

مطالعه ارتعاشات آزاد پوستههای چندلایه استوانهای شامل لایهی پیزوالکتریک با تکیه گاه ساده

مصطفى معطرى ، فرزان براتى *

* نويسنده مسئول: farzanbarati104 @gmail.com, farzanbarati@yahoo.com *

چکیدہ

در این پژوهش، به مطالعه و حل دقیق ارتعاشات آزاد پوستههای چندلایه استوانهای پرداخته شده است. لایه ها از نوع زاویه ای بوده و با زوایای مختلف نسبت به هم قرار گرفته اند. در سطح خارجی پوسته چندلایه استوانه ای، یک لایه پیزوالکتریک قرار گرفته است که به منظور تحریک مناسب در راستای شعاعی قطبیده شده است. پوسته طویل بوده و با فرض کرنش صفحه ای بصورت دوبعدی تحلیل می گردد. متغیرها در هر لایه برای بر آورده کردن شرایط مرزی که شامل تکیه گاههای ساده در لبه ها می با شند بر حسب سری های فوریه بسط داده شده اند. معادلات حاکم به معادلات دیفرانسیل معمولی در راستای ضخامت تقلیل پیدا می کنند سپس از روش سری با تابع توانی برای حل این معادلات که منجر به یک پاسخ دقیق و همگرایی سری با تابع توانی برای حل این معادلات که منجر به یک پاسخ دقیق و همگرایی مور اول و در دو حالت تکلایه ی پوسته چندلایه استوانه ای در هفت مود اول و در دو حالت تکلایه ی پیزوالکتریک و پوسته پنج لایه در انتها و شکل کلی پاسخ متغیرهای نظیر جابجایی، تنش ها و کرنش های اصلی بدست آمده است.

ى	واژههای کلیدی
يت، پيزوالكتريك،	ارتعاشات آزاد، لمين
رى فوريه.	کرنش صفحهای، س
94/11/.1	تاريخ ارسال:
90/01/04	تاريخ بازنگري:

تاريخ پذيرش:

90/07/79

۲- استادیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد همدان، همدان، ایران.

۱- کارشناس ارشد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد همدان، همدان، ایران.



Free vibration study of simply supported cylindrical laminated panels with piezoelectric layer

Mostafa Moattari¹, Farzan Barati^{2,*}

* Corresponding Author: farzanbarati104 @gmail.com, farzanbarati@yahoo.com

Abstract:	Key words:
In the present study, vibration of cylindrical laminates with	Free vibration,
different layers and angles were studied. In order to actuate and	Laminate, Piezoelectric,
polarize in radial direction, a piezoelectric layer was located at	Plane strain,
outer surface of composite shell. Laminates were assumed long	Fourier series.
enough so that plane strain state analysis in 2D can be used	
properly. In order to satisfy the boundary conditions, variables in	
terms of Fourier series were obtained. The governing equations	
reduced to ordinary differential equations at thickness direction	
and by power series method, the exact solution equations were	
obtained, unknown coefficient were calculated with rapid	
convergence. By using the matrix transfer method, vibration	
response of composite shell was obtained. Finally, results for the	
first seven modes of natural frequency of multi-layer cylindrical	
shells were obtained. In addition, for both state of one single	
piezoelectric layer and five layer shell at the end, some responses	
such as displacement, principal stress and strain were achieved.	

¹⁻ MSc Student, Department of Mechanical Engineering, Hamedan Branch, Islamic Azad University, Iran.

²⁻ Assistant Prof., Department of Mechanical Engineering, Hamedan Branch, Islamic Azad University, Iran.

۱- مقدمه

استفاده از ورق های ساندویچی و کامپوزیت با لایهی محرک و سنسورهای پیزوالکتریک ^۱ سبک در انواع سازه ها رو به گسترش است. مواد هوشمند جایگزین مناسبی برای بسیاری از نقایص مواد همگن فلزی و غیرفلزی است. پیزوالکتریک دارای ساختاری هوشمند بوده که تحت اثر میدان الکتریکی دچار کرنش شده و در حالت عکس این مطلب میدان کوپله الکتروالاستیک را ایجاد می کند. این مواد هوشمند را می توان به دو گروه اصلی تقسیم نمود: کریستال ها و سرامیکها شناخته شده ترین و معروف ترین مواد پیزوالکتریک در گروه کریستالها کوارتز می باشد و در گروه دیگر، تیتانات باریم^۲ از جمله انواع پرکاربرد این مواد می باشد[1].

از سازههای کامپوزیتی با محرک پیزوالکتریک در صنایع هوافضا، سازههای فضایی، خودروسازی و کشتی-سازی استفاده میگردد. در صنعت پلسازی از سنسورهای پیزوسرامیک به منظور تعیین میزان فرکانس در اثر محرک-هایی نظیر باد استفاده می شود، همچنین فرآیند تست التراسونیک" یکی از روش های تایید شده در تست عیوب جوشکاری از جمله تخلخل میباشد که امواج پس از برخورد به حفره در عمق جوش به سنسور پیزوسرامیک برخورد نموده که پس از ارتعاش موجب ایجاد آشفتگی در نمایشگر دستگاه میشوند که هدف از مطالعه حاضر نیز بررسی تخریب ناشی از ارتعاشات لایهی پیزوالکتریک در چنین تستی می باشد. در موارد ذکر شده، ساختمانی مشتمل بر کامپوزیت و پوستههای چندلایهای مکمل مناسبی برای عكس العمل ماده ييزوالكتريك تحت اثر ميدان الكتريكي مي باشد، ماده تک-مولفه ييز والکتريک براي اينکه جابجايي برابر با ۱۰ الی ۱۰۰ میکرومتر بدست دهد باید تحت یک میدان الکتریکی برابر با ۲ کیلوولت بر میلیمتر قرار گیرد. جهت جبران این محدودیت، به ساختاری چند مؤلفهای جهت تغییر شکلهای خمشی-کششی که همان کامپوزیت-

