

## تحلیل کمانش نامتقارن ورق دایروی هدفمند با خواص وابسته به دما واقع بر بستر الاستیک

علیرضا نداف اسکویی<sup>۱\*</sup>، هادی محمدی هویه<sup>۲</sup>، وحید علایی<sup>۳</sup>، خداداد واحدی<sup>۴</sup>

\* نویسنده مسئول: [anadaf@ihu.ac.ir](mailto:anadaf@ihu.ac.ir)

### واژه‌های کلیدی

ورق دایروی، کمانش نامتقارن، مواد هدفمند، خواص وابسته به دما، بستر الاستیک.

تاریخ ارسال: ۹۴/۱۱/۰۲

تاریخ بازنگری: ۹۵/۰۵/۲۳

تاریخ پذیرش: ۹۵/۰۷/۱۶

### چکیده

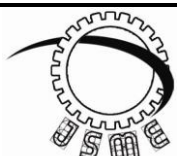
در این مقاله، کمانش نامتقارن ورق دایروی ساخته شده از مواد هدفمند، با خواص وابسته به دما که تحت تاثیر فشار شعاعی و دمای یکنواخت قرار دارد، مورد بررسی قرار گرفته است. این ورق بر روی محیط الاستیک تعبیه شده است که این محیط توسط دو مدل وینکلر و پاسترناک شبیه سازی شده اند. کلیه خواص مکانیکی ماده، بصورت غیرخطی با دما تغییر می نمایند. معادله تعادل سیستم با استفاده از نظریه کلاسیک، فرضیه غیرخطی فون-کارمن و اصل تغییر مکان مجازی دست آمده است. وجود شاخه‌های کمانش تخمین زده شده است و معادلات پایداری توسط معیار تعادل در مجاورت به دست آمده است. در ادامه معادلات پایداری توسط پارامترهای بدون بعد بی بعدسازی شده و توسط یک روش تحلیلی حل گردیده اند. تاثیر پارامترهایی از جمله ضرایب بستر الاستیک بر بار بحرانی کمانش ورق دایروی هدفمند، نسبت ضخامت ورق به شعاع خارجی و شاخص تابع توانی مورد مطالعه قرار گرفته است. نتایج حاصل از پژوهش حاضر با نتایج سایر مراجع مورد راستی آزمایی قرار گرفته و مطابقت بین آنها رضایت بخش است. نتایج این پژوهش نشان می دهند که افزایش دما باعث کاهش مدول یانگ و سفتی ماده هدفمند و در نتیجه کاهش بار بحرانی کمانش می شود. همچنین مشاهده می شود که افزایش ضرایب بستر الاستیک و وینکلر و پاسترناک باعث افزایش بار بحرانی کمانش می شود.

۱- دانشیار، دانشکده مکانیک، دانشگاه جامع امام حسین (ع)، تهران

۲- مدرس، گروه مکانیک، دانشگاه ایوانکی، سمنان

۳- کارشناس ارشد، دانشکده مکانیک، دانشگاه جامع امام حسین (ع)، تهران

۴- دانشیار، دانشکده مکانیک، دانشگاه جامع امام حسین (ع)، تهران



Journal of  
Solid Mechanics  
in Engineering

## Journal of Solid Mechanics in Engineering

<http://jsme.iaukhsh.ac.ir>



### Asymmetric Buckling Analysis of the Circular FGM Plates with Temperature-Dependent Properties under Elastic Medium

Alireza Nadaf Oskuee<sup>1,\*</sup>, Hadi Mohammadi Hooyeh<sup>2</sup>, Vahid Alaei<sup>3</sup>, Khodadad Vahedi<sup>4</sup>

\* Corresponding Author: [anadaf@ihu.ac.ir](mailto:anadaf@ihu.ac.ir)

#### Abstract:

In this paper, Asymmetric buckling analysis of functionally graded (FG) Circular plates with temperature dependent property that subjected to the uniform radial compression and thermal loading is investigated. This plate is on elastic medium that simulated by Winkler and Pasternak foundation. Mechanical properties of the plate are assumed to vary nonlinearly by temperature change. The equilibrium equations are obtained using the classical plate theory (CPT), Von Karman geometric nonlinearity and virtual displacement method. Existence of bifurcation buckling is examined and stability equations are obtained by means of the adjacent equilibrium criterion. The effects of elastic foundation coefficient, thickness to radius, power law index, and temperature-dependency of the material properties on critical buckling load of FG plates are presented. The results of the present work have been compared with the results of other investigator and the results of the comparison are very good. It is found that by increasing temperature, critical buckling load decreases. It is also concluded that the critical buckling load of (FG) Circular plates increases with an increase in the Winkler and Pasternak constants of elastic foundation.

#### Key words:

Circular plates,  
Asymmetric buckling,  
Functionally graded  
materials,  
Temperature-dependency,  
Elastic foundation.

1- Associate Professor, Department of Mechanical Engineering, Imam Hossein University, Tehran, Iran.

2- Lecturer, Department of Mechanical Engineering, Ivanki University, Semnan, Iran.

3- MSc Student, Department of Mechanical Engineering, Imam Hossein University, Tehran, Iran.

4- Associate Professor, Department of Mechanical Engineering, Imam Hossein University, Tehran, Iran.

## ۱- مقدمه

مواد هدفمند<sup>۶</sup> دسته‌ای از مواد کامپوزیتی هستند که خواص آنها به صورت پیوسته و تدریجی تغییر می‌کند. این مواد در خیلی از کاربردهای صنعتی شامل راکتورهای هسته‌ای (مواد تشکیل‌دهنده دیواره داخلی راکتور)، صنایع شیمیایی (غشا و کاتالیست‌ها)، استفاده در صنایع پزشکی (کاشت دندان مصنوعی، استخوان‌های مصنوعی)، صنایع الکترونیک و کامپیوتر (ساخت قطعات و مدارها برای تحمل دمای بالا) و سایر فناوری‌های نوین مانند موتورهای سرامیکی مورد استفاده قرار می‌گیرند. به دلیل کاربردهای فراوان مواد هدفمند، محققان علاقه‌مند به بررسی و تحقیق در مورد مشخصه‌های دینامیکی و استاتیکی این مواد می‌باشند. مواد هدفمند (FGM) اولین بار توسط گروهی از دانشمندان در ژاپن در سال ۱۹۸۴ به عنوان مواد تحمل‌کننده دما معرفی شده‌اند [۱]. ماده هدفمند ماده‌ای است که از دو یا چند جزء تشکیل شده و خواص آن به طور پیوسته با مکان تغییر می‌کند. این خاصیت با تغییر تدریجی ترکیب و درصد حجمی اجزای تشکیل‌دهنده ماده در طی ساخت آن به وجود می‌آید. لذا این مواد در زمره مواد ناهمگن<sup>۷</sup> هستند. از مزایای استفاده از این مواد این است که به علت تغییرات تدریجی در ساختار و خصوصیات ماده، مشکلات موجود در فصل مشترک دو ماده متفاوت حذف شده و تنش‌های حرارتی، تنش‌های پسماند و عامل تمرکز تنش، نسبت به مواد مرکب لایه‌ای<sup>۸</sup> بسیار کاهش می‌یابد. به همین خاطر در سال‌های اخیر به دلیل قابلیت‌های فراوان مواد هدفمند، استفاده از این مواد در صنایع پیشرفته بسیار گسترش یافته است.

تحلیل پایداری و مطالعه رفتار کمانش صفحات، همواره به عنوان یکی از مهمترین موضوعات در تحلیل سازه‌ها مورد توجه بوده است. اولین حل مسئله‌ی پایداری برای صفحات توسط برابان [۲] در سال ۱۸۹۱ انجام شده

است. در این تحقیق کمانش یک صفحه دایره‌ای با تکیه‌گاه گیردار تحت بار یکنواخت شعاعی بررسی شده است. تیموشنکو و گیر [۳] مسئله پایداری انواع سازه‌های مهندسی شامل ستون‌ها، قاب‌ها، تیرهای خمیده، صفحات و پوسته‌ها را مورد بررسی قرار داده‌اند. پس از آن المرث و براوش [۴]، تحلیل جامعی از مسأله‌ی کمانش ستون‌ها، صفحات، پوسته‌ها و روش‌های مختلف برای فرمول‌بندی معادلات تعادل غیرخطی و پایداری را مورد بررسی قرار داده‌اند.

