس نموی برای تحلیل معادله‌ی حاصل استفاده شده و یک روش تکرار شونده برای تعیین منحنی مشخص کننده مرز ناپایداری مسأله مورد استفاده قرار می‌گیرد. این منحنی با منحنی حاصل از روش بکارگیری تئوری فلاکه مقایسه شده و شبیه‌سازیهای عددی برای تأیید این منحنی بکار گرفته می‌شوند.

۲- مدل‌سازی ریاضی و استخراج معادله حرکت

مدل سیستم مورد مطالعه که شامل جرم متحرکی به بزرگی M_0 و تیر اویلر-برنولی یکنواختی با شرائط مرزی تکیه‌گاه ساده به طول l ، جرم واحد طول m و صلبیت خمشی EI است در شکل (۱) آمده است.



شکل (۱) شماتیک مسأله‌ی تیر-جرم متحرک.

فرض می‌شود که جرم با سرعت ثابت V از سمت چپ تیر به سمت راست آن حرکت می‌کند و همواره در تماس با تیر است. معادله‌ی حاکم بر ارتعاش عرضی دامنه کوچک تیر که با $v(x,t)$ نشان داده می‌شود عبارت است از

$$m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} = \quad (1)$$

$$M_0 (g - V^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - 2V \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} - \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}) \delta(x - Vt),$$

که g شتاب جاذبه و δ بیان کننده‌ی تابع دلتای دیراک است.

به منظور بکارگیری روش گالرکین جهت گسسته سازی معادله‌ی (۱)، پاسخ آن به صورت

$$v(x,t) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(x) q_i(t), \quad (2)$$

در نظر گرفته می‌شود که $\varphi_i(x)$ بیان کننده i -امین تابع شکل، n تعداد توابع شکل یا مودهای استفاده شده، و $q_i(t)$ ضریب تأثیر این تابع می‌باشد که مختصه‌ی مودال نامیده می‌شود. با جایگذاری معادله‌ی (۲) در معادله‌ی (۱)،

۳-۱- روش هارمونیک بالانس نموی

روش هارمونیک بالانس نموی یک تکنیک با دقت بالا در تحلیل پایداری دینامیکی است. در این روش، (α^*, Ω^*) به عنوان نقطه مرزی ناپایداری متناظر با حل پریودیک $Q^*(\tau)$ برای معادله (۹) در نظر گرفته می‌شود. نقطه‌ی مرزی مجاور به صورت

$$Q(\tau) = Q^*(\tau) + \Delta Q(\tau), \quad \alpha = \alpha^* + \Delta\alpha, \quad (10)$$

$$\Omega = \Omega^* + \Delta\Omega$$

در نظر گرفته می‌شود. با جایگذاری معادلات (۱۰) در معادله‌ی (۹) و نگه داشتن ترم‌های خطی ΔQ ، $\Delta\Omega$ ، معادله‌ی نموی خطی

$$\begin{aligned} & \Omega^{*2} (1 + \alpha^* (1 - \cos(2\tau))) \Delta Q'' + 2\alpha^* \Omega^{*2} \sin(2\tau) \Delta Q' \\ & + (1 - \alpha^* \Omega^{*2} (1 - \cos(2\tau))) \Delta Q \\ & = R - [\Omega^{*2} (1 - \cos(2\tau)) Q^{*''} \\ & + 2\Omega^{*2} \sin(2\tau) Q^{*'} - \Omega^{*2} (1 - \cos(2\tau)) Q^*] \Delta\alpha \\ & - [2\Omega^* (1 + \alpha^* (1 - \cos(2\tau))) Q^{*''} + 4\Omega^* \alpha^* \sin(2\tau) Q^{*'} \\ & - 2\Omega^* \alpha^* (1 - \cos(2\tau)) Q^*] \Delta\Omega, \end{aligned} \quad (11)$$

به دست می‌آید که در آن

$$\begin{aligned} R = & - [\Omega^{*2} (1 + \alpha^* (1 - \cos(2\tau))) Q^{*''} \\ & + 2\alpha^* \Omega^{*2} \sin(2\tau) Q^{*'} \\ & + (1 - \alpha^* \Omega^{*2} (1 - \cos(2\tau))) Q^* (\tau)] \end{aligned} \quad (12)$$

