زمستان ۱۳۹۴/ سال هشتم/ شماره چهارم

فصلنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک جامدات

http://www.jsme.iaukhsh.ac.ir

فصلنامه علمی پژوهشی
مهندسی مکانیک جامدات

# مدلسازی ناپیوستگی تیرها با دو تحلیل فرم قوی و ضعیف به کمک مدل فنر پیچشی

مصطفی مستان آبادی[1]، علی علی جانی[2,*]، ابوالفضل درویزه[3]، فاطمه متقیان[4]

* نویسنده مسئول: alijani@iaubanz.ac.ir

**چکیده**

در این مقاله ناپیوستگی در تیرها با استفاده از یک فنر پیچشی مدلسازی می‌شود که شدت این ناپیوستگی توسط میزان سفتی فنر تنظیم می گردد. با دو تحلیل فرم قوی و ضعیف به ترتیب معادله دیفرانسیل حاکم اصلاح شده و ماتریس سفتی سازه بهبود یافته برای تیرهای ناپیوسته استخراج می‌شوند. در فرم قوی، با در نظرگرفتن تئوری تیر اویلر-برنولی و تیموشنکو و با استفاده از دو روش تحلیل متفاوت، تاثیر تغییر شکل برشی در تیرهای دارای ناپیوستگی ارائه شده است. در این فرم، سفتی خمشی تیر ناپیوسته به کمک تابع دلتای دیراک اصلاح می‌شود. در فرم ضعیف، ماتریس سفتی کاهش یافته از درون معادله انرژی کرنشی استخراج که این معادله نیز به کمک سه معادله پیوستگی، سینماتیک و ساختاری ساخته می‌شود. فرض خطی بودن هندسه و ماده به ترتیب برای تشکیل معادلات سینماتیک و ساختاری در نظر گرفته شده است. در این فرم، شرایط پیوستگی دو بخش گسسته شده‌ی تیر اویلر-برنولی را به یکدیگر مربوط می کند که در آن یک تابع شکل هرمیتی بهبود یافته برای درونیابی میدان جابجایی بکار گرفته می‌شود. یک مثال کاربردی، مقایسه و صحت سنجی جواب‌های دو فرم قوی و ضعیف و همچنین رفتار استاتیکی تیر ناپیوسته را نشان می‌دهد.

**واژه‌های کلیدی**

ناپیوستگی، تیر، فرم های قوی و ضعیف، تئوری‌های اویلر- برنولی و تیموشنکو

| | |
|---|---|
| تاریخ ارسال: | ۱۳۹۴/۰۸/۰۵ |
| تاریخ بازنگری: | ۱۳۹۴/۱۰/۱۰ |
| تاریخ پذیرش: | ۱۳۹۴/۱۰/۳۰ |

۱- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد تاکستان، تاکستان، ایران.
۲- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد بندرانزلی، بندرانزلی، ایران.
۳- استاد، مهندسی مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد بندرانزلی، بندرانزلی، ایران.
۴- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه گیلان، رشت، ایران.

Winter 2016/ vol. 8/ No. 4

Journal of
Solid Mechanics
in Engineering

Journal of

Solid Mechanics in Engineering

tp://www.jsme.iaukhsh.ac.ir

# Modeling of the Beam Discontinuity with Two Analyses in Strong and Weak Forms using a Torsional Spring Model

Mostafa Mastan Abadi[1], Ali Alijani[2]*, Abolfazl Darvizeh[3], Fatemeh Mottaghian[4]

*Corresponding Author: alijani@iaubanz.ac.ir

**Abstract:**

In this paper, a discontinuity in beams whose intensity is adjusted by the spring stiffness factor is modeled using a torsional spring. Adapting two analyses in strong and weak forms for discontinuous beams, the improved governing differential equations and the modified stiffness matrix are derived respectively. In the strong form, two different solution methods have been presented to make an analogy between the formulation of the Euler-Bernoulli and Timoshenko theories that indicates the influence of the shear deformation in discontinuous beams. The flexural stiffness of discontinuous beams is corrected by using the Dirac's delta function. In the weak form, the reduced stiffness matrix is derived from the strain energy equation established by the continuity, kinematics and constitutive equations. The linearity assumption of the geometry and material is considered to construct the kinematics and constitutive equations respectively. The continuity conditions mathematically connect two divided parts of the Euler-Bernoulli beam for which an improved Hermitian shape function is employed to interpolate displacement field. An application shows the comparison and validation of the results of the strong and weak forms, and also the static behavior of discontinuous beams.

**Key words:**
Discontinuity
Beam
Strong and Weak Forms
Euler-Bernoulli and Timoshenko Theories



1- MSc Student, Department of Mechanical Engineering, Takestan Branch, Islamic Azad University, Takestan, Iran.
2- Assistant Prof., Department of Mechanical Engineering, Bandar Anzali Branch, Islamic Azad University, Bandar Anzali, Iran.
3- Professor, Department of Mechanical Engineering, Bandar Anzali Branch, Islamic Azad University, Bandar Anzali, Iran.
4- MSc Student, Department of Mechanical Engineering, University of Guilan, Rasht, Iran.

## ۱- مقدمه

یکی از کاربردهای اساسی تحلیل ناپیوستگی با استفاده از مدل فنر پیچشی در مطالعه رفتار مکانیکی سازه‌های دارای ترک می‌باشد. این مدل با صرفنظر نمودن از ضرایب شدت تنش و مفاهیم مکانیک شکست، تقریبی از رفتار سازه‌های دارای ترک را ارائه می‌کند. شبیه سازی ترک به کمک یک مدل فنرپیچشی می‌تواند معیاری مناسب برای سنجش کاهش توانایی تحمل بار سازه باشد. با توجه به اهمیت تحلیل ترک در بررسی آثار مخرب آن در سازه‌ها، ارائه یک معیار ساده، تحلیلی و چابک، با ارزش و مفید خواهد بود جایی که در آن از پیچیدگی‌های تحلیل مکانیک شکست و یا از هزینه‌های تست تجربی صرفنظر شود.

استفاده از فنر گسسته به منظور مدلسازی ناپیوستگی برای اولین بار در سال ۱۹۵۷ توسط ایروان [۱] مورد استفاده قرار گرفت. پس از آن بسیاری از محققان به بررسی رابطه بین عمق ترک و سفتی فنر گسسته پرداختند. دیماروگوناس و پاپادپلوس [۲] یکی از کسانی بودند که توانستند رابطه‌ای بین سفتی فنر گسسته و عمق ترک ارائه کنند سپس با استفاده از این مدلسازی اوکامورا و همکارانش [۳] رفتار یک ستون دارای ترک با مقطع مستطیل را بررسی نموده و از فنر گسسته برای مدل کردن ترک استفاده کردند. پس از آن تحقیقات مشابهی برای تعریف این مدل ارائه شد [۴-۶]. در این بین روابطی هم برای مدلسازی ترک با استفاده از سفتی فنر محوری معرفی گردید [۷] که کاربردهایی در تخمین خسارات محوری یا عرضی داشتند. دیماروگوناس و همکارانش [۸-۹] با استفاده از مدلسازی فنر گسسته تاثیر ترک و عمق آن را بر روی شکل مود و فرکانس طبیعی تیر مورد مطالعه قرار دادند. باگارلو [۱۰-۱۱] سبک جدیدی در توزیع ضرب را بررسی و با استفاده از آن کاربردهای متفاوتی از توابع دلتا و مشتقات آن ارائه نمود. پس از آن بیوندی و کادمی [۱۲-۱۳] با استفاده از توابع دلتا و مشتقاتش و به کمک مدل ارائه شده توسط اوکامورا و همکارانش [۳] به بررسی وجود ناپیوستگی در تیرها پرداختند. سپس محققانی چون پالمری و سیسیرلو [۱۴-۱۵] با استفاده از روش‌های مبتنی بر توابع دلتای ارائه شده در قبل و توسعه و بهبود این روش‌ها مدل‌های تحلیلی جامعی برای بررسی تیر دارای ترک ارائه نمودند. دونا و همکارانش [۱۶] تحلیل‌های فرم بسته‌ی دقیقی برای تجزیه و تحلیل استاتیکی تیر دارای ترک انجام دادند و افتخاری [۱۷] رفتارهای ریاضی توابع دلتای دیراک در معادلات دیفرانسیل حاکم بر تیرها را مورد بررسی قرار داد که این تحقیقات تماما به صورت تحلیلی بودند. در این زمینه تحقیقات متعددی در خصوص حل المان محدود سازه‌های دارای ترک نیز انجام شده است. از جمله یکی از ابتدایی ترین تحقیقات را گوناریس و دیماروگوناس [۱۸] برای بررسی عددی تیری با یک المان و یک ترک عرضی ارائه نمودند. همچنین اسکرینر [۱۹-۲۰] شکل خاصی را برای ماتریس سفتی و ماتریس سفتی هندسی ارائه کرد.

