

## پایداری دینامیکی نانو تیر مدرج تابعی بر اساس تئوری تیموشنکو

شهاب صفاری<sup>۱</sup>، محمدهاشمیان<sup>۲</sup>

\* نویسنده مسئول: hashemian@iauksh.ac.ir

### چکیده

### واژه‌های کلیدی

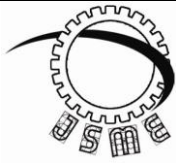
پایداری دینامیکی - مواد مدرج تابعی - تیموشنکو - نانو تیر - اثر سطح.

این مقاله به بررسی رفتار پایداری دینامیکی نانو تیر ساخته شده از مواد مدرج تابعی تحت بار دینامیکی و گرادیان حرارتی می‌پردازد. نانو تیر در محیط پاسترناک بوده و برای مدل‌سازی آن از تئوری تیر تیموشنکو استفاده شده است. خواص مواد از قبیل مدول یانگ، نسبت پواسون، چگالی، تنش پسماند سطح، مدول برشی و مدول سطح به صورت تابع توانی در نظر گرفته شده‌اند. همچنین در این روش اثرات سطح بر روی حجم نیز در نظر گرفته شده است. با استفاده از اصل همیلتون و تئوری ارینگن معادلات حرکت برای نانو تیر باتکیه گاه ساده استخراج شده است. سپس بار بحرانی و فرکانس طبیعی تعیین گردیده و در نهایت نواحی ناپایداری دینامیکی رسم شده است. نتایج نشان می‌دهد که با افزایش پارامترهای اثر مقیاس کوچک، تنش پسماند سطح، نسبت طول به ضخامت و بار استاتیکی، ناحیه ناپایداری دینامیکی به سمت فرکانس تحریک کمتر باعرض کمتر حرکت می‌نماید. در حالی که با افزایش ثابت محیط، فرکانس تحریک افزایش می‌یابد. همچنین تغییرات ناحیه ناپایداری دینامیکی در دو حالت دما بالا و دما پایین مورد بررسی قرار گرفته است.

تاریخ ارسال: ۱۳۹۳/۰۷/۲۶  
تاریخ بازنگری: ۱۳۹۳/۱۰/۲۲  
تاریخ پذیرش: ۱۳۹۳/۱۲/۲۵

۱- دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشکده مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد خمینی شهر

۲- استادیار، دانشکده مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد خمینی شهر



Journal of  
Solid Mechanics  
in Engineering

## Journal of Solid Mechanics in Engineering

<http://jsme.iaukhsh.ac.ir>



### Dynamic Stability of Nano FGM Beam Using Timoshenko Theory

Shahab saffari<sup>1</sup>, Mohamad Hashemian<sup>2</sup>

\* Corresponding Author: hashemian@iaukhsh.ac.ir

#### Abstract:

Based on the nonlocal Timoshenko beam theory, the dynamic stability of functionally graded (FG) nanobeams under axial load is studied in thermal environment, with considering surface effect. It is used power law distribution for FGM and the surface stress effects are considered based on Gurtin-Murdoch continuum theory. Using Von Karman geometric nonlinearity, governing equations are derived based on Hamilton's principle. The developed nonlocal models have the capability to interpret small scale effects. Winkler and Pasternak types elastic foundation are employed to represent the interaction of the nano FG beam and the surrounding elastic medium. A parametric study is conducted to investigate the influences of the static load factor, temperature change, nonlocal elastic parameter, slenderness ratio, surface effect and springs constant of the elastic medium on the dynamic stability characteristics of the FG beam, with simply-supported boundary conditions. It is found that the difference between instability regions predicted by local and nonlocal beam theories is significant for nanobeams with lower aspect ratios. Moreover, it is observed that in contrast to high temperature environments, at low temperatures, increasing the temperature change moves the origins of the instability regions to higher excitation frequencies and leads to further stability of the system at lower excitation frequencies, considering surface stress effect shifts the FG beam to higher frequency zone.

#### Key words:

Dynamic stability  
Surface stress effects  
Nanobeams  
Functionally graded materials

1- MSc Student, Department of Mechanical Engineering, Islamic Azad University, Khomeinishar Branch, Esfahan, Iran.

2- Assistant Prof., Department of Mechanical Engineering, Islamic Azad University, Khomeinishar Branch, Esfahan, Iran.

## ۱- مقدمه

که در تیر یکنواخت دو سر آزاد با افزایش نیروی محوری فرکانس ارتعاشات عرضی تیر همواره کاهش می‌یابد و پدیده فلاتر در نیروهای چندین برابر نیروی کماتش تیر مشاهده می‌شود در حالی که برای تیر غیر یکنواخت دو سر آزاد هر دو پدیده فلاتر و واگرایی ممکن است در تیر اتفاق افتد [۳]، سال ۲۰۱۲ انصاری و همکارانش با استفاده از تئوری ارینگن پایداری دینامیکی نانولوله کربن تک جداره را بررسی کردند و فهمیدند که دامنه ناحیه ناپایداری برای مدل غیر موضعی تیر تیموشنکو بزرگتر از مدل غیر موضعی تیر اویلر برنولی است [۴]، در سال ۲۰۱۳ حسینی هاشمی و ناظم نژاده ارتعاشات آزاد غیرخطی سطح مؤثر نانوتیرمدرج تابعی را بررسی کردند آنها با استفاده از تئوری تیر اویلر- برنولی که شامل تئوری هندسی غیرخطی فون کارمن بود به این نتیجه رسیدند که با افزایش ابعاد نانوتیرمدرج تابعی مانند نسبت طول یا ضخامت، اثرات سطح مؤثر روی فرکانس نرمال طبیعی کاهش می‌یابد و همچنین مشاهده شد که با افزایش شاخص کسر حجمی اثرات سطح مؤثر روی فرکانس نرمال طبیعی کاهش می‌یابد علاوه بر این سطح مؤثر باعث یک افزایش در فرکانس طبیعی اصلی در نسبت دامنه کم می‌شود [۵]، الناهر و همکارانش در سال ۲۰۱۳ استاتیک و کماتش نانوتیر موادمدرج تابعی بر اساس مدل سازی تیر تیموشنکو را بررسی کردند و نتایج بدست آمده نشان می‌دهد که مشخصات مواد توزیعی می‌تواند تغییرات حداکثر کجی یا انحراف را و همچنین بیشترین بار کماتش بحرانی را کنترل کند. همچنین پارامتر غیرموضعی اثری قابل توجه بر روی انحراف و بار کماتش دارد [۶]، در تحقیقات گذشته پایداری دینامیکی برای نانوتیر مدرج تابعی براساس تئوری تیموشنکو انجام نگرفته است. در این مقاله پایداری دینامیکی نانو تیر مدرج تابعی براساس تئوری تیموشنکو در محیط پاسترنک بادر نظر گرفتن اثرات سطح و گرادیان

