

## اثر کسرهای حجمی بر تمرکز تنش سوراخ در مواد مرکب تک لایه با احتساب پلاستیسیته در ماتریس

پژمان تقی پور بیرگانی<sup>۱</sup>

\* نویسنده مسئول: p\_taghipour@iauhvaz.ac.ir

### چکیده

### واژه‌های کلیدی

ماده مرکب تک لایه، ناحیه پلاستیک، کسرهای حجمی، تئوری شیرلگ، تئوری ماتریس تسلیم یافته، تمرکز تنش سوراخ.

در این مقاله، تمرکز تنش در اطراف یک سوراخ در مواد مرکب تک لایه با الیاف بلند که در آن الیاف در جهت طولی تک لایه قرار دارند بررسی شده است. تک لایه دارای طول بینهایت، عرض محدود و ضخامت ثابت بوده و تحت بار کششی ثابت  $p$  در بینهایت قرار دارد. ناپیوستگی به صورت سوراخ بیضی شکل بطور متقارن در وسط تک لایه قرار دارد و فرض بر این است که بر اثر ازدیاد تنش برشی در ماتریس اطراف سوراخ یک ناحیه تسلیم یافته به طول  $2a_0$  در ماتریس ایجاد شده است؛ بدین منظور از تئوری ماتریس تسلیم یافته برای بررسی ناحیه تسلیم استفاده شده است. با استفاده از تئوری شیرلگ، با در نظر گرفتن المان حجمی معادلات تعادل حاکم بر تک لایه استخراج شده است. سپس، با توجه به شرایط مرزی و پیوستگی حاکم بر تک لایه نتایج تمرکز تنش در اطراف سوراخ بصورت تحلیلی بدست آمده است. در نهایت، تمرکز تنش در اطراف سوراخ با استفاده از یک کد کامپیوتری محاسبه شده است. محاسبه ضریب تمرکز تنش در اطراف سوراخ با استفاده از روش تحلیلی شیرلگ، با در نظر گرفتن پلاستیسیته در ماتریس و کسر حجمی الیاف و ماتریس از اهداف اصلی می باشد. همچنین اثر تعداد الیاف شکسته شده، تعداد کل الیاف و تغییر شکل سوراخ روی ضریب تمرکز تنش نیز بررسی شده است. مشاهده می شود که ضریب تمرکز تنش با افزایش طول ناحیه پلاستیک کاهش می یابد. همچنین ضریب تمرکز تنش در حالت الاستیک با افزایش کسر حجمی الیاف افزایش یافته و در حالت پلاستیک با افزایش کسر حجمی الیاف ابتدا افزایش و سپس کاهش می یابد.

## ۱- مقدمه

در ماتریس است که بررسی میکرومکانیک این مواد را مشکل می‌سازد. در این زمینه پژوهش‌های متعددی انجام شده است. تمرکز تنش در اطراف یک ترک که یک ناحیه پلاستیک در ماتریس بین دو فیبر در نوک ترک ایجاد شده است در یک تک لایه ساده با طول و عرض بینهایت محاسبه شده است [۱-۲].

فرانکلین [۳] برای اولین بار تمرکز تنش حول سوراخ را در یک ماده مرکب ساده با طول و عرض نامحدود، با استفاده از تئوری شیرلگ بررسی کرد.

همچنین کو و همکاران [۴]، نتایج تمرکز تنش در اطراف ترک را برای انواع ترک قائم و مایل را در مواد مرکب تک لایه بدست آوردند.

راستس و شیشه‌ساز [۵]، تمرکز تنش در یک تک لایه در مجاورت فیبرهای شکسته شده که ماتریس نیز علاوه بر فیبر بار کششی را تحمل می‌کند بررسی کردند.

لندیس و مک مکینگ [۶]، مدلی مشابه با مدل شیرلگ را توسعه دادند و از این مدل برای تحلیل تنش در ماده مرکبی با یک فیبر شکسته که ماتریس آن رفتار الاستیک - پلاستیک کامل داشت، استفاده نمودند.

سایمن و آکسوی [۷]، تحلیل تنش الاستیک-پلاستیک در چند لایه‌های مرکب با ماتریس فلزی و تکیه‌گاه‌های ساده و گیردار در حضور یک سوراخ را انجام دادند.

میزرز و همکاران [۸]، تغییر شکل پلاستیک نوک ترک را در مواد مرکب با ماتریس فلزی و تقویت کننده‌های ذره‌ای سرامیکی با کسر حجمی بالا مورد بررسی قرار دادند.

در این پژوهش توزیع تنش در اطراف یک سوراخ در مواد مرکب با الیاف پیوسته بلند بررسی شده است. در ناحیه بین اولین فیبر سالم بعد از سوراخ و اولین فیبر بریده توسط

در سازه‌های مرکب از قبیل پوسته بال‌های افقی و عمودی هواپیما، بدنه جنگنده‌های رادار گریز، ملخ بالگرد و پره توربین بادی، نقایصی به صورت سوراخ و ترک وجود دارند که باعث افزایش تنش در این مواد و شکست می‌شوند که بسیار خطرناک هستند.

از جمله مواد مرکب به مواد مرکب تک لایه با الیاف پیوسته بلند می‌توان اشاره کرد، که در آنها الیاف با کسر حجمی متفاوت در ماتریس قرار گرفته‌اند. خواص مکانیکی ماده مرکب به کسر حجمی الیاف وابسته هستند. در این پژوهش سعی شده است اثر افزایش خواص مکانیکی با الیاف با کسر حجمی متفاوت، که به صورت کاهش تمرکز تنش در اطراف سوراخ است نشان داده شود. همچنین با توجه به اینکه الیاف معمولاً ترد و شکننده و ماتریس نرم و انعطاف پذیر هستند، سعی شده اثر تغییر شکل پلاستیک ماتریس در اثر ازدیاد تنش برشی در ماتریس، روی تمرکز تنش در الیاف نیز بررسی شود.

