

## برداشت انرژی الکتریکی از تیر نانو با لایه پیزوالکتریک تحت ارتعاشات اتفاقی

حسین وحدانی فرا<sup>۱</sup>، رضا شیرانی<sup>۲</sup>، محمد دهقانی<sup>۳</sup>، یونس یوسفی<sup>۴\*</sup>

\* نویسنده مسئول: y.yousefi@iauo.ac.ir

### واژه‌های کلیدی

تیر نانو، کوپل الکترومکانیکی،  
پیزوالکتریک، ارتعاش اتفاقی

تاریخ ارسال: ۹۵/۰۶/۲۳

تاریخ بازنگری: ۹۵/۰۸/۰۸

تاریخ پذیرش: ۹۵/۱۰/۰۹

### چکیده

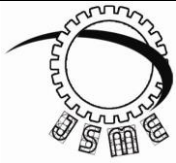
در مقاله حاضر، برداشت انرژی الکتریکی از ارتعاشات اتفاقی تیر نانو اویلر- برنولی با دولایه پیزوالکتریک بررسی می‌گردد. تیر مذکور از یک لایه آلومینیم و دو لایه پیزوالکتریک سرامیکی با نام اختصاری PZT 5A به‌عنوان لایه حسگر برداشت انرژی تشکیل شده است. در روش پیش رو معادلات حاکم بر نانو تیر بایمورف به‌صورت تحلیلی با استفاده از تئوری کلاسیک تیرها به همراه اعمال ضریب اصلاحی ساختار نانو به دست خواهد آمد. سپس با استفاده از روش کانترویچ معادلات سیستم به دست آمده حل خواهند شد. شرایط مرزی در نظر گرفته‌شده برای تیر نانو به‌صورت یکسر گیردار و جرم متمرکز انتهای آزاد تیر می‌باشد و تابع تحریک ورودی سیستم جهت برداشت انرژی به‌صورت اتفاقی در نظر گرفته‌شده است. با توجه به اینکه در این پژوهش هدف بررسی میزان برداشت انرژی است بنابراین در قسمت نتایج نمودارهای ولتاژ و حداکثر قدرت خروجی تیر بایمورف نانو تحت تحریک اتفاقی و ورودی نویز سفید و همچنین تأثیر خواص و ضریب مقیاس ذرات نانو بر میزان برداشت انرژی ارائه شده است.

۱- دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه شهید چمران، اهواز، ایران.

۲- دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه شهید چمران، اهواز، ایران.

۳- دانشجوی دکترا، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه یزد، یزد، ایران.

۴- مربی، گروه مهندسی مکانیک، واحد امیدیه، دانشگاه آزاد اسلامی، اهواز، ایران.



Journal of  
Solid Mechanics  
in Engineering

## Journal of Solid Mechanics in Engineering

<http://jsme.iaukhsh.ac.ir>



### Harvesting Energy Electrical from Nano Beam with Layer Piezoelectric under Random Vibration

Hosein Vahdanifar<sup>1</sup>, Reza Shirani<sup>2</sup>, SMohammad Dehghani<sup>3</sup>, Yunes Yousefi<sup>4</sup>

\* Corresponding Author: [y.yousefi@iauo.ac.ir](mailto:y.yousefi@iauo.ac.ir)

#### Abstract:

In the present paper, electrical energy harvesting from random vibrations of an Euler-Bernoulli nano-beam with two piezoelectric layers is investigated. The beam is composed of an aluminum layer together with two piezoelectric ceramic layers (PZT 5A) serving as energy harvesting sensors. In the proposed method, the equations governing the bimorph nano-beam will be analytically derived using classical beam theory with corresponding modification coefficients to the nano-structure applied. Then, the derived system of equations will be solved following Kantorovich method. Assumed boundary conditions for the nano-beam are as follows: a clamped end with the mass concentrated at the free end of the beam. Further, the input activation function of the system for energy harvesting was taken as being random. Since the objective of this research is to investigate the amount of harvested energy, the section on the results provides associated voltage and maximum output power curves with the bimorph nano-beam under random activation and input white noise, while also presenting the effects of characteristics and scale factor of the nano-particles on the amount of harvested energy.

#### Key words:

Nano beam  
piezoelectric  
Electromechanical-coupling  
Radom vibrations

1- MSc Student, Department of Mechanical Engineering, Shahid Chamran University, Ahvaz, Iran.

2- MSc Student, Department of Mechanical Engineering, Shahid Chamran University, Ahvaz, Iran.

3- Phd Student, Department of Mechanical Engineering, Yazd University, Yazd, Iran.

4- Lecturer, Department of Mechanical Engineering, Omidiyeh Branch, Islamic Azad University, Ahvaz, Iran.

## ۱- مقدمه

آزمایشگاهی یک چندلایه مرکب با لایه میانی پیزوالکتریک پرداختند. ایشان جهت افزایش راندمان برداشت انرژی الکتریکی در انتهای مدل ساخته شده از چهار عدد آهنربا مغناطیسی بهره برده و معادلات حاکم بر سیستم را از حالت خطی به حالت غیرخطی تبدیل کرده‌اند. آگبورن [۶] در تحقیق خود به بررسی برداشت انرژی الکتریکی در محدوده میکرو تا میلی وات از یک تیر یکسر گیردار با لایه پیزوالکتریک سرامیکی پرداخت. نتایج به دست آمده از حل تحلیلی برای برداشت انرژی الکتریکی از تیر تحت ارتعاشات هارمونیک و اجباری را با نتایج تست آزمایشگاهی مقایسه و ارائه نمود. ارتوک و همکاران [۷] به روش تحلیلی به مطالعه برداشت انرژی از یک تیر یونی مورف تحت شرط مرزی یکسر گیردار پرداختند. در تحقیقات ایشان، نیروی وارد شده بر تیر بر اثر ارتعاشات آزاد لحاظ شده است. فاکزین و همکاران [۸] در سال ۲۰۱۳ به بررسی و تست آزمایشگاهی برای صحنه سنجی روش تحلیلی مذکور ارائه نمودند. اومن و همکاران [۹] به بیان یک رویکرد جدید در برداشت انرژی از مواد پیزوالکتریک پرداختند. آنان از یک مدار خازنی و یک پل دیود جهت یکسو سازی ولتاژ الکتریکی خروجی استفاده نمودند. عزیززی و همکاران [۱۰] یک میکرو تیر پیزوالکتریک بایمورف غیرخطی دوسرگیردار تحت تحریک الکترواستاتیک را تحلیل کردند. آن‌ها با اعمال ولتاژ مستقیم و متناوب رفتار استاتیکی و دینامیکی میکرو تیر را بررسی نمودند.

با توجه به اینکه در سال‌های اخیر دستگاه‌های میکرو الکترومکانیک با ساختار نانو به عنوان یک فناوری جدید در شاخه‌های مختلف همانند مکانیک و غیره کاربردهای بسیار متنوعی پیدا نموده‌اند. لذا مطالعه رفتار و خواص میکرو تیرها از اهمیت خاصی در علوم مهندسی برخوردار خواهد بود. در این پژوهش حل تحلیلی جهت برداشت انرژی از تیر بایمورف در مقیاس نانو تحت ارتعاشات اتفاقی ارائه خواهد شد.

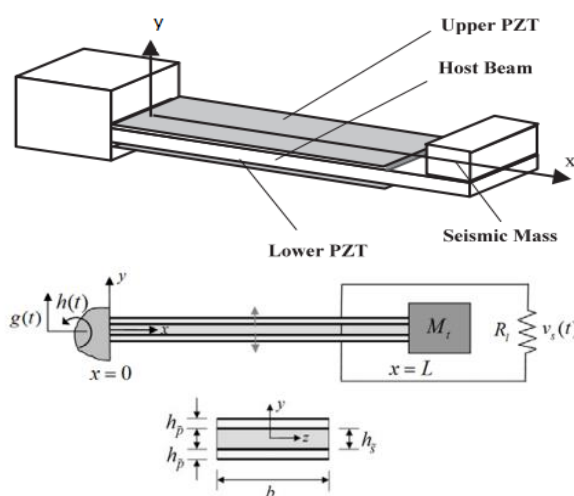
فرآیند به دست آوردن انرژی از محیط اطراف و تبدیل آن به انرژی الکتریکی را برداشت انرژی گویند. از جمله انرژی‌های قابل تبدیل موجود در محیط اطراف انرژی مکانیکی است.