یاماکی [۵] کمانش صفحات حلقوی با بارگذاری روی لبه‌ی داخلی و خارجی را مورد بررسی قرار داده و در نتایج خود نشان داده که کمانش در این حالت لزوماً در مد اول اتفاق نمی‌افتد. ردی و خدیر [۶] تحلیل کمانش و ارتعاشات آزاد صفحات مستطیلی مرکب چندلایه را با استفاده از نظریه‌ی کلاسیک<sup>۹</sup> و مرتبه اول<sup>۱۰</sup> و مرتبه‌ی سوم برشی<sup>۱۱</sup> در شرایط مرزی مختلف بررسی کردند. نجفی‌زاده و اسلامی [۸،۷]، کمانش ورق مدور نازک در معرض بارهای مکانیکی و حرارتی را مورد بررسی قرار داده‌اند. آنها در مطالعاتشان فقط به محاسبه کمانش متقارن<sup>۱۲</sup> پرداخته و با استفاده از قوانین کیرشهف برای ورق‌های نازک، معادله تعادل و پایداری را به دست آورده‌اند وانگ [۹] کمانش ورق مدور روی بستر الاستیک را به طور تحلیلی مورد بررسی قرار داده است. در تحلیل ایشان امکان وقوع مدهای کمانش نامتقارن وجود دارد. شریعت و اسلامی [۱۰] به بررسی تحلیلی کمانش ورق مستطیلی هدفمند، تحت اثر بارهای حرارتی و مکانیکی پرداختند. به طوری که ورق به طور جداگانه تحت تأثیر سه نوع بارگذاری مکانیکی و دو نوع بارگذاری حرارتی قرار گرفته است و معادله تعادل با استفاده از تئوری مرتبه‌ی سوم برشی به دست آمده است.

نجفی‌زاده و حیدری [۱۲،۱۱] به بررسی بارهای کمانش حرارتی و مکانیکی ورق نازک مدور هدفمند بر پایه

9- Classic Plate Theory

10- First Order Shear Deformation Theory

11- Third Order Shear Deformation Theory

12- Symmetric Buckling

4- Functionally Graded Materials

7- Non-Homogeneous

8- Composite

محاسبه شده است. خواص وابسته به دما است و با تغییر دما، خواص ترمومکانیکی ورق هدفمند نیز تغییر می‌کند.

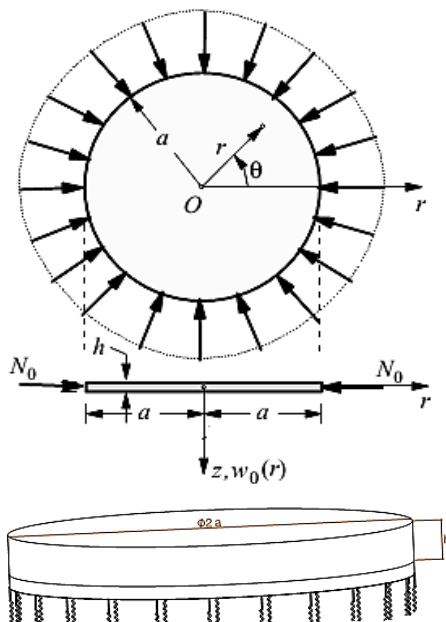
## ۲- هندسه ورق و خواص وابسته به دما

یک ورق نازک دایروی هدفمند به ضخامت  $h$  شعاع  $a$  و در مختصات قطبی  $(r, \theta, z)$  در نظر بگیرید که روی بستر الاستیک قرار گرفته است (شکل ۱). ورق تحت فشار شعاعی یکنواخت  $N$  و حرارت یکنواخت می‌باشد.

زمانی که خواص مواد در جهت ضخامت متغیر باشد، با استفاده از رابطه تابع توانی، توزیع کسر حجمی سرامیک  $V_c$  برابر است با [۱۱]:

$$V_c = \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h}\right)^k, \quad V_m = 1 - V_c \quad (1)$$

که  $h$  ضخامت ورق و  $z$  مختصات ضخامت اندازه‌گیری شده از صفحه میانی ورق می‌باشد.  $V_m$  و  $k$  به ترتیب بیانگر توزیع کسر حجمی فلز و شاخص تابع توانی می‌باشد. اگر در رابطه (۱) مقدار  $k$  برابر صفر باشد بیانگر سرامیک خالص ( $V_c=1$ ) و اگر  $k$  به سمت بی‌نهایت میل کند نشان دهنده ورق فلزی خالص است ( $V_c=0$ ).



شکل (۱) ورق نازک دایروی هدفمند روی بستر الاستیک تحت فشار شعاعی یکنواخت و حرارت یکنواخت

## ۱-۲- خواص وابسته به دما

معمولاً مواد هدفمند در محیط‌هایی با دمای بالا به کار می‌رود که در این صورت تغییرات قابل توجهی در خواص

نظریه‌ی غیرخطی فون-کارمن و جابجایی مرتبه سوم برشی پرداخته‌اند. شریعت و همکاران [۱۳] کمناش ورق‌های ناقص مواد هدفمند را با استفاده از تئوری کلاسیک مورد بررسی قرار داده‌اند. ماتسونانگا [۱۴] کمناش حرارتی ورق مستطیلی هدفمند بر پایه نظریه‌ی جابجایی مرتبه بالاتر را مورد مطالعه قرار داده‌است. کلاسز و همکاران [۱۵] کمناش ورق دایره‌ای تحت بار حرارتی یکنواخت متقارن با استفاده از روش ریلی-ریتر را مورد مطالعه قرار داده‌اند. غیاثیان و اسلامی [۱۶] به بررسی تحلیلی کمناش حرارتی ورق حلقوی- دایروی مواد هدفمند ضخیم پرداختند. آنها در مطالعه خود از تئوری مرتبه اول برشی استفاده کرده‌اند و در مورد نقطه دوگانگی ورق حلقوی ضخیم بحث کرده‌اند؛ و تأثیر پارامترهایی نظیر نسبت ضخامت ورق به شعاع داخلی، نسبت شعاع داخلی به خارجی و محیط حرارتی مختلف بر کمناش حرارتی ورق هدفمند را مورد مطالعه قرار داده‌اند. جواهری و اسلامی [۱۷] در سال ۲۰۰۲ به بررسی کمناش حرارتی یک ورق مستطیلی ساخته شده از مواد هدفمند پرداختند. در این تحقیق معادلات تعادل ورق بر اساس تئوری کلاسیک ورق‌های مستطیلی به دست آمده است. معادلات پایداری ورق مستطیلی به کمک روش‌های حساب تغییرات به دست آمده‌اند. ورق در معرض انواع بارگذاری حرارتی قرار می‌گیرد که از جمله آن می‌توان به افزایش درجه‌ی حرارت یکنواخت و توزیع درجه حرارت خطی در ضخامت ورق اشاره کرد. در هر یک از حالت‌های بارگذاری، یک رابطه صریح به شکل بسته برای دمای بحرانی ارائه کرده‌اند.

مطالعات نشان می‌دهد که تاکنون کمناش نامتقارن ورق‌های دایروی هدفمند بر روی بستر الاستیک، که در لبه تحت فشار شعاعی یکنواخت و حرارت قرار داشته و خواص آن وابسته به دما باشد مورد بررسی قرار نگرفته است. در این پژوهش با استفاده از نظریه‌ی کلاسیک و فرضیه‌ی غیرخطی فون-کارمن معادله تعادل به دست آمده است. سپس با به دست آوردن شکل عمومی رابطه پایداری و محاسبه مقدار ویژه این رابطه، مقدار بار بحرانی کمناش

با در نظر گرفتن ترموالاسیسته خطی و شرایط تنش مسطح برای ورق‌های نازک، روابط تنش- کرنش برابر است با [۸، ۷]:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \tau_{r\theta} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{rr} \\ \epsilon_{\theta\theta} \\ \gamma_{r\theta} \end{Bmatrix} (T - T_0) \begin{Bmatrix} \alpha \\ \alpha \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (۶)$$

که  $T$  و  $T_0$  به ترتیب بیانگر دمای اعمالی به ورق و دمای محیط می‌باشد. برآیندهای نیرو و گشتاور برابر است با [۱۱]:

$$(N_{rr} \quad N_{\theta\theta} \quad N_{r\theta}) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \tau_{r\theta} \end{Bmatrix} dz \quad (الف-۷)$$

$$(M_{rr} \quad M_{\theta\theta} \quad M_{r\theta}) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \begin{Bmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \tau_{r\theta} \end{Bmatrix} dz \quad (ب-۷)$$