برای درک بیشتر رفتار مواد مرکب و بررسی میکرومکانیک این مواد در زمینه ی تحلیل‌های شکست این مواد باید بطور صحیح مدل‌سازی شوند؛ یکی از این مدل‌ها حالتی است که در آن تمام فیبرهای تک لایه تحت بار محوری قرار دارند و ماتریس تنش برشی را تحمل می‌کند و وظیفه آن انتقال بار از یک فیبر به فیبر مجاور آن است. در چنین حالتی ساده سازی‌هایی می‌توان انجام داد و از تئوری‌هایی از جمله تئوری شیرلگ<sup>۱</sup> جهت تحلیل رفتار آنها استفاده کرد. وجود عوامل دیگری تحلیل این مواد را مشکل تر می‌سازد. یکی از این عوامل وجود ترک یا سوراخ در این مواد است؛ از عوامل دیگر کسر حجمی الیاف و یا وجود ناحیه پلاستیک

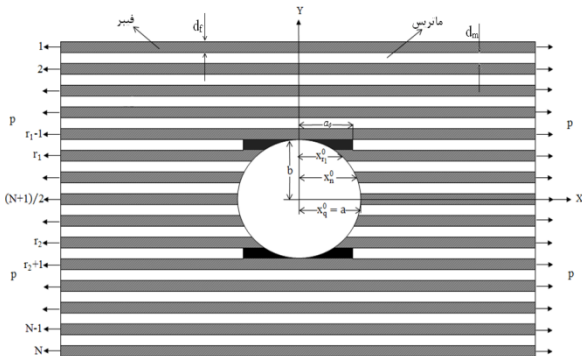
<sup>1</sup>Shear Lag

بینهایت است و سوراخ به صورت متقارن در وسط تک لایه قرار دارد.  $a$  و  $b$  شعاع طولی و عرضی سوراخ بیضی شکل هستند.  $d_f$  و  $d_m$  به ترتیب ضخامت فیبر و ماتریس هستند.  $a_0$  نصف طول ناحیه پلاستیک می باشد. به این ترتیب حجم فیبر و ماتریس بکار رفته در تک لایه برابر نبوده و کسر حجمی فیبر در تک لایه ( $v_f$ ) به صورت زیر تعریف می شود،

$$v_f = \frac{V_f}{(V_f + V_m)} = \frac{d_f}{(d_f + d_m)} \quad (1)$$

$$V_f = d_f h l, V_m = d_m h l$$

$V_m$  و  $V_f$  به ترتیب حجم فیبر و ماتریس در ماده مرکب،  $h$  ضخامت تک لایه و  $l$  طول تک لایه هستند. همچنین در شکل (۱)،  $x_n^0$  مختصه طولی نوک فیبرهای بریده شده توسط سوراخ و  $q$  شماره فیبر وسط است.



شکل (۱) تک لایه مرکب با الیاف پیوسته بلند (ورق با طول بینهایت و عرض محدود).

همچنین فرضیات ذیل برای استخراج معادلات تعادل در نظر گرفته شده است:

- فیبرها تا نقطه شکست دارای رفتار الاستیک خطی هستند.

- فیبر و ماتریس تماماً همگن فرض می شوند.

- مقطع فیبرها به صورت مربع مستطیل در نظر گرفته می شود.

سوراخ بر اثر ازدیاد اختلاف جابجایی فیبرها یک ناحیه تسلیم یافته به طول  $2a_0$  در ماتریس ایجاد شده است؛ بدین منظور از تئوری ماتریس تسلیم یافته برای بررسی ناحیه تسلیم استفاده شده است. با استفاده از تئوری شیرلنگ معادلات تعادل حاکم بر تک لایه استخراج شده و سپس با در نظر گرفتن شرایط مرزی و پیوستگی معادلات دیفرانسیل به صورت تحلیلی حل شده اند. با استفاده از کد کامپیوتری که با استفاده از نرم افزار متلب نوشته شده است نمودارهای تمرکز تنش در اطراف سوراخ بر حسب کسر حجمی الیاف ( $v_f$ ) و نصف طول ناحیه پلاستیک بی بعد شده ( $\alpha$ ) رسم شده است. با در نظر گرفتن  $a/b = 0$  (نسبت شعاع طولی به شعاع عرضی سوراخ) سعی شده است نتایج تمرکز تنش را برای یک ترک که در اطراف آن یک منطقه پلاستیکی به طول  $2a_0$  ایجاد شده است استخراج شود، همچنین با قرار دادن  $a_0 = 0$  (نصف طول ناحیه پلاستیک) و  $v_f = 0.5$  نتایج برای حالت الاستیک نیز استخراج شده و با نتایج مرجع [۳] مقایسه شده است.

## ۲- استخراج معادلات تعادل

شکل (۱) یک تک لایه مرکب را همراه با پارامترهای هندسی آن در یک سیستم مختصات انتخابی در حالتی که یک ناحیه پلاستیک در ماتریس اطراف سوراخ ایجاد شده است نشان می دهد. با فرض وجود  $N$  فیبر در تک لایه، فیبرها از بالای صفحه تا پایین آن به ترتیب از ۱ تا  $N$  شماره گذاری شده اند. ماتریس ها نیز به همان ترتیب از بالا تا پایین از ۱ تا  $N-1$  شماره گذاری می شوند.  $N$  عددی فرد در نظر گرفته می شود و  $\Gamma$  تعداد فیبرهای بریده شده نیز، عددی فرد است. شماره اولین فیبر بریده شده با  $\Gamma_1$  و شماره آخرین فیبر بریده شده با  $\Gamma_2$  نشان داده می شود. ورق مذکور دارای طول بینهایت و عرض محدود است و همچنین تحت کشش  $p$  در

جایگزینی تنش برشی بر حسب جابجایی در فیبر در رابطه (۲) داریم،

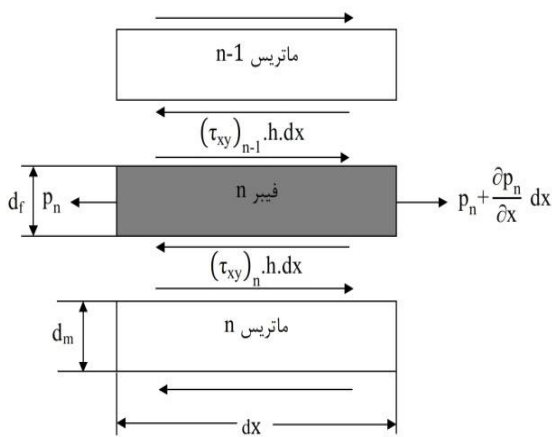
$$E_f d_f \frac{d^2 u_n}{dx^2} + \frac{G}{d_m} (u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}) = 0 \quad (3)$$

$$1 < n < r_1 - 1, r_2 + 1 < n < N, \quad x \geq 0$$

$$r_1 < n < r_2, \quad x \geq x_n^0$$

$$n = r_1, r_2, r_1 - 1, r_2 + 1, \quad x \geq a_0$$

که  $E_f A_f$  سختی کششی فیبر (اندیس  $f$  نشانگر فیبر می-باشد)،  $u_n$  جابجایی در فیبر  $n$ ام و  $G$  مدول برشی ماتریس می‌باشند.



شکل (۲) المانی از فیبر  $a$  و نیروهای وارد بر آن.