ترم اصلاح کننده است و روی نقاط مرزی ناپایداری صفر می‌شود. مرز پایداری را می‌توان با در نظر گرفتن $Q^*(\tau)$ و $\Delta Q(\tau)$ به صورت توابع پریودیک داده شده در رابطه-ی (۱۳) تعیین کرد

$$\begin{aligned} Q^*(\tau) & = b_0 + \sum_{p=2,4,6,\dots}^N [b_p \cos(p\tau) + a_p \sin(p\tau)] = C^T(\tau) A^*, \quad (13) \\ \Delta Q(\tau) & = \Delta b_0 + \sum_{p=2,4,6,\dots}^N [\Delta b_p \cos(p\tau) + \Delta a_p \sin(p\tau)] = C^T(\tau) \Delta A. \end{aligned}$$

در روابط (۱۳)، N عدد صحیح مثبتی است که دقت پاسخ را تعیین می‌کند (هر چه N بزرگتری انتخاب شود پاسخ دقت بیشتری خواهد داشت) و

$$\begin{aligned} C(\tau) & = [1, \cos(2\tau), \dots, \cos(2N\tau), \sin(2\tau), \dots, \sin(2N\tau)]^T, \\ A^* & = [b_0, b_2, b_4, \dots, b_{2N}, a_2, a_4, \dots, a_{2N}]^T, \quad (14) \\ \Delta A & = [\Delta b_0, \Delta b_2, \Delta b_4, \dots, \Delta b_{2N}, \Delta a_2, \Delta a_4, \dots, \Delta a_{2N}]^T. \end{aligned}$$

ی (۵) پریودیک با پریود $T_p = l/V$ می‌شوند. با نوشتن بسط فوریه ضرائب معادله‌ی (۵) نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned} & [1 + \alpha (1 - \cos(2\tilde{\omega}_1 t))] \ddot{q} + 2\alpha \tilde{\omega}_1 \sin(2\tilde{\omega}_1 t) \dot{q} \\ & + [\omega_1^2 - \alpha \tilde{\omega}_1^2 (1 - \cos(2\tilde{\omega}_1 t))] q \\ & = \sqrt{2} l \alpha g \left(\frac{2}{\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(1-4k^2)} \cos(2k\tilde{\omega}_1 t) \right). \end{aligned} \quad (6)$$

به منظور بکارگیری روش‌های هارمونیک بالانس نموی و تئوری فلاکه برای مطالعه‌ی پایداری سیستم دو متغیر جدید تعریف می‌شود،

$$\tau = \tilde{\omega}_1 t, \quad Q = \frac{q}{l^{1/2}}. \quad (7)$$

با جایگذاری معادلات (۷) در معادله‌ی (۶) و انجام چندین عملیات جبری، معادله‌ی پارامتریک بدون بعد حاکم بر سیستم به صورت

$$\begin{aligned} & \Omega^2 [1 + \alpha (1 - \cos(2\tau))] \frac{d^2 Q}{d\tau^2} + 2\alpha \Omega^2 \sin(2\tau) \frac{dQ}{d\tau} \\ & + [1 - \alpha \Omega^2 (1 - \cos(2\tau))] Q \\ & = \frac{\sqrt{2} \alpha g}{l \omega_1^2} \left(\frac{2}{\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(1-4k^2)} \cos(2k\tau) \right), \end{aligned} \quad (8)$$

حاصل می‌شود که در آن، $\Omega = \frac{\tilde{\omega}_1}{\omega_1} = \beta$ می‌باشد. برای مطالعه‌ی پایداری دینامیکی سیستم، با کنار گذاشتن ترم سمت راست معادله‌ی (۸) معادله‌ی (۹) حاصل می‌شود،

$$\begin{aligned} & \Omega^2 [1 + \alpha (1 - \cos(2\tau))] Q'' + 2\alpha \Omega^2 \sin(2\tau) Q' \\ & + [1 - \alpha \Omega^2 (1 - \cos(2\tau))] Q = 0, \end{aligned} \quad (9)$$

که در آن بالانویس پریم مشتق‌گیری نسبت به τ را نشان می‌دهد.