در این مقاله به کمک روش تحلیلی و با دو فرم قوی و ضعیف، معادلات تغییر شکل تیر دارای ناپیوستگی استخراج می‌شوند. برای تشکیل فرمولبندی فرم قوی از معادله دیفرانسیلی حاکم بر تیرها استفاده می‌گردد طوریکه به کمک تابع دلتای دیراک، اثر این ناپیوستگی بر روی سفتی خمشی تیر لحاظ و معادله دیفرانسیلی حاکم اصلاح می‌شود. در فرم ضعیف، به کمک یک تابع شکل هرمیتی اصلاح شده‌ی متاثر از ناپیوستگی و با استفاده از معادله انرژی، درایه‌های ماتریس سفتی سازه استخراج می‌گردند. در فرم قوی، معادلات شیب و خیز برای هر دو تئوری تیر اویلر-برنولی و تیموشنکو و با دو روش متفاوت معرفی می‌شوند. در فرم ضعیف با الهام از یک تحلیل المان محدود و تعیین بردار جابجایی در نقاط گره‌ای و به کمک توابع شکل اصلاحی مقادیر خیز و شیب

در نقاط مختلف تیر بدست می‌آیند. یک مثال کاربردی با مقایسه پاسخ تحلیل‌ها برای تیرهای دارای ناپیوستگی صحت آن‌ها را ارزیابی می‌نماید و شدت تاثیر اثرات برشی بر روی تیر ناپیوسته را بررسی می‌کند.

## ۲- فرمولبندی تحلیلی

مدل فنر گسسته می‌تواند به عنوان مدلی ساده برای تحلیل ترک در نظر گرفته شود که در آن مشخصات هندسی ترک توسط فنرهای محوری یا پیچشی و یا برشی همانند شکل (۱) شبیه سازی می‌شوند. در اینجا دو فرمولبندی به فرم قوی و ضعیف با یک مدل فنر پیچشی، معادلات تیر دارای ترک را معرفی می‌کنند. مدلسازی تیر دارای ترک و حل تحلیلی آن بدین صورت در مطالعه مسائل مهندسی می‌تواند بسیار مفید باشد چون که از پیچیدگی‌های روش‌های عددی مانند المان محدود توسعه یافته یا بدون مش و یا هزینه‌های روش تجربی بطور قابل ملاحظه‌ای می‌کاهد.

### ۲-۱- فرم قوی

در استخراج معادلات تیر به فرم قوی، سفتی خمشی تیر توسط یک ایمپالس در نقطه ناپیوستگی اصلاح می‌گردد. در این فرم با صرفنظر از اثرات تمرکز تنش و ضرایب شدت تنش، پاسخ‌های شیب و خیز در تیری شامل ناپیوستگی یا ترک مطابق با جداول (۱) و (۲) استخراج می‌گردند. در این جداول روابط به سه قسمت تئوری تیر اویلر-برنولی، تئوری تیر تیموشنکو و روابط مشترک در دو تئوری تقسیم بندی می‌شوند. در ردیف اول از جدول (۱)، معادلات استاتیکی حاکم شامل سه بخش اصلی می‌باشد: در بخش اول رابطه بین خیز و شیب و همچنین شیب و انحناء معرفی می‌شود؛ بخش دوم مربوط به رابطه‌ی بین بار (گشتاور خمشی) و انحناء می‌باشد؛ و در بخش سوم رابطه‌ی بین نیروی برشی و گشتاور خمشی و همچنین رابطه‌ی بین نیروی برشی و بار عرضی ارائه می‌شود. در ردیف دوم از جدول (۱)، یک مدل به منظور اعمال ناپیوستگی در معادلات معرفی می‌شود. این مدل بیان می‌کند که ناپیوستگی می‌تواند توسط اصلاح سفتی خمشی تیر به معادلات استاتیکی حاکم اضافه شود. در ردیف سوم این جدول، معادلات دیفرانسیلی حاکم توسط ترکیب معادلات ردیف‌های اول و دوم استخراج می‌شود. در این ترکیب با قرار دادن سفتی خمشی اصلاحی از ردیف دوم در رابطه‌ی بار عرضی-جابجایی از ردیف اول این معادله دیفرانسیلی بدست می‌آید. ردیف چهارم جدول (۱) به حل معادله‌ی دیفرانسیلی اشاره دارد. این حل می‌تواند با استفاده از ردیف پنجم یعنی روابط بین دلتای دیراک و هویساید به فرم صریحی از معادلات خیز و شیب تیر بینجامد.

در جدول (۲) با روشی متفاوت از جدول (۱)، معادلات تغییر شکل تیرهای اویلر-برنولی و تیموشنکو استخراج می‌شوند. در جدول (۲) بجای انتگراگیری از طرفین معادله که سرآغاز فرآیند حل معادله دیفرانسیلی در جدول (۱) است؛ با وارد نمودن مشتق و گسترش معادله دیفرانسیلی، فرآیند عملیات آغاز می‌گردد. ردیف دوم از جدول (۲) توسط وارد کردن مشتق در معادله دیفرانسیلی ردیف اول توسعه داده شده است. در ردیف سوم این جدول با معرفی پاسخ معادله به صورت یک تجزیه جمعی[۱] [۱۲]، معادله جابجایی تیر به دو قسمت با ضرایب ثابت (معادله همگن) و ضرایب وابسته به مختصه محوری (معادله ناهمگن) تقسیم می‌شود. با تعیین ضرایب جابجایی معادله ناهمگن و مشتقات آن و همچنین تعیین ضرایب ثابت معادله‌ی همگن توسط شرایط مرزی مساله، معادلات شیب و خیز تیر ناپیوسته حاصل می‌گردند.

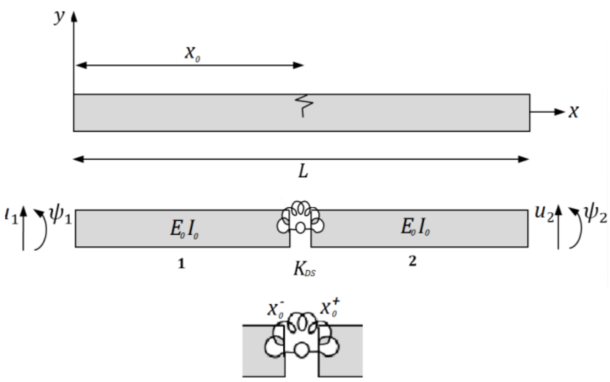
مقایسه‌ی پاسخ جداول (۱) و (۲) نشان می‌دهد که دو روش تحلیل ذکر شده برای هر تئوری به یک معادله صریح و

[۱] Additive decomposition

یکسان منجر می‌شود که از آن، صحت پاسخ‌ها می‌تواند استنتاج گردد.