برای فیبرهایی که در لبه‌های صفحه قرار دارند (نوع ب) معادلات تعادل مطابق با شکل (۳) به صورت ذیل است،

$$E_f d_f \frac{d^2 u_n}{dx^2} + \frac{G}{d_m} (u_{n+1} - u_n) = 0, n=1, x \geq 0 \quad (4)$$

$$E_f d_f \frac{d^2 u_n}{dx^2} + \frac{G}{d_m} (u_{n-1} - u_n) = 0, n=N, x \geq 0$$

معادلات تعادل برای فیبرهای مجاور ناحیه پلاستیک (نوع c) در محدوده پلاستیک مطابق شکل (۴) برای فیبرهای  $r_2$  و  $r_2+1$  با توجه به تئوری ناحیه تسلیم یافته به صورت زیر تغییر می‌کند،

- بدلیل تقارن صفحه نسبت به محور سوراخ (محور  $y$ ها)، بررسی تنش را فقط در محدوده مثبت  $x$ ها انجام می‌دهیم.

- ماتریس دارای رفتار الاستیک - پلاستیک کامل است.

- در ناحیه بین اولین فیبر سالم بعد از سوراخ و اولین فیبر بریده شده توسط سوراخ بر اثر ازدیاد اختلاف جابجایی فیبرها طبق تجربه یک ناحیه تسلیم یافته به طول  $2a_0$  در ماتریس ایجاد شده است.

- طول ناحیه پلاستیک ( $a_0$ ) بزرگ‌تر از مختصه طولی نوک اولین فیبر شکسته ( $x_{r_1}^0$ ) است ( $a_0 > x_{r_1}^0$ )، که در استخراج معادلات دیفرانسیل فیبرها مورد توجه قرار می‌گیرد.

معادلات دیفرانسیل حاکم بر مسئله را برای ۴ دسته فیبر زیر بدست می‌آوریم:

الف) فیبرهایی که ماتریس بالا و پایین آنها در ناحیه الاستیک قرار دارد.

ب) فیبرهایی که در دو انتهای صفحه قرار دارند ( $N, 1$ ).

ج) فیبرهایی که یکی از ماتریس‌های مجاور آنها به حالت پلاستیک رسیده است ( $r_1, r_2, r_1-1, r_2+1$ ).

د) فیبرهایی که دو ماتریس مجاور فیبر در حالت پلاستیک قرار دارند. این وضعیت در حالت خاص  $r = 1$  (که در آن تعداد فیبرهای بریده شده است) برای فیبرهای  $r_1, r_2$  اتفاق می‌افتد ( $r_1 = r_2$ ).

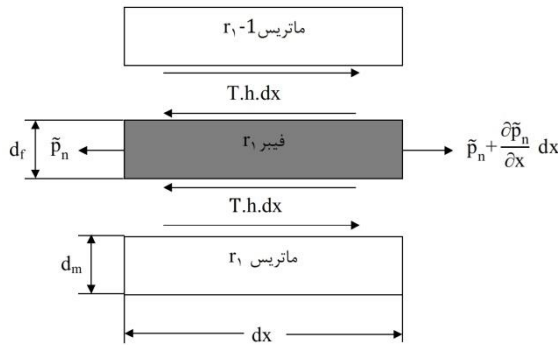
معادله تعادل برای فیبرهای نوع الف) با استفاده از فرضیه شیرلگ و با توجه به شکل (۲) به صورت زیر است:

$$\frac{\partial p_n}{\partial x} dx + \left\{ (\tau_{xy})_{n-1} - (\tau_{xy})_n \right\} h \cdot dx = 0 \quad (2)$$

در رابطه (۲)،  $p_n$  بار در فیبر  $n$ ام،  $\tau_{xy}$  تنش برشی در ماتریس اطراف فیبر و  $h$  ضخامت تک لایه است. با

به همین ترتیب برای فیبرهای نوع (د) که هر دو ماتریس آنها در ناحیه پلاستیک قرار دارد (حالت خاص  $r = 1$ ) مطابق شکل (۵) داریم،

$$E_f d_f \frac{d^2 \tilde{u}_n}{dx^2} - 2T = 0, n=r_1, r_2, x_n^0 \leq x \leq a_0 \quad (۶)$$



شکل (۵) المانی از فیبرهای نوع (د) و نیروهای وارد بر آنها.

که در این حالت خاص  $r_1 = r_2$  است.

### ۳- معادلات تعادل بی بعد شده

برای حل معادلات بدست آمده بهتر است که بی بعد گردند. برای بدون بعد کردن معادلات تعادل پارامترهای بدون بعد زیر را در نظر می گیریم:

$$\xi = \sqrt{\frac{G}{E_f d_f d_m}} \cdot x, \quad \xi^0 = \sqrt{\frac{G}{E_f d_f d_m}} \cdot x_n^0$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{G}{E_f d_f d_m}} \cdot a_0, \quad \delta = \sqrt{\frac{G}{E_f d_f d_m}} \cdot d_m$$

$$U_n = \sqrt{\frac{E_f d_f G h^2}{d_m p^2}} \cdot u_n, \quad \tilde{U}_n = \sqrt{\frac{E_f d_f G h^2}{d_m p^2}} \cdot \tilde{u}_n \quad (۷)$$

$$P_n = \frac{p_n}{p}, \quad \tilde{P}_n = \frac{\tilde{p}_n}{p}$$

که  $h$  ضخامت تک لایه،  $G$  مدول برشی ماتریس،  $E_f$  مدول کششی فیبر،  $d_f$  ضخامت فیبر،  $d_m$  ضخامت ماتریس،  $p$  نیروی اعمال شده در بی نهایت بر هر فیبر،  $x_n^0$  مختصه طولی نوک فیبرهای بریده شده و  $T$  تنش برشی تسلیم ماتریس

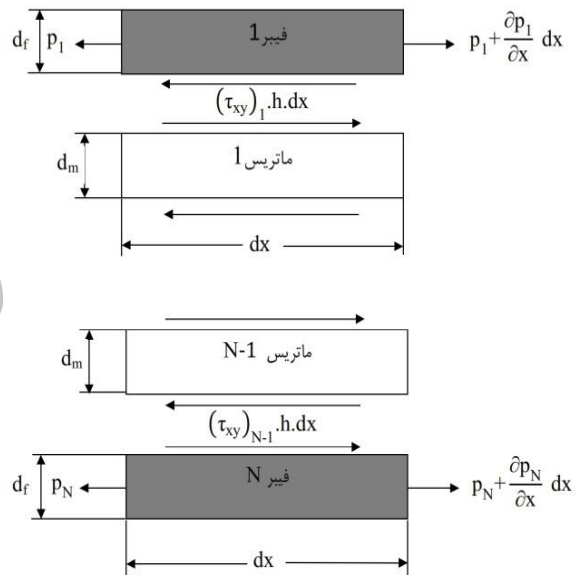
$$E_f d_f \frac{d^2 \tilde{u}_n}{dx^2} + \frac{G}{d_m} (u_{n-1} - \tilde{u}_n) - T = 0$$