۳- روش هارمونیک بالانس نموی و روش فلاکه

به منظور بررسی پایداری دینامیکی مسأله تیر-جرم متحرک در ادامه از دو روش هارمونیک بالانس نموی و فلاکه استفاده می‌شود.

است. همچنین با انتخاب یکی از پارامترهای α یا Ω به عنوان پارامتر فعال و در نتیجه در نظر گرفتن نمو آن برابر صفر (یعنی $\Delta\alpha=0$ یا $\Delta\Omega=0$)، نتیجتاً دو تا از مجهولات برابر صفر قرار داده می‌شوند و معادلات برای مجهولات باقیمانده حل می‌شوند. در این مقاله α به عنوان پارامتر فعال و در نتیجه $\Delta\alpha=0$ در نظر گرفته می‌شود و اولین عنصر $\Delta\mathbf{A}$ برابر صفر لحاظ می‌شود.

۳-۲- روش فلاکه

تئوری فلاکه روشی برای تعیین پایداری یا ناپایداری سیستم‌های پریودیک ارائه می‌کند. مقدمه‌ای بر این تئوری در ادامه آمده است. سیستم پریودیک مرتبه‌ی n بیان شده در فضای حالت (۱۸) را در نظر می‌گیریم

$$\dot{z} = \mathbf{A}(t)z + \mathbf{h}(t). \quad (18)$$

که بردار متغیرهای حالت و $\mathbf{A}(t)$ ماتریس ضرائب شامل توابع زمانی پریودیک و $\mathbf{h}(t)$ بردار تحریک است. با توجه به این مطلب که برای مسأله‌ی مورد مطالعه در این مقاله محدود است، تحریک محدود به خروجی محدود می‌انجامد. بنابراین برای تحلیل پایداری دینامیکی کافی است که مسأله‌ی همگن معادله‌ی (۱۸) در نظر گرفته شود

$$\dot{z} = \mathbf{A}(t)z, \quad \mathbf{A}(t+T_p) = \mathbf{A}(t). \quad (19)$$

پاسخ معادله (۱۹) با شرط اولیه‌ی $z(t_0) = z_0$ عبارتست از

$$z(t) = \phi(t, t_0)z_0. \quad (20)$$

که ماتریس انتقال $\phi(t, t_0)$ عبارتست از

$$\phi(t, t_0) = \exp\left(\int_{t_0}^t \mathbf{A}(\eta)d\eta\right) \quad (21)$$

برای ساده‌سازی، نماد $\phi(t, 0) \triangleq \phi_0(t)$ تعریف می‌شود.

لذا برای $t_0 = 0$ $\phi(t, 0) = \exp\left(\int_0^t \mathbf{A}(\eta)d\eta\right)$ با

تعریف $C \triangleq \phi_0(t)$ ، مشخص است که پاسخ معادله‌ی (۲۰)

بعد از N دوره‌ی تناوب خواهد شد

$$z(kT) = C^k z_0 \quad (22)$$

تئوری فلاکه بیان می‌کند که اگر تمامی مقادیر ویژه‌ی ماتریس C در داخل دایره‌ی واحد به مرکز $(0,0)$ در

از جایگزینی (۱۴) در (۱۲) و اعمال روش گالرکین، معادله-ی (۱۵) نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \delta(\Delta Q)^T \cdot [\Omega^*(1+\alpha^*(1-\cos(2\tau)))\Delta Q'' \\ & \quad + 2\alpha^*\Omega^*\sin(2\tau)\Delta Q' \\ & \quad + (1-\alpha^*\Omega^*(1-\cos(2\tau)))\Delta Q]d\tau \\ & = \int_0^{2\pi} \delta(\Delta Q)^T \cdot \{R \\ & \quad - (\Omega^{*2}(1-\cos(2\tau))Q'' + 2\Omega^*\sin(2\tau)Q' - \Omega^{*2}(1-\cos(2\tau))Q^*)\Delta\alpha \\ & \quad - ((2\Omega^*(1+\alpha^*(1-\cos(2\tau)))Q'' \\ & \quad + 4\Omega_0\alpha^*\sin(2\tau)Q' - 2\Omega^*\alpha^*(1-\cos(2\tau))Q^*)\Delta\Omega\}d\tau. \end{aligned} \quad (15)$$