پیزوالکتریک‌ها به دلیل دارا بودن خاصیت ذاتی کوپلینگ الکترومکانیکی و همچنین توان تولیدی بالا در میان فرایندهای مختلفی که برای تبدیل ارتعاشات موجود در سازه به الکتریسته وجود دارد، بیشترین توجه را در این زمینه به خود اختصاص داده‌اند [۱].

متداول‌ترین وسیله برداشت کننده انرژی از ارتعاشات، تیر یکسر گیردار با یک یا چندلایه پیزوالکتریک است که بر روی یک سازه مرتعش قرار می‌گیرد. کرنش دینامیکی ایجاد شده در لایه‌های پیزوالکتریک منجر به تولید ولتاژ الکتریکی می‌گردد که به وسیله الکترودهایی که سطح لایه پیزوالکتریک را می‌پوشانند جمع‌آوری و ذخیره می‌گردد. در زمینه تولید انرژی الکتریکی از ارتعاشات اجباری تیر در ابعاد ماکرو تحقیقاتی صورت گرفته است. زمانیان و همکاران [۲] به بررسی همگرایی پاسخ استاتیکی و دینامیکی تیر یونی مورف در ابعاد میکرو با تحریک هارمونیک پرداختند آنان نشان دادند که استفاده از شکل مودهای گسسته برای تیرهای دارای لایه پیزوالکتریک با طولی کم‌تر از طول تیر، از مزیت همگرایی سریع‌تر برخوردار بوده و هزینه محاسباتی را به شدت کاهش می‌دهد. کی و همکاران [۳] از تئوری الاستیسیته غیر موضعی بهره گرفته و فرکانس‌های طبیعی و شکل مودهای نانو تیر پیزوالکتریک تک لایه را به دست آوردند. در این پژوهش از مدل خطی استفاده شده و اثر دما، نیروهای محوری، فرکانس طبیعی و شکل مدها بررسی شده است. ژانگ و همکاران [۴] برداشت انرژی از یک سازه بزرگ همچون پل را بررسی کرده و همچنین اثر عوامل مختلف در برداشت انرژی از جمله محل قرارگیری لایه‌های پیزوالکتریک را به کمک نرم‌افزار اجزاء محدود مورد مطالعه قرار دادند. زاینسا و همکاران [۵] به آنالیز

## ۲- بیان مسئله و استخراج معادلات حاکم:

مسئله موردبررسی در این مقاله برداشت انرژی از یک تیر نانو اوپلر برنولی با شرایط تکیه گاهی یکسر گیردار با پیکره بندی مستطیل شکل مطابق شکل (۱) است. تیر مذکور با پهنای  $b$  و طول  $L$  متشکل از یک لایه میانی از جنس آلومینیم با ضخامت  $h_s$  و دو لایه پیزوالکتریک سرامیکی بانام اختصاری PZT 5A در بالا و پایین لایه میانی با ضخامت  $h_p$  به عنوان لایه های برداشت کننده ی انرژی است.



شکل (۱) نانو تیر با هسته مرکزی آلومینیم و دو لایه پیزوالکتریک سرامیکی PZT 5A

فرض شده است که الکترودها تمام سطح لایه پیزوالکتریک را پوشانده و لایه پیزوالکتریک نسبت به تیر آلومینیمی لغزشی ندارد. با این فرض می توان حرکت کلی تیر نانو تحت ارتعاشات اتفاقی شامل حرکت پایه تیر نانو و جابه جایی های عرضی آن را به صورت رابطه (۱) بیان نمود.

$$W(x, t) = w_b(x, t) + w_{rel}(x, t) \quad (1)$$

که در آن  $w_b(x, t)$  حرکت پایه تیر و  $w_{rel}(x, t)$  جابه جایی عرضی تیر نسبت به انتهای گیردار است. همچنین حرکت پایه تیر به صورت رابطه (۲) بیان می شود.

$$w_b(x, t) = g(t) + xh(t) \quad (2)$$

$g(t)$  حرکت عرضی تیر در جهت  $y$  و  $h(t)$  چرخش تیر حول محور  $z$  است.

معادله حرکت تیر اوپلر - برنولی نانو تحت ارتعاش بر اثر جرم انتهای تیر در صفحه  $x$ - $y$  به صورت معادله (۳) می توان تعریف نمود [۷]:

$$EI \frac{\partial^2 M(x, t)}{\partial x^2} + m(x) \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} = -[m + M_t \delta(x - L)] \frac{\partial^2 w_b(x, t)}{\partial t^2} \times \left[ (1 - e_0 a)^2 \frac{\partial^2 w_b(x, t)}{\partial t^2} \right] \quad (3)$$

در رابطه فوق  $E$  مدول الاستیسیته تیر کامپوزیتی،  $I(x)$  ممان اینرسی سطح مقطع است که حاصل ضرب این دو پارامتر مطابق رابطه ۴ است و  $M(x, t)$  گشتاور خمشی،  $M_t$  جرم متمرکز انتهای تیر،  $w(x, t)$  حرکت عرضی،  $e_0 a$  ضریب مقیاس نانو تیر و  $m$  جرم بر واحد طول تیر که در رابطه ۵ تعریف شده است.

$$EI = \frac{2b}{3} \left[ E_s \frac{h_s^3}{8} + E_p \left( \left( h_p + \frac{h_s}{2} \right)^3 - \frac{h_s^3}{8} \right) \right] \quad (4)$$

$$m = b(\rho_s h_s + 2\rho_p h_p) \quad (5)$$

در رابطه (۴)  $E_s$  و  $h_s$  و  $\rho_s$  به ترتیب مدول الاستیسیته تیر، ضخامت و چگالی تیر آلومینیم و  $E_p$  و  $h_p$  و  $\rho_p$  به ترتیب مدول الاستیسیته تیر، ضخامت و چگالی لایه پیزوالکتریک هستند.

برای نشان دادن تلفات مکانیکی، دو نوع مختلف میرایی را می توان برای سیستم در نظر گرفت که نوع اول میرایی خارجی (مقاومت هوا) و نوع دوم میرایی داخلی است. با وارد کردن ضرایب میرایی در سیستم، معادله حرکت به صورت رابطه (۶) حاصل می شود.

$$EI \frac{\partial^2 M(x, t)}{\partial x^2} + m(x) \frac{\partial^2 w_r(x, t)}{\partial t^2} + C_s I(x) \frac{\partial^5 w_r(x, t)}{\partial x^4 \partial t} + C_a \frac{\partial w_r(x, t)}{\partial t} = \quad (6)$$

$$(-[m + M_t \delta(x - L)] \frac{\partial^2 w_b(x, t)}{\partial t^2})$$

$$\left[ (1 - e_0 a)^2 \frac{\partial^2 w_b(x, t)}{\partial t^2} \right]$$

در رابطه بالا  $C_a$  ضریب میرایی ویسکوز و  $C_s I(x)$  ترم میرایی سازه ای معادل میرایی سطح مقطع کامپوزیتی است.

$$\left[ (1 - e_0 a)^2 \frac{\partial^2 w_b(x, t)}{\partial t^2} \right] \quad (۱۳)$$

معادله (۱۳) بیان کننده معادله حرکت مکانیکی با کوپلینگ الکتریکی است. برای به دست آوردن معادله مدار الکتریکی و مکانیکی نیاز به تعریف روابط ساختاری پیزوالکتریک است که به صورت رابطه (۹) بیان می گردد.

$$D_3 = d_{31}T_1 + \varepsilon_{33}^T E_3 \quad (۱۴)$$

در رابطه (۹)  $D_3$  جابه جایی الکتریکی،  $\varepsilon_{33}^T$  ظرفیت الکتریکی در تنش ثابت و  $E_3$  میدان الکتریکی است. همچنین زیر نویس ۱ و ۳ به ترتیب منطبق بر محورهای  $x, y$  هستند. در جایی که:

$$E_3(t) = \frac{-v_s(t)}{h_p} \quad (۱۵)$$

$$\varepsilon_{33}^T = d_{31}^2 Y_p \quad (۱۶)$$

رابطه (۱۷) با جایگذاری روابط (۱۵) و (۱۶) در رابطه (۱۴) به دست می آید.