های لایهای میباشد مورد نیاز است. از جمله مزیتهای پوسته چندلایهای به همراه پیزوالکتریک رسیدن به کرنش-هایی به مراتب بالاتر از حالت تک-مؤلفهای با اعمال ولتاژی کمتر از ۲۰۰ ولت میباشد. در نتیجه جهت رسیدن به یک دامنه حرکتی بزرگ در سیستمهای هوشمند بواسطه ييزوالكتريك، استفاده از ساختار لايهاي ساندويچي امري مورد نیاز میباشد و علت آن در این است که انقباض پیزوالکتریک در اثر میدان الکتریکی از خمش لایههای کامپوزیت جلوگیری میکند [۲]. در مودهای ابتدایی ارتعاشات ورق،ها شکلی شبیه قلههای سینوس و کسینوس داشته به همین دلیل بصورت توابعی از سینوس و کسینوس تخمین زده میشود. کرنش صفحهای تعمیم داده شده برای هر لایه بصورت سریهای فوریه در محدوده مختصات برای ارضا کردن شرایط مرزی در لبه ها بسط داده شده است، درنتيجه معادلات حاكم به معادلات ديفرانسيل معمولي مرتبه اول نوع اویلر-کوشی^۴ با ضرایب متغیر در راستای ضخامت تقلیل پیدا میکند که با استفاده از روش فروبنیوس اصلاح اشده^۵ تحلیل میگردد. این روش مبتنی بر تابع نمایی و سری-های توانی استوار میباشد. در ادامه معادلات مومنتوم و توازن بار یک ماتریس ۸*۸ بر حسب نمای ترم نمایی با هشت مقدار و بردار ویژه و یک رابطه بازگشتی برای ضرایب سری توانی را بدست میدهد. پاسخ عمومی برای هر لایه بر حسب ترمهای هشت متغیر اصلی در پایین لایه بسط داده شدهاند. با درنظر گرفتن شرایط پیوستگی در فصل مشترک بین لایهها، یک ماتریس انتقال پوسته برای ایجاد ارتباط بین متغیرهای اصلی در پایین و بالای سطوح تعریف میشود. ثوابت مجهول با استفاده از روش ماتریس انتقال تعیین شده که شرایط مرزی را ارضاء می کند. گرچه بدست آوردن یک رابطه کلی برای پدیده ارتعاشات همواره مطلوب بوده لیکن در اینجا به علت پیچیدگی بسیار بالای معادلات امکان رسیدن به پاسخی کلی را تقریبا غیرممکن نموده و به نتایج عددی به منظور تایید تحلیل اتکا گردیده است. درحقیقت با استفاده از تئوری ييزوالاستيسيته راهحل هاي دقيق و مناسبي دقيقي براي يوسته-

¹⁻Actuator

²⁻Barium Titanate (BaTiO3)

^{3 -}Ultrasonic test

^{4 -}Euler-Cauchy

^{5 -}Modified freobenius

های کامپوزیتی بدست آمده است که البته فرض پیوستگی بین لایه ا بخشی جدایی ناپذیر از آن می باشد. تحلیل برای تک مولفه پیزوالکتریک و همچنین پوسته چندلایه زاویه ای متقارن شامل پنج لایه و یک لایه پیزوالکتریک بر روی سطح بالایی ساندویچ پنل مورد بررسی و تجزیه و تحلیل قرار می گیرد که جنس پیزوالکتریک درهردو حالت یکسان است. در نهایت نتایج عددی بدست آمده برای فرکانس های طبیعی بی بعد شده با مقادیر تحلیلی انجام گرفته بر اساس روش لایروایز ' که توسط چن و لی انجام گرفته (۳] مقایسه می گردد و انطباق آن بررسی می گردد.

حل دقیق فضای سهبعدی ارتعاشات آزاد ورقهای کامپوزیت با چینش لایهای متقاطع با تکیهگاههای ساده و شرایط مرزی مختص به خود توسط سرینیواس و رائو [۴] ارائه شد. توضيحات داخل شكل (١) معرف مشخصات اين لايه-ها هستند که به صورت یارامتر تعریف شده است. ادلمن و استاوسکای [۵] ارتعاشات شعاعی پیزوسرامیکهای استوانه-ای قطبیده شده در جهت محوری را مطالعه کردند. چو و همکاران [۴] ارتعاشات آزاد ورق،های مستطیلی چندلایه را توسط تئوری لایه منفرد مرتبه بالاتر مطالعه نمودند. چن و شن [۷ تا ۸] روش سرىهاى توانى را براى رسيدن به پاسخى با استفاده از تئوری پیزوالاستیسیته سهبعدی برای حالت استاتیکی متقارن و ارتعاشات آزاد پوستهی استوانهای بکار بردند و فرکانس های آن را تعیین کردند. باترا و آیمانی [۹] پاسخی دقیق برای فرکانس های از دست رفته مودهای قبلی در ارتعاشات آزاد ورقهای مستطیلی با تکیهگاههای ساده بدست آورد. آیدوگدو و تیمارچی [۱۰] ارتعاشات ورق-های مربعی با چیدمان لایهای بصورت متقاطع با شرایط مرزی مختلف تحلیل نمود. لیو و همکاران [۱۱] ارتعاشات آزاد ورق،های چندلایه متقارن را بر اساس روش تئوری تغييرشكل برشي با استفاده از تكنيك مؤثر حداقل مربعات تحلیل نمودند. کانگ و شیم [۱۲] حل دقیق و قابل قبولی برای ارتعاشات آزاد ورق،های مستطیلی با مومنتوم درصفحه با تکیه گاههای ساده در دولبه مخالف را بررسی نمود. چن و

لى [١٣ تا ١۴] پاسخ دوبعدى و تحليلي تقريبي براى پاسخ استاتیکی و ارتعاشی پوستههای چندلایه استوانهای از نوع زاویهای با روش لایروایز ارائه نمودند. در این روش هر لایه از پوسته به چند زیرلایه که برای هر کدام یک لایهی میانی در نظر گرفته میشود تقسیم میگردد. معادلات دیفرانسیل برای لایه های میانی استخراج شده و ثوابت معادلات تقریب زده میشوند. کرمی و همکاران [۱۵] ارتعاشات آزاد ورق-های چندلایه متقارن با ضخامتی ملایم و لبه هایی مقید شده بر روی بستر الاستیک را مورد تجزیه و تحلیل قرار دادند. شیمپی و پاتل [۱۶] تئوری ورق دو متغیره را برای ارتعاشات آزاد ورقهای ایزوتروپیک و ارتوتروپیک ارائه کرد. تحلیل ارتعاشات آزاد ورق،های کامپوزیت مستطیلی با روش اجزاءمحدود توسط پاندیت و همکاران [۱۷] انجام پذیرفت و مثالهای عددی از ورقهای کامپوزیتی و ایزوتروپیک مستطیلی برای زوایای مختلف چرخش الیاف و نسبتهای مختلف اندازه و ضخامت حل گردید. تعدادی از محققین روی ارتعاشات ینلهای لایهای کار کردهاند، در این میان سيوالك [1٨] تكنيك كانولوشن گسسته يكتا را براي تحليل ارتعاشات آزاد ورقهای کامپوزيت چندلايه متقارن از نظر چینش لایهها و نسبتاً ضخیم برمبنای تئوری تغییرشکل برشی مرتبه اول پیشنهاد نمود و سپس نتایج بدست آمده با سایر روش ها از تحلیل و روش عددی مقایسه کرد. برتی [۱۹] ارتعاشات آزاد یک ورق کامپوزیت چندلایه متقارن و نامتقارن را با برشی ایجاد شده در مرکز آن را مورد مطالعه قرار داد. اِنگو-کنگ و همکارانش [۲۰] روش منظم تابع مبنای شعاعی را برای تحلیل ارتعاشات آزاد ورق،های كامپوزيت چندلايه با استفاده از تئوري تغييرشكل برشي مرتبه اول به کار بردند. مسینا [۲۱] تأثیر شرایط مرزی تکیه-گاهی را بر روی ارتعاشات آزاد سهبعدی ورقهای مستطیلی و چندلایه ایزوتروپیک با چینش متقاطع را نشان داد. ژیانگ و همکارانش [۲۲] ویژگیهای ارتعاشی پوستههای کامپوزیتی چندلایه را با استفاده از تئوری تغییرشکلبرشی مرتبه اول را بررسی کردند و تکنیک هموارسازی یکیارچه