با جایگزینی روابط (۶) در رابطه‌ی (۷) برآیندهای نیرو و گشتاور بر حسب تغییر مکان صفحه میانی برابر است با:

$$\begin{Bmatrix} N_{rr} \\ N_{\theta\theta} \\ N_{r\theta} \\ M_{rr} \\ M_{\theta\theta} \\ M_{r\theta} \end{Bmatrix} = \frac{1}{1-\nu} \times \begin{bmatrix} E_1 & \nu E_1 & 0 & E_2 & \nu E_2 & 0 \\ \nu E_1 & E_1 & 0 & \nu E_2 & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} E_1 & 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} E_2 \\ E_2 & \nu E_2 & 0 & E_3 & \nu E_3 & 0 \\ \nu E_2 & E_2 & 0 & \nu E_3 & E_3 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} E_2 & 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} E_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{0,r} + \frac{1}{2} w_{0,r}^2 \\ \frac{1}{r} u_0 + \frac{1}{r} v_{0,\theta} + \frac{1}{2r^2} w_{0,\theta}^2 \\ \frac{1}{r} u_{0,\theta} + v_{0,r} - \frac{1}{r} v_0 + \frac{1}{r} w_{0,\theta} w_{0,r} \\ -w_{0,rr} \\ \frac{1}{r^2} w_{0,\theta\theta} + \frac{1}{r} w_{0,r} \\ \frac{1}{r^2} w_{0,\theta} - \frac{1}{r} w_{0,r\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N^T \\ N^T \\ 0 \\ M^T \\ M^T \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (۸)$$

آن به وجود می‌آید. ضروری است برای دقت در پیش‌بینی خواص مواد، آنها را وابسته به دما در نظر بگیریم.

طبق قانون ویت<sup>۱۳</sup> هر خاصیت مکانیکی در ورق هدفمند مانند  $p$  را می‌توان بر حسب خواص اصلی آن مطابق رابطه زیر بیان کرد [۱۸]:

$$p_{eff}(z, T) = p_m(T) + p_{cm}(T) \left( \frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^k$$

$$p_{cm}(T) = p_c(T) - p_m(T) \quad (۲)$$

که  $p_m$  و  $p_c$  به ترتیب بیانگر خواص فلز و سرامیک می‌باشد. در رابطه (۲)، خواص مکانیکی مانند مدول یانگ  $E$  و ضریب انبساط حرارتی  $\alpha$  وابسته به دما فرض شده و می‌توان با یک تابع غیرخطی از دما آن را نشان داد [۱۹]:

$$p(T) = p_0(p_{-1}T^{-1} + 1 + p_1T + p_2T^2 + p_3T^3) \quad (۳)$$

که  $T$  دمای اندازه‌گیری شده در مقیاس کلونین و  $p_i$  ضرایب وابستگی دمایی می‌باشد. توزیع دما به‌طور یکنواخت فرض شده است به‌طوری‌که ورق دایروی هدفمند در دمای اولیه  $T_0$  قرار دارد و دمای آن به‌طور یکنواخت و به میزان  $T = T_0 + \Delta T$  افزایش می‌یابد.

### ۳- معادلات حاکم

با توجه به فرضیه‌ی کلاسیک برای ورق‌های نازک، میدان تغییر مکان [۸، ۷] برابر است با:

$$u(r, \theta, z) = u_0(r, \theta) - z w_{0,r}(r, \theta)$$

$$v(r, \theta, z) = v_0(r, \theta) - \frac{z}{r} w_{0,\theta}(r, \theta) \quad (۴)$$

$$w(r, \theta, z) = w_0(r, \theta)$$

در رابطه (۴)  $u_0$ ،  $v_0$  و  $w_0$  به ترتیب بیانگر تغییر مکان روی صفحه میانی ( $z = 0$ ) در جهت  $r$ ،  $\theta$  و  $z$  است. بر پایه فرضیه فون-کارمن در مختصات قطبی، رابطه کرنش- تغییر مکان غیرخطی برابر است با [۸، ۷]:

$$\epsilon_{rr} = u_{,r} + \frac{1}{2} (w_{,r})^2$$

$$\epsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r} v_{,\theta} + \frac{1}{r} u + \frac{1}{2r^2} (w_{,\theta})^2$$

$$\epsilon_{r\theta} = \frac{1}{r} u_{,\theta} + v_{,r} - \frac{1}{r} v + \frac{1}{r} w_{,\theta} w_{,r} \quad (۵)$$

همچنین  $K_g$  و  $K_w$  به ترتیب بیان گر ضریب وینکلر<sup>۱۵</sup> و ضریب پسترناک<sup>۱۶</sup> بستر الاستیک می باشند. با جای گذاری روابط (۵) و (۷) در رابطه (۱۰) و انجام عملیات ریاضی، معادلات تعادل ورق دایروی هدفمند مطابق زیر به دست می آید:

$$\begin{aligned} \delta u_0: N_{rr,r} + \frac{1}{r} N_{r\theta,\theta} + \frac{1}{r} (N_{rr} - N_{\theta\theta}) &= 0 \\ \delta v_0: N_{r\theta,r} + \frac{1}{r} N_{r\theta} + \frac{1}{r} N_{\theta\theta,\theta} &= 0 \\ \delta w_0: M_{rr,rr} + \frac{2}{r} M_{rr,r} + \frac{1}{r^2} M_{\theta\theta,\theta\theta} & \\ - \frac{1}{r} M_{\theta\theta,r} + \frac{2}{r^2} M_{r\theta,\theta} + \frac{2}{r} M_{r\theta} & \\ + N_{rr} w_{0,rr} & \\ + N_{\theta\theta} \left( \frac{1}{r} w_{0,r} + \frac{1}{r^2} w_{0,\theta\theta} \right) & \\ + 2 N_{r\theta} \left( \frac{1}{r} w_{0,r\theta} - \frac{1}{r^2} w_{0,\theta} \right) & \\ + K_w w_0 & \\ - K_g \left( w_{0,r} + r w_{0,rr} \right. & \\ \left. + \frac{1}{r} (w_{0,\theta\theta}) \right) &= 0 \end{aligned} \quad (11)$$

#### ۴- تغییر مکان و برآیند تنش ها قبل از کمانش

در قسمت قبلی معادلات تعادل برای ورق دایروی هدفمند تحت فشار شعاعی و حرارت یکنواخت به دست آمده است. با حذف جمله های غیرخطی و مرتبه بالا از رابطه (۸) و بازنویسی معادله تعادل شاهد وضعیت قبل از کمانش خواهیم بود. در هر شرایط مرزی، برای ایجاد بار کمانشی باید خیز ورق قبل از کمانش صفر باشد  $(w_0^0(r, \theta) = 0)$ . از طرفی با توجه به بارگذاری متقارن، تغییر مکان در راستای  $\theta$  برابر صفر است  $(v_0^0(r, \theta) = 0)$ .

با حذف  $w_0$  و  $v_0$  از رابطه (۸) برآیندهای نیرو برابر است با:

$$\begin{aligned} N_{rr} &= \frac{E_1}{1-\nu^2} \left( u_{0,r} + \frac{\nu}{r} u_0 \right) - N^T \\ N_{\theta\theta} &= \frac{E_1}{1-\nu^2} \left( \nu u_{0,r} + \frac{1}{r} u_0 \right) - N^T \\ N_{r\theta} &= 0 \end{aligned} \quad (12)$$

$N^T$  و  $M^T$  بیان گر برآیندهای نیرو و گشتاور حرارتی و  $E_2, E_3$  و  $E_1$  ثابت هایی هستند که طبق روابط زیر محاسبه می شوند:

$$\begin{aligned} E_1 &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} E(z, T) dz = h \left( E_m(T) + \frac{E_{cm}(T)}{k+1} \right) \\ E_2 &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z E(z, T) dz = h^2 E_{cm}(T) \left( \frac{1}{k+2} - \frac{1}{2k+2} \right) \\ E_3 &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2 E(z, T) dz \\ &= h^3 \left( \frac{1}{12} E_m(T) + E_{cm}(T) \times \left( \frac{1}{k+3} - \frac{1}{k+2} + \frac{1}{4k+4} \right) \right) \end{aligned} \quad (9-الف)$$

$$N^T = \frac{1}{1-\nu} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} E(z, T) \alpha(z, T) (T - T_0) dz$$

$$M^T = \frac{1}{1-\nu} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z E(z, T) \alpha(z, T) (T - T_0) dz \quad (9-ب)$$