**۲-۲- فرم ضعیف**

فرآیند تحلیل به فرم ضعیف در جدول (۳) ارائه شده است. مطابق با این جدول، معادلات پیوستگی در ردیف اول بیان می‌کنند که خیز، گشتاور خمشی و نیروی برشی در طرف چپ و طرف راست نقطه‌ی ناپیوستگی برابر است در حالیکه شیب متاثر از سفتی فنر پیچشی در نقطه ناپیوستگی می‌باشد. توابع شکل در ردیف دوم توسط یک چند جمله‌ای، درونیابی میدان جابجایی را بر عهده می‌گیرند. ضرایب این چند جمله‌ای به گونه‌ای حاصل می‌شوند که بتوانند شرایط معادلات پیوستگی را ارضا نمایند. در ردیف پنجم از جدول (۳)، معادله انرژی کرنشی به صورت مجموع انرژی کرنشی تیر و انرژی کرنشی فنر بیان شده است. توابع شکل، معادلات سینماتیک و ساختاری به ترتیب حاصل از ردیف‌های ۲، ۳ و ۴ جدول (۳) به منظور استخراج انرژی کرنشی تیر استفاده می‌شوند و انرژی کرنشی فنر توسط معادله‌ی پایه‌ای فنرهای پیچشی حاصل می‌گردد. از درون این معادله انرژی، درایه‌های ماتریس سفتی $K(m,n)$ متاثر از ناپیوستگی بدست می‌آیند که در آن $m$ بیانگر سطر و $n$ ستون ماتریس می‌باشد. مولفه‌های این ماتریس سفتی در جدول (۶) ضمیمه ارائه شده است.




شکل (۱) تیر دارای ناپیوستگی

جدول (۱) فرم قوی در روش اول

| | تئوری تیر تیموشنکو | روابط مشترک | تئوری تیر اویلر-برنولی |
|---|---|---|---|
| معادلات استاتیکی حاکم [۲۱] | $\theta(x)=-\dfrac{q^{[1]}(x)+c_1}{k\cdot G\cdot a}-u'(x)$ <br> $V(x)=k\cdot G\cdot a\cdot\left(\dfrac{du(x)}{dx}-\theta(x)\right)$ | $\chi(x)=\dfrac{d\theta(x)}{dx}$ <br> $M(x)=E\cdot I\cdot\chi(x)$ <br> $V(x)=\dfrac{dM(x)}{dx}$ <br> $q(x)=-\dfrac{dV(x)}{dx}$ | $\theta(x)=-\dfrac{du(x)}{dx}$ |
| | | | |

| | | |
|---|---|---|
| مدلسازی ناپیوستگی [۱۳] | $E\cdot I = E_0\cdot I_0\cdot\left(1-\gamma\cdot\delta(x-x_0)\right)$ <br> $K_{DS}=\frac{1-\gamma\cdot A}{\gamma}\cdot E_0\cdot I_0$ <br> $\delta(x-x_0)\cdot\delta(x-x_0) = A\cdot\delta(x-x_0)$ | |
| معادله دیفرانسیل حاکم | $q(x)=[E_0\cdot I_0\cdot\left(1-\gamma\cdot\delta(x-x_0)\right)\cdot\left(\frac{q(x)}{k\cdot G\cdot a}+u''(x)\right)]''$ | $q(x)=\left[E_0\cdot I_0\cdot\left(1-\gamma\cdot\delta(x-x_0)\right)\cdot u''(x)\right]''$ |
| مراحل عملیات استخراج معادلات | $u''(x)=-\frac{q(x)}{k\cdot G\cdot a}\cdot\left(1-\gamma\cdot\delta(x-x_0)\right)+\frac{q^{[2]}(x)}{E_0\cdot I_0}+\frac{b_1\cdot x}{E_0\cdot I_0}+\frac{b_2}{E_0\cdot I_0}+\gamma\cdot u''(x)\cdot\delta(x-x_0)$ <br> $u''(x)=-\frac{q(x)}{k\cdot G\cdot a}+\left(1+\frac{\gamma}{1-\gamma\cdot A}\cdot\delta(x-x_0)\right)\cdot\left(2\cdot c_2+6\cdot c_1\cdot x+\frac{q^{[2]}(x)}{E_0\cdot I_0}\right)$ | $u''(x)=\frac{b_2+b_1\cdot x+q^{[2]}(x)}{E_0\cdot I_0}+\gamma\cdot\delta(x-x_0)\cdot u''(x)$ <br> $u''(x)=\left(2\cdot c_2+6\cdot c_1\cdot x+\frac{q^{[2]}(x)}{E_0\cdot I_0}\right)\cdot\left(1+\frac{\gamma}{1-\gamma\cdot A}\cdot\delta(x-x_0)\right)$ |
| | $c_1=\frac{b_1}{6\cdot E_0\cdot I_0}\qquad c_2=\frac{b_2}{2\cdot E_0\cdot I_0}$ | |
| رابطه دلتای دیراک و هویساید [۲۲] | $\int f(x)\cdot\delta(x-x_0) = f(x_0)\cdot H(x-x_0)\oplus$ | |
| معادله شیب | $\theta(x)=-\frac{q^{[1]}(x)+c_1}{k\cdot G\cdot a}-u'(x)=-\frac{c_1}{k\cdot G\cdot a}-c_3-2\cdot c_2\cdot[x+\frac{\gamma}{1-\gamma\cdot A}\cdot H(x-x_0)]-3\cdot c_1\cdot[x^2+2\cdot\frac{\gamma\cdot x_0}{1-\gamma\cdot A}\cdot H(x-x_0)]-\frac{q^{[3]}(x)}{E_0\cdot I_0}-\frac{\gamma}{1-\gamma\cdot A}\cdot\frac{q^{[2]}(x_0)}{E_0\cdot I_0}\cdot H(x-x_0)$ | $\theta(x)=-u'(x)=-c_3-2\cdot c_2\cdot[x+\frac{\gamma}{1-\gamma\cdot A}\cdot H(x-x_0)]-3\cdot c_1\cdot[x^2+2\cdot\frac{\gamma}{1-\gamma\cdot A}\cdot x_0\cdot H(x-x_0)]-\frac{\gamma}{1-\gamma\cdot A}\cdot\frac{q^{[2]}(x_0)}{E_0\cdot I_0}\cdot H(x-x_0)-\frac{q^{[3]}(x)}{E_0\cdot I_0}$ |
| معادله خیز | $u(x)=c_4+c_3\cdot x+c_2\cdot[x^2+2\cdot\frac{\gamma}{1-\gamma\cdot A}\cdot(x-x_0)\cdot H(x-x_0)]+c_1\cdot[x^3+6\cdot\frac{\gamma}{1-\gamma\cdot A}\cdot x_0\cdot(x-x_0)\cdot H(x-x_0)]+\frac{q^{[4]}(x)}{E_0\cdot I_0}-\frac{q^{[2]}(x)}{k\cdot G\cdot a}+\frac{\gamma}{1-\gamma\cdot A}\cdot\frac{q^{[2]}(x_0)}{E_0\cdot I_0}\cdot(x-x_0)\cdot H(x-x_0)$ | $u(x)=c_4+c_3\cdot x+c_2\cdot[x^2+\frac{2\cdot\gamma}{1-\gamma\cdot A}\cdot(x-x_0)\cdot H(x-x_0)]+c_1\cdot[x^3+6\cdot\frac{\gamma}{1-\gamma\cdot A}\cdot x_0\cdot(x-x_0)\cdot H(x-x_0)]+\frac{\gamma}{1-\gamma\cdot A}\cdot\frac{q^{[2]}(x_0)}{E_0\cdot I_0}\cdot(x-x_0)\cdot H(x-x_0)+\frac{q^{[4]}(x)}{E_0\cdot I_0}$ |