$$n=r_2, \quad x_{r_2}^0 \leq x \leq a_0 \quad (۵)$$

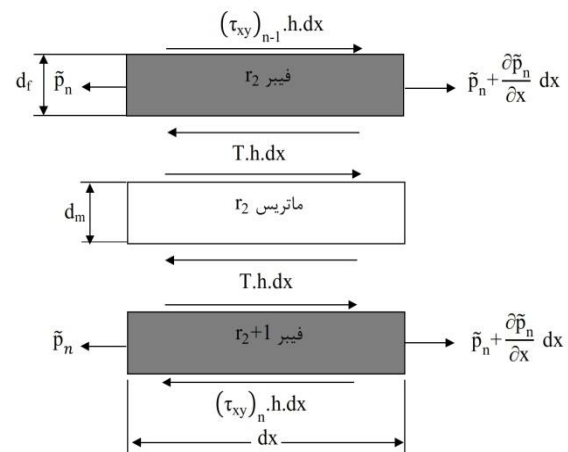
$$E_f d_f \frac{d^2 \tilde{u}_n}{dx^2} + \frac{G}{d_m} (u_{n+1} - \tilde{u}_n) + T = 0$$

$$n=r_2+1, \quad x \leq a_0$$

که  $\tilde{u}_n$  و  $\tilde{p}_n$  به ترتیب جابجایی و بار فیبر  $n$ ام در منطقه پلاستیک هستند. از شاخص  $(\sim)$  برای مشخص کردن جابجایی و بار فیبرها در ناحیه پلاستیک استفاده می شود.  $T$  معرف تنش برشی تسلیم ماتریس و  $x_{r_2}^0$  مختصه طولی نوک فیبر بریده شده  $r_2$  است.



شکل (۳) المانی از فیبرهای لبه و نیروهای وارد بر آنها.



شکل (۴) المانی از فیبرهای نوع (ج) و نیروهای وارد بر آنها (فیبر  $r_2$ ).

معادلات تعادل هنگامی که  $r=1$  باشد به صورت زیر هستند  
 $(r_1=r_2=(N+1)/2)$

$$\frac{d^2 \tilde{U}_n}{d\xi^2} = 2\tau, n=r_1, r_2, \xi_n^0 \leq \xi \leq \alpha \quad (14)$$

$$\frac{d^2 \tilde{U}_n}{d\xi^2} + (U_{n-1} - \tilde{U}_n) = -\tau, n=r_1-1, \xi \leq \alpha \quad (15)$$

$$\frac{d^2 \tilde{U}_n}{d\xi^2} + (U_{n+1} - \tilde{U}_n) = -\tau, n=r_2+1, \xi \leq \alpha \quad (16)$$

#### ۴- معادلات میدان

با استفاده از حل معادلات تعادل، می توان نشان داد که جابجایی و بار برای فیبرهای مجاور ناحیه الاستیک به صورت ذیل است،

$$U_n(\xi_n) = \sum_{i=1}^q C_i R_n^i e^{\lambda_i \xi_n} + \xi_n \quad (17)$$

$$P_n(\xi_n) = \sum_{i=1}^q C_i \lambda_i R_n^i e^{\lambda_i \xi_n} + 1 \quad (18)$$

در رابطه فوق مقدار بار در هر فیبر را از مشتق گیری معادله جابجایی نسبت به طول می توان بدست آورد.  $\xi_n^0$  مختصات موضعی بی بعد در نوک فیبرهای بریده شده است و  $\xi_n^0$  مختصات اصلی بی بعد که در مرکز سوراخ قرار دارد است. شکل (۶) موقعیت این دو مختصات را نشان می دهد. برای الیافی که بریده نشده اند مختصات موضعی بی بعد همان مختصات اصلی بی بعد است و در وسط فیبر در نظر گرفته می شوند ( $\xi_n^0 = \xi_n$ ). برای الیاف بریده شده مختصات موضعی قرار گرفته در نوک فیبر بریده شده را بر حسب مختصات اصلی که در مرکز سوراخ می توان قرار دارد بصورت ذیل نوشت:

$$\xi_n - \xi_n^0 = \xi_n, r_1 \leq n \leq r_2 \quad (19)$$

در این رابطه  $\xi_n^0$  مختصات اصلی بی بعد بر حسب مرکز سوراخ،  $\xi_n^0$  مختصات موضعی بی بعد نوک فیبر و  $\xi_n^0$  فاصله بی بعد بین لبه ی سوراخ تا مختصات موضعی است.

هستند. با توجه به این پارامترها، معادلات تعادل بی بعد به صورت ذیل خلاصه می شوند. برای فیبرهای مجاور ناحیه الاستیک خواهیم داشت،

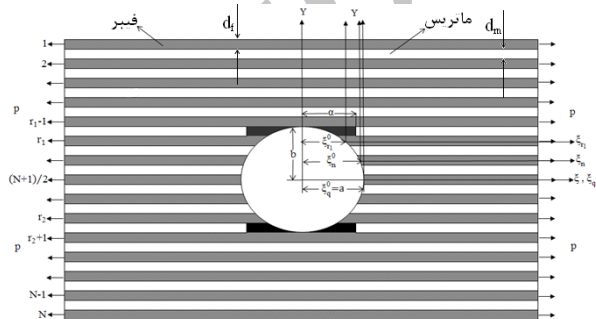
$$\frac{d^2 U_n}{d\xi^2} + (U_{n+1} - 2U_n + U_{n-1}) = 0 \quad (8)$$

$$1 < n < r_1 - 1, r_2 + 1 < n < N, \xi \geq 0$$

$$r_1 < n < r_2, \xi \geq \xi_n^0$$

$$n = r_1, r_2, r_1 - 1, r_2 + 1, \xi \geq \alpha$$

که  $\xi_n^0$  فاصله بی بعد بین لبه سوراخ تا مختصات موضعی است (مطابق شکل (۶)).



شکل (۶) موقعیت مختصات محلی هر فیبر در تک لایه مرکب با الیاف پیوسته.

برای فیبرهایی که در لبه های صفحه قرار دارند نیز داریم،

$$\frac{d^2 U_n}{d\xi^2} + (U_{n+1} - U_n) = 0, n=1, \xi \geq 0 \quad (9)$$

$$\frac{d^2 U_n}{d\xi^2} + (U_{n-1} - U_n) = 0, n=N, \xi \geq 0$$

همچنین برای فیبرهای مجاور ناحیه پلاستیک وقتی که  $r > 1$  باشد خواهیم داشت،

$$\frac{d^2 \tilde{U}_n}{d\xi^2} + (U_{n+1} - \tilde{U}_n) = \tau, n=r_1, \xi_n^0 \leq \xi \leq \alpha \quad (10)$$

$$\frac{d^2 \tilde{U}_n}{d\xi^2} + (U_{n-1} - \tilde{U}_n) = -\tau, n=r_1-1, \xi \leq \alpha \quad (11)$$

$$\frac{d^2 \tilde{U}_n}{d\xi^2} + (U_{n-1} - \tilde{U}_n) = \tau, n=r_2, \xi_n^0 \leq \xi \leq \alpha \quad (12)$$