$$D_3(x, t) = d_{31} Y_p s_1(x, t) - \varepsilon_{33}^S \frac{V(t)}{h_p} \quad (۱۷)$$

با معرفی  $h_{pc}$  به عنوان فاصله مرکز لایه پیزوالکتریک از محور خنثی، کرنش خمشی متوسط  $(s_1(x, t))$  لایه پیزوالکتریک در نقطه  $x$  و زمان  $t$  برابر رابطه (۱۸) است.

$$s_1(x, t) = -h_{pc} \frac{\partial^2 w_{rel}(x, t)}{\partial x^2} \quad (۱۸)$$

$h_{pc} = \frac{nh_s(h_p + h_s)}{2(h_p + nh_s)}$   
 $n = \frac{E_s}{E_p}$   
 با جایگذاری رابطه (۱۸) در رابطه (۱۷) و انتگرال گیری از آن رابطه بار الکتریکی به دست آمده که در رابطه ۱۹ داده شده است.

$$q(t) = - \int_{x=0}^L d_{31} Y_p h_{pc} b \frac{\partial^2 w_{rel}(x, t)}{\partial x^2} + \varepsilon_{33}^S \frac{V(t)}{h_p} dx \quad (۱۹)$$

با استفاده از روابط ساختاری پیزوالکتریک [۱۱]، ممان خمشی داخلی  $M(x, t)$  به صورت رابطه (۷) محاسبه خواهد شد.

$$M(x, t) = -b \left( \int_{-h_p - \frac{h_s}{2}}^{-\frac{h_s}{2}} T_1^p y dy + \int_{-h_s/2}^{h_s/2} T_1^s y dy + \int_{h_s/2}^{h_p + h_s/2} T_1^p y dy \right) \quad (۷)$$

که در رابطه فوق  $b$  عرض تیر مستطیلی،  $T_1^s$  تنش در تیر نانو با فرض تنش صفحه ای،  $T_1^p$  تنش در لایه پیزوالکتریک است که هر کدام به صورت در رابطه (۸) آورده شده اند.

$$T_1^s = E_s S_1^s, \quad T_1^p = E_p S_1^p - e_{31} E_3 \quad (۸)$$

که در آن:

$$C_{11}^E = \frac{1}{S_{11}^E}, \quad e_{31} = \frac{d_{31}}{S_{11}^E} \quad (۹)$$

$$S_1(x, z, t) = -z \frac{\partial^2 w_{rel}(x, t)}{\partial x^2} \quad (۱۰)$$

$C_{11}^E$  مدول سختی لایه پیزوالکتریک،  $e_{31}$  ضریب پیزوالکتریک در کرنش ثابت است.

رابطه (۱۱) با جایگذاری روابط تنش پیزوالکتریک در معادله (۷) به دست می آید.

$$M(x, t) = -EI \frac{\partial^2 w_{rel}(x, t)}{\partial x^2} + \vartheta_s v_s(t) [H(x) - H(x - L)] \quad (۱۱)$$

که در آن رابطه کوپل الکترومکانیکی با فرض سری بودن مدار الکتریکی خروجی به صورت زیر تعریف می شود.

$$\vartheta_s = \frac{e_{31} b}{2h_p} \left[ \left( h_p + \frac{h_s}{2} \right)^2 - \frac{h_s^2}{4} \right] \quad (۱۲)$$

معادله تیر اوپلر برنولی تحت ارتعاشات بر اثر جرم متمرکز در انتها تیر به شکل رابطه (۱۳) است.

$$YI \frac{\partial^2 M(x, t)}{\partial x^2} + m(x) \frac{\partial^2 w_r(x, t)}{\partial t^2} + C_s I(x) \frac{\partial^5 w_r(x, t)}{\partial x^4 \partial t} + C_a \frac{\partial w_r(x, t)}{\partial t} - \vartheta_s v_s(t) \left[ \frac{d\delta(x)}{dx} - \frac{d\delta(x - L)}{dx} \right] = (-[m + M_t \delta(x - L)]) \frac{\partial^2 w_b(x, t)}{\partial t^2} \times$$

$$\phi_r(x) = -\frac{d_{31}Y_p h_{pc} h_p}{\epsilon_{33}^s L} \int_{x=0}^L \frac{d^2 \phi_r(x)}{dx^2} dx = -\frac{d_{31}Y_p h_{pc} h_p}{\epsilon_{33}^s L} \frac{d\phi_r(t)}{dx} \quad (26)$$

حل معادله (۲۶) با ضرب فاکتور انتگرال  $\mu = e^{-\frac{t}{\tau_c}}$  در آن ممکن می‌شود. پارامتر  $\tau_c$  معرف ثابت زمانی مدار است که به صورت رابطه (۲۷) تعریف می‌شود.

$$\tau_c = \frac{R\epsilon_{33}^s bL}{h_p} \quad (27)$$

ولتاژ خروجی مدار را می‌توان به صورت رابطه (۲۸) بیان نمود.

$$V(t) = e^{-\frac{t}{\tau_c}} \times \left[ e^{-\frac{t}{\tau_c}} \sum_{r=1}^{\infty} \phi_r(x) \frac{d\eta_r(t)}{dt} dt + c \right] \quad (28)$$

با فرض ولتاژ اولیه ( $c=0$ ) در رابطه ۲۸ و مرتب کردن آن به شکل رابطه (۲۹) ساده می‌شود.

$$V(t) = e^{-\frac{t}{\tau_c}} \left[ \sum_{r=1}^{\infty} \phi_r \int \frac{d\eta_r(t)}{dt} dt \right] \quad (29)$$

برای حل معادله بالا نیاز به دانستن ترم زمانی معادله  $\eta_r(t)$  است. از آنجاکه فرض بر آن است که سیستم دارای میرایی متناسبی است مقدار  $\phi_r(x)$  در رابطه (۲۳) برای نانو تیر بایمورف به صورت رابطه (۳۰) است.

$$\phi_r(x) = A_r \left( \cos \frac{\lambda_r}{L} x - \cosh \frac{\lambda_r}{L} x + \zeta_r \times \left( \sin \frac{\lambda_r}{L} x - \sinh \frac{\lambda_r}{L} x \right) \right) \quad (30)$$

که در آن:

$$\zeta_r = \frac{\sin \lambda_r - \sinh \lambda_r + \lambda_r \frac{M_t}{mL} (\cos \lambda_r - \cosh \lambda_r)}{\cos \lambda_r + \cosh \lambda_r - \lambda_r \frac{M_t}{mL} (\sin \lambda_r - \sinh \lambda_r)} \quad (31)$$

که در آن پارامتر  $\lambda_r$  معرف مقدار ویژه بی‌بعد فرکانسی است. ضرایب مجهول با اعمال شرط عمود بودن مودها برای رابطه (۳۰) محاسبه می‌شوند.

با به دست آمدن رابطه بار الکتریکی  $q(t)$  می‌توان مقادیر مربوط به جریان  $i(t)$  ولتاژ را به صورت روابط (۲۰) و (۲۱) محاسبه نمود.