کاربرد کامپوزیت و نانو کامپوزیت‌ها در طراحی قطعاتی با دوام و استحکام طولانی می‌باشد، یعنی محیط‌های چند فازی که دارای تنش‌های بالا، فرایند فرسایش بیشتر می‌باشند. از آن جمله می‌توان به قطعات تحت برخورد و ضربه مثل ضد گلوله‌ها، قطعات تحت حرکت دوار و فرسایش مثل مته- های حفاری در چاه‌های نفت و گاز اشاره کرد به دنبال گسترش روزافزون استفاده از مواد مرکب در صنایع مختلف، ایده ساخت نسل جدیدی از مواد کامپوزیتی موسوم به مواد مدرج تابعی<sup>۵</sup> برای اولین بار در سال ۱۹۸۴ در ژاپن مطرح شد. موادمدرج تابعی مواد مرکبی هستند که در آنها خواص میکروسکوپییک ماده با توزیع غیریکنواخت، هموار و پیوسته‌ای از ترکیب مواد سازنده اصلی آن، تغییر می‌کند. بنابراین، مواد مذکور در دسته‌بندی مواد غیرهمگن قرار می‌گیرند و معمولاً ایزوتروپیک فرض می‌شوند. از مطالعاتی که در این زمینه صورت گرفته می‌توان به موارد زیر اشاره کرد. در سال ۲۰۰۳ توسط پدیسون و همکاران تئوری غیر موضعی الاستیسیته برای مواد با ساختار نانو برای اولین بار بکار برده شد. نتایج آنها نشان می‌دهد که تئوری غیرموضعی ارینگن در مقیاس نانو قابل قبول است اما در سیستم‌های میکروالکترومکانیک غیر قابل قبول است [۱]، در سال ۲۰۱۱ قربانپور و همکارانش تأثیر حرارت بر کماتش پیچشی نانو لوله کربنی دو جداره تحت بستر الاستیک، نوع پاسترنک را بررسی کردند که نشان داد بار کماتش در مودهای طولی پایین به مراتب بیشتر از بار کماتش در مودهای بالاتر است [۲]، الهامی وزینلی در همان سال تحلیل پایداری دینامیکی یک تیر دو سر آزاد تحت نیروی تعقیب کننده ناپایستار را بررسی کردند، نتایج حاصل نشان می‌دهد

میدان جابجایی در راستای محور  $x$

$$U_x(x, z) = u(x, t) - z \phi(x, t) \quad (8)$$

میدان جابجایی در راستای محور  $y$

$$U_y(x, z) = 0 \quad (9)$$

میدان جابجایی در راستای محور  $z$

$$U_z(x, z) = w(x, t) \quad (10)$$

## ۲-۲- روابط کرنش جابجایی بر اساس تئوری فون

### کارمن

معادلات بر این اساس عبارتند از [۶]:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} - z \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \quad \text{کرنش محوری} \quad (11)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} - \phi \quad \text{کرنش برشی} \quad (12)$$

## ۲-۳ روابط تنش بالک و سطح

این روابط عبارتند از [۵, ۷]:

$$\sigma_{xx}^s = E^s(z) \varepsilon_{xx} + \tau^s(z) \quad (13)$$

$$\sigma_{xz} = k_s G(z) \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \phi \right) \quad (14)$$

$$\sigma_{xx} = E(z) \varepsilon_{xx} - \frac{E(z)}{1 - \nu(z)} \alpha_x T \quad (15)$$

## ۲-۴ بدست آوردن نیروی محوری برای بالک و سطح

رابطه نیروی محوری به صورت زیر می باشد [۷]:

$$N_{xx} = A_{xx} \left( b \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{b}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right) - B_{xx} b \frac{\partial \phi}{\partial x} - C_{xx} b \alpha_x T \quad (16)$$

$$+ A^s \left( \frac{\partial u}{\partial x} - z \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right) + B^s$$

حرارتی، در نهایت استخراج معادلات حاکم با استفاده از

تئوری ارینگن واصل همیلتون و سپس به بررسی پایداری دینامیکی می پردازیم.

## ۲- روابط حاکم

مدل های مختلف تحلیلی برای پیدا کردن تابع مناسبی که

بتواند خواص را در جهت  $z$  ضخامت توصیف کند موجود

میباشد که یکی از آنها استفاده از قانون تابع توانی (power

law) به صورت زیر می باشد.

$$p(z) = (p_c - p_m) \left( \frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^N + p_m \quad (1)$$

که  $p(z)$  می تواند هر کدام از خواص ماده را شامل

شود مانند چگالی، مدول یانگ، نسبت پواسان و مدول برشی

نیز به ترتیب بیانگر مقادیر خواص تعریف شده در لایه بالایی

و لایه پایینی تیر می باشد  $N$  بیان کننده پارامتر متغیری است

که مقدار آن انحنا را مشخص می کند.

$$E(z) = (E_c - E_m) \left( \frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^N + E_m \quad (2)$$

$$\nu(z) = (\nu_c - \nu_m) \left( \frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^N + \nu_m \quad (3)$$

$$\rho(z) = (\rho_c - \rho_m) \left( \frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^N + \rho_m \quad (4)$$

$$G(z) = (G_c - G_m) \left( \frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^N + G_m \quad (5)$$

$$E^s(z) = (E_c^s - E_m^s) \left( \frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^N + E_m^s \quad (6)$$

$$\tau^s(z) = (\tau_c^s - \tau_m^s) \left( \frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^N + \tau_m^s \quad (7)$$

## ۲-۱- میدان جابجایی بر اساس تئوری تیموشکو:

معادلات میدان جابجایی به صورت زیر می باشد [۶]:

$$Q_x = k_s b \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \phi \right) (G_c - G_m) \frac{h}{N+1}$$

$$+ k_s b G_m h \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \phi \right) + 2b \tau^s \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{2h}{N+1} (\tau_c^s - \tau_m^s) \frac{\partial w}{\partial x} + 2h \tau_m^s \frac{\partial w}{\partial x} \quad (23)$$

#### ۲-۷- محاسبه انرژی کرنشی بر اساس تئوری تیموشنکو

انرژی کرنشی برای هر لایه نانوتیرمدرج تابعی مدل شده با تئوری تیموشنکو و شکل تغییراتی آن بفرم زیر است [۶]:

$$U = \int_0^L N \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) - M \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \quad (24)$$

$$+ Q \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \phi \right) + \frac{1}{2} N \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx$$

حال مقادیر  $M$ ,  $N$  و  $Q$  را که بدست آورده بودیم در معادله بالا جایگزین می کنیم.