#### ۳-۱- معادلات تعادل

معادله تعادل ورق دایروی هدفمند روی یک محیط الاستیک تحت فشار شعاعی و حرارت یکنواخت، با استفاده از حالت استاتیکی اصل تغییر مکان مجازی<sup>۱۴</sup> به دست می آید. انرژی پتانسیل کل ورق  $(\delta V)$  برابر است با مجموع انرژی کرنشی ورق  $(\delta U)$ ، انرژی پتانسیل ناشی از بستر الاستیک  $(\delta \Omega_f)$  و انرژی پتانسیل ناشی از فشار شعاعی یکنواخت  $(\delta \Omega_N)$  که به لبه خارجی اعمال می شود:

$$\delta V = \delta U + \delta \Omega_f + \delta \Omega_N \quad (10-الف)$$

$$\begin{aligned} \delta V &= \int_0^a \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_{rr} \delta \varepsilon_{rr} \\ &\quad + \sigma_{\theta\theta} \delta \varepsilon_{\theta\theta} + \tau_{r\theta} \delta \gamma_{r\theta}) r dz d\theta dr \\ &\quad + \int_0^a \int_0^{2\pi} \left( K_w w_0 \delta w_0 \right. \\ &\quad \left. + K_g \left( w_{0,r} \delta w_{0,r} + \frac{1}{r^2} w_{0,\theta} \delta w_{0,\theta} \right) \right) r dr d\theta \\ &\quad + \int_0^{2\pi} N a \delta u(a) d\theta = 0 \end{aligned} \quad (10-ب)$$

15- Winkler constant  
16- Pasternak constant

14-Virtual Displacement Method

### ۵- معادلات پایداری

می‌توان از معیار تعادل در مجاورت برای به دست آوردن معادله پایداری استفاده کرد [۱۹، ۱۲، ۱۱]. برای این منظور تغییر مکان یک نقطه قبل از تعادل را با  $w_0, v_0, u_0$  و مؤلفه‌ی تغییر مکان لحظه‌ای نزدیک تعادل را با  $w_0^1, v_0^1, u_0^1$  نشان می‌دهند؛ بنابراین مجموع تغییر مکان در لحظه تعادل برابر است با:

$$\begin{aligned} u_0 &= u_0^0 + u_0^1 \\ v_0 &= v_0^0 + v_0^1 \\ w_0 &= w_0^0 + w_0^1 \end{aligned} \quad (۱۹-الف)$$

مشابه مؤلفه‌های تغییر مکان، برآیندهای نیرو و گشتاور نیز به دو جمله قبل از کمانش و در مجاورت کمانش تقسیم می‌شوند.

$$\begin{aligned} N_{rr0} &= N_{rr0}^0 + N_{rr0}^1 \\ N_{\theta\theta0} &= N_{\theta\theta0}^0 + N_{\theta\theta0}^1 \\ N_{r\theta0} &= N_{r\theta0}^0 + N_{r\theta0}^1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{rr0} &= M_{rr0}^0 + M_{rr0}^1 \\ M_{\theta\theta0} &= M_{\theta\theta0}^0 + M_{\theta\theta0}^1 \\ M_{r\theta0} &= M_{r\theta0}^0 + M_{r\theta0}^1 \end{aligned} \quad (۱۹-ب)$$

برای به دست آوردن معادله پایداری در جهت  $w$  باید نکاتی را مدنظر داشت. همان‌طور که در بخش قبل اشاره شد در لحظه قبل از کمانش، ورق مسطح و ثابت در نظر گرفته می‌شود و تغییر مکان در جهت ضخامت برابر صفر است ( $w_0^0, w_{0,r}^0, w_{0,\theta}^0 = 0$ ). از آنجایی که در نقاط همسایگی لحظه تعادل مؤلفه‌های تغییر مکان  $w_0^1, v_0^1, u_0^1$  و برآیندهای نیرو  $N_{rr0}^1, N_{\theta\theta0}^1, N_{r\theta0}^1$  بسیار کوچک هستند جمله‌های شامل حاصل ضرب آنها به علت کوچکی قابل صرف نظر کردن هستند. با قرار دادن روابط (۱۸، ۱۹) در معادلات تعادل و انجام ساده سازی‌های لازم معادلات پایداری مطابق زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} N_{rr}^1 + \frac{1}{r} N_{r\theta,\theta}^1 + \frac{1}{r} (N_{rr}^1 - N_{\theta\theta}^1) &= 0 \\ N_{r\theta,r}^1 + \frac{2}{r} N_{r\theta}^1 + \frac{1}{r} N_{\theta\theta,\theta}^1 &= 0 \\ M_{rr,rr}^1 + \frac{2}{r} M_{rr,r}^1 + \frac{1}{r^2} M_{\theta\theta,\theta\theta}^1 - \frac{1}{r} M_{\theta\theta,r}^1 + \\ \frac{2}{r^2} M_{r\theta,\theta}^1 + \frac{2}{r} M_{r\theta}^1 + N_{rr}^0 w_{0,rr}^1 + \\ N_{\theta\theta}^0 \left( \frac{1}{r} w_{0,r}^1 + \frac{1}{r^2} w_{0,\theta\theta}^1 \right) + 2 N_{r\theta}^0 \left( \frac{1}{r} w_{0,r\theta}^1 - \right. \\ \left. \frac{1}{r^2} w_{0,\theta}^1 \right) + K_w w_0^1 - K_g \left( w_{0,r}^1 + r w_{0,rr}^1 + \right. \end{aligned}$$

با قرار دادن رابطه (۱۲) در اولین معادله تعادل رابطه (۱۱)، معادله اولری برحسب  $u_0$  حاصل خواهد شد. با حل معادله اولری، تغییر مکان در جهت شعاع برابر است با:

$$u_0(r, \theta) = C_1 r + \frac{C_2}{r} \quad (۱۳)$$

بنابراین برای به دست آوردن ضرایب  $C_1$  و  $C_2$ ، باید از شرایط مرزی طبیعی و هندسی در معادله تعادل در جهت شعاع استفاده شود. شرایط مرزی برابر است با:

$$\begin{aligned} N_{rr}(a) &= -N \\ u_0(0) &= finite \end{aligned} \quad (۱۴)$$

با اعمال شرط مرزی (۱۴) در رابطه (۱۳) داریم:

$$\begin{aligned} u_0(0) = C_1 \times 0 + \frac{C_2}{0} = finite \rightarrow C_2 &= 0 \\ \frac{E_1}{1-\nu} C_1 = -N + N^T \rightarrow C_1 &= \frac{1-\nu}{E_1} (-N + N^T) \end{aligned} \quad (۱۵)$$

با به دست آوردن ضرایب  $C_1$  و  $C_2$ ، تغییر مکان در راستای شعاعی به صورت زیر خواهد شد:

$$u_0(r, \theta) = \frac{1-\nu}{E_1} (-N + N^T) r \quad (۱۶)$$

در نتیجه تغییر مکان قبل از کمانش ورق در هر سه جهت برابر است با:

$$\begin{aligned} v_0^0(r, \theta) &= 0, \quad w_0^0(r, \theta) = 0 \\ u_0^0(r, \theta) &= \frac{1-\nu}{E_1} (-N + N^T) r \end{aligned} \quad (۱۷)$$

که اندیس <sup>۰</sup> بیانگر وضعیت قبل از کمانش است. تغییر مکان در راستای شعاعی ورق به بار حرارتی  $N^T$  و فشار شعاعی یکنواخت  $N$  وابسته است. اکنون با جایگذاری رابطه (۱۷) در رابطه (۱۲) برآیندهای تنش قبل از کمانش به دست می‌آید:

$$N_{rr}^0 = N_{\theta\theta}^0 = -N, \quad N_{r\theta}^0 = 0 \quad (۱۸)$$

رابطه (۱۸) نشان می‌دهد وقتی ورق دایروی در محیط حرارتی و تحت حرارت یکنواخت باشد و لبه آن تحت فشار شعاعی یکنواخت باشد، به دلیل مقید نبودن در جهت شعاعی و داشتن تغییر مکان  $u_0(r, \theta)$ ، اثر بار حرارتی ( $N^T$ ) حذف می‌شود و فشار اعمالی به لبه‌ها باعث ایجاد کمانش مکانیکی می‌شود و در این حالت حرارت تنها بر روی خواص مواد تأثیر می‌گذارد.

$$D_k \left( w_{0,rrrr}^1 + \frac{2}{r} w_{0,rrr}^1 - \frac{1}{r^2} w_{0,rr}^1 + \frac{1}{r^3} w_{0,r}^1 + \frac{2}{r^2} w_{0,rr\theta\theta}^1 - \frac{2}{r^3} w_{0,r\theta\theta}^1 + \frac{4}{r^4} w_{0,\theta\theta}^1 + \frac{1}{r^4} w_{0,\theta\theta\theta\theta}^1 - N_{rr}^0 w_{0,rr}^1 - N_{\theta\theta}^0 \left( \frac{1}{r} w_{0,r}^1 + \frac{1}{r^2} w_{0,\theta\theta}^1 \right) + 2N_{r\theta}^0 \left( \frac{1}{r} w_{0,r\theta}^1 - \frac{1}{r^2} w_{0,\theta}^1 \right) + K_w w_0^1 - K_g \left( w_{0,r}^1 + r w_{0,rr}^1 + \frac{1}{r} w_{0,\theta\theta}^1 \right) = 0 \quad (22)$$