با جایگزین کردن فرمت فشرده‌ی (۱۳) در (۱۵)، مجموعه-ای از معادلات خطی از پارامترهای $\Delta\mathbf{A}$ ، $\Delta\alpha$ و $\Delta\Omega$ به فرم

$$\mathbf{S}_{\Delta\mathbf{A}}\Delta\mathbf{A} + \mathbf{S}_{\Delta\alpha}\Delta\alpha + \mathbf{S}_{\Delta\Omega}\Delta\Omega = \mathbf{R}, \quad (16)$$

حاصل می‌شود که

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{\Delta\mathbf{A}} &= \int_0^{2\pi} [\Omega^{*2}(1+\alpha^*(1-\cos(2\tau)))\mathbf{C}\mathbf{C}^{*T} \\ & \quad + 2\alpha^*\Omega^*\sin(2\tau)\mathbf{C}\mathbf{C}^{*T} \\ & \quad + (1-\alpha^*\Omega^*(1-\cos(2\tau)))\mathbf{C}\mathbf{C}^{*T}]d\tau \\ \mathbf{R} &= \int_0^{2\pi} [\Omega^{*2}(1+\alpha^*(1-\cos(2\tau)))\mathbf{C}\mathbf{C}^{*T} \\ & \quad + 2\alpha^*\Omega^*\sin(2\tau)\mathbf{C}\mathbf{C}^{*T} \\ & \quad + (1-\alpha^*\Omega^*(1-\cos(2\tau)))\mathbf{C}\mathbf{C}^{*T}] \mathbf{A}^*d\tau \\ \mathbf{S}_{\Delta\alpha} &= \int_0^{2\pi} [\Omega^{*2}(1-\cos(2\tau))\mathbf{C}\mathbf{C}^{*T} \\ & \quad + 2\Omega^*\sin(2\tau)\mathbf{C}\mathbf{C}^{*T} \\ & \quad - \Omega^{*2}(1-\cos(2\tau))\mathbf{C}\mathbf{C}^{*T}] \mathbf{A}^*d\tau \\ \mathbf{S}_{\Delta\Omega} &= \int_0^{2\pi} [2\Omega^*(1+\alpha^*(1-\cos(2\tau)))\mathbf{C}\mathbf{C}^{*T} \\ & \quad + 4\Omega^*\alpha^*\sin(2\tau)\mathbf{C}\mathbf{C}^{*T} \\ & \quad - 2\Omega^*\alpha^*(1-\cos(2\tau))\mathbf{C}\mathbf{C}^{*T}] \mathbf{A}^*d\tau. \end{aligned} \quad (17)$$

معادله‌ی (۱۶) معادله‌ای است که برای به دست آوردن

مرز ناپایداری برای کمتهای \mathbf{A}^* ، α^* و Ω^* استفاده می-

شود. این معادله در حقیقت یک معادله‌ی غیرخطی بر حسب

این کمتهای است. بجای حل این معادلات غیرخطی برای

\mathbf{A}^* ، α^* و Ω^* معادلاتی که بر حسب $\Delta\mathbf{A}$ ، $\Delta\alpha$ و

$\Delta\Omega$ خطی هستند در یک روند بازگشتی حل می‌شوند. در

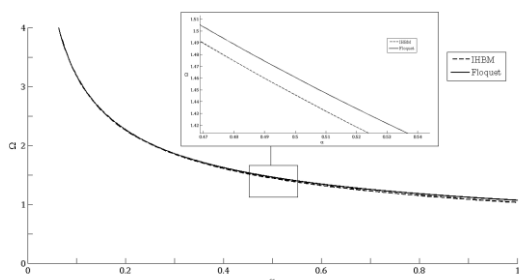
معادله‌ی (۱۶) تعداد متغیرهای نامعلوم از تعداد معادلات ۲ تا