$$\frac{d^2 \tilde{U}_n}{d\xi^2} + (U_{n+1} - \tilde{U}_n) = -\tau, n=r_2+1, \xi \leq \alpha \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \tilde{U}_{r_1-1}(\xi_n) &= \tau + \xi_n + k_1 e^{\xi_n} + k_1' e^{-\xi_n} \\ &\quad - \sum_{i=1}^q \frac{C_i}{\lambda_i^2 - 1} R_{r_1-2}^i e^{\lambda_i \xi_n}, \quad \xi_n \leq \alpha \end{aligned} \quad (26)$$

$$\tilde{U}_{r_1}(\xi_n) = \tau \xi_n^2 + k_2', \quad 0 \leq \xi_n \leq \alpha - \xi_{r_1}^0 \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \tilde{P}_{r_1-1}(\xi_n) &= 1 + k_1 e^{\xi_n} - k_1' e^{-\xi_n} \\ &\quad - \sum_{i=1}^q \frac{C_i \lambda_i}{\lambda_i^2 - 1} R_{r_1-2}^i e^{\lambda_i \xi_n}, \quad \xi_n \leq \alpha \end{aligned} \quad (28)$$

$$\tilde{P}_{r_1}(\xi_n) = 2\tau \xi_n, \quad 0 \leq \xi_n \leq \alpha - \xi_{r_1}^0 \quad (29)$$

و اما تنش برشی تسلیم ماتریس در حالت بدون بدست (τ) مطابق رابطه (۲۴) به صورت ذیل بدست می آید،

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{\alpha}{(\alpha - \xi_{r_1}^0)^2 - 2} + k_1 \frac{e^\alpha}{(\alpha - \xi_{r_1}^0)^2 - 2} \\ &\quad + k_1' \frac{e^{-\alpha}}{(\alpha - \xi_{r_1}^0)^2 - 2} - k_2' \frac{1}{(\alpha - \xi_{r_1}^0)^2 - 2} \\ &\quad - \sum_{i=1}^q \frac{C_i}{(\lambda_i^2 - 1) [(\alpha - \xi_{r_1}^0)^2 - 2]} (R_{r_1-2}^i e^{\lambda_i \alpha}) \end{aligned} \quad (30)$$

در حالت  $r=1$  با اعمال شرایط مرزی  $q+3$  معادله بدست می آید که از حل دستگاه مربوطه مجهولات  $C_i$  (به تعداد  $q$ )،  $k_1$ ،  $k_1'$  و  $k_2'$  بدست می آیند و جابجایی و بار در هر فیبر مشخص می شود.

### ۵- شرایط مرزی و پیوستگی

برای بدست آوردن مجهولات معادلات میدان به شرایط مرزی و پیوستگی احتیاج است. شرایط مرزی و پیوستگی بی بعد شده به صورت ذیل هستند.

#### ۵-۱- شرط مرزی جابجایی در تمام فیبرهای سالم

اولین شرط مرزی مربوط به فیبرهای سالم است، به علت طول بینهایت ورق و تقارن سوراخ در جهت  $y$ ، جابجایی فیبرهای سالم در وسط فیبر صفر است. یعنی:

$$U_n(0) = 0, \quad 1 \leq n < r_1 - 1, \quad r_2 + 1 < n \leq N \quad (31)$$

$$\tilde{U}_n(0) = 0, \quad n = r_1 - 1, r_2 + 1 \quad (32)$$

تمام روابط مربوط به جابجایی و نیرو نسبت به مختصات محلی بی بعد  $\xi_n$  استخراج شده اند. جابجایی و بار برای فیبرهای مجاور ناحیه پلاستیک هنگامی که  $r > 1$  است مطابق با معادلات (۱۰) و (۱۱) به صورت ذیل هستند:

$$\begin{aligned} \tilde{U}_{r_1-1}(\xi_n) &= \tau + \xi_n + k_1 e^{\xi_n} + k_1' e^{-\xi_n} \\ &\quad - \sum_{i=1}^q \frac{C_i}{\lambda_i^2 - 1} R_{r_1-2}^i e^{\lambda_i \xi_n}, \quad \xi_n \leq \alpha \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \tilde{U}_{r_1}(\xi_n) &= -\tau + \xi_n + k_2 e^{\xi_n} + k_2' e^{-\xi_n} \\ &\quad - \sum_{i=1}^q \frac{C_i}{\lambda_i^2 - 1} R_{r_1+1}^i e^{\lambda_i \xi_n}, \quad 0 \leq \xi_n \leq \alpha - \xi_{r_1}^0 \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \tilde{P}_{r_1-1}(\xi_n) &= 1 + k_1 e^{\xi_n} - k_1' e^{-\xi_n} \\ &\quad - \sum_{i=1}^q \frac{C_i \lambda_i}{\lambda_i^2 - 1} R_{r_1-2}^i e^{\lambda_i \xi_n}, \quad \xi_n \leq \alpha \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \tilde{P}_{r_1}(\xi_n) &= 1 + k_2 e^{\xi_n} - k_2' e^{-\xi_n} \\ &\quad - \sum_{i=1}^q \frac{C_i \lambda_i}{\lambda_i^2 - 1} R_{r_1+1}^i e^{\lambda_i \xi_n}, \quad 0 \leq \xi_n \leq \alpha - \xi_{r_1}^0 \end{aligned} \quad (23)$$

تنش برشی تسلیم ماتریس در حالت بی بعد (τ) بصورت ذیل تعریف می شود،

$$\tau = \left[ \tilde{U}_{r_1}(\alpha - \xi_{r_1}^0) - \tilde{U}_{r_1-1}(\alpha) \right]_{\xi=\alpha} \quad (24)$$

با جایگذاری جابجایی در رابطه (۲۴) داریم،

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{-\xi_{r_1}^0}{3} - k_1 \frac{e^\alpha}{3} + k_2 \frac{e^{-\alpha - \xi_{r_1}^0}}{3} \\ &\quad - k_1' \frac{e^{-\alpha}}{3} + k_2' \frac{e^{-(\alpha - \xi_{r_1}^0)}}{3} \\ &\quad + \sum_{i=1}^q \frac{C_i}{3(\lambda_i^2 - 1)} \left( R_{r_1-2}^i e^{\lambda_i \alpha} - R_{r_1+1}^i e^{\lambda_i (\alpha - \xi_{r_1}^0)} \right) \end{aligned} \quad (25)$$

در حالت  $r > 1$  با اعمال شرایط مرزی  $q+4$  معادله بدست می آید که از حل دستگاه مربوطه مجهولات  $C_i$  (به تعداد  $q$ )،  $k_1$ ،  $k_1'$  و  $k_2'$  بدست می آیند و جابجایی و بار در هر فیبر مشخص می شود. جابجایی و بار برای فیبرهای مجاور ناحیه پلاستیک هنگامی که  $r=1$  است مطابق با معادلات (۱۴) و (۱۵) بصورت ذیل است:

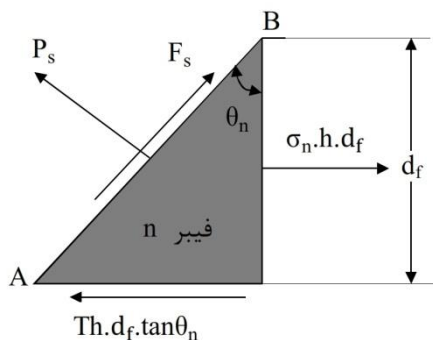
$$e_n = |r_1 + t - n|, \quad t = \frac{r-1}{2},$$

$$b = (r+1)\frac{d_m}{2} + r\frac{d_f}{2}, \quad (35)$$

$$r = 1, 3, 5, \dots$$

برای فیبرهای شکسته شده دسته دوم با توجه به شکل (۸) تعادل نیروها را به صورت ذیل می‌توان نوشت،

$$\frac{d\tilde{U}_n}{d\xi} = \frac{v_f}{1-v_f} \tau \delta \tan \theta_n, \quad n = r_1, r_2, \xi = \xi_n^0 \quad (36)$$



شکل (۸) توزیع نیرو در نوک فیبرهای دسته دوم در محل سوراخ.

### ۳-۵- پیوستگی بار و جابجایی در فیبرهای مجاور ناحیه پلاستیک در مرز ناحیه تسلیم $\xi = \alpha$

شرط مرزی سوم برای فیبرهای مجاور ناحیه پلاستیک در مرز ناحیه تسلیم ( $\xi = \alpha$ ) برقرار است و پیوستگی جابجایی و بار در این مرز است،

$$\tilde{U}_n(\xi) = U_n(\xi), \quad n = r_1, r_2, r_1 - 1, r_2 + 1, \xi = \alpha \quad (37)$$

$$\tilde{P}_n(\xi) = P_n(\xi), \quad n = r_1, r_2, r_1 - 1, r_2 + 1, \xi = \alpha \quad (38)$$

### ۴-۵- بار در فیبرها در بینهایت

شرط مرزی چهارم جواب‌های بدست آمده را محدود می‌کند این شرط مربوط به مقدار بار در فیبرها در بینهایت می‌باشد. بار کششی در تمام فیبرها وقتی  $x$  به سمت بینهایت میل می‌کند، به سمت بار کششی یکنواخت  $p$  (بار اعمالی بر ورق) میل می‌کند. به طوریکه برای تمام الیاف در حالت بی بعد داریم،

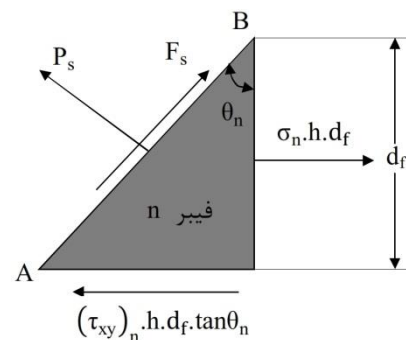
$$P_n(\xi \rightarrow \infty) = 1, \quad 1 \leq n \leq N \quad (39)$$

### ۲-۵- تعادل نیروها در محل برش فیبرهای بریده شده توسط سوراخ

دومین شرط مرزی در محل شکسته شدن فیبرها است، جاییکه فیبرها توسط سوراخ بریده شده‌اند. این فیبرها به دو دسته تقسیم می‌شوند. دسته اول فیبرهایی هستند که هر دو ماتریس اطراف آنها در منطقه الاستیک قرار دارند و دسته دوم فیبرهایی هستند که یکی از ماتریس‌های اطراف آنها در منطقه پلاستیک قرار دارند. برای فیبرهای شکسته شده دسته اول با توجه به شکل (۷) تعادل نیروها را به صورت ذیل می‌توان نوشت،

$$\frac{dU_n}{d\xi} + \frac{G}{E\delta} (U_{n-1} - U_n) \tan \theta_n = 0,$$

$$r_1 < n \leq \frac{N+1}{2}, \quad \xi = \xi_n^0 \quad (33)$$



شکل (۷) توزیع نیرو در نوک فیبرهای دسته اول در محل سوراخ.

سطح  $AB$  یک سطح آزاد بوده و مقدار نیروهای وارد بر این سطح برابر صفر است. با استفاده از شکل (۷) زاویه  $\theta_n$  را می‌توان از رابطه ذیل محاسبه کرد،

$$\tan \theta_n = \frac{a}{b} \times \left[ \frac{e_n(d_f + d_m)}{\sqrt{\left( (r+1)\frac{d_m}{2} + r\frac{d_f}{2} \right)^2 - (e_n(d_f + d_m))^2}} \right], \quad (34)$$

$$r_1 \leq n \leq r_2$$

که،



## ۶- تمرکز تنش

به طور طبیعی بیشترین تمرکز تنش در اولین فیبر سالم که پس از سوراخ قرار دارد به وقوع می‌پیوندد. لذا تمرکز تنش در  $\xi = 0$  در فیبر با شماره  $r_1 - 1$  عبارت است از،

$$SC = \frac{\bar{P}_{r_1-1}}{\left(P_{r_1-1}\right)_{\xi \rightarrow \infty}} \quad (40)$$

## ۷- نتایج و بحث روی آنها

با حل دستگاه معادلات ضرایب مجهول با یک کد کامپیوتری، معادلات جابجایی و بار در فیبرها بدست می‌آیند. همچنین از نتایج دیگر به تمرکز تنش در لبه سوراخ می‌توان اشاره کرد.

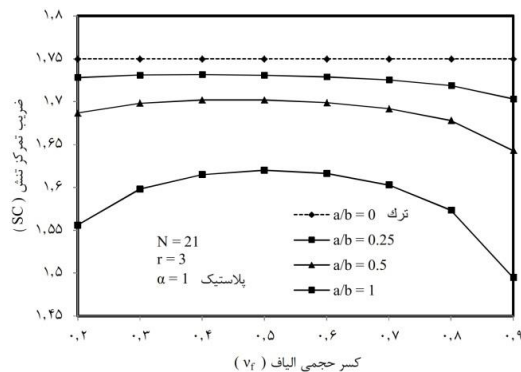
برای بدست آوردن نتایج تمرکز تنش در تک لایه مطابق مراجع [۹-۱۱]، خواص مکانیکی فیبر و ماتریس مطابق جدول (۱) در نظر گرفته می‌شوند. در ماده مرکب تک لایه با الیاف بلند نسبت مدول الاستیسیته فیبر به مدول برشی ماتریس  $(E_f/G)$  برابر ۵۰ است. این فرض در صورتی که ماتریس از جنس اپوکسی و فیبر از جنس شیشه باشد برقرار است.

جدول (۱) خواص مکانیکی مواد انتخاب شده در ماده مرکب تک لایه.