¹⁻ Layerwise method

²⁻Shear deformation theory

^{3 -}Convolution technique

فاقد مش را مبنای تحلیل ورقهای نازک قرار دادند. بوسکولو و بانرجی [۲۳] با استفاده از تکنیک سختی دینامیکی توسعهیافته با استفاده از روش پیچیده لایروایز و دقت بالایی ورقهای کامپوزیت چندلایه را تحلیل کردند. در تحقیق حاضر، قطاع کامپوزیت در لبهها به تکیه گاه ساده مقید شده است. طول پوسته را طویل درنظر گرفته به صورتی که می توان آن را بینهایت فرض نمود، همچنین با توجه به سوابق ذکر شده و عدم بررسی روش سری توانی اصلاح شده در تحلیل ارتعاشات پوسته استوانهای در تحقیقهای گذشته، در این پژوهش به بررسی به کارگیری این روش در تحلیل ارتعاشات پوسته استوانهای شامل لایهی پیزوالکتریک پرداخته شده و دقت آن مورد بررسی قرار می گیرد.

۲- تعريف مسئله

شکل (۱) پنل استوانهای مدوری را نشان میدهد. لایه-های کامپوزیت روی هم قرار گرفته که از نوع لمینیت با چینش زاویهای است. مختصات محلی از نوع استوانهای با توجه به شکل سیستم بر روی آن قرار داده میشود، مبدأ مختصات در مرکز پنل استوانهای و محور طولی z در راستای طولی پنل قرار دارد.



شکل (۱) ابعاد و مشخصات پنل استوانهای کامپوزیت چندلایه.

r مختصات شعاعی است که در راستای شعاع قرار گرفته و θ جهت زاویه ای آن را مشخص می کند، مقدار θ از ۰ تا ۳۶۰ درجه می تواند تغییر یابد. در اینجا ψ قطاعی مشخص بوده که بیانگر زاویه کل سیستم استوانه ای درنظر گرفته شده است. β زاویه ی الیاف نسبت به محور θ می باشد. پس در راستای الیاف در هر لایه و دو راستای باقیمانده در جهت

عمود بر الیاف رفتار اُرتوتروپیک مشاهده می گردد. ضریب الاستیسیته در این سه راستا، جهت تعیین خواص مکانیکی لایه مورد نیاز است. نیروی برشی در جهت محور *b*, *z* صفر در نظر گرفته میشوند که علت آن چسبندگی قابل توجه در بین لایهها بوده که مانع عدم حرکت نسبی لایهها نسبت به یکدیگر می گردد.

۳- معادلات

روابط کرنش در مختصات استوانهای توسط تئوری الاستیسیته بیان می شود. معادله یجابجایی برای پوسته چندلایه در مختصات استوانهای بصورت زیر بیان می شود: $\overrightarrow{U} = \sum_{i}^{3} u_{i} \hat{e}_{i}$ (1)

روابط برای کرنش های اصلی و برشی را می توان بصورت زیر بیان نمود[۲۴]:

$$\varepsilon_{r} = \frac{\partial u}{\partial r}$$

$$\varepsilon_{\theta} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + u \right)$$

$$\varepsilon_{z} = 0 \qquad (\Upsilon)$$

$$\gamma_{r\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v}{r} + \frac{\partial v}{\partial r}$$

$$\gamma_{\theta z} = \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta}$$

$$\gamma_{gr} = \frac{\partial w}{\partial r}$$

در راستای محور z با فرض طویل بودن پوسته مقدار کرنش صفر شده و فرض کرنش صفحه ای برقرار است. در بحث الکتریسیته رابطه ی بزرگی میدان الکتریکی با پتانسیل الکتریکی بصورت زیر برقرار است: $E_i = -\phi_i$ (۳)

روابط (۲) و (۳) بطور مجزا از ویژگیهای میدان الاستیسیته و الکتریسیته هستند در بحث پوستههای چندلایه که شامل لایهی پیزوالکتریک میشود میدان کوپله الکتروالاستیسیته ایجاد شده که روبط در فضای کوپل باید تعریف گردند. روابط (۴) و (۵) فضای کوپل مورد نظر را ایجاد می-کند[۲۵]:

$$\varepsilon_{kl} = \overline{S}_{ijkl}\sigma_{ij} + \overline{d}_{kl}E_k \tag{(f)}$$

$$D_{i} = \overline{d}_{ij}\sigma_{ij} - \overline{\varepsilon}_{ij}\phi_{i} \tag{(a)}$$

$$\begin{cases} \xi = \frac{\theta}{\psi} \\ R_1^{(k)} = R - \frac{h}{2} + \sum_{i=1}^{k-1} t^{(i)} \\ \zeta^k = \frac{r - R_1^{(k)}}{t^{(k)}} \\ R - \frac{h}{2} = R_i \end{cases}$$
(9)

همانگونه که قبلاً ذکر شد با فرض کرنش صفحهای و با حذف پارامترهای $\sigma_{ heta}, \sigma_z, \sigma_{ heta z}, D_{ heta}, 0$ و جایگزینی پاسخ سری از معادله (۷) و (۸) داخل معادلات (۴) تا (۶) مجموعه معادلات از مرتبه سیزده به مرتبهی هشت تقلیل مییابند و رابطهی زیر بدست می آید:

$$\frac{\partial Q}{\partial r} = AQ \tag{(1.)}$$

$$Q = \begin{bmatrix} v_n, w_n, u_n, \sigma_{r_n}, \sigma_{zr_n}, \sigma_{r\theta_n}, \phi_n, D_{r_n} \end{bmatrix}^T$$
(11)

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & A_{13} & 0 & A_{15} & A_{16} & A_{17} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{25} & A_{26} & A_{27} & 0 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} & 0 & 0 & 0 & A_{38} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} & 0 & A_{46} & 0 & A_{48} \\ A_{51} & A_{52} & A_{53} & A_{54} & A_{55} & 0 & 0 & A_{58} \\ A_{61} & A_{62} & A_{63} & A_{64} & 0 & A_{66} & 0 & A_{68} \\ A_{71} & A_{72} & A_{73} & A_{74} & 0 & 0 & 0 & A_{78} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{85} & A_{86} & A_{87} & A_{88} \end{bmatrix}$$
(117)

$$2b \ adt bis \ ball bi$$

٤- شرايط مرزى

در ادامهی بحث به شرایط مرزی پرداخته خواهد شد. پوسته چندلایه استوانهای در کنارهها به تکیه گاه ساده مقید شده است، شرایط مرزی در کنارهها بصورت زیر قابل بیان است[۲۵]:

 $\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{0}:\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0},\boldsymbol{\sigma}_{\theta}=\boldsymbol{0},\boldsymbol{\sigma}_{\theta\boldsymbol{z}}=\boldsymbol{0},\boldsymbol{\phi}=\boldsymbol{0} \tag{14}$

$$\xi = 1: u = 0, \sigma_{\theta} = 0, \sigma_{\theta z} = 0, \phi = 0 \tag{10}$$

بسط معادلات (۴) و (۵) روابط الكتروالاستيسيته را بدست میدهد. به دلیل ماهیت ارتعاشی سیستم پوسته چندلایهای معادلات مستخرج از تئوری الاستیسیته در این حالت نیز صادق بوده و مشتمل بر معادلات زیر است: $\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} (\sigma_r - \sigma_{\theta}) = \rho \ddot{u}$ $\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta}}{\partial \theta} + \frac{2}{r} \sigma_{r\theta} = \rho \ddot{v}$ $\frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \sigma_{zr} = \rho \ddot{w}$ (9) $\frac{\partial D_r}{\partial r} + \frac{1}{r}D_r + \frac{1}{r}\frac{\partial D_{\theta}}{\partial \theta} = 0$ در مجموعه معادلات (۶) از نیروهای حجمی و منبع بارالکتریکی صرفنظر شده است. ارتعاشات ورق،ها و یوسته-ها در مودهای ابتدایی ارتعاش، از قلههای سینوسی و کسینوسی تشکیل شده که تقریب سری فوریه پاسخ دقیق و مناسبی را برای آن فراهم میکند. پاسخ سری فوریه معادلات (۴) تا (۶) بصورت زیر درنظر گرفته می شود: $(u, \sigma_r, \sigma_{\theta}, \sigma_z, \sigma_{\theta z}, \phi, D_r) =$ **(V**) $\sum_{r=1}^{\infty} \operatorname{Re}\left[\left(u, \sigma_{r}, \sigma_{\theta}, \sigma_{z}, \sigma_{\theta z}, \phi, D_{r}\right)_{n}\right] e^{i\omega t} \sin\left(n\pi\xi\right)$ $(v, w, \sigma_{zr}, \sigma_{r\theta}, D_{\theta}, D_{z}) =$ (A) $\sum_{r=1}^{\infty} \operatorname{Re}\left[\left(v, w, \sigma_{zr}, \sigma_{r\theta}, D_{\theta}, D_{z}\right)_{n}\right] e^{i\omega t} \cos\left(n\pi\xi\right)$ مشخصات ابعادی لایهی k أم ساندویچ پنل در شکل (۲) نشان داده شده است. مختصات جانبی ترو مختصات محلی در راستای ضخامت کے در این لایہ، بصورت زیر تعریف مى شود.



شکل (۲) مشخصات ابعادی لایهی klم.

در ادامه رابطهی بازگشتی زیر نیز برای تعیین تابع پاسخ بدست میآید:

$$Z_{i+1} = [(A - (\lambda + 2i/s)I)Z_i + ((2A_0R_1 + A_1 - (2\lambda s + i - 1)I)Z_{i-1})/s^2 + ((1A_0 - \lambda I)Z_{i-2})/s^2]/(i+1)$$

از معادلهی (۱۹) بافرض $0 = Z_1$ بدست می آید: $AZ_0 = \lambda Z_0$ (۲۲) بنابراین نماد λ مقادیر ویژه و Z_0 بردار ویژه جفت ماتریس $\wedge * \Lambda$ می باشند. در این حالت Λ دارای هشت جفت دو تایی ویژه $(\lambda_j, Z_0^{\ j})$ است، 8,..., $I = j \cdot Q$ مجموع هشت پاسخ به شکل رابطهی (۱۸) با تابع نمائی ^{کرم} و ضرایب $i^{\ j}$ برای سری توانی و i أمین پاسخ است. $Z_0^{\ j}$ بردار ویژه متعامد بوده و i_1^2 . ضرایب دیگر سری ها با استفاده از رابطهی (۲۱) برای $i^{\ \lambda} = \lambda$ بدست می آید.

هریک از مقادیر ویژه ماتریس A حقیقی هستند یا بصورت مجموعهای از جفتهای مختلط درمی آیند. حل برای جفت مقادیر ویژه $\beta i = \alpha \pm \beta_1$ با بردار ویژه Z_0^{1} بر طبق $_1 h$ برحسب ترمهایی از دو ثابت حقیقی C_1, C_2 بصورت زیر بدست می آید:

 $Q(\zeta) = Y_{1}(\zeta)C_{1} + Y_{2}(\zeta)C_{2}$ (۲۳) (1) (

$$\begin{split} Y_{1}(\zeta) &= e^{\alpha\zeta} \left[\cos \beta\zeta \sum_{i=0}^{\infty} \operatorname{Re}(Z_{j}^{1})\zeta^{i} - \\ \sin \beta\zeta \sum_{i=0}^{\infty} \operatorname{Im}(Z_{i}^{1})\zeta^{i} \right] \end{split} \tag{YF}$$

$$\begin{aligned} Y_{2}(\zeta) &= e^{\alpha\zeta} \left[\sin \beta\zeta \sum_{i=0}^{\infty} \operatorname{Re}(Z_{j}^{1})\zeta^{i} + \\ \cos \beta\zeta \sum_{i=0}^{\infty} \operatorname{Im}(Z_{i}^{1})\zeta^{i} \right] \end{aligned} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_{2}(\zeta) &= e^{\alpha\zeta} \left[\sin \beta\zeta \sum_{i=0}^{\infty} \operatorname{Re}(Z_{j}^{1})\zeta^{i} + \\ \cos \beta\zeta \sum_{i=0}^{\infty} \operatorname{Im}(Z_{i}^{1})\zeta^{i} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_{2}(\zeta) &= e^{\alpha\zeta} \left[\sin \beta\zeta \sum_{i=0}^{\infty} \operatorname{Re}(Z_{j}^{1})\zeta^{i} + \\ \cos \beta\zeta \sum_{i=0}^{\infty} \operatorname{Im}(Z_{i}^{1})\zeta^{i} \right] \end{aligned}$$

در حالتی که پتانسیل الکتریکی $\phi = \phi + P$ به کار رود، مشابه شرایط مدار الکتریکی مدار بسته است و اعمال چگالی بار الکتریکی D = D مشابه شرایط مدار الکتریکی باز است. شرایط پیوستگی در سطح مشترک لایه های همجوار بصورت زیر بیان می شود:

$$\begin{bmatrix} u, v, w, \sigma_r, \sigma_{zr}, \sigma_{r\theta}, \phi, D_r \big|_{\zeta=1} \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} u, v, w, \sigma_r, \sigma_{zr}, \sigma_{r\theta}, \phi, D_r \big|_{\zeta=0} \end{bmatrix}^{k+1}$$
(19)