جدول (۲) فرم قوی در روش دوم (دو مرحله اول در جدول (۱) یعنی معرفی معادلات استاتیکی حاکم و مدلسازی ناپیوستگی به علت عدم تکرار ذکر نشده است)

| | تئوری تیر تیموشنکو | روابط مشترک | تئوری تیر اویلر-برنولی |
|---|---|---|---|
| معادله دیفرانسیل حاکم | $q(x)=[E_0\cdot I_0\cdot\left(1-\gamma\cdot\delta(x-x_0)\right)\cdot\left(\frac{q(x)}{k\cdot G\cdot a}+u^{''}(x)\right)]^{''}$ | | $q(x)=\left[E_0\cdot I_0\cdot\left(1-\gamma\cdot\delta(x-x_0)\right)\cdot u^{''}(x)\right]^{''}$ |
| مشتق گیری معادله دیفرانسیل حاکم | $q(x)=E_0\cdot I_0\cdot u^{''''}(x)+E_0\cdot I_0\cdot[+\frac{q^{''}(x)}{k\cdot G\cdot a}-\frac{\gamma}{k\cdot G\cdot a}\cdot q^{''}(x)\cdot\delta(x-x_0)-\frac{2\cdot\gamma}{k\cdot G\cdot a}\cdot q^{'}(x)\cdot\delta^{'}(x-x_0)-\frac{\gamma}{k\cdot G\cdot a}\cdot q(x)\cdot\delta^{''}(x-x_0)-\gamma\cdot u^{''''}(x)\cdot\delta(x-x_0)-2\cdot\gamma\cdot u^{'''}(x)\cdot\delta^{'}(x-x_0)-\gamma\cdot u^{''}(x)\cdot\delta^{''}(x-x_0)]$ | | $q(x)=E_0\cdot I_0\cdot[\left(1-\gamma\cdot\delta(x-x_0)\right)\cdot u^{''''}(x)-\gamma\cdot\delta^{''}(x-x_0)\cdot u^{''}(x)-2\cdot\gamma\cdot\delta^{'}(x-x_0)\cdot u^{'''}(x)]$ |
| | | $\tilde{q}(x)=q(x)+E_0\cdot I_0\cdot[\Phi]$ | |
| | | $\tilde{q}(x)=E_0\cdot I_0\cdot u_e^{''''}(x)$ | |
| | $[\Phi]=[-\frac{q^{''}(x)}{k\cdot G\cdot a}+\frac{\gamma}{K\cdot G\cdot a}\cdot q^{''}(x)\cdot\delta(x-x_0)+\frac{2\cdot\gamma}{k\cdot G\cdot a}\cdot q^{'}(x)\cdot\delta^{'}(x-x_0)+\frac{\gamma}{k\cdot G\cdot a}\cdot q(x)\cdot\delta^{''}(x-x_0)+\gamma\cdot u^{''''}(x)\cdot\delta(x-x_0)+2\cdot\gamma\cdot u^{'''}\cdot\delta^{'}(x-x_0)+\gamma\cdot u^{''}\cdot\delta^{''}(x-x_0)]$ | | $[\Phi]=[\gamma\cdot\delta(x-x_0)\cdot u^{''''}(x)+\gamma\cdot\delta^{''}(x-x_0)\cdot u^{''}(x)+2\cdot\gamma\cdot\delta^{'}(x-x_0)\cdot u^{'''}(x)]$ |
| فرم اولیه معادله چند جمله‌ای [۱۲] | | $u(x)=u_h(x)+u_e(x)$ | |
| | | $u_h(x)=c_1+c_2\cdot x+c_3\cdot x^2+c_4\cdot x^3$ | |
| | | $u_e(x)=d_1(x)+d_2(x)\cdot x+d_3(x)\cdot x^2+d_4(x)\cdot x^3$ | |
| استخراج ضرایب جابجایی ناهمگن با در نظر گرفتن جدول (۴) ضمیمه | | $d_1(x)=-\frac{q^{[1]}(x)\cdot x^3-3\cdot q^{[2]}(x)\cdot x^2+6\cdot q^{[3]}(x)\cdot x-6\cdot q^{[4]}(x)}{6\cdot E_0\cdot I_0}+\frac{1}{6}\cdot\left[-x^3\cdot[\Phi]^{[1]}+3\cdot x^2\cdot[\Phi]^{[2]}-6\cdot x\cdot[\Phi]^{[3]}+6\cdot[\Phi]^{[4]}\right]$ | |
| | | $d_2(x)=\frac{q^{[1]}(x)\cdot x^2-2\cdot q^{[2]}(x)\cdot x+2\cdot q^{[3]}(x)}{2\cdot E_0\cdot I_0}+\frac{1}{2}\cdot\left[x^2\cdot[\Phi]^{[1]}-2\cdot x\cdot[\Phi]^{[2]}+2\cdot[\Phi]^{[3]}\right]$ | |
| | | $d_3(x)=-\frac{q^{[1]}(x)\cdot x-q^{[2]}(x)}{2\cdot E_0\cdot I_0}+\frac{1}{2}\cdot\left[-x\cdot[\Phi]^{[1]}+[\Phi]^{[2]}\right]$ | |
| | | $d_4(x)=\frac{q^{[1]}(x)}{6\cdot E_0\cdot I_0}+\frac{1}{6}\cdot[\Phi]^{[1]}$ | |

<table>
<tr>
<td>معادله خیز</td>
<td>$$u(x)=c_1+c_2\cdot x+c_3\cdot[x^2+2\cdot\frac{\gamma}{1-\gamma\cdot A}\cdot(x-x_0)\cdot H(x-x_0)]+c_4\cdot[x^3+6\cdot\frac{\gamma}{1-\gamma\cdot A}\cdot x_0\cdot(x-x_0)\cdot H(x-x_0)]+\frac{q^{[4]}(x)}{E_0\cdot I_0}-\frac{q^{[2]}(x)}{k\cdot G\cdot a}+\frac{\gamma}{1-\gamma\cdot A}\cdot\frac{q^{[2]}(x_0)}{E_0\cdot I_0}\cdot(x-x_0)\cdot H(x-x_0)$$</td>
<td>$$u(x)=c_1+c_2\cdot x+c_3\cdot[x^2+\frac{2\cdot\gamma}{1-\gamma\cdot A}\cdot(x-x_0)\cdot H(x-x_0)]+c_4\cdot[x^3+6\cdot\frac{\gamma}{1-\gamma\cdot A}\cdot x_0\cdot(x-x_0)\cdot H(x-x_0)]+\frac{\gamma}{1-\gamma\cdot A}\cdot\frac{q^{[2]}(x_0)}{E_0\cdot I_0}\cdot(x-x_0)\cdot H(x-x_0)+\frac{q^{[4]}(x)}{E_0\cdot I_0}$$</td>
</tr>
</table>