بیشتر است. با این وجود از آنجایی که در بردار \mathbf{A}^* فقط

مقادیر نسبی ضرائب اهمیت دارند، در نظر گرفتن یکی از

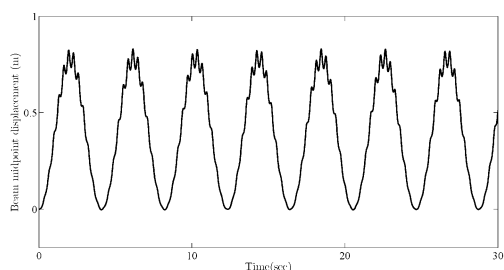
ضرائب برابر یک و نمو آن در $\Delta\mathbf{A}$ برابر صفر امکان‌پذیر

روش فلاکه نیز تولید شده است. تطابق این دو منحنی دقت بالای آنالیز را نشان می‌دهد.

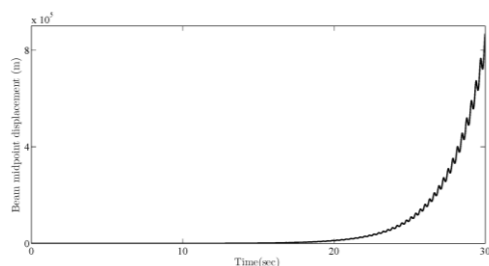


شکل (۲) نواحی پایدار و ناپایدار حاصل شده با روش هارمونیک بالانس نموی و فلاکه.

به منظور بررسی صحت منحنی مرز پایدار و ناپایدار شبیه‌سازی عددی معادله‌ی (۶) برای دو نقطه‌ی انتخابی از صفحه‌ی $\alpha - \Omega$ ($\alpha = 0.5, \Omega = 1.4$) و ($\alpha = 0.5, \Omega = 1.5$) انجام می‌شود. مقادیر عددی پارامترهای تیر در این شبیه‌سازی‌ها، $m = 10\text{kg/m}$ ، $l = 20\text{m}$ ، $EI = 5 \times 10^5 \text{N.m}^2$ انتخاب می‌شوند. اولین نقطه از ناحیه‌ی پایدار و دومی از ناحیه‌ی ناپایدار انتخاب می‌شود. نتایج شبیه‌سازی در شکل‌های (۳) و (۴) نمایش داده شده است. نتایج، رفتار پایدار و ناپایدار سیستم را برای مقادیر انتخابی α و Ω تصدیق می‌کند.



شکل (۳) پاسخ نقطه میانی تیر برای $\alpha = 0.5, \Omega = 1.4$ (متعلق به ناحیه‌ی پایدار).



شکل (۴) پاسخ نقطه میانی تیر برای $\alpha = 0.5, \Omega = 1.5$ (متعلق به ناحیه‌ی ناپایدار).

صفحه‌ی مختلط واقع شوند، آنگاه سیستم دارای پایداری مجانبی است.

با تغییر معادله‌ی (۸) به صورت معادله‌ی (۱۸)، $A(\tau)$ و $h(\tau)$ برابر خواهند شد با

$$A(\tau) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1 - \Omega^2 p_1(\tau)}{\Omega^2(1 + p_1(\tau))} & -\frac{p_2(\tau)}{\Omega^2(1 + p_1(\tau))} \end{bmatrix}, \quad (23)$$

$$h(\tau) = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{p_3(\tau)}{\Omega^2(1 + p_1(\tau))} \end{bmatrix}, \quad z = \begin{bmatrix} Q \\ Q' \end{bmatrix},$$

که

$$p_1(\tau) = \alpha(1 - \cos(2\tau)), \quad p_2(\tau) = 2\alpha\Omega^2 \sin(2\tau),$$

$$p_3(\tau) = \frac{\sqrt{2}\alpha g}{l\omega_1^2} \left(\frac{2}{\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi - 4\pi k^2} \cos(2k\tau) \right). \quad (24)$$

حال ماتریس C مطابق با مطالب گفته شده در این بخش تشکیل شده و تئوری فلاکه صفحه‌ی $\alpha - \Omega$ را به دو قسمت پایدار و ناپایدار تقسیم می‌کند. یادآوری می‌شود که نقاطی از صفحه‌ی $\alpha - \Omega$ متعلق به ناحیه پایدار خواهند بود که مقادیر ویژه‌ی ماتریس C متن‌اظرشان، همگی کمتر از یک باشند.