در ارتعاشات اجباری، تحریکی توسط لایه پیزوالکتریک با تشکیل پتانسیل الکتریکی ایجاد می گردد. در سطح مشترک لایه یپیزوالکتریک با پنل هایی که در p_n امین سطح مشترک قرار دارد و برای I = 1, 2, ..., L = 1 پارامتر D_r مشترک قرار دارد و برای $I = n_q$ وارد می شود. برای چنین در روابط با پتانسیل $L_a = p_q = k$ وارد می شود. برای چنین سطوحی شرایط پیوستگی با شرایط زیر جایگزین می گردد: (۱۷)

٥- حل معادلات به كمك روش سرى تواني

در ادامه پاسخ عمومی معادلهی (۱۳) با استفاده از روش سری با تابع توانی بدست می آید. تابع توانی در این سری وابسته به جهت مختصاتی بی بعد در راستای ضخامت است. در این حال $1 \ge 2 \ge 0$ است. پاسخ سری بصورت زیر درنظر گرفته می شود:

$$Q(\zeta) = e^{\lambda \zeta} \sum_{i=0}^{\infty} Z_i \zeta^i$$
(1A)

در اینجا ترم Z_i برای $0 \le i$ معتبر میباشد، علاوه بر مقادیر ویژه تابع حدس Z_i در ادامه بدست میآید. حال رابطهی i = 0 در معادلهی (۱۳) جایگزین شده و با فرض رابطهای برای تعیین مقادیر ویژه بصورت زیر بدست میآید: $s^2 Z_1 - s^2 (A - \lambda I) Z_0 = 0$

که در اینجا:

$$s = \frac{R_1}{t} \tag{(Y)}$$

توانی نامحدود تعیین میشوند و همچنین از ترمهای بسیار Q_k^- کوچک صرفنظر می گردد. برای k اُمین لایه، مقدار p_k^- برابر مقدار Q در سطح بالایی لایه $1 = \zeta$ ، می تواند به مقدار $+ \zeta$ برابر مقدار Q در سطح پایینی لایه $0 = \zeta$ بصورت زیر تبدیل شود.

$$Q(0) = Y(0)C \Rightarrow C = [Y(0)]^{-1}Q(0)$$

$$Q(1) = Y(1)C = Y(1)[Y(0)]^{-1}Q(0) \Rightarrow$$

$$Q_k^{-} = T_k Q_{k-1}^{+} : that : T_k = Y(1)[Y(0)]^{-1}$$
(Y0)
$$C_k^{-} = T_k Q_{k-1}^{+} : that : T_k = Y(1)[Y(0)]^{-1}$$

$$C_k^{-} = T_k Q_{k-1}^{-} : that : T_k = Y(1)[Y(0)]^{-1}$$

$$C_k^{-} = T_k Q_{k-1}^{-} : that : T_k = Y(1)[Y(0)]^{-1}$$

$$C_k^{-} = T_k Q_{k-1}^{-} : that : T_k = Y(1)[Y(0)]^{-1}$$

$$C_k^{-} = T_k Q_{k-1}^{-} : that : T_k = Y(1)[Y(0)]^{-1}$$

$$C_k^{-} = T_k Q_{k-1}^{-} : that : T_k = Y(1)[Y(0)]^{-1}$$

$$C_k^{-} = T_k Q_{k-1}^{-} : that : T_k = Y(1)[Y(0)]^{-1}$$

$$C_k^{-} = T_k Q_{k-1}^{-} : that : T_k = Y(1)[Y(0)]^{-1}$$

$$C_k^{-} = T_k Q_{k-1}^{-} : that : T_k = Y(1)[Y(0)]^{-1}$$

$$C_k^{-} = T_k Q_{k-1}^{-} : that : T_k = Y(1)[Y(0)]^{-1}$$

$$C_k^{-} = T_k Q_{k-1}^{-} : that : T_k = Y(1)[Y(0)]^{-1}$$

$$C_k^{-} = T_k Q_{k-1}^{-} : that : T_k = Y(1)[Y(0)]^{-1}$$

$$C_k^{-} = T_k Q_{k-1}^{-} : that : T_k = Y(1)[Y(0)]^{-1}$$

$$C_k^{-} = T_k Q_{k-1}^{-} : that : T_k = Y(1)[Y(0)]^{-1}$$

$$C_k^{-} = T_k Q_{k-1}^{-} : that : T_k = Y(1)[Y(0)]^{-1}$$

$$C_k^{-} = T_k Q_{k-1}^{-} : that : T_k = Y(1)[Y(0)]^{-1}$$

$$C_k^{-} = T_k Q_{k-1}^{-} : that : T_k = Y(1)[Y(0)]^{-1}$$

$$C_k^{-} = T_k Q_{k-1}^{-} : that : T_k = Y(1)[Y(0)]^{-1}$$

$$C_k^{-} = T_k Q_{k-1}^{-} : that : T_k = Y(1)[Y(0)]^{-1}$$

$$C_k^{-} = T_k Q_{k-1}^{-} : that : T_k = Y(1)[Y(0)]^{-1}$$

$$C_k^{-} = T_k Q_{k-1}^{-} : that : T_k = Y(1)[Y(0)]^{-1}$$

$$C_k^{-} = T_k Q_{k-1}^{-} : that : T_k = Y(1)[Y(0)]^{-1}$$

$$C_k^{-} = T_k Q_{k-1}^{-} : that : T_k = Y(1)[Y(0)]^{-1}$$

$$C_k^{-} = T_k Q_{k-1}^{-} : that : T_k = Y(1)[Y(0)]^{-1}$$

$$C_k^{-} = T_k Q_{k-1}^{-} : that : T_k = Y(1)[Y(0)]^{-1}$$

$$C_k^{-} = T_k Q_{k-1}^{-} : that : T_k = Y(1)[Y(0)]^{-1}$$

$$C_k^{-} = T_k Q_{k-1}^{-} : that : T_k = Y(1)[Y(0)]^{-1}$$

$$C_k^{-} = T_k Q_{k-1}^{-} : that : T_k = Y(1)[Y(0)]^{-1}$$

میدهد که شرط پیوستگی را بر آورده می کند.

٦- نتایج عددی

در این بخش نتایج بصورت عددی با استفاده از روابط حاضر بدست می آیند. پنل استوانهای بصورت لایـههـایی بـا چینش زاویهای بوده که قرارگیری لایـههـا در آن بصـورت زیر است و از پایین به بالا میباشد.

(۲۶) [°45 / °00 / °00 / °10] برای تمامی لایه ها ضخامت و چگالی یکسانی درنظر گرفته شده است. همچنین ویژگی های لایه ها بصورت زیر می-باشد[۳].

$$Y_L/Y_T = 25$$

 $G_{LT}/Y_T = 0.5$
 $G_{TT}/Y_T = 0.2$
 $\mu_{LT}/\mu_{TT} = 0.25$
 $x_{LT}/\mu_{TT} = 0.25$
 $y_{LT}/\mu_{TT} = 0.25$

با یک لایه پیزوالکتریک روی سطح آن تحلیل می گردد. پوسته شامل ۵ لایه لمینای الیافی با تک لایهی پیزوالکتریک است.