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = -\int_{x=0}^L d_{31}Y_p h_{pc} b \frac{\partial^2 w_{rel}(x,t)}{\partial x^2} dx \quad (20)$$

$$-\frac{\epsilon_{33}^s bL}{h_p} \frac{dV(t)}{dt}$$

$$V(t) = Ri(t) =$$

$$-R \int_{x=0}^L d_{31}Y_p h_{pc} b \frac{\partial^2 w_{rel}(x,t)}{\partial x^2} dx \quad (21)$$

$$-\frac{\epsilon_{33}^s bL}{h_p} \frac{dV(t)}{dt}$$

و در نهایت با مرتب کردن رابطه (۲۱) معادله مدار الکتریکی به صورت رابطه (۲۲) به دست خواهد آمد.

$$\frac{\epsilon_{33}^s bL}{h_p} \frac{dV(t)}{dt} + \frac{V(t)}{R} = -\left( \int_{x=0}^L d_{31}Y_p h_{pc} b \frac{\partial^2 w_{rel}(x,t)}{\partial x^2} dx \right) \quad (22)$$

### ۳- حل معادلات حاکم بر تیر نانو با استفاده از روش کانتروویچ:

برای حل معادلات حاکم بر سیستم از اصل جداسازی متغیرها به صورت رابطه (۲۳) استفاده می‌شود.

$$w_{rel}(x,t) = \sum_{r=1}^{\infty} \phi_r(x) \eta_r(t) \quad (23)$$

در رابطه فوق  $\phi_r(x)$  نماینده قسمت مکانی (شکل مودهای تیر مستطیلی) و  $\eta_r(t)$  پاسخ زمانی تیر است که با قرار دادن رابطه (۲۳) در (۲۲) رابطه (۲۴) به دست می‌آید.

$$\frac{\epsilon_{33}^s bL}{h_p} \frac{dV(t)}{dt} + \frac{V(t)}{R} =$$

$$-\left( \int_{x=0}^L d_{31}Y_p h_{pc} b \frac{d^2 \phi_r(x)}{dx^2} \frac{d\eta_r(t)}{dt} dx \right)$$

معادله (۲۴) به شکل رابطه (۲۵) ساده می‌شود.

$$\frac{dV(t)}{dt} + \frac{h_p}{R\epsilon_{33}^s bL} V(t) = \sum_{r=1}^{\infty} \phi_r(x) \frac{d\eta_r(t)}{dt} \quad (25)$$

$$f_r(t) = f_r^c(t) + f_r^m(t) \quad (۳۸)$$

$$f_r^c(t) = -M_t c_a \left[ \gamma_r^w \frac{dg(t)}{dt} + \gamma_r^\theta \frac{dh(t)}{dt} \right]$$

$$f_r^m(t) = -m \left[ \gamma_r^w \frac{d^2g(t)}{dt^2} + \gamma_r^\theta \frac{d^2h(t)}{dt^2} \right] \quad (۳۹)$$

$$\gamma_r^w = \int_{x=0}^L \phi_r(x) dx$$

$$\gamma_r^\theta = \int_{x=0}^L x \phi_r(x) dx \quad (۴۰)$$

و  $f_r(t)$  در حالت کلی برابر است با:

$$f_r(t) = -m \left( \frac{d^2g(t)}{dt^2} \int_0^L \phi_r(x) dx + \frac{d^2h(t)}{dt^2} \int_0^L x \phi_r(x) dx \right) -$$

$$M_t \phi_r(L) \left( \frac{d^2g(t)}{dt^2} + L \frac{d^2h(t)}{dt^2} \right) \quad (۴۱)$$

با جایگذاری رابطه (۳۷) در رابطه (۳۴) و لتاژ برابر رابطه (۴۲) به دست می آید.

$$V(t) = e^{\frac{-t}{\tau_c}} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\phi_r}{w_{rd}} \int e^{\frac{t}{\tau_c}} \frac{d}{dt} \times$$

$$\int_{\tau=0}^t [f_r(\tau) - \chi_r V(\tau)] \times$$

$$e^{-\xi_r w_r (t-\tau)} \sin w_{rd} (t-\tau) d\tau \quad (۴۲)$$

جهت ساده سازی عبارت های جابه جایی عرضی  $h(t)$  چرخش کوچک  $g(t)$  و لتاژ  $v(t)$  به صورت روابط (۴۳) فرض می شوند.

$$h(t) = \theta_0 e^{j\omega t}, \quad (۴۳)$$

$$g(t) = Y_0 e^{j\omega t},$$

$$V(t) = V_0 e^{j\omega t}$$

در روابط بالا  $\theta_0$  دامنه چرخش،  $Y_0$  دامنه حرکت عرضی در جهت  $y$  و  $V_0$  دامنه و لتاژ عبوری از مقاومت الکتریکی است.

همان طور که در رابطه (۳۹) نشان داده شده است با جایگذاری روابط (۳۸) و (۴۴) در رابطه (۲۸) و صرف نظر از میرایی ویسکوز رابطه (۱۳) به شکل رابطه (۴۴) تغییر می یابد.

$$\int_{x=0}^L m \phi_s(x) \phi_r(x) dx + \phi_s(L) M_t \phi_r(L) + \left[ \frac{d\phi_s(x)}{dx} I_t \frac{d\phi_r(x)}{dx} \right]_{x=L} = \delta_{rs}$$

$$\int_{x=0}^L YI \phi_s(x) \frac{d^4 \phi_r(x)}{dx^4} dx + \left[ \frac{d\phi_s(x)}{dx} EI \frac{d\phi_r(x)}{dx} \right]_{x=L} = \omega_r^2 \delta_{rs} \quad (۳۲)$$

$$\omega_r = \lambda_r^2 \sqrt{\frac{EI}{mL^4}}$$

$$1 + \cos \lambda \cosh \lambda + \lambda \frac{M_t}{mL} (\cos \lambda \sinh \lambda - \sin \lambda \cosh \lambda) \quad (۳۳)$$

$$- \frac{\lambda^3 I_t}{mL^3} (\cosh \lambda \sin \lambda + \sinh \lambda \cos \lambda) +$$

$$\frac{I_t M_t \lambda^4}{m^2 L^4} (1 - \cos \lambda \cosh \lambda) = 0$$

با قرار دادن رابطه (۳۰) در معادله حرکت با اعمال شروط عمود بودن مودها می توان حل قسمت زمانی آن را توسط رابطه (۳۴) به صورت زیر تعریف نمود.

$$\frac{d^2 \eta_r(t)}{dt^2} + 2\xi_r w_r \frac{d\eta_r(t)}{dt} \quad (۳۴)$$

$$+ w_r^2 \eta_r(t) + \chi_r V(t) = f_r(t)$$

در رابطه بالا  $w_r$  فرکانس طبیعی سازه است و نسبت میرایی  $\xi_r$  از رابطه (۳۵) حاصل می شود.

$$\xi_r = \frac{c_s I(x) w_r}{2EI(x)} + \frac{c_a}{2m(x) w_r} \quad (۳۵)$$

همچنین  $\chi_r$  ترم کوپلینگ مودال نامیده شده و به صورت رابطه (۳۶) تعریف می شود.

$$\chi_r = \vartheta \frac{d\phi_r(x)}{dx} \quad (۳۶)$$

با حل معادله (۳۴) پاسخ زمانی به صورت رابطه (۳۷) به دست می آید.

$$\eta_r(t) = \frac{1}{w_{rd}} \int_{\tau=0}^t [(N_r(\tau) - \chi_r V(\tau) \times$$

$$e^{-\xi_r w_r (t-\tau)} \sin w_{rd} (t-\tau)] d\tau \quad (۳۷)$$

$$e^{-\xi_r w_r (t-\tau)} \sin w_{rd} (t-\tau)] d\tau$$

که در این رابطه  $w_{rd}$  فرکانس میرایی است و تابع نیروی مکانیکی و ترم های تشکیل دهنده آن به صورت روابط (۳۸) الی (۴۰) به دست می آیند.

که در آن  $\omega$  فرکانس تحریک می‌باشد و پارامتر  $S_r$  در رابطه (۵۰) تعریف شده است.

$$S_r = 2e_0 a^2 \quad (50)$$

طبق رابطه  $V(t) = V_0 e^{j\omega t}$  ولتاژ عبوری از مقاومت الکتریکی به صورت رابطه (۵۱) تعریف می‌شود.

$$V(t) = \frac{\sum_{r=1}^{\infty} \frac{2e_0 a j m(x) \omega^3 \phi_r (\gamma_r^W Y_0 + \gamma_r^\theta \theta_0) e^{j\omega t}}{\omega_r^2 - \omega^2 + j2\xi_r \omega_r \omega + 2e_0 a^2}}{\sum_{r=1}^{\infty} \frac{j\omega \phi_r \chi_r}{\omega_r^2 - \omega^2 + j2\xi_r \omega_r \omega + 2e_0 a^2} + \left(\frac{1+j\omega\tau_c}{\tau_c}\right)}$$

عبارت فوق برحسب مقاومت الکتریکی  $R$  برای یک تیر نانو بایمورف به شکل رابطه ۵۲ اصلاح می‌شود.