المان	مدول الاستیسیته (GPa)
ماتریس اپوکسی	۲/۸-۴/۲
فیبر شیشه (نوع S)	۸۵/۵

شکل (۹) تغییرات ضریب تمرکز تنش (SC) را بر حسب کسر حجمی فیبر در تک لایه  $(v_f)$  برای نسبت‌های مختلف شعاع‌های سوراخ  $(a/b)$  را در حالتی که  $N=21$ ،  $r=3$  و  $\alpha=1$  است نشان می‌دهد. همانطور که از نمودار مشخص است ضریب تمرکز تنش در ترک با افزایش کسر حجمی ثابت است اما برای سایر نسبت‌های مختلف شعاع‌های سوراخ  $(a/b)$  با افزایش کسر حجمی فیبر در تک لایه ابتدا افزایش

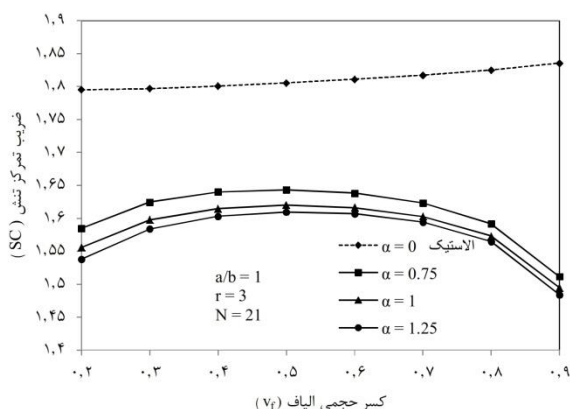
و سپس کاهش می‌یابد. ضریب تمرکز تنش ابتدا از حدود ۱/۵۵۶ در کسر حجمی ۰/۲ به حدود ۱/۶۲ در کسر حجمی ۰/۵ برای  $a/b=1$  می‌رسد و حدود ۴٪ افزایش داشته و سپس از حدود ۱/۶۲ در کسر حجمی ۰/۵ به حدود ۱/۴۹۴۸ در کسر حجمی ۰/۹ برای  $a/b=1$  می‌رسد و حدود ۷/۷٪ کاهش داشته است. همچنین با کاهش نسبت شعاع‌های سوراخ ضریب تمرکز تنش افزایش می‌یابد. ضریب تمرکز تنش با شعاع انحنای سوراخ نسبت عکس دارد، در ترک شعاع انحنا بینهایت کوچک بوده ولی در سوراخ با افزایش نسبت شعاع‌ها، شعاع انحنا افزایش می‌یابد. بنابراین، بیشترین ضریب تمرکز تنش در حالت ترک ( $a/b=0$ ) مشاهده می‌شود. ضریب تمرکز تنش از حدود ۱/۷۴۹۷ در ترک به حدود ۱/۴۹۴۸ در سوراخ با  $a/b=1$  در تک لایه با  $v_f=0/9$  رسیده است که حدود ۱۴/۶٪ کاهش داشته است.



شکل (۹) نمودار ضریب تمرکز تنش بر حسب کسر حجمی الیاف برای نسبت‌های مختلف شعاع‌های سوراخ در حالت پلاستیک.

شکل (۱۰) تغییرات ضریب تمرکز تنش (SC) را بر حسب کسر حجمی فیبر در تک لایه  $(v_f)$  برای تعداد الیاف مختلف (N) را در حالتی که  $a/b=1$ ،  $r=3$  و  $\alpha=1$  است نشان می‌دهد. همانطور که از نمودار مشخص است ضریب تمرکز تنش ابتدا با افزایش کسر حجمی فیبر در تک لایه افزایش و سپس کاهش می‌یابد. همچنین با افزایش تعداد فیبرهای تک لایه که نشان دهنده پهنای تک لایه است، به دلیل دور شدن سوراخ از لبه تک لایه، تمرکز تنش کاهش

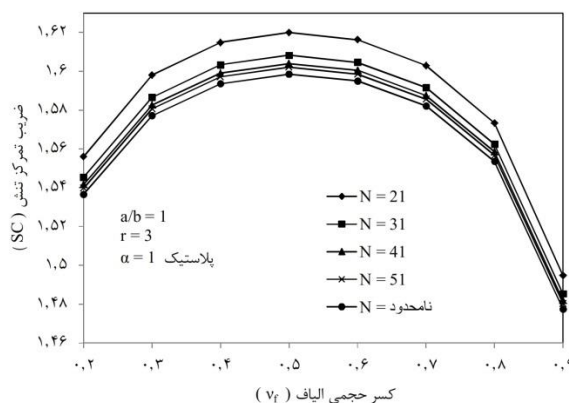
شکل (۱۲) تغییرات ضریب تمرکز تنش (SC) را بر حسب کسر حجمی فیبر در تک لایه ( $v_f$ ) برای طول های مختلف منطقه پلاستیک ( $\alpha$ ) را در حالتی که  $a/b=1$  و  $N=21$  و  $r=3$  است نشان می دهد. مشاهده می شود که با افزایش طول منطقه پلاستیک ضریب تمرکز تنش کاهش می یابد. دلیل این امر آن است که وجود ناحیه پلاستیک، بدلیل صرف انرژی در ناحیه تسلیم ماتریس است که باعث کاهش تمرکز تنش نسبت به حالت الاستیک می شود. ضریب تمرکز تنش از حدود  $1/8354$  در  $\alpha=0$  (حالت الاستیک) به حدود  $1/4843$  در  $\alpha=1/25$  در تک لایه با  $v_f=0/9$  رسیده است که حدود  $19\%$  کاهش داشته است. همچنین، ضریب تمرکز تنش در حالت الاستیک با افزایش کسر حجمی افزایش دارد ولی در حالت پلاستیک ابتدا افزایش و سپس کاهش می یابد.



شکل (۱۲) نمودار ضریب تمرکز تنش بر حسب کسر حجمی الیاف برای طول های مختلف منطقه پلاستیک.

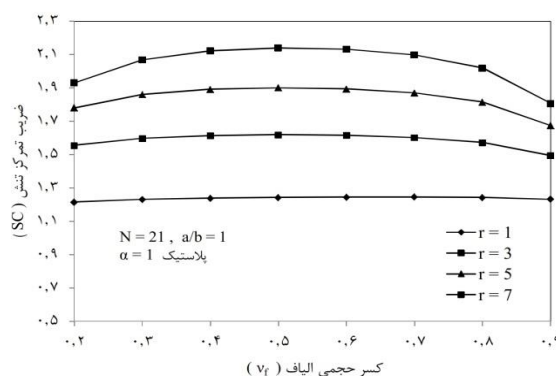
برای اثبات صحت کد نوشته شده و اعتبار سنجی نتایج، نمودار تمرکز تنش (SC) در اطراف یک سوراخ دایره ای ( $a/b=1$ ) بر حسب تعداد الیاف بریده شده ( $r$ ) در حالت الاستیک برای  $v_f=0/5$  و در حالتی که تعداد کل الیاف ( $N$ ) نامحدود می باشد بدست آمده و با نتایج مرجع [۳] مقایسه شده است این نمودار در شکل (۱۳) نشان داده شده است. نتایج مرجع [۳] مشابه نتایج این تحقیق با استفاده از تئوری

می یابد. ضریب تمرکز تنش از حدود  $1/4948$  در  $N=21$  به حدود  $1/4775$  در  $N \rightarrow \infty$  (تک لایه با عرض بینهایت) در تک لایه با  $v_f=0/9$  رسیده است و حدود  $1/2\%$  کاهش داشته است.