شكل(۶)نحوهي چينش لايههاي لمينيت استوانهي.

در شکل (۶) در قسمت ب چگالی مواد اول، دوم، سوم و چهارم برابر ۱۵۷۸ کیلو گرمبرمتر مکعب و در قسمت الف چگالی تـککلایه پیزوالکتریک برابر ۷۶۰۰ کیلو گرم-برمتر مکعب در نظر گرفته می شود. قسمت (الف) شکل نشان دهنده ی تک لایه ی پیزوالکتریک و قسمت (ب) پنل ها را نشان می دهد که خصوصیات متفاوتی از مواد را شامل شده و غیرهمگن است. نتایج در هر دو حالت برای هفت مود پایین لایه ها در مود فضایی 1 = n و تنها مود خمشی ۱ برای مود فضایی 2 = n در جدول (او ۲) آمده است و بانتایج بدست آمده توسط چن و لی [۳] مقایسه گردیده است. محاسبات جلول (۱) بر اساس فر کانس بی بعد شده صورت گرفته است. فر کانس طبیعی بصورت زیر بی بعد گشته است:

$$\overline{\omega} = \omega_n R S_1 \left(\rho_0 / Y_0 \right)^{1/2} \tag{YV}$$

نتایج در جدول (۱) برای مقادیر 2, 4 = S و در جدول (۲) برای 5, 10, 20 و در جدول (۱) برای پوسته فاقد لایه ی پیزوالکتریک و به همراه آن بدست آمده است. با توجه به نتایجی که در جدول ذکر شده است دقت مناسبی در مقایسه نتایج بدست آمده است. شکل مودها ازاین قرار است که مود اول یک مود خمشی است، مودهای دوم و سوم مودهای کششی هستند.مودهای چهارم و پنجم، مودهای برشی بین سطوح

بوده که در اثر صفر بودن جابجایی عرضی ایجاد شدهاند. مودهای ششم و هفتم مودهای برشی مرتبه بالاتر در میان جهت محیطی میباشد.

ساندويچپنل استوانەاي تحت شرايط	$arphi_n$ جدول (۱) فرکانس طبیعی
(OC) ji	مدار ،

			S=۴		S=۲ ·	
n		Order –	Chen & Lee	Present	Chen & Lee	Present
-		١	•/٨••٩١٣	•/٨••٩١٣	•/४٩٧४٨٩	•/۲٩٧٢٨٩
		٢	4/91041	r/91021	4/00010	4/20010
		٣	۵/۴۵۶۸۷	0/4091	시/ ነዮዮዎዎ	٨/١۴۴۶۶
	١	۴	۷/۹۳۷۲۷	V/94VYV	۳۰/۱۳۷۵	۳۰/۱۳۷۵
		۵	9/17704	9/14400	44/6041	41/6041
		۶	11/1984	11/8999	F./DFV1	f./09Vt
		۷	17/1727	18/1820	98/9AVV	98/9AVA
-		١	2/10188	2/10188	1/8080	1/8080
		۲	۶/۴۶ ۸ ۳۷	9/49 1 W	٨/٩٢۶۴١	٨/٩٢۶۴١
		٣	٧/٨٩۴٩٩	٧/٨٩۴٩٩	10/.998	10/.991
	۲	۴	9/V۵۴۹۳	9/V۵۴9۳	34/066.	34/088.
		۵	11/2888	11/2864	4./9101	4./9108
		۶	18/4291	18/4044	91/ 4 747	91/ 5 044
		٧	14/8420	1F/9FTA	9F/099V	۶ ۴/۵۶۹۹

در مودهای پایین خطایی بین دو روش لایروایز و سری توانی مشاهده نمی شود اما در مود پنجم به بعد مقداری بسیار جزئی خطا وجود دارد. روش سری توانی پاسخها را با سرعت بالایی همگرا می کند و عامل آن تابع نمایی است. سپس در ادامه فر کانس های طبیعی لمینیت به همراه لایهی پیزوالکتریک مطابق شکل (۶) در جدول (۲) آمده است. مشخصات و ثوابت مادی لایه ها به همراه ثوابت لایهی پیزوالکتریک بصورت زیر می باشد (جنس لایه ها در هر دو حالت یکسان است.) [۲۷].

 $\begin{bmatrix} (Y_1, Y_2, Y_3, G_{12}, G_{23}, G_{31})GPa, v_{12}, v_{13}, v_{23} \end{bmatrix}$ $Mat.1: \begin{bmatrix} (6.9, 6.9, 6.9, 2.76, 2.76, 2.76), 0.25, 0.25, 0.25 \end{bmatrix}$ $Mat.2: \begin{bmatrix} (224.25, 6.9, 6.9, 56.58, 1.38, 56.58), 0.25, 0.25, 0.25 \end{bmatrix}$ $Mat.3: \begin{bmatrix} (172.5, 6.9, 6.9, 3.45, 1.38, 3.45), 0.25, 0.25, 0.25 \end{bmatrix}$ $Mat.4: \begin{bmatrix} (181, 10.3, 10.3, 7.17, 2.87, 7.17), 0.28, 0.28, 0.33 \end{bmatrix}$ $PZT - 5A: \begin{bmatrix} (61, 61, 53.2, 22.6, 21.1, 21.1), 0.35, 0.38, \\ 0.38 \end{bmatrix} and \begin{bmatrix} (d_{31}, d_{32}, d_{33}, d_{15}, d_{24}), (\eta_{11}, \eta_{22}, \eta_{33}) \end{bmatrix} \rightarrow$ $\begin{bmatrix} (-171, -171, 374, 584, 584) \times 10^{-12} mV^{-1}, \\ (1.53, 1.53, 1.5) \times 10^{-8} Fm^{-1} \end{bmatrix}$

جدول (۲) فركانس طبيعي Øn پوسته چندلايه استوانهاي با لايهي پیزوالکتریک و تک لایهی پیزوالکتریک تحت شرایط مدارباز (OC)

Panel (a)

Panel (b)

n	Mode	S		
_				
		۵	2/62121	4/94777
	١	1.	7/07.91	6/20201
١		۲.	2/08000	٧/١۴٧٠۴
		۵	37/88198	3/01971
	۲	۱.	٣/۶٧٠٩٠	٣/٩٣٧٢.
		۲.	٣/۶٨٢۶٠	4/