که  $D_0$  و  $D_k$  به ترتیب سختی خمشی ورق هدفمند و سختی خمشی ورق سرامیکی می باشد و به صورت زیر تعریف می شوند:

$$D_k = \frac{E_1 E_3 - E_2^2}{E_1 (1 - \nu^2)} \quad (\text{الف-23})$$

$$D_0 = \frac{1}{12(1 - \nu^2)} h^3 E_c(T) \quad (\text{ب-23})$$

### ۱-۱-۵ حل معادله پایداری

در این قسمت یک حل تحلیلی برای معادله (۲۲) ارائه می شود. با جای گذاری نیروهای قبل از کمانش (۱۸) در رابطه ی (۲۲):

$$D_k \left( w_{0,rrrr}^1 + \frac{2}{r} w_{0,rrr}^1 - \frac{1}{r^2} w_{0,rr}^1 + \frac{1}{r^3} w_{0,r}^1 + \frac{2}{r^2} w_{0,rr\theta\theta}^1 - \frac{2}{r^3} w_{0,r\theta\theta}^1 + \frac{4}{r^4} w_{0,\theta\theta}^1 + \frac{1}{r^4} w_{0,\theta\theta\theta\theta}^1 + N w_{0,rr}^1 + N \left( \frac{1}{r} w_{0,r}^1 + \frac{1}{r^2} w_{0,\theta\theta}^1 \right) + K_w w_0^1 - K_g \left( \frac{1}{r} w_{0,r}^1 + w_{0,rr}^1 + \frac{1}{r^2} w_{0,\theta\theta}^1 \right) = 0 \quad (24)$$

و با ساده سازی انجام شده، معادله نهایی برابر است با:

$$D_k \nabla^4 w_0^1 + (N - K_g) \nabla^2 w_0^1 + K_w w_0^1 = 0 \quad (\text{الف-25})$$

$$\left\{ \left( \left( \frac{\partial}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta^2} \right) \left( \frac{\partial}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta^2} + \frac{N - K_g}{D_k} \right) \right) \frac{K_w}{D_k} \right\} w_0^1(r, \theta) = 0 \quad (\text{ب-25})$$

$$\frac{1}{r} (w_{0,\theta\theta}^1) = 0 \quad (20)$$

برای به دست آوردن معادلات پایداری بر حسب مؤلفه ی تغییرمکان باید رابطه (۸) را در روابط پایداری (۲۰) قرار داده و جملات غیرخطی و مرتبه بالای مؤلفه ی تغییرمکان را حذف نماییم. معادلات به دست آمده، شامل سه رابطه پایداری است که طبق نظریه کلاسیک برای ورق دایروی هدفمند روی بستر الاستیک به صورت زیر قابل بیان است:

$$\frac{E_1}{1 - \nu^2} \left( u_{0,rr}^1 + \frac{1}{r} u_{0,r}^1 - \frac{1}{r^2} u_0^1 - \frac{1}{r^2} v_{0,\theta}^1 + \frac{\nu}{r} v_{0,r\theta}^1 \right) + \frac{E_1}{2(1 + \nu)} \left( \frac{1}{r^2} u_{0,\theta\theta}^1 + \frac{1}{r} v_{0,r\theta}^1 - \frac{1}{r^2} v_{0,\theta}^1 \right) - \frac{E_2}{1 - \nu^2} \left( w_{0,rrr}^1 - \frac{1}{r^2} w_{0,r}^1 + \frac{1}{r} w_{0,rr}^1 - \frac{2}{r^3} w_{0,\theta\theta}^1 + \frac{1}{r^2} w_{0,\theta\theta}^1 \right) = 0 \quad (\text{الف-21})$$

$$\frac{E_1}{1 - \nu^2} \left( \frac{1}{r} u_{0,r\theta}^1 + \frac{1}{r^2} (u_{0,\theta}^1 + v_{0,\theta\theta}^1) \right) + \frac{E_1}{1 - \nu^2} \left( \frac{1 - \nu}{2} \left( -\frac{1}{r} u_{0,r\theta}^1 + \frac{1}{r^2} u_{0,\theta}^1 + v_{0,rr}^1 + \frac{1}{r} v_{0,r}^1 - \frac{1}{r^2} v_0^1 \right) \right) - \frac{E_2}{1 - \nu^2} \left( \frac{1}{r} w_{0,rr\theta}^1 + \frac{1}{r} w_{0,rr}^1 - \frac{2}{r^3} w_{0,\theta\theta}^1 + \frac{1}{r^2} (w_{0,r\theta}^1 + w_{0,\theta\theta\theta}^1) \right) = 0 \quad (\text{ب-21})$$

$$\frac{E_2}{1 - \nu^2} \left( u_{0,rrr}^1 + \frac{2}{r} u_{0,rr}^1 - \frac{1}{r^2} u_{0,r}^1 - \frac{1}{r^3} u_0^1 + \frac{1}{r^3} u_{0,\theta\theta}^1 + \frac{1}{r^2} u_{0,r\theta\theta}^1 - \frac{1}{r^2} v_{0,r\theta}^1 + \frac{1}{r^3} v_{0,\theta}^1 + \frac{1}{r^3} v_{0,\theta\theta\theta}^1 + \frac{1}{r} v_{0,rr\theta}^1 \right) - \frac{E_3}{1 - \nu^2} \left( w_{0,rrrr}^1 + \frac{2}{r} w_{0,rrr}^1 - \frac{1}{r^2} w_{0,rr}^1 + \frac{1}{r^3} w_{0,r}^1 + \frac{2}{r^2} w_{0,rr\theta\theta}^1 - \frac{2}{r^3} w_{0,r\theta\theta}^1 + \frac{4}{r^4} w_{0,\theta\theta}^1 + \frac{1}{r^4} w_{0,\theta\theta\theta\theta}^1 + N_{rr}^0 w_{0,rr}^1 + N_{\theta\theta}^0 \left( \frac{1}{r} w_{0,r}^1 + \frac{1}{r^2} w_{0,\theta\theta}^1 \right) + 2N_{r\theta}^0 \left( \frac{1}{r} w_{0,r\theta}^1 - \frac{1}{r^2} w_{0,\theta}^1 \right) + K_w w_0^1 - K_g \left( w_{0,r}^1 + \frac{1}{r} w_{0,rr}^1 + \frac{1}{r^2} w_{0,\theta\theta}^1 \right) = 0 \quad (\text{ج-21})$$

با مشتق گیری از روابط (الف-۲۱) و (ب-۲۱) بترتیب

نسبت به  $r$  و  $\theta$  و سپس ضرب مجموع دو عبارت حاصله در ترم  $\frac{-E_2}{rE_1(1-\nu^2)}$ ، رابطه (\*) (موجود در پیوست) حاصل خواهد شد. با جمع رابطه (ج-۲۱) و (\*) معادله نهایی بر حسب تغییرمکان عرضی  $w_0^1$  بصورت زیر حاصل می شود:



نتیجه آن به یک معادله غیرخطی بر حسب  $n^p$  می‌رسیم. با محاسبه ریشه مثبت معادله حاصل به ازای  $n$  های مختلف و انتخاب کمترین مقدار آن بار بحرانی کماتش  $n_{cr}^p$  به دست می‌آید.

برای به دست آوردن بار بحرانی کماتش، با قراردادن رابطه (۲۳-ب) در رابطه بی‌بعد (۲۶)، رابطه نهایی بار بحرانی کماتش ورق دایروی برابر است با:

$$N_{cr} = \frac{h}{12(1-\nu^2)} E_c(T) \delta^2 n_{cr}^p \quad (۳۲)$$

### ۶- بررسی نتایج

برای نشان دادن درستی روش مورد مطالعه در این مقاله، مقدار پارامتر بی‌بعد بار بحرانی کماتش  $(\sqrt{n_{cr}})^{18}$  ورق همگن ایزوتروپیک با مقدار آن در مرجع [۲۰] مقایسه شده است. در جدول (۱) مقدار پارامتر بی‌بعد بار بحرانی کماتش برای شرایط مرزی گیردار نشان داده شده است. با توجه به جدول (۱) مشاهده می‌شود بین نتایج به دست آمده از کار حاضر و مطالعات گزارش شده توسط وانگ و همکاران [۲۰] توافق خوبی وجود دارد.