۴- بحث و تحلیل نتایج

نتایج پایداری دینامیکی تیر اوپلر-برنولی با تکیه‌گاههای ساده که با عبور مجموعه‌ای از جرم‌های با فواصل یکسان تحریک می‌شود در این قسمت آمده است. بدین منظور، با در نظر گرفتن بسط سری $Q^*(\tau)$ و $\Delta Q(\tau)$ مطابق رابطه (۱۳)، در حقیقت به دنبال آن دسته از پارامترهای جرم عبوری در صفحه $\alpha - \Omega$ هستیم که منجر به پاسخ پریودیکی برای معادله (۹) می‌شود. این منحنی در شکل (۲) نشان داده شده است. این منحنی نواحی پایدار و ناپایدار را در صفحه‌ی پارامترها جدا می‌کند. همانگونه که نشان داده شده است نواحی بالا و پایین این منحنی بترتیب نواحی ناپایدار و پایدار می‌باشند. به منظور بررسی صحت روش هارمونیک بالانس نموی، منحنی مرز پایداری با استفاده از

- [2]. Stokes, G.G., Sir, Discussion of a differential equation relating to the breaking of railway bridges, *Mathematical and physical papers*, 2nd edition, reprinted 1966, originally printed as Transactions of Cambridge Philosophical Society, 1849.
- [3]. Ayre, R.S., Jacobson, L.S., and Hsu, C.S., Transverse vibration of one and two span beams under the action of a moving mass load, *Proceedings of the First U.S. National Congress on Applied Mechanics*, 1952, pp. 81-90.
- [4]. Inglis, C.E., "A mathematical treatise on vibrations in railway bridges", Cambridge University Press, London, 1934.
- [5]. Hillerborg, A., "Dynamic influences of smoothly running loads on simply supported girders", Inst. of Structural Engineering and Bridge Building of the Royal Inst. of Technology, Stockholm, 1951.
- [6]. Fryba, L., "Vibration of solids and structures under moving loads", Thomas Telford Ltd., Third Edition, 1999.
- [7]. Yang, Y. B., Yau, J. D. and Wu, Y. S., "Vehicle bridge interaction dynamics: with applications to high speed railways", World Scientific Publishing Company, 2004.
- [8]. Mackertich, S., Response of a beam to a moving mass", *Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 92, No. 3, 1992, pp. 1766-1769.
- [9]. Gbadeyan, J. A., and Oni, S. T., "Dynamic behaviour of beams and rectangular plates under moving loads", *Journal of Sound and Vibration*, vol. 182, No. 5, 1995, pp. 677-695.
- [10]. Esmailzadeh, E. and Ghorashi, M., "Vibration analysis of a Timoshenko beam subjected to a travelling mass", *Journal of Sound and Vibration*, vol. 199, No. 4, 1997, pp. 615- 628.
- [11]. Foda, M.A., and Abduljabbar, Z., A dynamic green function for the response of a beam structure to a moving mass, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 210, 1998, pp. 295-306.
- [12]. Michaltsos, G.T. and Sophianopoulos, D., and Kounadis, A.N., The effect of moving mass and other parameters on the dynamic response of a simply supported beam". *Journal of Sound and Vibration*, vol. 191, 1996, pp. 357-362.
- [13]. Michaltsos, G.T. and Kounadis, A.N., The effects of Centripetal and Coriolis forces on the dynamic response of light bridges under moving loads, *Journal of Vibration and Control*, vol. 7, 2001, pp. 315-326.
- [14]. Wu, J.J., Dynamic analysis of an inclined beam due to moving loads, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 288, 2005, pp. 107-131.