1- Exponential function

		۵	11/8888	A/TOATO
	٣	۱۰	21/8898	٩/٧٠۶٣١
		۲.	41/040	1./1017
		۵	3/09221	1/8254.
	۴	۱.	4/82201	1/82820
		۲.	3790901	1/19919
		۵	4/2269	2/049.1
	۵	۲.	4/.9891	1/999
	Ć	۲.	F/.0.77	1/74814
(٥	0/93111	۲/۸۱۷۸۸
	۶	۱.	0/97.11	7/90099
J	3	۲.	0/81788	2/98811
		۵	٨/١٠٠٢٢	8/1988
	٧	۱.	٨/•٧٧١١	۲/۷۲۸۶۰
		۲.	٨/٠٧١١۶	٢/۶٩٣۶ ٨
		۵	9/99177	17/2010
۲	١	۱.	1./99.0	11/1119
		۲.	11/449.	۲۸/۷۸۰۳

وجود اغتشاش در داده های بدست آمده (وجود تغییر ناگهانی در مقادیر) نشان از عدم همگرایی صحیح در برخی فرکانس ها بوده که خوشبختانه چنین اغتشاشی در نتایج ملاحظه نگردیده است که شیب ملایمی در تغییر مقادیر فرکانس ها اتفاق افتاده است. در مود سوم با افزایش شعاع، افزایش قابل توجهی در مقادیر فرکانس طبیعی رخ داده است که بیان کننده این مطلب است که در مورد افزایش

شعاع محدودیت اساسی وجود دارد. وجود چنین تغییری را می توان ناشی از مود خمشی در راستای ضخامت دانست. تعداد پنج جمله اول سری تقریب مناسبی برای تعیین فرکانس ها ایجاد کرده است تحقیقات انجام شده در همین پژوهش حاکی از آن است که اختلاف بسیار اندکی در مودهای بالاتر بدست می آید.

۷- نتیجه گیری

در مطالعهی حاضر مسئلهی پیزوالاستیسیته دوبعدی برای ارتعاشات آزاد مستهلک نشده برای پوسته استوانهای با چینش زاویهای لایههای مقید به تکیهگاههای ساده بررسی شد. روش تحلیلی بر پایهی سریهای فوریه درنظر گرفته شد و بر مبنای روش سری توانی اصلاح شده برای مودهای خمشی در راستای ضخامت ورق استوانهای، مورد بررسی و ازیابی قرار گرفت. این روش همگرایی سریعتر و بهتری را نسبت به روش مشابه معمولی ارائه میدهد. نادیده گرفتن اثر نیروی برشی اختلاف بسیار ناچیزی را مخصوصا در مودهای پایینی سبب می گردد. اختلاف بسیار جزیی پدید آمده در نتایچ نشاندهنده دقت بالای روش مذکور است. همچنین این روش، سرعت بالاتری نسبت به روشهای دیگر در ممگرا شدن پاسخ از خود نشان داد که علت آن، تغییرات نمایی در روش سری توانی اصلاح شده است.

۸- فهرست علائم

$\overline{\omega}$	ر کانس طبیعی بی بعد
ω_n	ركانس طبيعي (Cycle/time)
ρ	بگالی(Kg/m ³)
R	(m) معاع
h	سخامت لمينا(m)
Y	دول الاستيسيته (Pa)
σ	ننش (Pa)
ε	کرنش اصلی
γ	کرنش برشی
− Eij	اتريس ضرايب كرنش پيزوالكتريك
\overline{S}_{ij}	اتريس ضرايب الاستيك(Pa)

$$\begin{split} A_{74} &= \left(d'_{31}P_{14} + d'_{32}P_{24} + d'_{36}P_{64} + d'_{33} \right), \\ A_{78} &= \left(\overline{d'}_{31}P_{18} + \overline{d'}_{32}P_{28} + \overline{d'}_{36}P_{68} - 1/\overline{\varepsilon}_{33} \right), \\ A_{85} &= \left(\overline{n}/r \right) \overline{d}_{14}, A_{86} = \left(\overline{n}/r \right) \overline{d}_{15}, \\ A_{87} &= -\left(\overline{n}/r \right)^2 \overline{\varepsilon}_{11}, A_{88} = \left(-1/r \right) \\ &: \\ \vdots \\ S'_{ij} &= \overline{S}_{ij} - \overline{d}_{ij} \overline{d'}_{j3} \\ \overline{d'}_{ij} &= \overline{d}_{ij} / \overline{\varepsilon}_{33} \\ \\ \hline \frac{\overline{S'}_{11}}{\overline{S'}_{12}} \frac{\overline{S'}_{12}}{\overline{S'}_{26}} \frac{\overline{S'}_{16}}{\overline{S'}_{66}} \right]^{-1} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{16} \\ S_{21} & S_{22} & S_{26} \\ S_{16} & S_{62} & S_{66} \end{bmatrix} \\ P_{i1} &= -S_{i2}, P_{i2} = -S_{i6}, \\ P_{i4} &= -(S_{i1}\overline{S'}_{13} + S_{i2}\overline{S'}_{23} + S_{i6}\overline{S'}_{36}) \\ P_{i8} &= -(S_{i1}\overline{d'}_{13} + S_{i2}\overline{d'}_{23} + S_{i6}\overline{d'}_{36}) \end{split}$$

مراجع

[1] Qing-Hua, Q., Advanced Mechanics of Piezoelectricity, Springer Verlag, 2013, pp.1-4.

[2] Fernandes A., Pouget J., Two-dimensional modelling of laminated piezoelectric composites: analysis and numerical results, *Journal of Thin Walled Structures*, 39, 2000, pp.3-22.

[3] Chen W.Q., Lee K.Y., State-space approach for statics and dynamics of angle-ply laminated cylindrical panels in cylindrical bending, *International Journal of Mechanical Sciences*, 47, 2005, pp.374–387.

[4] Srinivas S., Rao A.K., Bending, vibration and buckling of simply supported thick orthotropic rectangular plates and laminates, *International Journal of Solids Structures*, 6, 1970, pp.1463– 1481.

[5] Adelman N.T., Stavsky Y., Radial vibrations of axially polarized piezoelectric ceramic cylinders, *Journal of Acoustical Society of America*, 57, 1975, pp.356-360.

[6] Cho K.N., Bert C.W., Striz A.G., Free vibrations of laminated rectangular plates analyzed by high order individual-layer theory, *Journal of Sounds & Vibration*, 145(3), 1991, pp.429-442.