#### ۲-۸- محاسبه انرژی جنبشی بر اساس تئوری تیموشنکو:

$$k = \int_{\Omega} \frac{\rho}{2} \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial t} dV \quad (25)$$

که پس در نهایت انرژی جنبشی تیر به صورت زیر بدست می آید:

$$k = \int_0^L \left[ \frac{b}{2} I_r \left( \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right) \right] \quad (26)$$

$$- \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right) \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) b I_r + \frac{b}{2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 I_r dx$$

که در رابطه (۲۶)

$$[I_r, I_r, I_r] = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [1, Z, Z^2] \rho(z) dz \quad (27)$$

#### ۲-۹- بدست آوردن انرژی پتانسیل:

با توجه به محیط پاسترناک داریم [۹]:

ضرایب معادله بالا به شکل زیر تعریف می گردند:

$$A_{xx} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} E(z) dz \quad (17)$$

$$B_{xx} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z E(z) dz \quad (18)$$

$$C_{xx} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{E(z)}{1-2\nu(z)} dz \quad (19)$$

$$A^s = \oint_{\Gamma} E^s(z) ds \quad (20)$$

$$B^s = \oint_{\Gamma} \tau^s(z) ds \quad (21)$$

#### ۲-۵- بدست آوردن نیروی گشتاور خمشی برای بالک

وسطح

بدست آوردن نیروی گشتاور خمشی برای بالک و سطح [۷]:

$$M_{xx} = B_{xx} \left( b \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{b}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right) - D_{xx} b \frac{\partial \phi}{\partial x} + F_{xx} b \alpha_x T \quad (22)$$

$$- \frac{h^2 b}{2} E^s(z) \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{h b^2}{2(N+1)} \frac{\partial \phi}{\partial x} (E_c^s - E_m^s) - \frac{h b^2}{2} \frac{\partial \phi}{\partial x} E_m^s$$

که در آن مقادیر  $D_{xx}$  و  $F_{xx}$  به صورت زیر تعریف می شوند.

$$D_{xx} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2 E(z) dz$$

$$F_{xx} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{E(z)}{1-2\nu(z)} z dz$$

#### ۲-۶- بدست آوردن نیروی برشی برای سطح و بالک

بر اساس تئوری تیموشنکو داریم [۸]:

$$\begin{aligned}
 & k_s b \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) (G_c - G_m) \frac{h}{N+1} \\
 & + k_s b G_m h \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \gamma b \tau^s \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\
 & + \frac{\gamma h}{N+1} (\tau_c^s - \tau_m^s) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \gamma h \tau_m^s \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\
 & + \mu^r (bI_r \frac{\partial^2 w}{\partial x^2 \partial t^2} \\
 & - (b+h)(k_w \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - k_G \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}) \\
 & - \frac{\partial^r}{\partial x^r} (N \frac{\partial w}{\partial x})) \\
 & = bI_r \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} (N (\frac{\partial w}{\partial x})) \\
 & - (b+h)(k_w w - k_G \frac{\partial^2 w}{\partial x^2})
 \end{aligned} \tag{۳۶}$$

$$\begin{aligned}
 & B_{xx} (b \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{b}{\gamma} \frac{\partial}{\partial x} (\frac{\partial w}{\partial x}))^r \\
 & - D_{xx} b \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{h^2 b}{\gamma} E_{(z)}^s \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \\
 & - \frac{b^2 h}{\gamma(N+1)} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} (E_c^s - E_m^s) \\
 & - \frac{b^2 h}{\gamma} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} E_m^s \\
 & + \mu^r b (I_r \frac{\partial^2 u}{\partial x^2 \partial t^2} - I_r \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2 \partial t^2}) \\
 & - k_s b (\frac{\partial w}{\partial x} - \phi) (G_c - G_m) \frac{h}{N+1} \\
 & - k_s b G_m h (\frac{\partial w}{\partial x} - \phi) - \gamma b \tau_{(z)}^s (\frac{\partial w}{\partial x}) \\
 & - \frac{\gamma h}{N+1} (\tau_c^s - \tau_m^s) \frac{\partial w}{\partial x} - \gamma h \tau_m^s \frac{\partial w}{\partial x} \\
 & = -bI_r \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + bI_r \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}
 \end{aligned} \tag{۳۷}$$

معادلات (۳۷)، (۳۸) و (۳۹) معادلات حرکت غیر موضعی حاکم می‌باشند. برای ساده‌تر شدن روابط بالا از بی‌بعدسازی پارامترها استفاده می‌کنیم:

$$F_m = k_w w - k_G \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \tag{۲۸}$$

$$V = \frac{1}{2} \int_0^L -F_m w 2(b+h) dx \tag{۲۹}$$

۲-۱۰- بدست آوردن معادلات حرکت با استفاده از اصل همپلتون:

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta U + \delta V - \delta T) dt = 0 \tag{۳۰}$$

با توجه به رابطه بالا معادلات حرکت کلاسیک به شکل زیر استخراج می‌گردد.

$$\frac{\partial N}{\partial X} + bI_r \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - bI_r \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \tag{۳۱}$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} (N (\frac{\partial w}{\partial x})) + bI_r \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \\
 & - (b+h)(k_w w - k_G \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}) = 0
 \end{aligned} \tag{۳۲}$$

$$\frac{\partial M}{\partial x} - Q + bI_r \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - bI_r \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \tag{۳۳}$$

۲-۱۱- استفاده از تئوری ارینگن برای بدست آوردن معادلات غیر موضعی

که رابطه آن به شکل زیر می‌باشد [۷]:

$$(1 - \mu^r \frac{\partial^r}{\partial x^r}) \sigma_{ij}^{nl} = \sigma_{ij}^l \tag{۳۴}$$

$$\mu = e.a$$

با استفاده از تئوری ارینگن معادلات حرکت غیر موضعی

حاکم را بدست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}
 & A_{xx} (b \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{b}{\gamma} \frac{\partial}{\partial x} (\frac{\partial w}{\partial x}))^r \\
 & - B_{xx} b \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \\
 & + A^s (\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial}{\partial x} (\frac{\partial w}{\partial x}))^r \\
 & + \mu^r (-bI_r \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2 \partial t^2} + bI_r \frac{\partial^2 u}{\partial x^2 \partial t^2}) \\
 & = -bI_r \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + bI_r \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}
 \end{aligned} \tag{۳۵}$$