برای به دست آوردن نتایج در کار حاضر از ماده ترکیبی فولاد ضدزنگ<sup>۱۹</sup> و نیتريد سيليكون<sup>۱۸</sup> استفاده شده است. به منظور مدل کردن تأثیر خواص مواد هدفمند، خواص باید وابسته به دما باشد. نسبت پواسون ثابت و برابر ۰/۳ است. خصوصیات ماده مورد استفاده در جدول (۲) آمده است [۱۶].

جدول (۱) مقایسه پارامتر بی‌بعد بحرانی کماتش ورق همگن ایزوتروپیک با مرجع [۲۰]

شرط	$k_{11}$		
مرزی	۲۵۶	۱۲۹۶	۴۰۹۶
مرجع [۲۰]	۶/۳۷۳	۸/۹۶۸	۱۱/۷۶۸
گیردار	۶/۳۷۳	۸/۹۶۸	۱۱/۷۶۸
نتایج حاضر	۶/۳۷۳	۸/۹۶۸	۱۱/۷۶۸

16- Non-Dimensional critical buckling parameter

17- Stainless Steel

18- Silicon Nitride

برای حل مسأله، بی‌بعد سازی‌های زیر انجام می‌شود:

$$\bar{r} = \frac{r}{a}, \quad \delta = \frac{h}{a}, \quad k_g = \frac{K_g a^2}{D_0} \quad (۲۶)$$

$$k_w = \frac{K_w a^4}{D_0}, \quad d = \frac{D_k}{D_0}, \quad n^p = \frac{N a^2}{D_0}$$

با توجه به اینکه بارگذاری متقارن است ولی ممکن است مدهای کماتش نامتقارن<sup>۱۷</sup> باشد [۱۹، ۱۸، ۹] شکل کماتش ورق مطابق زیر تعریف می‌شود [۹]:

$$w(\bar{r}, \theta) = w_n(\bar{r}) \cos n\theta \quad (۲۷)$$

که  $n$  بیانگر شماره مد کماتش است. به ازای  $n = 0$  کماتش متقارن و برای  $n > 0$  کماتش نامتقارن است. حال با قرار دادن رابطه (۲۷) در رابطه (۲۵) و استفاده از پارامترهای بی‌بعد رابطه (۲۶)، معادله دیفرانسیل معمولی زیر به دست می‌آید:

$$\left( \frac{d}{d\bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{d}{d\bar{r}} - \frac{n^2}{\bar{r}^2} + k_1^2 \right) \left( \frac{d}{d\bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{d}{d\bar{r}} - \frac{n^2}{\bar{r}^2} + k_2^2 \right) w_n(\bar{r}) = 0 \quad (۲۸)$$

با حل معادله دیفرانسیل معمولی رابطه (۲۸)، تغییر مکان در راستای ضخامت یا همان خیز ورق در لحظه کماتش برابر است با:

$$w_n(\bar{r}) = C_{1n} J_n(k_1 \bar{r}) + C_{2n} J_n(k_2 \bar{r}) \quad (۲۹)$$

که مقادیر  $k_1$  و  $k_2$  برابر است با:

$$k_{1,2} = \sqrt{\frac{n^p - k_g \pm \sqrt{(n^p - k_g)^2 - 4dk_w}}{2d}} \quad (۳۰)$$

در این مقاله به بررسی کماتش ورق‌های دایروی هدفمند که در شرایط مرزی گیردار قرار دارند پرداخته شده است.

شرایط مرزی گیردار:

$$w_n(\bar{r}) = 0, \quad \frac{\partial w_n(\bar{r})}{\partial \bar{r}} = 0 \quad (۳۱)$$

با قرار دادن شرایط مرزی (۳۱) در معادله خیز، ضرایب رابطه (۲۹) و در نتیجه  $w_n(\bar{r})$  برابر صفر می‌شود که جواب بدیهی مسأله است. برای به دست آوردن جواب غیربدیهی، باید دترمینان ماتریس ضرایب را برابر صفر قرار دهیم که در

17- Asymmetric Buckling

در جدول (۳) بار بحرانی کمانش ورق دایروی هدفمند ( $N_{cr}$ ) روی بستر الاستیک و بدون بستر الاستیک (ضرایب بستر الاستیک برابر صفر در نظر گرفته شده است) و در دماهای مختلف به ازای شاخص تابع توانی  $k = 1$  نشان داده شده است. همانطور که مشاهده می شود افزایش ضرایب بستر الاستیک وینکلر و پسترناک ( $k_w, k_g$ ) باعث افزایش بار بحرانی کمانش ( $N_{cr}$ ) می شود. همچنین تغییر ضریب بستر وینکلر ( $k_w$ )، می تواند شماره مد کمانش را تغییر دهد ولی تغییر ضریب بستر پسترناک ( $k_g$ )، تأثیری بر شماره مد کمانش ندارد. برای مثال ورق با نسبت ضخامت به شعاع  $0.2$ ، بستر وینکلر  $k_w = 200$  باعث افزایش مد کمانش از  $0$  به  $1$  می شود. همچنین با افزایش دما، مقدار بار بحرانی کمانش کاهش می یابد. (\* عدد داخل پرانتز شماره مد کمانش است.)

اهمیت محاسبه تغییر مکان نامتقارن در کمانش و مقایسه

آن با مقدار متقارن کمانش در جدول (۴) نشان داده شده است. شاخص تابع توانی برابر با  $k = 1$  و ورق تحت فشار شعاعی یکنواخت و حرارت یکنواخت فرض می شود (دما  $400$  کلوین). همانطور که مشاهده می شود تحلیل نامتقارن کمانش مقدار کمتر و دقیق تری را نسبت به حل متقارن کمانش پیش بینی می کند. زمانی که ضریب بستر وینکلر ( $k_w$ ) زیاد می شود، میزان اختلاف نیز افزایش می یابد. همچنین با افزایش ضریب بستر پسترناک ( $k_g$ ) میزان اختلاف کاهش می یابد

در شکل (۱) تأثیر دما بر بار بحرانی کمانش ورق دایروی هدفمند با  $\delta = 0.15$  تحت فشار شعاعی و حرارت یکنواخت در شرایط مرزی گیردار بدون بستر الاستیک نشان داده شده است. با افزایش دما به علت کاهش مدول یانگ، بار بحرانی کمانش کاهش می یابد. دلیل این امر تأثیر دما بر خواص مواد هدفمند است.

جدول (۲) ضرایب وابسته به دما برای دو ماده فولاد ضدزنگ و نیتريد سيليكون.

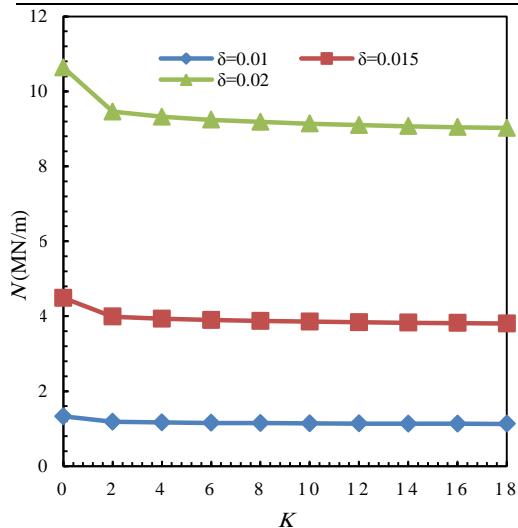
ماده	خاصیت مکانیکی	$p_{-1}$	$p_0$	$p_1$	$p_2$	$p_3$
SUS304	$\alpha(K^{-1})$	۰	$12/33 \times 10^{-6}$	$8/08 \times 10^{-4}$	۰	۰
	$E(Pa)$	۰	$201/04 \times 10^9$	$3/079 \times 10^{-4}$	$-6/53 \times 10^{-7}$	۰
$Si_3N_4$	$\alpha(K^{-1})$	۰	$5/87 \times 10^{-6}$	$9/095 \times 10^{-4}$	۰	۰
	$E(Pa)$	۰	$348/43 \times 10^9$	$-3/07 \times 10^{-4}$	$2/16 \times 10^{-7}$	$-8/94 \times 10^{-11}$

جدول (۳) بررسی اثر ضرایب بستر الاستیک و  $\delta$  بر بار بحرانی کمانش ( $MN/m$ ) ورق دایروی هدفمند تحت فشار شعاعی یکنواخت به ازای دماهای مختلف