جدول (۳) فرم ضعیف

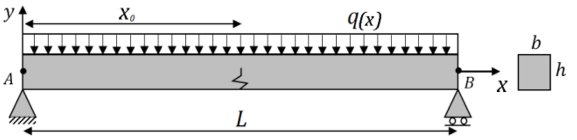
<table>
<tr><th></th><th>تیر</th><th>روابط مشترک</th><th>فنر</th></tr>
<tr>
<td>معادلات پیوستگی [۲۳]</td>
<td></td>
<td>$$u_1(x_0^-)=u_2(x_0^+)$$ $$u_1'(x_0^-)+\Psi\cdot u_1''(x_0^-)=u_2'(x_0^+)$$ $$u_1''(x_0^-)=u_2''(x_0^+)$$ $$u_1'''(x_0^-)=u_2'''(x_0^+)$$ $$\Psi=\frac{E\cdot I}{K_{DS}}$$</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td rowspan="2">توابع شکل استخراج شده از جدول (۵) ضمیمه</td>
<td colspan="3">$$u_i(x)=\boldsymbol{f}_{ij}\cdot\begin{Bmatrix}u_1\\ \psi_1\\ u_2\\ \psi_2\end{Bmatrix}=\boldsymbol{N}_i\cdot\boldsymbol{u}$$</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="3">$$\boldsymbol{N}_i=\boldsymbol{f}_{ij}=a_{ij}+b_{ij}\cdot x+c_j\cdot x^2+d_j\cdot x^3$$ $$\boldsymbol{N}_i'=\boldsymbol{f}_{ij}'=b_{ij}+2\cdot c_j\cdot x+3\cdot d_j\cdot x^2$$ $$\boldsymbol{N}_i''=\boldsymbol{f}_{ij}''=2\cdot c_j+6\cdot d_j\cdot x$$</td>
</tr>
<tr>
<td>سینماتیک [۲۴]</td>
<td>$$\varepsilon_x=-y\cdot\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x^2}$$</td>
<td></td>
<td>$$\Delta\theta(x_0)=\frac{\partial u(x_0^+)}{\partial x}-\frac{\partial u(x_0^-)}{\partial x}$$</td>
</tr>
<tr>
<td>ساختاری [۲۵]</td>
<td>$$\sigma_x=E\cdot\varepsilon_x$$</td>
<td></td>
<td>$$M(x)=K_{DS}\cdot\Delta\theta(x_0)$$</td>
</tr>
<tr>
<td rowspan="5">معادله انرژی کرنشی</td>
<td>$$U_{Beam}=\frac{1}{2}\cdot\sum_{i=1}^{2}\int_{L_i}E\cdot I\cdot\left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2}\right)^2\cdot dx$$</td>
<td></td>
<td>$$U_{Spring}=\frac{1}{2}\cdot K_{DS}\cdot\Delta\theta(x_0)^2$$</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="3">$$U=U_{Beam}+U_{Spring}$$</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="3">$$U=\frac{1}{2}\cdot\sum_{i=1}^{2}\int_{L_i}E\cdot I\cdot\left(\frac{\partial^2\boldsymbol{N}_i}{\partial x^2}\cdot\boldsymbol{u}\right)^T\cdot\left(\frac{\partial^2\boldsymbol{N}_i}{\partial x^2}\cdot\boldsymbol{u}\right)dx+\frac{1}{2}\cdot K_{DS}\cdot\left(\frac{\partial\boldsymbol{N}_1}{\partial x}\cdot\boldsymbol{u}-\frac{\partial\boldsymbol{N}_2}{\partial x}\cdot\boldsymbol{u}\right)^T\cdot\left(\frac{\partial\boldsymbol{N}_1}{\partial x}\cdot\boldsymbol{u}-\frac{\partial\boldsymbol{N}_2}{\partial x}\cdot\boldsymbol{u}\right)$$</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="3">$$U=\frac{1}{2}\cdot E\cdot I\cdot\boldsymbol{u}^T\cdot\int_{x=0}^{L}\boldsymbol{N}''^T\cdot\boldsymbol{N}''\cdot dx\cdot\boldsymbol{u}+\frac{1}{2}\cdot K_{DS}\cdot\boldsymbol{u}^T\cdot\left(\boldsymbol{N}_1'-\boldsymbol{N}_2'\right)^T\cdot\left(\boldsymbol{N}_1'-\boldsymbol{N}_2'\right)\cdot\boldsymbol{u}$$</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="3">$$U=\frac{1}{2}\cdot\boldsymbol{u}^T\cdot\left(E\cdot I\cdot\int_{x=0}^{L}\boldsymbol{N}''^T\cdot\boldsymbol{N}''\cdot dx+K_{DS}\cdot\boldsymbol{\Delta B}^T\cdot\boldsymbol{\Delta B}\right)\cdot\boldsymbol{u}$$</td>
</tr>
</table>

| | |
|---|---|
| $\boldsymbol{K}=E\cdot I\cdot\int_{x=0}^{L}\boldsymbol{N}^{''T}\cdot\boldsymbol{N}^{''}\cdot dx+K_{DS}\cdot\Delta\boldsymbol{B}^{T}\cdot\Delta\boldsymbol{B}$ | استخراج ماتریس سفتی با استفاده از جدول (۶) ضمیمه |
| $\Delta\boldsymbol{B}=\boldsymbol{N}_1^{'}-\boldsymbol{N}_2^{'}=\left\{b_{1,1}-b_{2,1},b_{1,2}-b_{2,2},b_{1,3}-b_{2,3},b_{1,4}-b_{2,4}\right\}$ | |
| $\Delta\boldsymbol{B}=-\Psi\cdot\left(2\cdot c_j+6\cdot x_0\cdot d_j\right)$ | |
| $\Delta\boldsymbol{B}=-\Psi\cdot\boldsymbol{S}$ | |
| $\boldsymbol{K}=E\cdot I\cdot\left(\int_{x=0}^{L}\boldsymbol{N}^{''T}\cdot\boldsymbol{N}^{''}\cdot dx+\Psi\cdot\boldsymbol{S}^{T}\cdot\boldsymbol{S}\right)$ | |
| $K(m,n)=E\cdot I\cdot\left(4\cdot c_m\cdot c_n\cdot\left(L+\alpha_0\right)+6\cdot\left(c_n\cdot d_m+c_m\cdot d_n\right)\cdot\left(L^2+2\cdot\alpha_1\right)+12\cdot d_m\cdot d_n\cdot\left(L^3+3\cdot\alpha_2\right)\right)$ | |

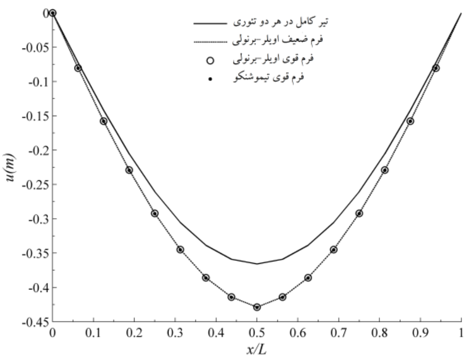
## ۳- مثال‌های کاربردی

تیری با مشخصات مادی $E=30Gpa$، $\nu=0$ . و مشخصات هندسی $b=0.1m$، $h=0.18m$، $k=5/6$ و $I=4.86\cdot10^{-5}$ مطابق با شکل (۲) تحت بارگذاری توزیعی یکنواخت قرار دارد. شکل (۳) یک مقایسه بین پاسخ‌های بدست آمده از تحلیل در دو فرم مختلف و دو تئوری متفاوت تیر را ارائه می‌کند. همچنین در این شکل اختلاف بین مکان ثانویه یک تیر کامل و یک تیر ناپیوسته مشخص می‌شود. با در نظر گرفتن $q=10\,kN/m$، $L=8m$ و مطابق با رفتار تغییر شکل تیرهای نازک [۲۶] می‌توان مشاهده نمود که پاسخ‌های تیر در دو تئوری بر یکدیگر منطبق هستند. این شکل نشان می‌دهد که یک ناپیوستگی بر روی تیر (در نقطه‌ی میانی آن و با ضریب سفتی $\gamma=0.266$) سبب کاهش مقاومت سازه خواهد شد. بطوریکه با توجه به شرایط مادی و هندسی، تغییر مکان در میانه‌ی تیر ناپیوسته نسبت به میانه‌ی تیر کامل حدود ۲۰٪ افزایش یافته است. در شکل‌های (۴-الف) و (۴-ب)، تاثیر اثرات برشی به ترتیب برای دو تیر کامل و ناپیوسته‌ی ضخیم ($L=0.5m$) تحت بارگسترده $q=10^4\,kN/m$ مورد بررسی قرار می‌گیرد. مقایسه این دو شکل نشان می‌دهد که تاثیر اثرات برشی بر روی تغییر شکل یک تیر کامل بیش از تیر ناپیوسته است. به عبارت دیگر اختلاف جواب‌ها بین دو تئوری اویلر-برنولی و تیموشنکو برای تیر ناپیوسته در نقطه ناپیوستگی $x_0=0.25m$ و با ضریب سفتی $\gamma=0.266$ حدود ۱۰٪ می‌باشد در حالیکه بر اساس شکل (۴ الف) چنانچه تیر کامل باشد این اختلاف جواب‌ها بین دو تئوری در میانه‌ی تیر حدود ۳۰٪ خواهد بود. از این نکته می‌توان نتیجه گرفت که تئوری اویلر-برنولی برای تیرهای ناپیوسته به علت ارائه‌ی پاسخ‌های نزدیک به تئوری تیموشنکو و همچنین تحلیل ساده‌تر نسبت به آن ممکن است در مسائل مختلف کاربردی‌تر باشد. شکل‌های (۴ ج) و (۴ د) به ترتیب تاثیر ناپیوستگی را بر روی نمودارهای شیب و انحناء نشان می‌دهند. وجود ناپیوستگی منجر به یک پله بر روی نمودار شیب و یک ناپیوستگی بر روی منحنی انحناء می‌شود.