۳-تحلیل مسئله:

برای یافتن پاسخ معادلات (۴۰)، (۴۱) و (۴۲) بر اساس تئوری تیموشنکو داریم [۴]:

$$M_m \ddot{d} + \{k_e - p_{(t)} k_g\} d = 0 \quad (۴۳)$$

در رابطه (۴۳)،  $M_m$ ،  $k_e$  و  $k_g$  بترتیب ماتریس جرم، ماتریس سختی و ماتریس هندسی می‌باشند که به شکل زیر تعریف می‌گردند:

$$k_e = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \cdot & \alpha_4 & \alpha_5 \end{pmatrix}, M_m = \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 \end{pmatrix} \quad (۴۴)$$

$$k_g = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \alpha_6 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

که مقادیر  $\alpha_1$  تا  $\alpha_6$  در پیوست آورده شده است.

۳-۱- محاسبه فرکانس طبیعی:

برای محاسبه فرکانس طبیعی داریم [۴]:

$$(k_e - w^2 M) \tilde{d} = 0 \quad (۴۵)$$

که در نهایت فرکانس طبیعی به شکل زیر بدست می‌آید:

$$\alpha_1 \alpha_2 \alpha_5 - \alpha_1 \alpha_2 w^2 - \alpha_1 \alpha_3 w^2 + \alpha_2 w^4 - \alpha_1 \alpha_4 \alpha_6 - \alpha_1 \alpha_5 w^2 + \alpha_2 w^4 + \alpha_3 w^4 + \alpha_5 w^4 + w^6 + \alpha_4 \alpha_6 w^2 = 0 \quad (۴۶)$$

۳-۲- محاسبه نیروی بحرانی:

برای محاسبه نیروی بحرانی بحرانی داریم [۴]:

$$(k_e - p_{cr} k_g) d = 0 \quad (۴۷)$$

که با حل مقدار ویژه معادله (۴۷) بار بحرانی نانوتیر مدرج

تابعی براساس تئوری تیر تیموشنکو به شکل زیر می‌باشد:

$$\tau = t \sqrt{\frac{E_c}{\rho_c} L^{-1}}, \Phi = \phi, U = \frac{u}{L}, W = \frac{w}{h}$$

$$X = \frac{x}{L}, a_{xx} = \frac{A_{xx}}{E_c L}, b_{xx} = \frac{B_{xx}}{L^2 E_c} g_c = \frac{G_c}{E_c}$$

$$i_x = \frac{I_x}{\rho_c L}, i_y = \frac{I_y}{\rho_c L^2}, i_z = \frac{I_z}{h \rho_c L^2}$$

$$\tau_{ss} = \frac{\tau_s}{E_c L}, \tau_{ssc} = \frac{\tau_{sc}}{E_c b}, \tau_{ssm} = \frac{\tau_{sm}}{E_c b} \quad (۳۸)$$

$$k_g = \frac{k_G}{E_c L}, M = \frac{p}{b L E_c}, e_{cs} = \frac{E_{cs} b}{E_c L^2}$$

$$E_{ss} = \frac{E_s}{E_c b}, d_{xx} = \frac{D_{xx}}{E_c h L^2}, e_{zs} = \frac{E_z^s h}{E_c L^2}$$

$$\beta = \frac{h}{L}, \lambda = \frac{\mu}{L}, e_z = \frac{E_z}{E_c}, \gamma = \frac{L}{b}, \zeta = \frac{b}{h}$$

$$k_{\sigma} = \frac{k_w L}{E_c}, a_s = \frac{A_s}{E_c h L}, g_m = \frac{G_m}{E_c}$$

۲-۱۲- شرایط مرزی:

شرایط مرزی برای نانوتیر مدرج تابعی با تکیه گاه ساده به شکل زیر تعریف می‌گردد:

$$U(X, \tau) = T(\tau) \sin(m \pi X)$$

$$\phi(X, \tau) = \Omega(\tau) \cos(m \pi X) \quad (۳۹)$$

$$W(X, \tau) = \Lambda(\tau) \sin(m \pi X)$$

پس از اعمال شرایط مرزی بر معادلات حاکم و ساده سازی،

شکل کلی معادلات به صورت زیر می‌باشد:

$$\frac{d^4}{d\tau^4} T(\tau) + \left( -\frac{1}{4} a_{xx} \zeta m^2 \pi^2 - \frac{1}{4} a_s m^2 \pi^2 \right) T(\tau) - \frac{1}{4} \lambda^2 \zeta i m^2 \pi^2 - \frac{1}{4} \zeta i = 0 \quad (۴۰)$$

$$\frac{d^4}{d\tau^4} \Lambda(\tau) + \frac{(o1) \Lambda(\tau)}{A_1} + \frac{(o2) \Lambda(\tau)}{A_1} + \frac{C_1 \Omega(\tau)}{A_1} = 0 \quad (۴۱)$$

$$\frac{C_2 \Lambda(\tau)}{A_1} + \frac{B \Omega(\tau)}{A_1} + \frac{d^4}{d\tau^4} \Omega(\tau) = 0 \quad (۴۲)$$

ضرایب معادلات (۴۱) و (۴۲) در ضمیمه آورده شده است.

طول نانوتیر مورد نظر برابر است با  $L = 1.0 \mu m$  که همچنین ضخامت و عرض تیر برابر است با  $b = h = .1L$

می‌باشد. ضریب تصحیح برش  $k_s = .563$ ، ضریب انبساط گرمایی در حالت دما پایین  $\alpha_x = -1.6 \times 10^{-6} k^{-1}$ ، در حالت دما بالا  $\alpha_x = 1.1 \times 10^{-6} k^{-1}$ ، پارامترهایی مثل پارامتر مقیاس کوچک، تغییر دما، بار محوری استاتیکی و ثابت فنر تاثیر گذر بر پایداری ناحیه دینامیکی می‌باشند. شکل (۱) نشان می‌دهد اثر پارامتر مقیاس کوچک بر روی ناحیه ناپایداری برای یک نانوتیر مدرج تابعی بر اساس تئوری تیموشنکو، همان گونه که در شکل نشان داده شده است، با افزایش  $e.a$  ناحیه ناپایداری حرکت می‌کند به سمت ناحیه‌هایی با فرکانس تحریک کمتر و همچنین بزرگی ناحیه ناپایداری نانوتیر مدرج تابعی در یک بار دینامیکی مشخص کاهش می‌یابد. شکل (۲) اثر ثابت فنری را بر روی ناحیه ناپایداری بر اساس تئوری تیموشنکو نشان می‌دهد. در بازه بار دینامیکی داده شده با افزایش ثابت فنر منجر به افزایش فرکانس تحریک گردیده، همچنین وسعت ناحیه ناپایداری با افزایش ناحیه ناپایداری افزایش می‌یابد.