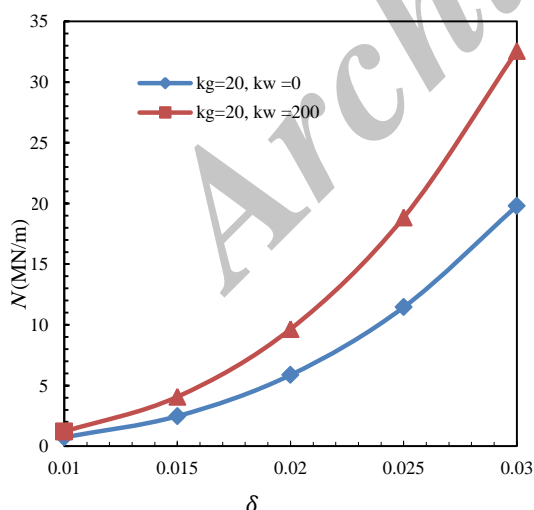
$\delta$	$(k_w, k_g)$				
	(۰,۰)	(۰,۲۰)	(۲۰۰,۲۰)	(۶۰۰,۰)	(۶۰۰,۲۰)
	$T=300$	۰/۲۹۰۴(۰)	۰/۷۷۹۲(۰)	۱/۲۸۲۷(۱)	۱/۲۷۵۶(۲)
۰/۰۱	$T=600$	۰/۲۷۹۳(۰)	۰/۷۳۲۹(۰)	۱/۲۰۵۹(۱)	۱/۱۹۵۵(۲)
	$T=900$	۰/۲۳۷۰(۰)	۰/۶۷۷۵(۰)	۱/۱۱۰۹(۱)	۱/۱۰۷۹۱(۲)
	$T=300$	۲/۳۲۳۶(۰)	۶/۲۳۴(۰)	۱۰/۲۶۲(۱)	۱۰/۲۰۵(۲)
۰/۰۲	$T=600$	۲/۱۶۷۶(۰)	۵/۸۶۲(۰)	۹/۶۴۷(۱)	۹/۵۶۴(۲)
	$T=900$	۱/۸۹۶۲(۰)	۵/۴۱۹۹(۰)	۸/۸۸۷۱(۱)	۸/۶۳۲(۲)
	$T=300$	۷/۸۴۲(۰)	۲۱/۰۳۹(۰)	۳۴/۶۳۴(۱)	۳۴/۴۴۱(۲)
۰/۰۳	$T=600$	۷/۳۱۵(۰)	۱۹/۷۸۹(۰)	۳۲/۵۶۰(۱)	۳۲/۲۷۹(۲)
	$T=900$	۶/۴۰۰(۰)	۱۸/۲۹۲(۰)	۲۹/۹۹۴(۱)	۲۹/۱۳۶(۲)

جدول (۴) بار بحرانی کمانش (MN/m) ورق دایروی هدفمند ( $k = 1$ ) تحت شرایط مرزی گیردار بر روی بستر الاستیک در حالت متقارن ( $n=0$ ) و نامتقارن

$(k_w, k_g)$		$\delta$		
(۲۰،۳۰۰)	(۳۰۰،۰)	(۲۰۰،۲۰)	(۰،۲۰۰)	
۲۲/۸۶۳	۱۵/۳۸۲	۲۰/۴۵۱	۱۲/۹۷۰	متقارن
۲۱/۶۵۵	۱۴/۱۷۴	۱۹/۶۵۶	۱۲/۱۷۵	نامتقارن
۵/۵۸	۸/۵۲	۴/۰۴	۶/۵۳	درصد اختلاف



شکل (۲) تأثیر شاخص تابع توانی ( $k$ ) بر بار بحرانی کمانش ورق دایروی، بر روی بستر الاستیک  $(k_g, k_w) = (۲۰،۲۰۰)$  و تحت شرایط مرزی گیردار.

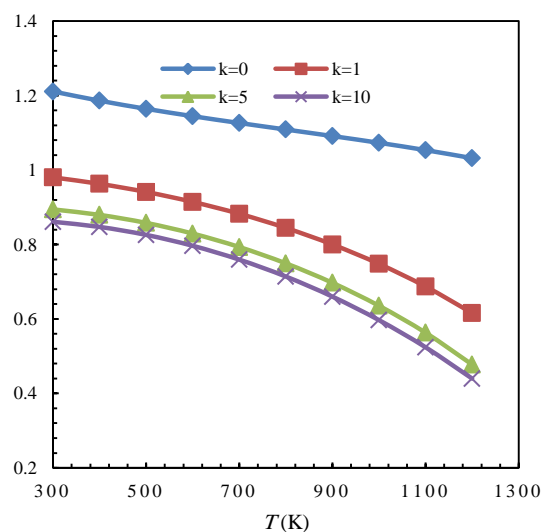


شکل (۳) تأثیر  $\delta$  بر بار بحرانی کمانش ورق دایروی هدفمند به ازای ضرایب بستر الاستیک مختلف.

در شکل (۴) تأثیر نسبت ضخامت به شعاع  $\delta$  به ازای ضریب بستر الاستیک وینکلر  $k_w = ۲۰۰$  و ضریب بستر پسترناک  $k_g = ۲۰$  نشان داده شده است و دما ( $۶۰۰$  کلوین)

در شکل (۲) تأثیر شاخص تابع توانی ( $k$ ) بر بار بحرانی کمانش ورق دایروی هدفمند تحت فشار شعاعی یکنواخت و حرارت یکنواخت، بر روی بستر الاستیک  $(k_g, k_w) = (۲۰،۲۰۰)$  و در دمای ( $۶۰۰$  کلوین) نشان داده شده است. با افزایش شاخص تابع توانی ( $k$ ) به دلیل تغییر خواص از سرامیک به فلز و کاهش مدول الاستیسیته، بار بحرانی کاهش پیدا می‌کند. برای حالت  $۲ \leq k \leq ۲۰$  کاهش بار بحرانی شدید و برای  $۲ \leq k \leq ۲۰$  کاهش بار بحرانی کمانش با روند کندتری همراه است.

در شکل (۳) تأثیر نسبت ضخامت به شعاع ( $\delta$ ) به ازای ضرایب بستر الاستیک مختلف  $(k_g, k_w)$  نشان داده شده است ( $۶۰۰$  کلوین). همان‌طور که مشاهده می‌شود افزایش  $\delta$  باعث افزایش بار بحرانی کمانش می‌شود. افزایش ضرایب بستر الاستیک باعث افزایش بار بحرانی کمانش می‌شود.



شکل (۴) تأثیر دما بر بار بحرانی کمانش ورق FGM، فاقد بستر الاستیک و تحت شرایط مرزی گیردار.

۲- با توجه به اینکه بارگذاری متقارن است ولی ممکن است مدهای کمانش نامتقارن باشد. حل متقارن معادله پایداری بار بحرانی کمانش را بیشتر از مقدار واقعی پیش‌بینی می‌کند. در حل نامتقارن اثر تغییر مکان در راستای  $\theta$  حذف نمی‌شود و خیز ورق وابسته به دو پارامتر  $\Gamma$  و  $\theta$  می‌باشد.

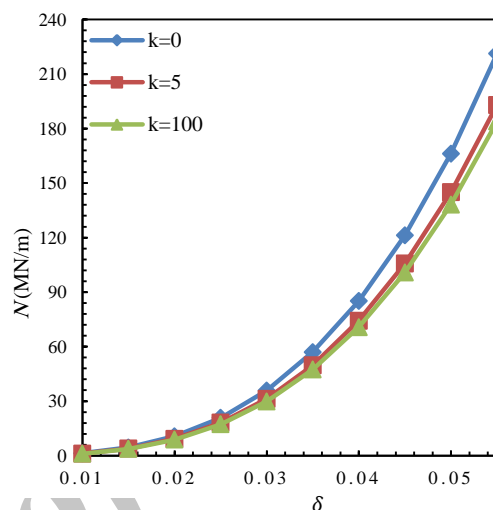
۳- با افزایش ضریب بستر الاستیک، بار بحرانی کمانش افزایش می‌یابد. تغییر ضریب بستر وینکلر می‌تواند بر شماره مدهای کمانش تأثیرگذار باشد در حالی که ضریب بستر پسترناک تأثیری روی شماره‌ی مد کمانش ندارد.

۴- هنگامی که خواص به صورت تابعی از دما در نظر گرفته شوند، رفتار دقیق‌تر مواد توجیه می‌شود. با توجه به اینکه خواص مواد وابسته به دما می‌باشد، افزایش دما باعث کاهش مدول یانگ و سفتی ماده هدفمند و در نتیجه کاهش بار بحرانی کمانش می‌شود.