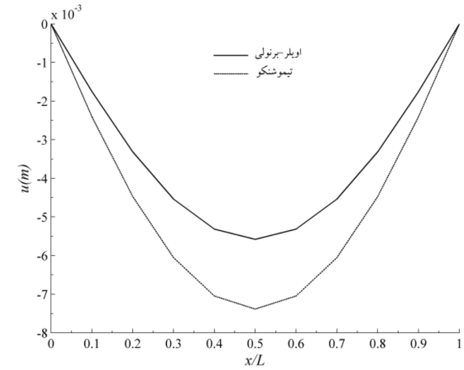
در شکل (۵) تاثیر مکان ناپیوستگی (با ضریب سفتی $\gamma=0.381$) بر روی رفتار خمشی تیرها مورد بررسی قرار می‌گیرد. در این شکل مشاهده می‌شود که چنانچه نقطه ناپیوستگی از میانه تیر به سمت تکیه گاه پیش رود، مکان ثانویه‌ی تیر ناپیوسته به مکان ثانویه‌ی تیر کامل همگرا خواهد شد.



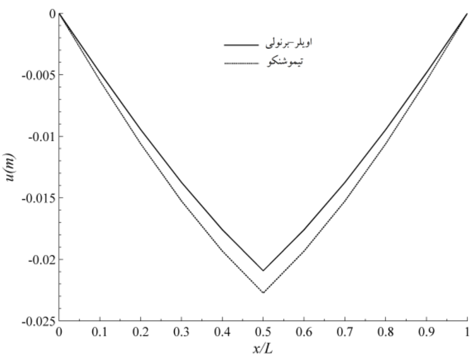

شکل (۲) تیر دارای ناپیوستگی تحت بارگذاری گسترده یکنواخت با شرایط مرزی ساده



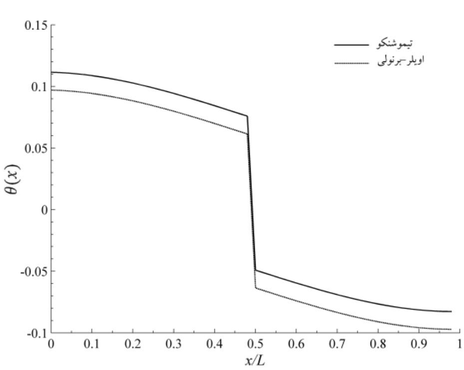

شکل (۳) جابجایی عرضی تیر با و بدون ناپیوستگی در فرم‌ها و تئوری‌های مختلف



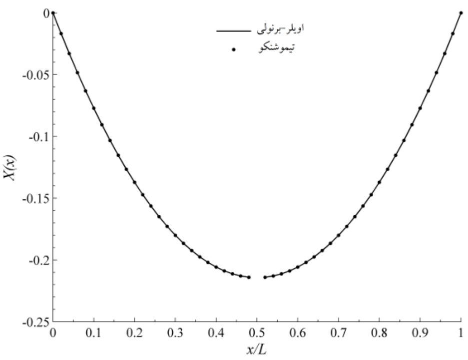

الف) مکان ثانویه تیر بدون ناپیوستگی




ب) مکان ثانویه تیر دارای ناپیوستگی

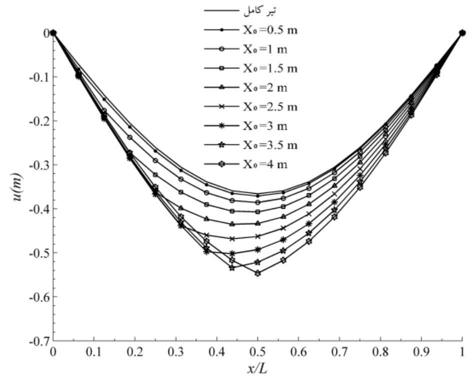



ج) شیب در تیر ناپیوسته




د) انحنا در تیر ناپیوسته

شکل (۴) تاثیر اثرات برشی بر روی رفتار استاتیکی تیرهای ضخیم




شکل (۵) تاثیر مکان ناپیوستگی بر روی جابجایی عرضی تیر

## ۴- نتیجه گیری

در این مقاله با مدلسازی ناپیوستگی تیر به کمک یک فنر پیچشی معادل، تغییر شکل استاتیکی تیر دارای ناپیوستگی مورد مطالعه قرار گرفت. با در نظر گرفتن دو فرم قوی و ضعیف در استخراج معادلات، یک بررسی جامع و تحلیلی از حیث فرمولبندی روابط ارائه گردید. همچنین در فرم قوی با یک جدول مقایسه‌ای، روابط دو تئوری اویلر-برنولی و تیموشنکو برای تیرهای دارای ناپیوستگی استخراج و تاثیر اثرات برشی بر روی ترم‌های جابجایی و شیب معرفی شدند. یک مقایسه بین پاسخ‌های مکان ثانویه در دو تیر کامل و ناپیوسته نشان دادند که برای تیرهای ناپیوسته، پاسخ تئوری تیر اویلر-برنولی به پاسخ تئوری تیر تیموشنکو نزدیک‌تر شده است به گونه‌ای که خطای ناشی از حذف پارامترهای

برشی در تیرهای ناپیوسته ضخیم می‌تواند با تقریب مناسبی چشم پوشی شود.

## فهرست علائم

| | |
|---|---|
| ثابت ضرب دلتای دیراک | $A$ |
| مدول یانگ (مدول الاستیک) ($kN/m^2$) | $E$ |
| مدول برشی ($kN/m^2$) | $G$ |
| تابع هویساید | $H(x)$ |
| گشتاور اینرسی سطح ($m^4$) | $I$ |
| سفتی ($kNm^2$) | $K$ |
| طول تیر (m) | $L$ |
| گشتاورخمشی تیر (kNm) | $M(x)$ |
| انرژی کرنشی | $U$ |
| نیروی برشی تیر (kN) | $V(x)$ |
| مساحت سطح مقطع ($m^2$) | $a$ |
| عرض تیر (m) | $b$ |
| جز حجمی ($m^3$) | $dv$ |
| ارتفاع تیر (m) | $h$ |
| ثابت اصلاح نیروی برشی | $k$ |
| سطر ماتریس سفتی | $m$ |
| ستون ماتریس سفتی | $n$ |
| بار گسترده تیر (kN/m) | $q(x)$ |
| جابجایی عرضی کل تیر (m) | $u(x)$ |
| جابجایی عرضی هر بخش (m) | $u_i$ |
| محور افقی (m) | $x$ |
| مکان ترک (m) | $x_0$ |
| محور عمودی (m) | $y$ |
| ماتریس سفتی (kN/m) | $\boldsymbol{K}$ |
| بردار تابع شکل (تابع درونیابی) | $\boldsymbol{f}$ |
| بردار جابجایی | $\boldsymbol{u}$ |

## علائم یونانی

| | |
|---|---|
| ضریب سفتی ناپیوستگی | $\gamma$ |
| تابع دلتای دیراک | $\delta(x)$ |
| کرنش | $\varepsilon$ |
| شیب تیر | $\theta(x)$ |
| تنش ($kN/m^2$) | $\sigma$ |
| انحنا تیر (1/m) | $\chi(x)$ |
| شیب گره | $\psi$ |