$$V(t) = \frac{\sum_{r=1}^{\infty} \frac{2e_0 a j m(x) \omega \phi_r (\gamma_r^W Y_0 + \gamma_r^\theta \theta_0) e^{j\omega t}}{\omega_r^2 - \omega^2 + j2\xi_r \omega_r \omega + 2e_0 a^2}}{\frac{1}{2R} + j\omega C_p + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{j\omega \phi_r \chi_r}{\omega_r^2 - \omega^2 + j2\xi_r \omega_r \omega + 2e_0 a^2}} \quad (52)$$

رابطه (۵۲) برای تعیین بی‌نهایت مد ارتعاشی با ورودی اتفاقی است لذا در این مقاله جهت تعیین میانگین قدرت و ولتاژ خروجی تنها مد اول آن بررسی خواهد شد. جهت این کار لازم است که رابطه (۵۲) برای مد اول بازنویسی گردد. جهت این کار فرض می‌شود که:

$$\gamma_r^W Y_0 + \gamma_r^\theta \theta_0 = B_r \quad (53)$$

با فرض رابطه (۵۳) برای مد اول ارتعاشی برابر است با:

$$V_s(\omega) = \frac{-j\omega e_0 a^2 R_1 \phi_r B_r}{G} \quad (54)$$

$$G = (1 + j\omega R_1 C_p)(\omega_1^2 - \omega + j2\xi_1 \omega_1 \omega) + j\omega R_1 \phi_r^2 + 2e_0 a^2$$

با توجه به اینکه در این مقاله هدف تحلیل و محاسبه میانگین ولتاژ و قدرت خروجی برای یک نانو تیر بایمورف تحت ورودی‌های نویز سفید و اتفاقی است لذا  $E[P(t)]$  برابر است با:

$$E[P(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{-j\omega e_0 a^2 R_1 \phi_r B_r}{A} \right|^2 S_0 d\omega \quad (55)$$

که در آن

$$A = (1 + j\omega R_1 C_p)(\omega_1^2 - \omega + j2\xi_1 \omega_1 \omega) + j\omega R_1 \phi_r^2 + 2e_0 a^2 \quad (56)$$

$$\frac{d^2 \eta_r(t)}{dt^2} + 2\xi_r \omega_r \frac{d\eta_r(t)}{dt} + \omega_r^2 \eta_r(t) + \chi_r V_0 e^{j\omega t} =$$

$$m(x) \omega^2 (\gamma_r^W Y_0 + \gamma_r^\theta \theta_0) e^{j\omega t}$$

$\eta_r(t)$  با حل معادله ۴۴ به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\eta_r(t) = \frac{[m(x) \omega^2 (\gamma_r^W Y_0 + \gamma_r^\theta \theta_0) - \chi_r V_0 e^{j\omega t}]}{\omega_r^2 - \omega^2 + j2\xi_r \omega_r \omega} \quad (45)$$

با توجه به روابطی که برای ترم‌های مکانی و زمانی معادلات حاکم بر مدل ذکر شد و همچنین با علم به آنکه در این پژوهش تحریک مدار به صورت یک تابع اتفاقی در نظر گرفته خواهد شد لذا دستگاه معادلات برحسب تابع فرکانسی مطابق رابطه (۴۶) بازنویسی می‌شود.

$$(\omega_r^2 - \omega^2 + j2\xi_r \omega_r \omega + 2e_0 a^2) + H_r + \chi_r V_s = f_r(t)$$

$$\left(\frac{1}{R_1} + j\omega \frac{C_p}{2}\right) V_s - j\omega \sum_{r=1}^{\infty} \phi_r H_r = 0 \quad (46)$$

در رابطه بالا تابع تحلیل فرکانسی با اندیس  $H_r$  نمایش داده شده است. در این مقاله مقادیر ولتاژ برداشت شده از تیر نانو بایمورف و همچنین میانگین قدرت خروجی مدار به ازای تابع اتفاقی ورودی فرکانسی و ورودی نویز سفید بررسی می‌گردد. لذا ولتاژ برابر است با:

$$V(t) = V_0 e^{j\omega t} \quad (47)$$

با جاگذاری در رابطه (۲۷) رابطه (۴۲) به دست می‌آید.

$$\left(\frac{1 + j\omega\tau_c}{\tau_c}\right) V_0 = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{j\omega \phi_r [m(x) \omega^2 (\gamma_r^W Y_0 + \gamma_r^\theta \theta_0) - \chi_r V_0]}{\omega_r^2 - \omega^2 + j2\xi_r \omega_r \omega + 2e_0 a^2} \quad (48)$$

در نهایت با قرار دادن تابع پاسخ زمانی  $\eta_r(t)$  در رابطه فوق میزان دامنه ولتاژ خروجی به اساس رابطه (۴۹) تعریف می‌شود.

$$V_0 = \frac{\sum_{r=1}^{\infty} \frac{2e_0 a j m(x) \omega^3 \phi_r (\gamma_r^W Y_0 + \gamma_r^\theta \theta_0)}{\omega_r^2 - \omega^2 + j2\xi_r \omega_r \omega + S_r}}{\sum_{r=1}^{\infty} \frac{j\omega \phi_r \chi_r}{\omega_r^2 - \omega^2 + j2\xi_r \omega_r \omega + S_r} + \left(\frac{1 + j\omega\tau_c}{\tau_c}\right)} \quad (49)$$



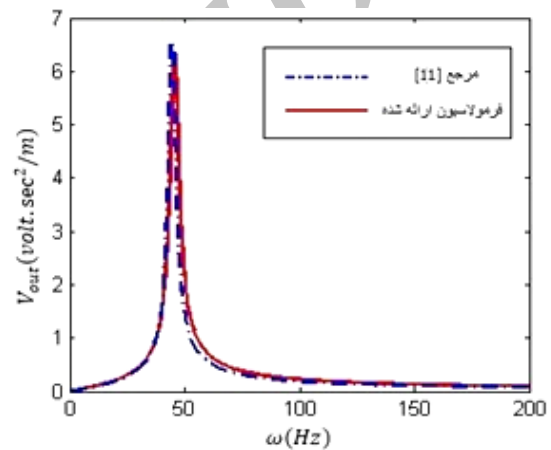
## ۴- اعتبار سنجی

تیر و بازه فرکانسی ورودی موردنظر نشان داده شده است. جنس پیزوالکتریک PZT-5A در نظر گرفته شده و مشخصات آن در جدول ۱ ارائه شده است.

جدول ۱- مشخصات مواد و ابعاد هندسی

مقدار	واحد	کمیت
۲۴۰	nm	طول تیر ( $L$ )
۲۰	nm	عرض تیر ( $b$ )
۶	nm	ضخامت تیر ( $h_s$ )
۶	nm	ضخامت پیزوالکتریک ( $h_p$ )
۰/۰۰۷۸	kg	جرم متمرکز ( $M_t$ )
۲۷۰۰	kg/m <sup>3</sup>	چگالی آلومینیم ( $\rho_s$ )
۷۰	Gpa	مدول یانگ آلومینیم ( $E_s$ )
۷۸۰۰	kg/m <sup>3</sup>	چگالی پیزوالکتریک ( $\rho_p$ )
۶۶	Gpa	مدول یانگ پیزوالکتریک ( $E_p$ )
$1/32 \times 10^{-8}$	F.m <sup>-1</sup>	ظرفیت الکتریکی ( $\epsilon_{33}^*$ )
-۱۹۰	pm.V <sup>-1</sup>	ثابت پیزوالکتریک ( $d_{31}$ )

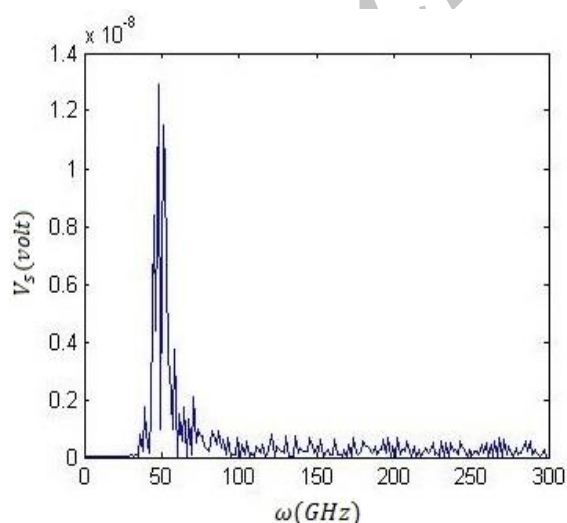
در این بخش جهت صحت‌گذاری روابط و معادلات ارائه شده برای برداشت انرژی از نانو تیر بایمورف تحت ارتعاشات اتفاقی با روابط ارائه شده در مرجع [۱۱] اعتبار سنجی می‌شوند. جهت انجام این کارترم  $e_0a$  (ضریب اصلاحی ساختار نانو) از رابطه (۳) صرف نظر شده و همچنین تابع تحریک ورودی در معادله (۴۶) به صورت اجباری و هارمونیک در نظر گرفته شده است. نتیجه به دست آمده بر اساس خواص مکانیکی مدل مرجع [۱۱] در شکل (۲) نمایش داده شده است.