شکل (۳) اثر بار استاتیکی  $\alpha$ ، را روی ناحیه ناپایداری برای نانوتیر مدرج تابعی نشان می‌دهد همانگونه که از شکل مشخص است با افزایش بار استاتیکی ناحیه ناپایداری تمایل به وسیع و نزدیک شدن به مرکز مختصات دارد. باید توجه کرد که در  $\alpha = 0$  هیچ بار استاتیکی محوری وجود ندارد.

$$p_{cr} = \frac{\alpha_2}{\alpha_6} - \frac{\alpha_3 \alpha_4}{\alpha_5 \alpha_6} \quad (48)$$

### ۳-۳- پایداری دینامیکی:

ابتدا بار زمانی تحریک را به صورت زیر تعریف می‌کنیم [۴]:

$$p(\tau) = [\alpha + \beta \cos(\theta\tau)] p_{cr} \quad (49)$$

که در رابطه بالا  $\alpha$  و  $\beta$  به ترتیب بار استاتیکی و دینامیکی می‌باشند. همچنین،  $\theta = \hat{\theta} L \sqrt{\frac{\rho}{E}}$  است که  $\hat{\theta}$  فرکانس تحریک می‌باشد. حال اگر معادله (۴۸) را در معادله (۴۳) جایگزین کنیم داریم:

$$M_m \ddot{d} + \{k_e - [(\alpha + \beta \cos(\theta\tau)) p_{cr}] k_g\} d = 0 \quad (50)$$

که در نهایت جواب معادله بالا به شکل زیر در نظر می‌گیریم [۱۰]:

$$\det \left| k_e - p_{cr} \left( \alpha \pm \frac{\beta}{r} \right) k_g - \frac{\theta^r}{f} M \right| = 0 \quad (51)$$

که با حل رابطه (۵۱) دو معادله درجه شش بدست می‌آید، که منیم ریشه این دو معادله فرکانس تحریک می‌باشند.

### ۴- نتایج:

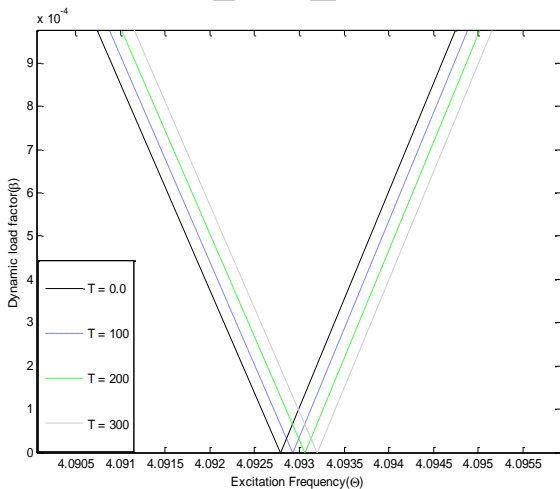
خواص نانوتیر مدرج تابعی به صورت جدول شماره (۱) در نظر گرفته شده است.

جدول (۱) مقادیر عددی خواص نانوتیر مدرج تابعی

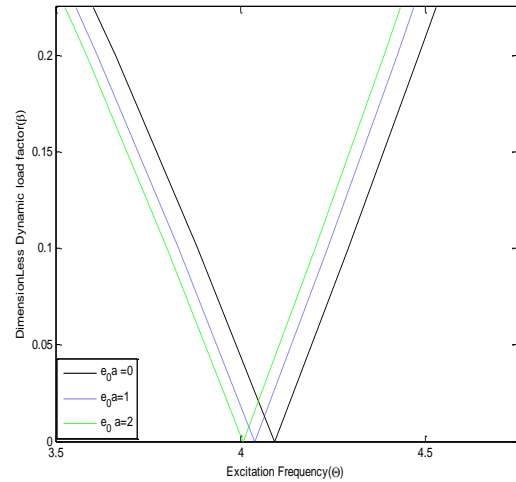
	سرامیک	فلز
	Si	Al
E	۲۱۰ Gpa	۷۰ Gpa
E <sup>s</sup>	-۱۰,۶۵۴۳ N/m	۵,۱۸۸۲ N/m
$\rho$	۲۳۷۰ kg/m <sup>3</sup>	۲۷۰۰ kg/m <sup>3</sup>
$\nu$	۰,۲۴	۰,۳
$\tau^s$	۰,۶۰۴۸ N/m	۰,۹۱۰۸ N/m



شکل (۴) ناحیه ناپایداری دینامیکی نانوتیرمدرج تابعی برای مقادیر مختلف دما در دو حالت دما بالا و دما پایین بر اساس تئوری تیموشنکو نشان می دهد. در حالت دمابالای محیط، افزایش در تغییر دما به دلیل بارحرارتی منجر به نیروی منتهجه منفی محوری می شود. بنابراین، افزایش تغییرات دما باعث حرکت ناحیه ناپایداری به سمت فرکانس تحریک کمتر و کاهش پهنای ناحیه ناپایداری نانوتیرمدرج تابعی در یک باردینامیکی مشخص می شود. در نتیجه سیستم تمایل به ناپایداری دارد در دمای بالا محیط زمانی که تغییرات دما افزایش می یابد. به عبارت دیگر در دمای پایین محیط، افزایش تغییرات دماباعث حرکت ناحیه ناپایداری به فرکانس تحریک بالاتر و منجر به پایداری بیشتر در فرکانس تحریک پایین تر می شود. همچنین می توان دریافت که وسعت ناحیه ناپایداری در حالت دما پایین محیط بزرگتر از حالت دما بالای محیط است. شکل (۵) نسبت طول به ضخامت را نشان می دهد، از آنجایی که سطح مقطع تیر مربعی شکل می باشد عرض وضخامت باهم برابر می باشند همان طور که در شکل مشخص است با افزایش طول نسبت به ضخامت مقدار فرکانس تحریک کاهش می یابد و پهنای ناحیه ناپایداری کوچکتر می شود.