## بالانویس‌ها

| | |
|---|---|
| برگردان (ترانهادن) | $T$ |

## زیرنویس‌ها

| | |
|---|---|
| تیر | $Beam$ |
| فنر گسسته (پیچشی) | $DS$ |
| معادله ناهمگن | $e$ |
| معادله همگن | $h$ |
| بخش قبل و بعد از ناپیوستگی | $i$ |
| درجات آزادی هر گره | $j$ |
| فنر | $Spring$ |

## پیوست:

جدول (۴) استخراج ضرایب جابجایی ناهمگن

| | |
|---|---|
| روابط حاصل از مشتقات جابجایی ناهمگن | $u'_e(x)=d_2(x)+2\cdot d_3(x)\cdot x+3\cdot d_4(x)\cdot x^2$<br>$u''_e(x)=2\cdot d_3(x)+6\cdot d_4(x)\cdot x$<br>$u'''_e(x)=6\cdot d_4(x)$<br>$u''''_e(x)=6\cdot d'_4(x)$<br>$d'_1(x)+d'_2(x)\cdot x+d'_3(x)\cdot x^2+$<br>$d'_4(x)\cdot x^3=0$<br>$d'_2(x)+2\cdot d'_3(x)\cdot x+3\cdot d'_4(x)\cdot x^2=0$<br>$2\cdot d'_3(x)+6\cdot d'_4(x)=0$ |
| مشتق | $d'_4(x)=\dfrac{q(x)}{6\cdot E_0\cdot I_0}+\dfrac{1}{6}\cdot[\Phi]$ |

| | |
|---|---|
| ضرایب | $d_3^{'}(x) = -\dfrac{q(x)}{2\cdot E_0\cdot I_0}\cdot x - \dfrac{x}{2}\cdot[\Phi]$<br>$d_2^{'}(x) = \dfrac{q(x)}{2\cdot E_0\cdot I_0}\cdot x^2 + \dfrac{x^2}{2}\cdot[\Phi]$<br>$d_1^{'}(x) = -\dfrac{q(x)}{6\cdot E_0\cdot I_0}\cdot x^3 - \dfrac{x^3}{6}\cdot[\Phi]$ |

جدول (۵) استخراج توابع شکل تیر ناپیوسته

| | |
|---|---|
| رابطه خیز، توابع شکل و ثابت‌های آن‌ها | $u_i(x) = \boldsymbol{f}_{ij}\cdot\begin{Bmatrix} u_1 \\ \psi_1 \\ u_2 \\ \psi_2 \end{Bmatrix}$<br>$\boldsymbol{f}_{ij} = a_{ij} + b_{ij}\cdot x + c_{ij}\cdot x^2 + d_{ij}\cdot x^3$<br>$\begin{cases} \boldsymbol{f}_{ij} = f_{11}, f_{12}, f_{13}, f_{14}, f_{21}, f_{22}, f_{23}, f_{24} \\ a_{ij} = a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{24} \\ b_{ij} = b_{11}, b_{12}, b_{13}, b_{14}, b_{21}, b_{22}, b_{23}, b_{24} \\ c_{ij} = c_{11}, c_{12}, c_{13}, c_{14}, c_{21}, c_{22}, c_{23}, c_{24} \\ d_{ij} = d_{11}, d_{12}, d_{13}, d_{14}, d_{21}, d_{22}, d_{23}, d_{24} \end{cases}$ |
| روابط حاصل از اعمال شرایط مرزی در معادلات | $a_{1j} = \delta_{1j}$<br>$b_{1j} = \delta_{2j}$<br>$a_{2j} + b_{2j}\cdot L + c_j\cdot L^2 + d_j\cdot L^3 = \delta_{3j}$<br>$b_{2j} + 2\cdot c_j\cdot L + 3\cdot d_j\cdot L^2 = \delta_{4j}$<br>$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$ |
| روابط حاصل از معادلات پیوستگی | $d_{1j} = d_{2j} = d_j$<br>$c_{1j} = c_{2j} = c_j$<br>$b_{2j} = b_{1j} + 2\cdot\Psi\cdot c_j + 6\cdot\Psi\cdot x_0\cdot d_j$<br>$a_{2j} = a_{1j} - 2\cdot\Psi\cdot x_0\cdot c_j - 6\cdot\Psi\cdot x_0^2\cdot d_j$ |
| استخراج ثابت‌های توابع شکل المان | $a_{2j} = \delta_{1j} - 2\cdot\alpha_1\cdot c_j - 6\cdot\alpha_2\cdot d_j$<br>$b_{2j} = \delta_{2j} + 2\cdot\alpha_0\cdot c_j + 6\cdot\alpha_1\cdot d_j$<br>$\alpha_i = \Psi\cdot x_0^i$<br>$\begin{bmatrix} 2\cdot(\alpha_0 + L) & 3\cdot(2\cdot\alpha_1 + L^2) \\ 2\cdot\alpha_0\cdot L + L^2 - 2\cdot\alpha_1 & 6\cdot\alpha_1\cdot L + L^3 - 6\cdot\alpha_2 \end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix} c_j \\ d_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \delta_{4j} - \delta_{2j} \\ \delta_{3j} - \delta_{1j} - \delta_{2j}\cdot L \end{Bmatrix}$<br>$\begin{Bmatrix} c_j \\ d_j \end{Bmatrix} = \dfrac{1}{R}\cdot\begin{bmatrix} 6\cdot\alpha_2 - L^3 - 6\cdot L\cdot\alpha_1 & 3\cdot(2\cdot\alpha_1 + L^2) \\ 2\cdot L\cdot\alpha_0 + L^2 - 2\cdot\alpha_1 & -2\cdot(\alpha_0 + L) \end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix} \delta_{4j} - \delta_{2j} \\ \delta_{3j} - \delta_{1j} - \delta_{2j}\cdot L \end{Bmatrix}$<br>$R = 4\cdot\alpha_0\cdot L^3 + 12\cdot\alpha_0\cdot\alpha_2 - 12\cdot\alpha_1\cdot L^2 + L^4 + 12\cdot\alpha_2\cdot L - 12\cdot\alpha_1^2$ |

جدول (۶) مولفه های ماتریس سفتی تیر ناپیوسته

$$\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} \\ K_{12} & K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ K_{13} & K_{23} & K_{33} & K_{34} \\ K_{14} & K_{24} & K_{34} & K_{44} \end{bmatrix}$$

$$K_{11} = 4\cdot c_1^2\cdot L + 12\cdot d_1\cdot c_1\cdot L^2 + 12\cdot d_1^2\cdot L^3 + 4\cdot\alpha_0\cdot c_1^2 + 24\cdot\alpha_1\cdot c_1\cdot d_1 + 36\cdot\alpha_2\cdot d_1^2$$

$$K_{12} = 12\cdot d_1\cdot d_2\cdot L^3 + 6\cdot c_1\cdot d_2\cdot L^2 + 6\cdot d_1\cdot c_2\cdot L^2 + 4\cdot c_1\cdot c_2\cdot L + 4\cdot\alpha_0\cdot c_1\cdot c_2 + 12\cdot\alpha_1\cdot c_1\cdot d_2 + 12\cdot\alpha_1\cdot d_1\cdot c_2 + 36\cdot\alpha_2\cdot d_1\cdot d_2$$

$$K_{13} = 12\cdot d_1\cdot d_3\cdot L^3 + 6\cdot c_1\cdot d_3\cdot L^2 + 6\cdot d_1\cdot c_3\cdot L^2 + 4\cdot c_1\cdot c_3\cdot L + 4\cdot\alpha_0\cdot c_1\cdot c_3 + 12\cdot\alpha_1\cdot c_1\cdot d_3 + 12\cdot\alpha_1\cdot d_1\cdot c_3 + 36\cdot\alpha_2\cdot d_1\cdot d_3$$