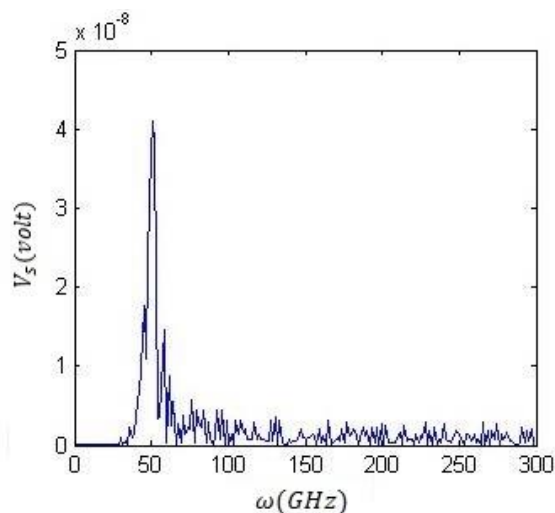
شکل (۲) مقایسه نتایج به دست آمده در این پژوهش و مرجع [۱۰] در ابعاد ماکرو همان‌طور که در شکل ۲ مشاهده می‌شود نتایج به دست آمده از حل حاضر با نتایج مرجع [۱۱] از تطابق بسیار خوبی برخوردار است.

## ۵- نتایج خروجی

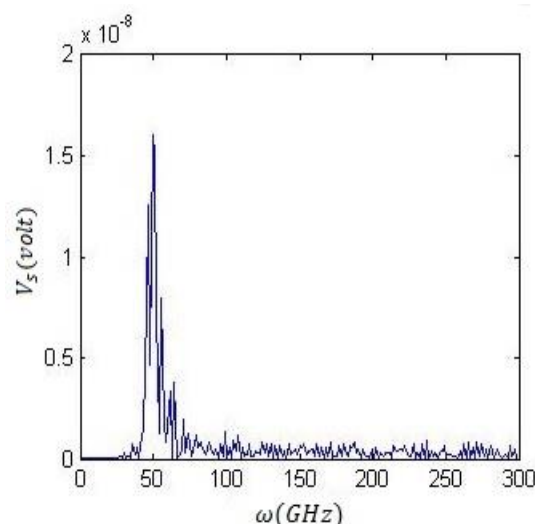
نتایج به دست آمده از حل معادلات در این پژوهش در دو بخش ارائه شده‌اند. در بخش اول میزان ولتاژ خروجی برحسب فرکانس و تأثیر پارامترهای مختلف از جمله ضریب مقیاس نانو ذرات و همچنین مقدار مقاومت به عنوان یکی از مؤثرترین پارامترهای ورودی در برداشت انرژی از نانو تیر بایمورف، ارائه گردیده است. در بخش دوم میزان متوسط قدرت خروجی برحسب مقاومت الکتریکی تحت تأثیر پارامترهای مختلف از قبیل ضریب مقیاس نانو، ابعاد هندسی



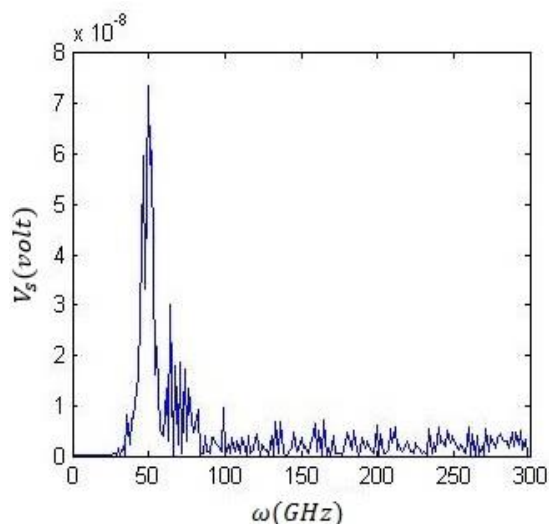
شکل (۳) مقدار ولتاژ خروجی برحسب فرکانس با ازای  $e_0a = 1$  (nm) و  $R = 10^3$  ( $\Omega$ )



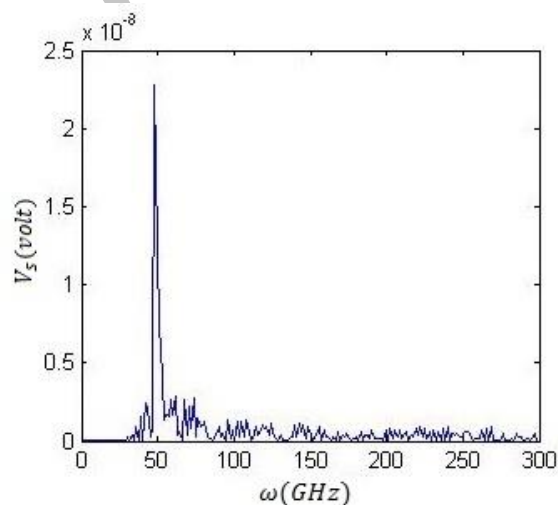
شکل (۶) مقدار ولتاژ خروجی بر حسب فرکانس با ازای  $a_0e_0 = 4(nm)$   
 $R = 10^3(\Omega)$



شکل (۴) مقدار ولتاژ خروجی بر حسب فرکانس با ازای  $a_0e_0 = 2(nm)$   
 $R = 10^3(\Omega)$



شکل (۷) مقدار ولتاژ خروجی بر حسب فرکانس با ازای  $a_0e_0 = 5(nm)$   
 $R = 10^3(\Omega)$



شکل (۵) مقدار ولتاژ خروجی بر حسب فرکانس با ازای  $a_0e_0 = 3(nm)$   
 $R = 10^3(\Omega)$

از نتایج حاصل شده در شکل های (۵) تا (۷) می توان دریافت که با افزایش ضریب مقیاس نانو میزان پهنای باند در سه مد اول ارتعاشی از سایر مدها بیشتر خواهد بود و به طبع آن موجب افزایش توان خروجی و ولتاژ مدار و همچنین کاهش میزان فرکانس طبیعی می شود.

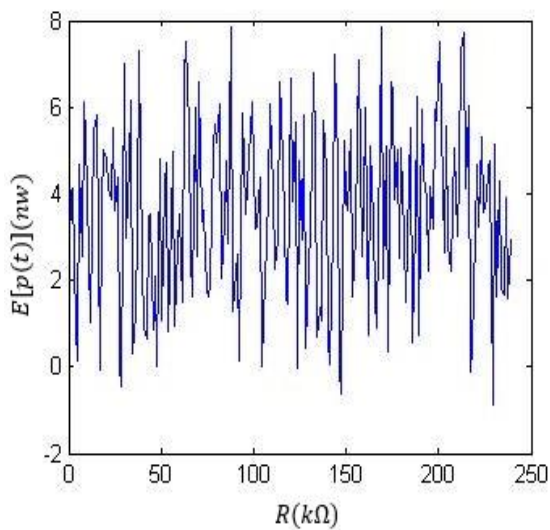
مطابق رابطه (۴۶) مقاومت الکتریکی به عنوان یکی دیگر از پارامترهای مؤثر در برداشت انرژی الکتریکی از تیر نانو با لایه پیزوالکتریک، میزان مقاومت الکتریکی مدار است. نتایج تأثیر مقاومت بر حداکثر برداشت انرژی در شکل های ۸ الی ۱۰ آمده است.