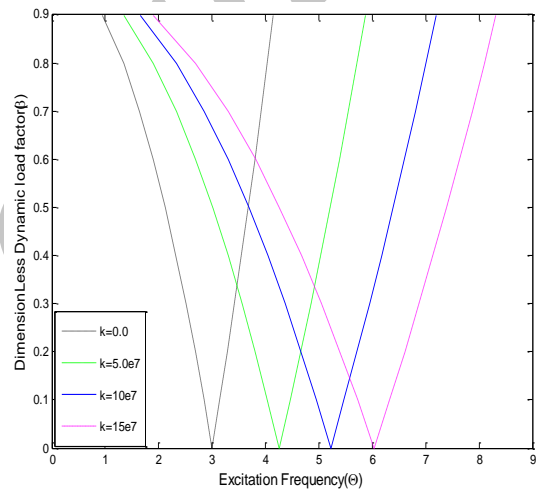


شکل (۴-الف) حالت دمای پایین



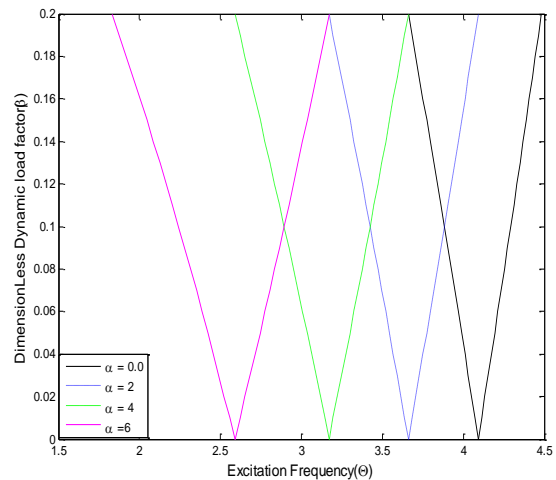
شکل (۱) اثر e.a بر ناحیه ناپایداری نانوتیرمدرج تابعی با

$$k_w = 1.9995 \times 10^{14}, \alpha_x = -1.6 \times 10^{-9} k^{-1}, T = 5.0 k$$



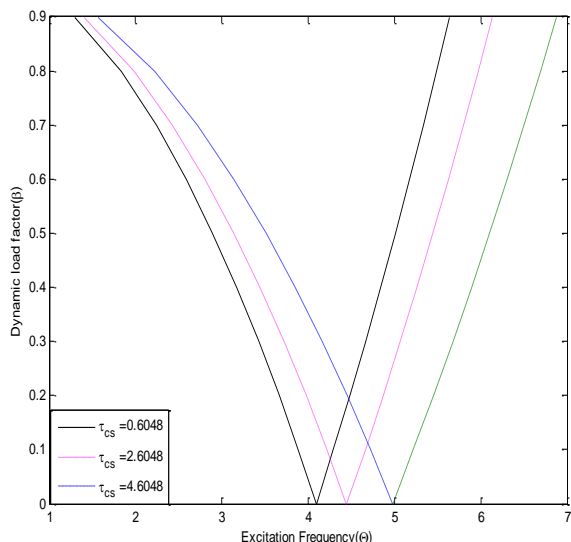
شکل (۲) اثر ثابت فزنی وینکلر بر ناحیه ناپایداری نانوتیرمدرج تابعی با

$$\alpha_x = -1.6 \times 10^{-9} k^{-1}, T = 5.0 k$$



شکل (۳) اثر باراستاتیکی alpha بر ناحیه ناپایداری نانوتیرمدرج تابعی با

$$e.a = .5nm, \alpha_x = -1.6 \times 10^{-9} k^{-1}, T = 5.0 k$$



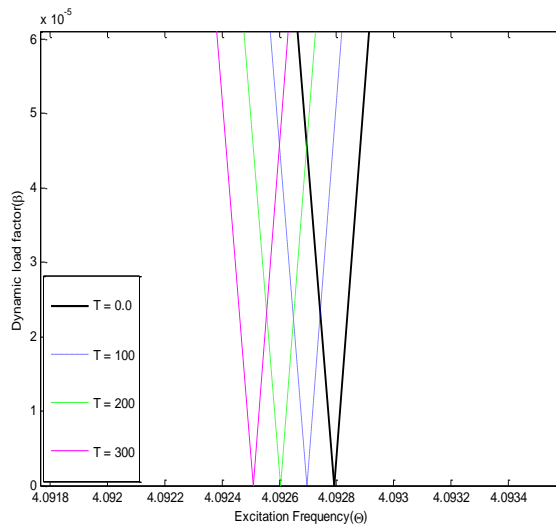
شکل (۶) اثر افزایش تنش پسماند بر فرکانس تحریک

$$T = 50^{\circ} k, \alpha_x = -1.6 \times 10^{-6} k^{-1}$$

$$k_w = 1.9995035 \times 10^{14}, e, a = .5nm$$

**فهرست علائم**

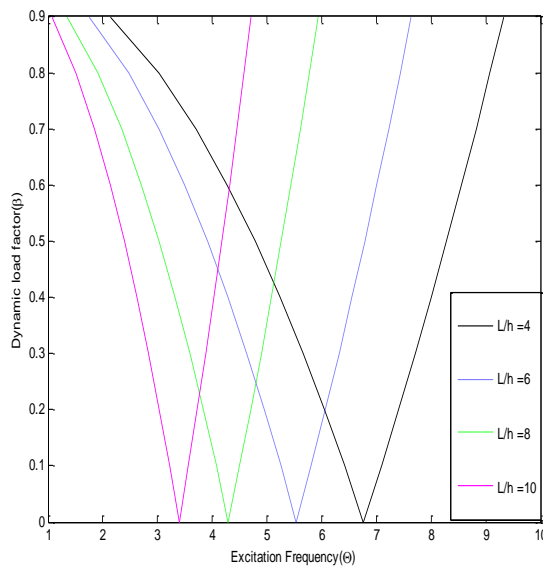
- $b$  عرض تیر
- $E_c$  مدول الاستیسیته سرامیک
- $E_m$  مدول الاستیسیته فلز
- $E_m^s$  مدول الاستیسیته سطح فلز (N/m)
- $E_c^s$  مدول الاستیسیته سطح سرامیک (N/m)
- $e, a$  پارامتر غیر موضعی
- $G_c$  مدول برشی سرامیک
- $G_m$  مدول برشی فلز
- $h$  ضخامت
- $k$  انرژی جنبشی
- $k_e$  ماتریس سختی
- $k_w$  ثابت فنری وینکلر (N/m<sup>3</sup>)
- $k_G$  ثابت برشی پاسترناک (N/m)
- $k_g$  ماتریس هندسی
- $k_s$  ضریب تصحیح برشی
- $L$  طول تیر
- $\nu_c$  ضریب پواسون سرامیک



شکل (۴-ب) حالت دما بالا

شکل (۴) اثر تغییرات دما در دو حالت دما بالا و دما پایین محیط بر اساس تئوری تیموشنکو

$$e, a = .5 \times 10^{-9}, k_w = 1.9995035 \times 10^{14}$$



شکل (۵) افزایش نسبت طول به ضخامت

شکل (۶) اثر افزایش تنش پسماند سطح بر فرکانس تحریک را نشان می دهد، همان طور که از شکل پیدا است با افزایش تنش پسماند سطح فرکانس تحریک نیز افزایش می یابد.