$$K_{14} = 12\cdot d_1\cdot d_4\cdot L^3 + 6\cdot c_1\cdot d_4\cdot L^2 + 6\cdot d_1\cdot c_4\cdot L^2 + 4\cdot c_1\cdot c_4\cdot L + 4\cdot\alpha_0\cdot c_1\cdot c_4 + 12\cdot\alpha_1\cdot c_1\cdot d_4 + 12\cdot\alpha_1\cdot d_1\cdot c_4 + 36\cdot\alpha_2\cdot d_1\cdot d_4$$

$$K_{22} = 4\cdot c_2^2\cdot L + 12\cdot d_2\cdot c_2\cdot L^2 + 12\cdot d_2^2\cdot L^3 + 4\cdot\alpha_0\cdot c_2^2 + 24\cdot\alpha_1\cdot c_2\cdot d_2 + 36\cdot\alpha_2\cdot d_2^2$$

$$K_{23} = 12\cdot d_2\cdot d_3\cdot L^3 + 6\cdot c_2\cdot d_3\cdot L^2 + 6\cdot d_2\cdot c_3\cdot L^2 + 4\cdot c_2\cdot c_3\cdot L + 4\cdot\alpha_0\cdot c_2\cdot c_3 + 12\cdot\alpha_1\cdot c_2\cdot d_3 + 12\cdot\alpha_1\cdot d_2\cdot c_3 + 36\cdot\alpha_2\cdot d_2\cdot d_3$$

$$K_{24} = 12\cdot d_2\cdot d_4\cdot L^3 + 6\cdot c_2\cdot d_4\cdot L^2 + 6\cdot d_2\cdot c_4\cdot L^2 + 4\cdot c_2\cdot c_4\cdot L + 4\cdot\alpha_0\cdot c_2\cdot c_4 + 12\cdot\alpha_1\cdot c_2\cdot d_4 + 12\cdot\alpha_1\cdot d_2\cdot c_4 + 36\cdot\alpha_2\cdot d_2\cdot d_4$$

$$K_{33} = 4\cdot c_3^2\cdot L + 12\cdot d_3\cdot c_3\cdot L^2 + 12\cdot d_3^2\cdot L^3 + 4\cdot\alpha_0\cdot c_3^2 + 24\cdot\alpha_1\cdot c_3\cdot d_3 + 36\cdot\alpha_2\cdot d_3^2$$

$$K_{34} = 12\cdot d_3\cdot d_4\cdot L^3 + 6\cdot c_3\cdot d_4\cdot L^2 + 6\cdot d_3\cdot c_4\cdot L^2 + 4\cdot c_3\cdot c_4\cdot L + 4\cdot\alpha_0\cdot c_3\cdot c_4 + 12\cdot\alpha_1\cdot c_3\cdot d_4 + 12\cdot\alpha_1\cdot d_3\cdot c_4 + 36\cdot\alpha_2\cdot d_3\cdot d_4$$

$$K_{44} = 4\cdot c_4^2\cdot L + 12\cdot d_4\cdot c_4\cdot L^2 + 12\cdot d_4^2\cdot L^3 + 4\cdot\alpha_0\cdot c_4^2 + 24\cdot\alpha_1\cdot c_4\cdot d_4 + 36\cdot\alpha_2\cdot d_4^2$$

## مراجع:

[1] G. R. Irwin, Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate, *Journal of Applied Mechanics*, vol. 1, No. 24, 1957, pp. 361–364.

[2] A. D. Dimarogonas, C. A. Papadopulus, Vibration of cracked shafts in bending, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 91, No. 4, 1983, pp. 583–593.

[3] H. Okamura, H. W. Liu, C. Chorng-Shin, A cracked column under compression, *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 1, pp. 547–564, 1969.

[4] W. M. Ostachowicz, M. Krawczuk, Vibrational analysis of cracked beam, *Composite Structures*, vol. 36–22, 1990, pp. 245–250.

[5] M. Krawczuk, W. M. Ostachowicz, Influence of a crack on the dynamic stability of a column, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 167, No. 3, 1993, pp. 541–555.

[6] M. Skrinar, T. Pliberšek, New linear spring stiffness definition for displacement analysis of cracked beam elements, *Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics*, vol. 4, 2004, pp. 654–655.

[7] A. J. Dentsoras, A. D. Dimarogonas, Resonance controlled fatigue crack propagation in a beam under longitudinal vibrations, *International Journal of Fracture*, vol. 1, No. 23, 1983, pp. 15–22.

[8] T. G. Chondros, A. D. Dimarogonas, Identification of cracks in welded joints of complex structures, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 4, No. 64, 1980, pp. 531–538.

[9] P. F. Rizos, N. Aspragathos, A. D. Dimarogonas, Identification of crack location and magnitude in a cantilever beam from the vibration modes, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 3, No. 138, 1990, pp. 381–388.

[10] F. Bagarello, Multiplication of distribution in one dimension: possible approaches and applications to d-function and its derivatives, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 196, 1995, pp. 885–901.

[11] F. Bagarello, Multiplication of distribution in one dimension and a first application to quantum field theory, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 266, 2002, pp. 298–320.

[12] B. Biondi, S. Caddemi, Closed form solutions of Euler–Bernoulli beam with singularities, *International Journal of Solids and Structures*, vol. 42, 2005, pp. 3027–3044.

[13] B. Biondi, S. Caddemi, Euler–Bernoulli beams with multiple singularities in the flexural stiffness, *European Journal of Mechanics A/Solids*, vol. 26, 2007, pp. 789–809.

[14] A. Palmeri, A. Cicirello, Physically-based Dirac's delta functions in the static analysis of multi-cracked Euler–Bernoulli and Timoshenko beams, *International Journal of Solids and Structures*, vol. 48, 2011, pp.2184–2195.

[15] A. Cicirello, A. Palmeri, Static analysis of Euler-Bernoulli beams with multiple unilateral cracks under combined axial and transverse loads, *International Journal of Solids and Structures*, vol. 51, 2014, pp. 1020-1029.

[16] M. Dona, A. Palmeri, M. Lombardo, Exact closed-form solutions for the static analyses of multi-cracked gradient-elastic beams in bending, *International Journal of Solids and Structures*, vol. 51, 2014, pp. 2744-2753.

[17] S. A. Eftekhari, A note on mathematical treatment of the Dirac-delta function in the differential quadrature bending and forced vibration analysis of beams and rectangular plates subjected to concentrated loads, *Applied Mathematical Modelling*, In Press, Corrected Proof, 2015.

[18] G. Gounaris, A. D. Dimarogonas, A finite element of a cracked prismatic beam for structural analysis, *composite structures*, vol. 3, No. 28, 1988, pp. 301–313.

[19] M. Skrinar, A. Umek, Plane beam finite element with crack, *Journal of Gradbeni vestnik (in Slovenian)*, vol. 1, No. 2, 1996, pp. 2–7.

[20] M. Skrinar, On the application of a simple computational model for slender transversely cracked beams in buckling problems, *Computational Materials Science,* vol. 1, No. 39, 2007, pp. 242–249.

[21] J. N. Reddy, On locking-free shear deformable beam finite elements, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering,* vol. 149, 1997, pp. 113-132.

[22] M. Abromowitz, I. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, New York: Dover, 1965, pp. 773.

[23] M. Skrinar, Elastic beam finite element with an arbitrary number of transverse cracks, *Finite Elements in Analysis and Design,* vol. 45, 2009, pp. 181–189.

[24] T. R. Chandrupatla, A. D. Belegundu, *Introduction to Finite Elements in Engineering, Second Edition*, New Jersey: Prentice Hall, 1997, pp. 9-13.

[25] K. Rajagopalan, *Finite Element Buckling Analysis of Stiffened Cylindrical Shells*, A. A. Balkema: Rotterdam, 1993, pp. 13-25.

[26] J. N. Reddy, *an Introduction to Nonlinear Finite Element Analysis*, New York: Oxford 2005, pp. 87-126.