در شکل‌های ۸ الی ۱۰ در بازه فرکانسی ۰ تا ۲۵۰ هرتز با افزایش مقدار مقاومت میزان برداشت انرژی افزایش می‌یابد و با یکدیگر رابطه مستقیم دارند. همچنین با توجه به نتایج نمودار ولتاژ بر حسب فرکانس در می‌یابیم که بیشترین برداشت انرژی در محدوده مد اول ارتعاشی رخ می‌دهد که حاصل پدیده رزونانس در سیستم است.

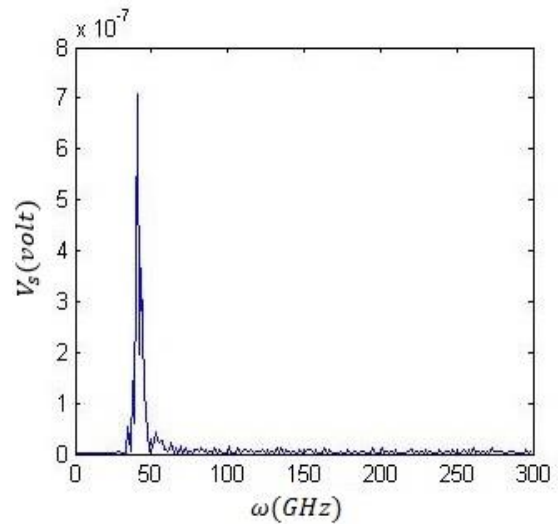
#### ۲-۵ بخش دوم ارائه نتایج

ارائه تأثیر پارامترهای مختلف از جمله ضریب اصلاحی ساختار نانو، طول تیر، فرکانس تحریک بر میانگین قدرت خروجی از تیر نانو بایمورف در شکل‌های ۱۱ الی ۱۷ ارائه شده‌اند.

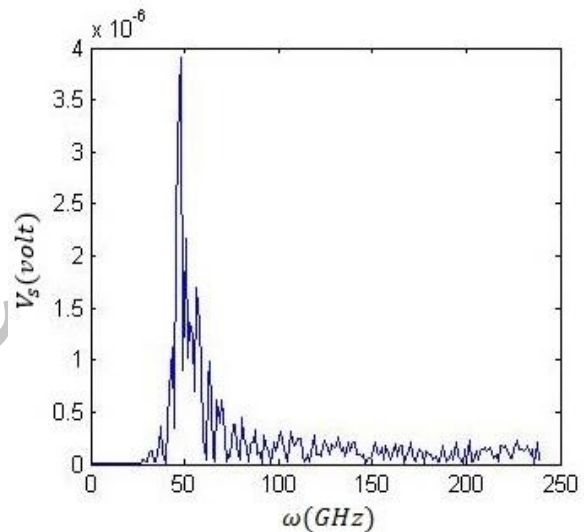
بر اساس شکل (۱۱) و (۱۲) می‌توان دریافت که اگر ابعاد تیر نانو کمتر از  $300\text{ nm}$  باشد میزان تغییرات متوسط توان خروجی کم است یا به عبارت دیگر بازه تغییرات قدرت خروجی در یک مقاومت ثابت زیاد نیست.



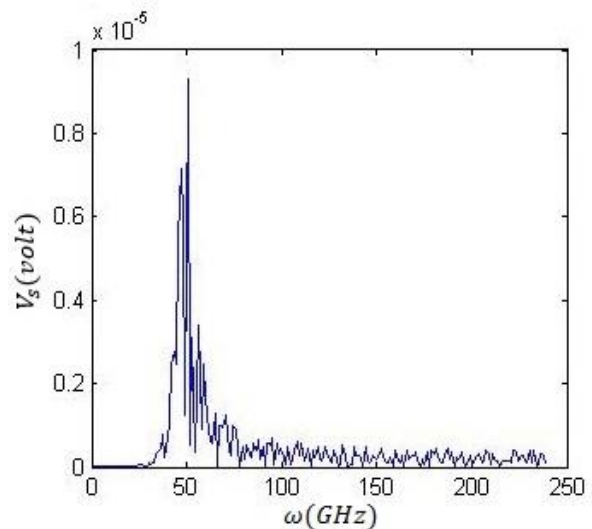
شکل (۱۱) میانگین قدرت خروجی بر حسب مقاومت به ازای  $e_0 a = 1\text{ (nm)}$  و  $L = 240\text{ (nm)}$



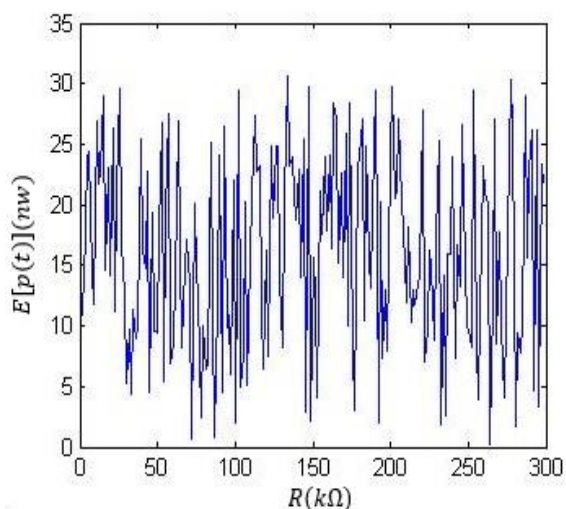
شکل (۸) مقدار ولتاژ خروجی بر حسب فرکانس با ازای  $e_0 a = 5\text{ (nm)}$  و  $R = 10^5\text{ (Ω)}$



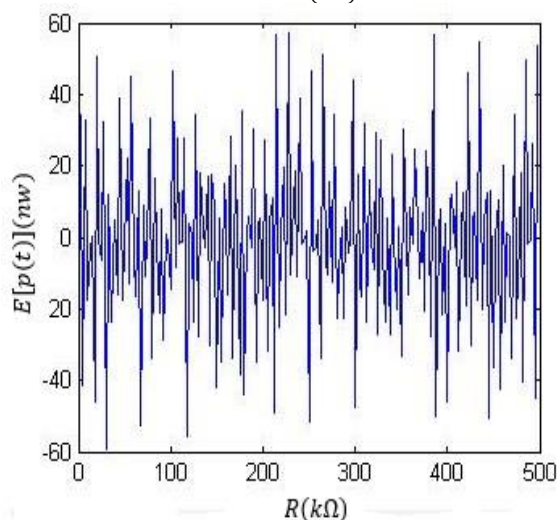
شکل (۹) مقدار ولتاژ خروجی بر حسب فرکانس با ازای  $e_0 a = 5\text{ (nm)}$  و  $R = 10^5\text{ (Ω)}$



شکل (۱۰) مقدار ولتاژ خروجی بر حسب فرکانس با ازای  $e_0 a = 5\text{ (nm)}$  و  $R = 10^6\text{ (Ω)}$

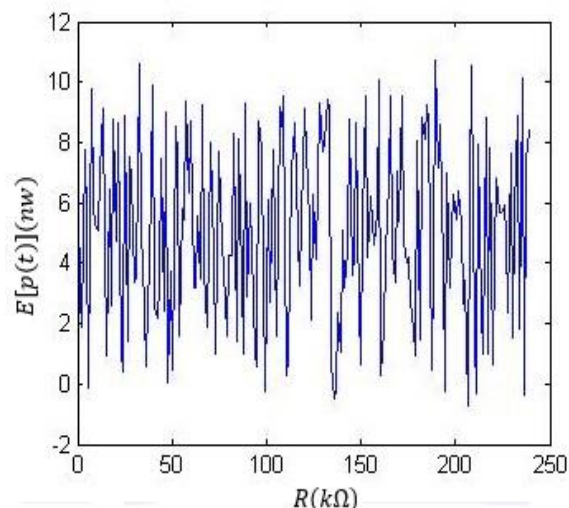


شکل (۱۴) میانگین قدرت خروجی بر حسب مقاومت به ازای  $e_0 a = 4(nm)$  و  $L = 410(nm)$



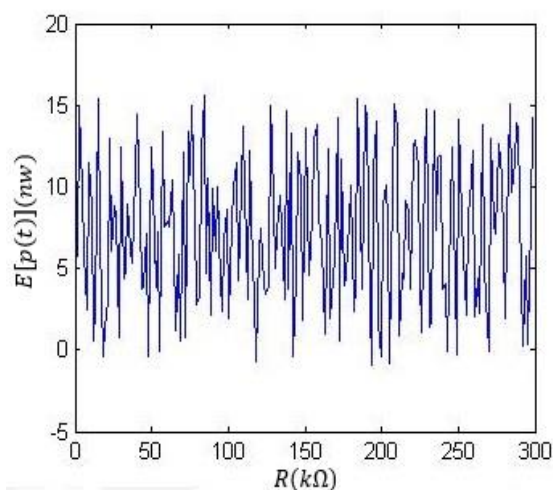
شکل (۱۵) میانگین قدرت خروجی بر حسب مقاومت به ازای  $e_0 a = 5(nm)$  و  $L = 500(nm)$

از دیگر پارامترهای مورد بررسی که باعث افزایش توان خروجی می گردد عرض تیر و بازه فرکانسی تحریک اتفاقی ورودی است که نتایج آن در شکل های (۱۶) و (۱۷) نشان داده شده است.