- [4] Ansari R., Gholami R., Sahmani S., On the dynamic stability of embedded single-walled carbon nanotubes including thermal environment effects, *Scientia Iranica*, vol. 19, No. 3, 2012, pp. 919-925.
- [5] Hosseini-Hashemi S. Nazemnezhad R., An analytical study on the nonlinear free vibration of functionally graded nanobeams incorporating surface effects, *Composites Part B: Engineering*, vol. 52, 2013, pp. 199-206.
- [6] Eltaher M.A., et al., Vibration of nonlinear graduation of nano-Timoshenko beam considering the neutral axis position, *Applied Mathematics and Computation*, vol. 235, 2014, pp. 512-529.
- [7] Malekzadeh P. Shojaee M., Surface and nonlocal effects on the nonlinear free vibration of non-uniform nanobeams, *Composites Part B: Engineering*, vol. 52, 2013, pp. 84-92.
- [8] Ansari, R., et al., Nonlinear vibration analysis of Timoshenko nanobeams based on surface stress elasticity theory, *European Journal of Mechanics - A/Solids*, vol. 45, 2014. pp. 143-152.
- [9] Ghorbanpour Arani A., Kolahchi R., Hashemian M., Nonlocal surface piezoelectricity theory for dynamic stability of double-walled boron nitride nanotube conveying viscous fluid based on different theories, *Mechanical Engineering Science*, 2014, pp. 23.
- [10] Goldberg J.E., The dynamic stability of elastic systems: by V. V. Bolotin. Russian trans. by V. I. Weingaxten et al. 451 pages, diagrams, 7 × 10 in. San Francisco, Calif., Holden-Day, Inc., 1964. Price, \$12.95, *Journal of the Franklin Institute*, vol. 279, No. 6, 1965, pp. 478-479.

$V_m$	ضرب پواسون فلز
$\rho_m$	چگالی فلز ( $\text{kg/m}^3$ )
$\rho_c$	چگالی سرامیک ( $\text{kg/m}^3$ )
$M$	ماتریس جرمی
$M_{xx}$	نیروی گشتاور خمشی (N)
$N_{xx}$	نیروی محوری (N)
$\tau_c^s$	تنش پسماند سطح سرامیکی
$\tau_m^s$	تنش پسماند سطح فلزی
$\varepsilon_{xx}$	کرنش محوری
$\gamma_{xz}$	کرنش برشی
$\sigma_{xx}^s$	تنش سطح
$\sigma_{xx}$	تنش محوری
$\sigma_{xz}$	تنش برشی
$\phi$	چرخش سطح مقطع
$T$	دما بر حسب کلوین
$P_{cr}$	نیروی بحرانی
$V$	انرژی پتانسیل
$\sigma_{ij}^l$	تنش محلی
$\sigma_{ij}^{nl}$	تنش غیر محلی

### مراجع:

- [1] Peddieson, J., G.R. Buchanan, and R.P. McNitt, Application of nonlocal continuum models to nanotechnology, *International Journal of Engineering Science*, vol. 41, No. 3-5, 2003, pp. 305-312.

[۲] قربانپورآرانی ع.، شریف زارعی م.، محمدی مهر م.، تأثیر حرارت بر کماتش پیچشی نانو لوله کربنی دو جداره تحت بستر الاستیک نوع پاسترناک، فصل نامه علمی پژوهشی مکانیک جامدات، سال ۴، شماره ۱، ۲۰۱۱، صفحات ۱۱ تا ۱۶.

[۳] الهامی م.، زینلی م.، تحلیل پایداری دینامیکی یک تیر دو سر آزاد تحت نیروی تعقیب کننده ناپایستار، مجله مکانیک هوا فضا، سال ۷، شماره ۱، ۲۰۱۱، صفحات ۱۵ تا ۲۶.

پیوست:

$$C_r = -\frac{m\pi\beta\tau_{css}}{N+1} - \frac{1}{r} \frac{\beta\pi mk_s g_c}{N+1} - \frac{m\pi\tau_{ss}N}{N+1} - \frac{1}{r} \frac{\beta\pi mk_s g_m N}{N+1} \quad (57)$$

ضرایب معادله (۴۱) و (۴۲):

$$\frac{m\pi\tau_{ss}}{N+1} - \frac{m\pi\beta\tau_{mss}N}{N+1} \quad (52)$$

(58)