۵- نتیجه گیری

در این مقاله، مسأله‌ی پایداری دینامیکی تیر اوپلر برنولی با تکیه‌گاه ساده تحت عبور پریودیک جرم‌های مشابه با استفاده از روش هارمونیک بالانس نمودی و روش فلاکه مورد بررسی قرار گرفت. با بکارگیری این روشها صفحه‌ی پارامتری متغیرهای جرم عبوری توسط منحنی مرز پایداری به نواحی پایدار و ناپایدار تقسیم می‌شود. منحنی مرز حاصل شده با هر دو روش، با دقت بسیار بالایی برای گستره وسیعی از سرعت‌ها و جرم‌های بار عبوری بر یکدیگر منطبق می‌باشند. شبیه‌سازی‌های عددی برای مقادیر انتخابی از نواحی پایدار و ناپایدار انجام شد. رفتار مورد انتظار سیستم برای هر یک از مقادیر انتخابی، درستی و صحت منحنی مرز و در نتیجه آنالیز انجام شده را تصدیق می‌کند.

فهرست علائم

l	طول تیر (m)
ρ	جرم واحد طول تیر (kg/m)
A	سطح مقطع تیر (m^2)
I	ممان اینرسی مقطع تیر (m^4)
v	جابجایی عرضی تیر (m)
E	مدول یانگ (Nt/m^2)
G	شتاب گرانش (m/s^2)
M_0	جرم ذره عبوری (kg)
V	سرعت ذره عبوری (m/s)
α	جرم بی‌بعد ذره
Ω	سرعت بی‌بعد ذره

مراجع

- [1]. Willis, R., "Report of the Commissioners Appointed to inquire into the application of iron to railway structures", Appendix B, Stationery Office, London, England, 1849.

- [27]. Verichev, S.N., and Metrikine, A.V., Instability of vibrations of mass that moves uniformly along a beam on a periodically inhomogeneous foundation, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 260, 2003, pp. 901-925.
- [28]. Verichev, S.N., and Metrikine, A.V., Instability of a bogie moving on flexibly supported Timoshenko beam, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 253, No. 3, pp. 635-668, 2002.
- [15]. Rao, V.G., Linear dynamics of an elastic beam under moving loads, *Journal of Vibration and Acoustics*, vol. 122, 2000, pp. 281-289.
- [16]. Siddiqui, S.A.Q. and Golnaraghi, M.F. and Hepler, G.R., Dynamics of a flexible beam carrying a moving mass using perturbation, numerical and time frequency analysis techniques, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 229, No. 5, 2000, pp. 1023-1055.
- [17]. Mamandi, A. and Kargarnovin, M.H., and Farsi, S., An investigation on effects of traveling mass with variable velocity on nonlinear dynamic response of an inclined Timoshenko beam with different boundary conditions, *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 52, 2010, pp. 1694-1708.
- [18]. Nikkhoo, A. and Rofooei, F.R., and Shadnam, M.R., Dynamic behavior and modal control of beams under moving mas", *Journal of Sound and Vibration*, vol. 306, 2007, pp. 712- 724.
- [19]. Yau, D.T.W. and Fung, E.H.K., Dynamic response of a rotating flexible arm carrying a moving mass, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 257, No. 1, 2002, pp. 107-117.
- [20]. Nayyeri Amiri, S., and Onyango M., Simply supported beam response on elastic foundation carrying repeated rolling concentrated loads, *Journal of Engineering Science and Technology*, vol. 5, No.1, 2010, pp. 52- 66.
- [21]. Eftekhari, S.A. and Jafari, A.A., Coupling Ritz method and triangular quadrature rule for moving mass problem, *Journal of Applied Mechanics*, vol. 79, issue 2, 2012, pp. 021018.
- [22]. Nelson, H.D., and Conover, R.A., Dynamic stability of a beam carrying moving masses, *Journal of Applied Mechanics*, 38, Series E, 1971, pp. 1003-1006.
- [23]. Benedetti, G.A., Dynamic stability of a beam loaded by a sequence of moving mass particles, *Journal of Applied Mechanics*, vol. 41, 1974, pp. 1069-1071.
- [24]. Katz, R., Lee C.W., Ulsoy, A.G., and Scott, R.A., Dynamic stability and response of a beam subjected to a deflection dependent moving load, *Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design*, vol. 109, 1987, pp. 361-365.
- [25]. Mackertich, S., Dynamic stability of a beam excited by a sequence of moving mass particles, *Acoustical Society of America*, 2004, pp. 1416-1419.
- [26]. Aldraihem, O.J., and Baz, A., Dynamic stability of stepped beams under moving loads, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 250, No. 5, 2002, pp. 835-848.