شکل (۱۲) میانگین قدرت خروجی بر حسب مقاومت به ازای  $e_0 a = 2(nm)$  و  $L = 280(nm)$

بر اساس نتایج نمایش داده شده در شکل های ۱۳ تا ۱۵ مشاهده می گردد که میزان توان متوسط با افزایش ضریب مقیاس ذرات نانو و طول تیر بایمورف، افزایش می یابد یا به بیان دیگر پارامترهای ذکر شده با توان متوسط رابطه مستقیم دارند. و همچنین مطابق رابطه (۳۲) با افزایش طول تیر فرکانس طبیعی کاهش می یابد.

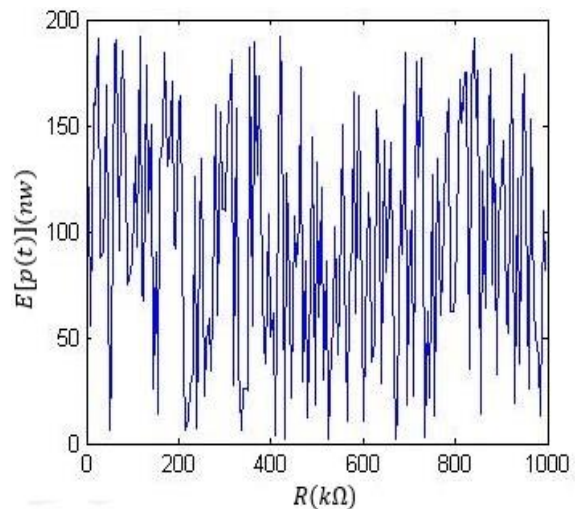


شکل (۱۳) میانگین قدرت خروجی بر حسب مقاومت به ازای  $e_0 a = 3(nm)$  و  $L = 340(nm)$

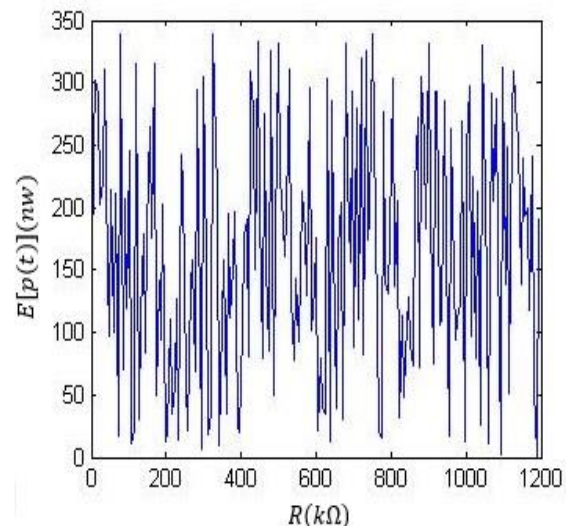
الکتریکی از تیر بایمورف در مقیاس نانو تحت تحریک اتفاقی پرداخته شد. از نتایج خروجی حاصل شده می توان نتیجه گرفت که افزایش ضریب مقیاس و همچنین میزان مقاومت الکتریکی باعث افزایش حداکثر ولتاژ خروجی می گردد. لازم به ذکر است که ولتاژ خروجی حاصل از مدار تحت تحریک اتفاقی نسبت به تحریک هارمونیک دارای حساسیت بیشتری است. به طور مشابه با توجه به نمودارهای حاصل شده می توان دریافت که تغییرات و افزایش ابعاد هندسی تیر باعث افزایش توان متوسط خروجی می گردد که این نتیجه در نمودارهای (۱۱) تا (۱۵) نشان داده شده است. همچنین نتایج حاصل نشان می دهند که توان متوسط و ولتاژ خروجی در مود اول نسبت به سایر مدهای ارتعاشی بیشتر است. دلیل این امر به خاطر وجود کرنش های زیاد در مد اول است.

#### ۷- مراجع:

- [1] Kim H. Kim J.H. Kim J. A review of piezoelectric energy harvesting based on vibration, International Journal of Precision Engineering and Manufacturing, Vol.12, 2011, pp.1129-1141.
- [2] Zamanian M. Rezaei H. Hadilu M, A comprehensive analysis on the discretization method of the equation of motion in piezoelectrically actuated micro beams, Smart Structures and Systems, Vol. 16, 2015, pp.891-918,
- [3] Ke L.L, Wang Y.S, Thermoelastic-mechanical vibration of piezoelectric Nano beams based on the nonlocal theory, Smart Materials and Structures, Vol. 21, 2012,
- [4] Zhang Y. Cai S.C.S. Deng L. Piezoelectric-based energy harvesting in bridge systems, Intelligent Material Systems and Structures, Vol. 25, 2014, pp.1414-1428.
- [5] Dai X.Z. Wen Y.M, Li P, Yang J, Gao G.Y, Modeling, characterization and fabrication of vibration energy harvester using Terfenol-D/PZT/Terfenol-D composite transducer, Sensors and Actuators, Sensors and Actuators A: Physical volume 156, 2009, pp.350-358



شکل (۱۶) میانگین قدرت خروجی بر حسب مقاومت به ازای  $e_0 a = 5(nm)$  و  $b = 140(nm)$ ,  $\omega = 180(GHz)$



شکل (۱۷) میانگین قدرت خروجی بر حسب مقاومت به ازای  $e_0 a = 5(nm)$  و  $b = 250(nm)$ ,  $\omega = 280(GHz)$

با توجه به دو شکل (۱۶) و (۱۷) می توان دریافت میزان دامنه توان خروجی با افزایش عرض تیر و بازه فرکانس تحریک، افزایش می یابد. همان گونه تابع ثابت زمانی در رابطه (۲۷) با افزایش عرض تیر، افزایش می یابد

#### ۶- بحث و نتیجه گیری

در این مقاله با توجه به اینکه بررسی تعیین رفتار و خواص مواد در مقیاس نانو در صنایع مختلف مهندسی حائز اهمیت است لذا به ارائه راه حل تحلیلی جهت برداشت انرژی

- [6] Eggborn T. Analytical models to predict power harvesting with piezoelectric materials, Dissertação de Mestrado - Virginia Polytechnic Institute and State University, 2003
- [7] Erturk A. and Inman D.J. A distributed parameter electromechanical model for cantilevered piezoelectric energy harvesters, Journal of Vibration and Acoustics, volume 130 2008, page 041002.
- [8] Fakhzan M.N, Muthalif Asan G.A, Harvesting vibration energy using piezoelectric material: Modeling, simulation and experimental verifications, Mechatronics, volume 23, 2013, pp 61-6
- [9] Ottman G.K, Hofmann H.F, Bhatt A.C, Lesieutre G.A, Adaptive piezoelectric energy harvesting circuit for wireless remote power supply, IEEE Transactions on Power Electronics volume 17, 2002, pages 669 to 676.
- [10] Azizi S, Ghazavi M. R, Rezazadeh G. Ahmadian I, Cetinkaya C, Tuning the primary resonances of a micro resonator using piezoelectric actuation, Nonlinear Dynamics, Vol. 76, 2014, pp. 839-852,
- [11] Erturk A, Inman DJ. An experimentally validated bimorph cantilever model for piezoelectric energy harvesting from base excitations. Smart Mater Struct 2009;18:025009

Archive