$$\begin{aligned} \alpha_2 := & \frac{1}{2(-N-1+2vN+2v)m\pi\gamma} \left( \beta \left( -2m^5\pi^5\lambda^2\alpha E_{ss} \right. \right. \\ & + 2m^3\pi^3\lambda^2k_m v\gamma + 2m\pi k_m vN\gamma + 2m\pi\beta\gamma^2k_m v - m\pi\beta\gamma^2k_m N \\ & + 2\beta m^3\pi^3\tau_{ssm}N\gamma - \beta m^3\pi^3e_z\alpha\gamma + \beta m^3\pi^3k_s g_c\gamma - \beta m^5\pi^5\gamma^2\lambda^2k_g \\ & + 2\beta m^3\pi^3\gamma^2\tau_{ss}N - 4\beta m^3\pi^3\gamma^2\tau_{ss}v - \beta m^3\pi^3\gamma^2k_g N \\ & + 2\beta m^3\pi^3\gamma^2k_g v - \beta m^3\pi^3\gamma^2\lambda^2k_m + 2\beta m^5\pi^5\gamma^2\lambda^2\tau_{ss} \\ & - 2\beta m^3\pi^3\alpha E_{ss}\gamma - 4\beta m^3\pi^3\tau_{ssc}v\gamma - 2m^5\pi^5\lambda^2\alpha E_{ss}N \\ & + 4m^5\pi^5\lambda^2\alpha E_{ss}v + 4m^3\pi^3\alpha E_{ss}vN + 2m^5\pi^5\lambda^2\tau_{ss}N\gamma \\ & - 4m^5\pi^5\lambda^2\tau_{ss}v\gamma - m^5\pi^5\lambda^2k_g N\gamma + 2m^5\pi^5\lambda^2k_g v\gamma \\ & - m^3\pi^3\lambda^2k_m N\gamma + 2m^3\pi^3k_g vN\gamma - 8m^3\pi^3\tau_{ss}vN\gamma \\ & + 4\beta m^5\pi^5\lambda^2\alpha E_{ss}vN\gamma - 2m^3\pi^3\alpha E_{ss} - m^3\pi^3k_g\gamma + 4m^3\pi^3\tau_{ss}\gamma \\ & - m\pi k_m\gamma - 4m^5\pi^5\lambda^2\tau_{ss}vN\gamma + 2m^3\pi^3\lambda^2k_m vN\gamma \\ & + 2m^5\pi^5\lambda^2k_g vN\gamma + 4m^5\pi^5\lambda^2\alpha E_{ss}vN - 4\beta m^5\pi^5\gamma^2\lambda^2\tau_{ss}v \\ & + 2\beta m^3\pi^3\gamma^2k_g vN + 2\beta m^5\pi^5\gamma^2\lambda^2\tau_{ss}N + 2\beta m^3\pi^3\gamma^2\lambda^2k_m v \\ & + 2\beta m^5\pi^5\gamma^2\lambda^2k_g v - \beta m^3\pi^3\gamma^2\lambda^2k_m N - \beta m^5\pi^5\gamma^2\lambda^2k_g N \\ & + \beta m^3\pi^3k_s g_m N\gamma - 2\beta m^3\pi^3k_s g_c v\gamma - \beta m^5\pi^5\lambda^2e_z\alpha\gamma \\ & - 2\beta m^5\pi^5\lambda^2\alpha E_{ss}\gamma - 4\beta m^3\pi^3\tau_{ssm}vN\gamma - \beta m^3\pi^3e_z\alpha N\gamma \\ & - 2\beta m^3\pi^3\alpha E_{ss}N\gamma + 4\beta m^3\pi^3\alpha E_{ss}v\gamma - 4\beta m^3\pi^3\gamma^2\tau_{ss}vN \\ & + 2m\pi\beta\gamma^2k_m vN + 2\beta m^3\pi^3\gamma^2\lambda^2k_m vN + 2\beta m^5\pi^5\gamma^2\lambda^2k_g vN \\ & - 2\beta m^5\pi^5\lambda^2\alpha E_{ss}N\gamma - \beta m^5\pi^5\lambda^2e_z\alpha N\gamma - 2\beta m^3\pi^3k_s g_m vN\gamma \\ & + 4\beta m^5\pi^5\lambda^2\alpha E_{ss}v\gamma + 4\beta m^3\pi^3\alpha E_{ss}vN\gamma - 4\beta m^5\pi^5\gamma^2\lambda^2\tau_{ss}vN \\ & - 8m^3\pi^3\tau_{ss}v\gamma + 4m^3\pi^3\tau_{ss}N\gamma + 2\beta m^3\pi^3\tau_{ssc}\gamma - m\pi k_m N\gamma \\ & + 2m\pi k_m v\gamma + 2m^3\pi^3k_g v\gamma - 2m^3\pi^3\alpha E_{ss}N - m^3\pi^3k_g N\gamma \\ & + 2m^5\pi^5\lambda^2\tau_{ss}\gamma - m^3\pi^3\lambda^2k_m\gamma - m^5\pi^5\lambda^2k_g\gamma - m\pi\beta\gamma^2k_m \\ & \left. + 2\beta m^3\pi^3\gamma^2\tau_{ss} - \beta m^3\pi^3\gamma^2k_g + 4m^3\pi^3\alpha E_{ss}v \right) \end{aligned}$$

A<sub>1</sub> =

$$\begin{aligned} & \frac{\beta}{r} (-rm\pi i.vN\gamma - rm\pi i.v\gamma \\ & - rm^r\pi^r\lambda^r i.vN\gamma + m^r\pi^r\lambda^r i.N\gamma \\ & - rm^r\pi^r\lambda^r i.v\gamma + m^r\pi^r\lambda^r i.\gamma + m\pi i.N\gamma) / \\ & \gamma m\pi(-N-1+r vN+r v) \end{aligned}$$

C<sub>1</sub> =

$$\begin{aligned} & \frac{\beta}{r} (-m^r\pi^r k_s g_c \gamma \\ & - m^r\pi^r k_s g_m N\gamma + rm^r\pi^r k_s g_c v\gamma \\ & + rm^r\pi^r k_s g_m vN\gamma) / \\ & \gamma m\pi(-N-1+r vN+r v) \end{aligned} \quad (53)$$

o<sub>1</sub> = βp<sub>cr</sub>

$$\begin{aligned} & (-rm^r\pi^r v\gamma - rm^r\pi^r vN\gamma \\ & + m^o\pi^o\lambda^r N\gamma + m^r\pi^r N\gamma \\ & + m^r\pi^r\gamma + m^o\pi^o\lambda^r\gamma \\ & - rm^o\pi^o\lambda^r v\gamma - rm^o\pi^o\lambda^r vN\gamma) / \\ & r\gamma m\pi(-N-1+r vN+r v) \end{aligned} \quad (54)$$

$$\begin{aligned} A_r = & \frac{1}{r} \frac{i_r N}{N+1} + \frac{1}{r} \frac{i_r}{N+1} \\ & + \frac{1}{r} \frac{m^r\pi^r\lambda^r i_r N}{N+1} + \frac{1}{r} \frac{m^r\pi^r\lambda^r i_r}{N+1} \end{aligned} \quad (55)$$

$$\begin{aligned} B = & \frac{1}{r} \frac{k_s g_c}{N+1} + \frac{1}{f} \frac{m^r\pi^r e_{zs}}{N+1} \\ & + \frac{1}{f} \frac{m^r\pi^r e_{ms} N}{N+1} + \frac{1}{r} \frac{m^r\pi^r d_{xx} N}{N+1} \\ & + \frac{1}{f} \frac{m^r\pi^r e_{zs} N}{N+1} + \frac{1}{r} \frac{m^r\pi^r d_{xx}}{N+1} \\ & + \frac{1}{r} \frac{k_s g_m N}{N+1} + \frac{1}{f} \frac{m^r\pi^r e_{cs}}{N+1} \end{aligned} \quad (56)$$