شکل (۱۰) نمودار ضریب تمرکز تنش بر حسب کسر حجمی الیاف برای تعداد الیاف مختلف در حالت پلاستیک.

شکل (۱۱) تغییرات ضریب تمرکز تنش (SC) را بر حسب کسر حجمی فیبر در تک لایه ( $v_f$ ) برای تعداد الیاف بریده شده ( $r$ ) مختلف را در حالتی که  $a/b=1$  و  $N=21$  و  $\alpha=1$  است نشان می دهد. همانطور که از نمودار مشخص است با افزایش تعداد فیبرهای بریده شده در تک لایه، به دلیل نزدیک شدن سوراخ به لبه تک لایه و پاره شدن فیبرهای بیشتر، تمرکز تنش افزایش می یابد. ضریب تمرکز تنش از حدود  $1/2434$  در  $r=1$  به حدود  $2/1403$  در  $r=7$  در تک لایه با  $v_f=0/5$  رسیده است که حدود  $72\%$  افزایش داشته است.



شکل (۱۱) نمودار ضریب تمرکز تنش بر حسب کسر حجمی الیاف برای تعداد الیاف بریده شده مختلف در حالت پلاستیک.

۴- با افزایش تعداد فیبرهای تک لایه که نشان دهنده پهنای تک لایه است، به دلیل دور شدن سوراخ از لبه تک لایه، تمرکز تنش کاهش می‌یابد.

۵- با افزایش تعداد فیبرهای بریده شده در تک لایه، به دلیل نزدیک شدن سوراخ به لبه تک لایه و پاره شدن فیبرهای بیشتر، تمرکز تنش افزایش می‌یابد.

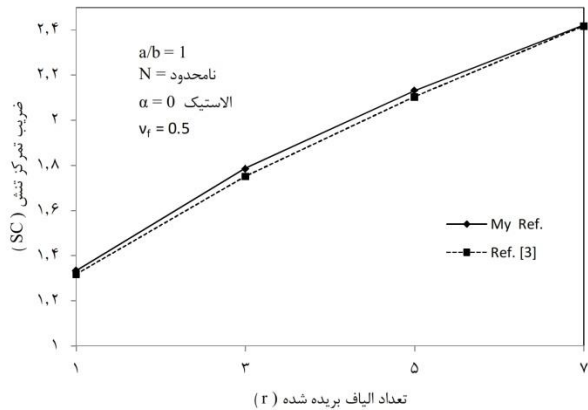
### تشکر و قدردانی

این مقاله مستخرج از طرح پژوهشی است و در این بخش جا دارد از حمایت های مالی دانشگاه آزاد اسلامی واحد اهواز تشکر و قدردانی شود.

### مراجع:

- [1] Hedgepeth J., Van Dyke P., Local Stress Concentration in Imperfect Filamentary Composite Materials, *Journal of Composite Materials*, vol. 1, 1967, pp. 294 - 309.
- [2] Hedgepeth J., Van Dyke P., Stress Concentration from Single Filament Failure in Composite Materials, *Textile Research Journal*, vol. 39, 1969, pp. 618 - 626.
- [3] Franclin H.G., Hole Stress Concentration in Filamentary Structures, *Fibers Science and Technology*, vol. 2, 1970.
- [4] Ko W.L., Nagy A., Francis P.H., Lindholm U. S., Crack Extension in Filamentary Materials, *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 8, 1976, pp. 411- 424.
- [5] Rossetos J.N., Shishesaz M., Stress Concentration in Fiber Composite Sheets Including Matrix Extension, *Journal of Applied Mechanics*, vol. 54, 1987, pp. 723-724.
- [6] Landis C.M, McMeeking R.M., A Shear-Lag Model for a Broken Fiber Embedded in a Composite with a Ductile Matrix, *Composite Science and Technology*, vol. 59, 1999, pp. 447-457.
- [7] Sayman O., Aksoy S., Elastic-Plastic Stress Analysis of Simply Supported and Clamped Aluminum Metal-Matrix Laminated Plates with

شیرلنگ بدست آمده است اما اثر تغییر شکل پلاستیک در این مرجع در نظر گرفته نشده است. مقایسه نتایج نشان می‌دهند که خطا بسیار ناچیز و قابل صرف نظر است.



شکل (۱۳) نمودار ضریب تمرکز تنش بر حسب تعداد الیاف بریده شده و مقایسه نتایج با مرجع [۳].

### ۸- نتیجه گیری

بر اساس نتایج بدست آمده در این پژوهش نتیجه می‌شود که:

۱- ضریب تمرکز تنش در اطراف ترک به دلیل شعاع انحنا خیلی کوچک با افزایش کسر حجمی ثابت است و تغییر نمی‌کند.

۲- مشاهده می‌شود که با افزایش طول منطقه پلاستیک ضریب تمرکز تنش کاهش می‌یابد. علت این امر آن است که وجود ناحیه پلاستیک، بدلیل صرف انرژی در ناحیه تسلیم ماتریس است که باعث کاهش تمرکز تنش نسبت به حالت الاستیک می‌شود.

۳- با کاهش نسبت شعاع‌های سوراخ ضریب تمرکز تنش افزایش می‌یابد. ضریب تمرکز تنش با شعاع انحنا سوراخ نسبت عکس دارد، در ترک شعاع انحنا بینهایت کوچک بوده ولی در سوراخ با افزایش نسبت شعاع‌ها، شعاع انحنا افزایش می‌یابد. بنابراین، بیشترین ضریب تمرکز تنش در حالت ترک ( $a/b=0$ ) مشاهده می‌شود.

a Hole, *Composite Structures*, vol. 53, 2001, pp.355-364.

- [8] Miserez A., Rossoll A., Mortensen A., Investigation of Crack-tip Plasticity in High Volume Fraction Particulate Metal Matrix Composite, *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 71, 2004, pp. 2385-2406.
- [9] Peters, S.T., Handbook of Composite, London: Chapman & Hall, 1998.
- [10] ASM International Handbook Committee, Engineered Materials Handbook, Composite, Vol. 4, U. S., 1987.
- [11] Lubin, G., Handbook of Composite Materials, Van Nostrand Reinhold Company, 1982.

Archive of SID