D _i	ماتريس جابجايي الكتريكي
λ	مقدار ویژه
Ε	ميدان الكتريكي(N/C)
\overline{d}_{ij}	ماتريس ثوابت دىالكتريك
G	مدول برشی (Pa)
ϕ	پتانسيل الكتريكى(V)
μ, ν	نسبت پواسون
<i>u</i> , <i>v</i> , <i>w</i>	جابجایی در جهات مختصاتی(m)

۹- ييوست

$$\begin{aligned} & \text{A}_{11} = -\overline{n}/r, A_{13} = 1/r, A_{15} = \overline{S}_{45}, A_{16} = \overline{S}_{55} \\ & A_{17} = -\left(\overline{n}/r\right)\overline{d}_{15}, A_{25} = \overline{S}_{44}, A_{26} = \overline{S}_{45} \\ & A_{27} = -\left(\overline{n}/r\right)\overline{d}_{14}, \\ & A_{31} = \left(\overline{n}/r\right)(\overline{S'}_{13}P_{11} + \overline{S'}_{36}P_{61} + \overline{S'}_{23}P_{21}), \\ & A_{32} = \left(\overline{n}/r\right)(\overline{S'}_{13}P_{12} + \overline{S'}_{23}P_{22} + \overline{S'}_{36}P_{62}), \\ & A_{33} = -\left(1/r\right)(\overline{S'}_{13}P_{11} + \overline{S'}_{23}P_{21} + \overline{S'}_{36}P_{61}), \\ & A_{34} = (\overline{S'}_{13}P_{14} + \overline{S'}_{23}P_{24} + \overline{S'}_{36}P_{64} + \overline{S'}_{33}), \\ & A_{38} = (\overline{S'}_{13}P_{18} + \overline{S'}_{23}P_{28} + \overline{S'}_{36}P_{64} + \overline{S'}_{33}), \\ & A_{41} = \overline{n}P_{11}/r^2, A_{42} = \overline{n}P_{12}/r^2, \\ & A_{43} = \left(-P_{11}/r^2\right) - \rho\omega^2, A_{44} = (P_{14}-1)/r \\ & A_{46} = \overline{n}/r, A_{48} = P_{18}/r, A_{51} = -\left(\overline{n}/r\right)^2 P_{61}, \\ & A_{52} = -\left(\overline{n}/r\right)P_{64}, A_{55} = -1/r, \\ & A_{58} = -\left(\overline{n}/r\right)P_{68}, A_{61} = -\left(\overline{n}/r\right)^2 P_{11} - \rho\omega^2, \\ & A_{62} = -\left(\overline{n}/r\right)P_{14}, A_{66} = -2/r, \\ & A_{68} = -\left(\overline{n}/r\right)P_{18}, \\ & A_{71} = \left(\overline{n}/r\right)\left(\overline{d'}_{13}P_{11} + \overline{d'}_{32}P_{21} + \overline{d'}_{36}P_{61}\right), \\ & A_{72} = \left(\overline{n}/r\right)\left(\overline{d'}_{31}P_{12} + \overline{d'}_{32}P_{21} + \overline{d'}_{36}P_{61}\right), \\ & A_{73} = \left(-1/r\right)\left(\overline{d'}_{31}P_{11} + \overline{d'}_{32}P_{21} + \overline{d'}_{36}P_{61}\right), \end{aligned}$$

Journal of Sound & Vibration, 296, 2006, pp.979-999.

[17] Pandit M. K., Haldar S., Mukhopadhyay M., Free vibration analysis of laminated composite rectangular plate using finite element method, *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, 26 (1), 2007, pp.69-80.

[18] Civalek O., Free vibration analysis of symmetrically laminated composite plates with first-order shear deformation theory (FSDT) by discrete singular convolution method, *Journal of Finite Elements in Analysis and Design*, 12-13, 2008, 44, pp.725-731.

[19] Brethee K. F., Free vibration analysis of a symmetric and anti-symmetric laminated composite plate with a cutout at the center, *Al-Qadisiya Journal for Engineering Sciences*, 42, 2009, 13, pp.43-56.

[20] Ngo-Cong D., Mai-Duy N., Karunasena W., Tran-Cong T., Free vibration analysis of laminated composite plates based on FSDT using onedimensional IRBFN method, *Journal of Computers and Structures*, 89 (1-2),2011, pp.1-13.

[21] Messina A., Influence of the edge-boundary conditions on three-dimensional free vibrations of isotropic and cross-ply multilayered rectangular plates, *Journal of Composite Structures*, 93(8),2011, pp.2135–2151.

[22] Xiang S., Bi Z.Y., Jiang S.X., Jin Y.X., Yang M.S., Thin plate spline radial basis function for the free vibration analysis of laminated composite shells. *Journal of Composite Structures*, 93(2), 2011, pp.611-615.

[23] Boscolo M., Banerjee J.R., Layer-wise dynamic stiffness solution for free vibration analysis of laminated composite plates, *Journal of Sound and Vibration*, 333 (1), 2014, 200-227.

[24] Sadd Martin H., Elasticity: Theory, Applications and Numerics, Burlington, USA, Elsevier Inc., 2015, pp.61-63.

[25] Qing-Hua Q., Advanced Mechanics of Piezoelectricity, Springer-Verlag, 2013, pp.4-25.

[26] Kapuria S., Achary G.G.S., Exact 3D piezoelasticity solution of hybrid cross-ply plates with damping under harmonic electromechanical

[7] Chen C.Q., Shen Y.P., Piezothermoelasticity analysis for circular cylindrical shell under the state of axisymmetric deformation, *International Journal of Engineering Science*, 34, 1996, pp.1585–1600.

[8] Chen C.Q., Shen Y.P., Three-dimensional analysis for free vibration of finite-length orthotropic piezoelectric circular cylindrical shells, *Transactions of the ASME Journal of Vibration and Acoustics*, 120, 1998, pp.194–198.

[9] Batra R.C., Aimmanee S., Missing frequencies in previous exact solutions of free vibrations of simply supported rectangular plates, *Journal of Vibration Control*, 265, 2003, pp.887-896.

[10] Aydogdu M., Timarchi T., Vibration analysis of cross-ply laminated square plates with general boundary conditions, *Composite Science and Technology*, 63 (7), 2003, pp.1061-1070.

[11] Liew K. M., Huang Y. Q., Reddy J. N., Vibration analysis of symmetrically laminated plates based on FSDT using the moving least squares differential quadrature method, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192 (19), 2003, pp.2203-2222.

[12] Kang JH., and Shim HJ., Exact solutions for the free vibrations of rectangular plates having inplane moments acting on two opposite simply supported edges, *Journal of Sounds & Vibration*, 273, 2004, pp933–948.

[13] Chen W.Q, Lee K.Y., Static and dynamic behaviour of simply-supported cross-ply laminated piezoelectric cylindrical panels with imperfect bonding, *Journal of Composite Structures*, 74, 2006, pp.265–276.

[14] Chen W.Q, Lee K.Y., Benchmark solution of angle-ply piezoelectric-laminated cylindrical panels in cylindrical bending with weak interfaces, *Archive of Applied Mechanics*, 74, 2005, pp.466–476.

[15] Karami G., Malekzadeh P., Mohebpour S. R., DQM free vibration analysis of moderately thick symmetric laminated plates with elastically restrained edges, *Journal of Composite Structures*, 74 (1), 2006, pp.115-125.

[16] Shimpi R.P., Patel H.G., Free vibrations of plate using two variable refined plate theory,

loads, Journal of Sound and Vibration, 282, 2005, pp.617–634.

[27] Kumari P., Nath J.K., Dumir P.C., Kapuria S., 2D exact solutions for flat hybrid piezoelectric and magnetoelastic angle-ply panels under harmonic load, *Journal of Smart Materials and Structures*, 16, 2007, pp.1651–1661.