#### ۸- فهرست علائم

$D_k$	سختی خمشی ورق
$E$	مدول یانگ
$k$	شاخص تابع توانی
$K_w$	ضریب وینکلر
$K_w$	ضریب پسترناک
$M_{rr}$	برآیند گشتاور شعاعی
$M_{\theta\theta}$	برآیند گشتاور دورانی
$M_{r\theta}$	برآیند گشتاور برشی
$N_{rr}$	برآیند نیرو شعاعی
$N_{\theta\theta}$	برآیند نیرو دورانی
$N_{r\theta}$	برآیندها نیرو برشی
$u_0$	تغییر مکان شعاعی
$V_c$	کسر حجمی سرامیک
$V_m$	کسر حجمی فلز
$v_0$	تغییر مکان دورانی
$w_0$	تغییر مکان عرضی
$\delta$	نسبت ضخامت به شعاع
$\varepsilon$	کرنش نرمال

می‌باشد. همان‌طور که مشاهده می‌شود با افزایش شاخص تابع توانی و تغییر کسر حجمی ماده هدفمند از سرامیک به فلز و با ازدیاد ضخامت (نسبت ضخامت به شعاع) بار بحرانی کمانش با شیب بیشتری کاهش می‌یابد. همچنین افزایش نسبت ضخامت به شعاع ( $\delta$ ) باعث افزایش بار بحرانی کمانش می‌شود.



شکل (۴) تأثیر  $\delta$  بر بار بحرانی کمانش ورق دایروی هدفمند به ازای شاخص تابع توانی ( $k$ ) مختلف

#### ۷- نتیجه‌گیری

با تعیین تأثیر ضخامت، شعاع، ضریب تابع توانی، ضرایب بستر الاستیک و اثر دما بر خواص، یک راه حل تحلیلی برای محاسبه بار بحرانی کمانش ارائه شده است. در این تحقیق برای محاسبه معادلات تعادل و پایداری از تئوری کلاسیک استفاده شده است. همچنین خواص مواد طبق رابطه تابع توانی تغییر می‌کند و وابسته به ضخامت و دما است. ورق در محیط حرارتی قرار دارد و لبه‌ی آن تحت فشار شعاعی یکنواخت می‌باشد. با محاسبه مقدار ویژه‌ی معادلات پایداری و حل دقیق آن بار بحرانی کمانش به دست آمده است. برخی نتایج حاصل از کار حاضر به شرح زیر می‌باشد:

۱- اگر ورق در محیط حرارتی و لبه‌ی آن تحت فشار شعاعی یکنواخت باشد به علت آزاد بودن تغییر مکان در راستای شعاع  $(u_0^0(r, \theta))$  اثر بار حرارتی ( $N^T$ ) حذف می‌شود و فقط کمانش مکانیکی رخ می‌دهد و حرارت تنها بر خواص مواد تأثیر می‌گذارد.

- [9] Wang C. Y., "On the buckling of a circular plate on an elastic foundation" *Journal of applied mechanics*, Vol. 72, No. 5, 2005, pp. 795-796.
- [10] Shariat B. S., and Eslami M. R., "Buckling of thick functionally graded plates under mechanical and thermal loads" *Composite Structures*, Vol. 78, No. 3, 2007, pp. 433-439.
- [11] Najafizadeh M. M., and Eslami M. R., "Buckling analysis of circular plates of functionally graded materials under uniform radial compression" *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 44, No. 12, 2002, pp. 2479-2493.
- [12] Najafizadeh M. M., and Eslami M. R., "First-order-theory-based thermoelastic stability of functionally graded material circular plates" *American Institute of Aeronautics and Astronautics*, Vol. 40, No. 7, 2002, pp. 1444-1450.
- [13] Shariat B. S., Javaheri R., and Eslami M. R., "Buckling of imperfect functionally graded plates under in-plane compressive loading." *Thin-walled structures*, Vol. 43, no. 7, 2005, pp. 1020-1036.
- [14] Matsunaga, Hiroyuki. "Thermal buckling of functionally graded plates according to a 2D higher-order deformation theory." *Composite Structures*, Vol. 90, no. 1, 2009, pp. 76-86.
- [15] Klosner J. M., "Buckling of simply supported plates under arbitrary symmetrical temperature distributions". *Journal of the Aerospace Sciences*, Vol. 25, 1958, pp. 181-184.
- [16] Ghiasian S. E., et al, "Thermal buckling of shear deformable temperature dependent circular/annular FGM plates" *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 81, 2014, pp. 137-148.
- [17] Javaheri R., and Eslami M. R., "Thermal buckling of functionally graded plates" *American Institute of Aeronautics and Astronautics*, Vol. 40, No. 1, 2002, pp. 162-169.
- [18] Reddy J. N., and Chin C. D., "Thermomechanical analysis of functionally graded cylinders and plates" *Journal of Thermal Stresses*, Vol. 21, No. 6, 1998, pp. 593-626.
- [19] Saidi A. R., and Hasani Baferani A., "Thermal buckling analysis of moderately thick functionally graded annular sector plates" *Composite Structures*, Vol. 92, No. 7, 2010, pp. 1744-1752.
- [20] Yu L. H., and Wang C. Y., "Buckling mosaic of a circular plate on a partial elastic foundation" *Structural Engineering and Mechanics*, Vol. 34, No. 1, 2010, pp. 135-138.

$\gamma$	کرنش برشی
$\sigma$	تنش نرمال
$\tau$	تنش برشی

#### ۹- پیوست

$$\frac{E_2}{1-\nu^2} \left( \begin{aligned} &u_{0,rrr}^1 + \frac{2}{r}u_{0,rr}^1 - \frac{2}{r^2}u_{0,r}^1 - \frac{1}{r^3}u_0^1 + \frac{1}{r^3}u_{0,\theta\theta\theta}^1 \\ &+ \frac{1}{r^2}u_{0,r\theta\theta}^1 - \frac{2}{r^2}v_{0,r\theta}^1 + \frac{1}{r^3}v_{0,\theta}^1 + \frac{1}{r^3}v_{0,\theta\theta\theta}^1 \\ &+ \frac{1}{r}v_{0,rr\theta}^1 \end{aligned} \right) - \frac{E_2^2}{E_1(1-\nu^2)} \left( \begin{aligned} &w_{0,rrrr}^1 + \frac{2}{r}w_{0,rrr}^1 - \frac{1}{r^2}w_{0,rr}^1 + \frac{1}{r^3}w_{0,r}^1 \\ &+ \frac{2}{r^2}w_{0,rr\theta\theta}^1 - \frac{2}{r^3}w_{0,r\theta\theta}^1 + \frac{4}{r^4}w_{0,\theta\theta}^1 \\ &+ \frac{1}{r^4}w_{0,\theta\theta\theta\theta}^1 \end{aligned} \right) = 0 \quad (*)$$

#### ۱۰- مراجع

- [1] Fukui Y., "Fundamental investigation of functionally gradient material manufacturing system using centrifugal force" *JSME International Journal, Ser, 3, Vibration, Control Engineering, engineering for industry*, Vol. 34, No. 1, 1991, pp. 144-148.
- [2] Bryan G. H., "On the stability of a plane plate under thrusts in its own plane, with applications to the "buckling" of the sides of a ship" *Proceedings of the London Mathematical Society*, Vol. 1, No. 1, 1890, pp. 54-67.
- [3] Timoshenko, Stephen P., and James M., "Theory of elastic stability" *McGrawHill-Kogakusha Ltd, Tokyo*, 1961.
- [4] Almroth B. O., and Brush D. O., "Buckling of bars, plates and shells" *Mc Graw-Hill, New York* 48, 1975.
- [5] Yamaki N., "Buckling of a thin annular plate under uniform compression" *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 25, No. 3, 1958, pp. 267-273.
- [6] Reddy J. N., and Khdeir A., "Buckling and vibration of laminated composite plates using various plate theories" *American Institute of Aeronautics and Astronautics* Vol. 27, No. 12, 1989, pp. 1808-1817.
- [7] Najafizadeh M. M., and Heydari H. R., "An exact solution for buckling of functionally graded circular plates based on higher order shear deformation plate theory under uniform radial compression" *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 50, No. 3, 2008, pp. 603-612.
- [8] Najafizadeh M. M., and Heydari H. R., "Thermal buckling of functionally graded circular plates based on higher order shear deformation plate theory" *European Journal of Mechanics-A/Solids*, Vol. 23, No. 6, 2004, pp. 1085-1100.

Archive of SID