



تحلیل ارتعاشات آزاد ورق ساندویچی دایره‌ای با رویه‌های هدفمند تحت شرایط تکیه‌گاهی گیردار

یونس محمدی^{۱*}، کیوان حسینی صفری^۲، محسن رحمانی^۳

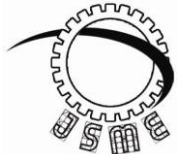
* نویسنده مسئول: u.mohammadi@qiau.ac.ir

واژه‌های کلیدی	چکیده
ارتعاشات آزاد ورق ساندویچی مدور مواد هدفمند خواص وابسته به دما تکیه‌گاه گیردار	<p>در این پژوهش ارتعاشات آزاد ورق ساندویچی مدور گیردار با رویه‌هایی از مواد با تابع هدفمند وابسته به دما در محیط‌های حرارتی مختلف بررسی شده است. خواص مواد در رویه‌های هدفمند به صورت تابعی از دما در نظر گرفته شده و به طور پیوسته در امتداد ضخامت، با توزیع توانی بر حسب کسر حجمی اجزای تشکیل دهنده، تغییر می‌کنند. همچنین خواص ماده در هسته نیز وابسته به دما در نظر گرفته شده است. معادلات حاکم بر حرکت در ارتعاشات آزاد در دستگاه مختصات قطبی با استفاده از اصل همپلتون به دست آمده و از روش گلرکین برای حل معادلات و به دست آوردن فرکانس طبیعی استفاده شده است. تنش‌های صفحه‌ای هسته که معمولاً در مشخصه ارتعاشی سازه‌های ساندویچی نادیده گرفته می‌شوند در اینجا در نظر گرفته شده است. نتایج به دست آمده از حل گلرکین برای ورق ساندویچی دایره‌ای متقارن با تکیه‌گاه گیردار با نتایج المان محدود که توسط نرم افزار ABAQUS به دست آمده است، مقایسه شده که نتایج قابل قبولی را ارائه می‌دهد. نتایج نشان می‌دهد که تغییرات دما و تغییرات توان تابع توانی اثر مهمی بر تغییرات فرکانس دارند.</p>
تاریخ ارسال: ۹۵/۰۳/۲۹	
تاریخ بازنگری: ۹۵/۱۰/۱۲	
تاریخ پذیرش: ۹۵/۱۰/۲۸	

۱- استادیار، دانشکده صنایع و مکانیک، واحد قزوین، دانشگاه آزاد اسلامی، قزوین، ایران.

۲- استادیار، دانشکده صنایع و مکانیک، واحد قزوین، دانشگاه آزاد اسلامی، قزوین، ایران

۳- دانشجوی دکتری، دانشکده صنایع و مکانیک، واحد قزوین، دانشگاه آزاد اسلامی، قزوین، ایران.



Free Vibration Analysis of Circular Sandwich Plates with Clamped FG Face Sheets

Yunes Mohammadi^{1,*}, Keivan Hosseini Safari², Mohsen Rahmani³

* Corresponding Author: u.mohammadi@qiau.ac.ir

Abstract:

Free vibration of sandwich plates with temperature dependent functionally graded (FG) face sheets in various thermal environments is investigated. The material properties of FG face sheets are assumed to be temperature-dependent and vary continuously through the thickness according to a power-law distribution in terms of the volume fractions of the constituents. Also, the material properties of the core are assumed to be temperature dependent. The governing equations of motion in polar system and in free natural vibration are derived using Hamilton's principle and Galerkin method is used to solve the equations and obtain the natural frequency. In-plane stresses of the core that usually are ignored in the vibration characteristics of the sandwich structures are considered in this formulation. The results obtained by Galerkin method for symmetric circular sandwich plate with fixed support is compared with finite element method that obtained by ABAQUS and good agreement is found. The results show that varying the power-law index and temperature have important effects on natural frequency.

Key words:

Free Vibration.
Circular Sandwich Plate.
Functionally Graded Material.
Temperature Dependent
Properties.
Clamped Support.

1- Assistant Professor, Department of Industrial Engineering and Mechanical Engineering, Islamic Azad University, Qazvin, Iran.

2- Assistant Professor, Department of Industrial Engineering and Mechanical Engineering, Islamic Azad University, Qazvin, Iran.

3- PhD student, Department of Industrial Engineering and Mechanical Engineering, Islamic Azad University, Qazvin, Iran.

۱- مقدمه

از جنس مواد با تابع هدفمند ارائه کردند. معادلات حاکم بر اساس تئوری سه بعدی الاستیسیته به دست آمد [۵]. تورنابن و همکارانش [۶] یک فرمول عمومی برای تک لایه منفرد مرتبه بالای دو بعدی برای تحلیل ارتعاشات آزاد پوسته‌ها و پنل‌های کامپوزیت چند لایه دو انحنایی ضخیم و نازک با انحنای مختلف ارائه دادند. هدف اصلی کار تعیین اپراتور بنیادین صریح است که هم در روش تک لایه منفرد و هم در روش لایه مجزا به کار می‌رود. بت‌شکنان ده‌کردی و همکارانش [۷] تحلیل دینامیکی غیرخطی ورق ساندویچی مستطیلی با هسته منعطف و رویه‌های کامپوزیتی چند لایه تقویت شده با سیم‌هایی از آلایژهای حافظه‌دار را با استفاده از مدل‌های تک لایه منفرد و لایه مجزا در چارچوب فرمول یکپارچه Carrera ارائه دادند. چنگ و باترا [۸] نتایج کمانش و ارتعاشات حالت پایدار ورق چند ضلعی هدفمند با تکیه‌گاه ساده را بر اساس تئوری ورق ردی ارائه نمودند. گی [۹] روش حل ریلی ریتز برای ارتعاشات آزاد پوسته‌های استوانه‌ای با تکیه‌گاه ساده را ارائه کرد که ماده هدفمند از ترکیب فولاد ضد زنگ و نیکل تشکیل و از تئوری پوسته لایه استفاده شده بود. مانتاری [۱۰] تحلیل ارتعاشات آزاد ورق هدفمند که بر یک پی الاستیک قرار دارد را ارائه نمود. میدان جابه‌جایی بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه بالا بود. شریف [۱۱] ارتعاشات آزاد خمشی ورق ساندویچی مدورگیردار را بررسی کرد که متشکل از لایه اصلی فولادی ویسکوالاستیک و محدودکننده آلومینیومی بود. همچنین اثر تنش برشی و اپنرسی چرخشی را برای ورق پایه در نظر گرفت که ورق پایه و ورق محدودکننده همگن و ایزوتروپیک بودند. پراکاش و گاناپاتی [۱۲] ارتعاشات خمشی نامتقارن و پایداری ترموالاستیک ورق دایره‌ای هدفمند را با استفاده از روش المان محدود بررسی کردند. نای و ژنگ [۱۳] روش حل نیمه تحلیلی برای ارتعاشات سه بعدی ورق مدور هدفمند را مطالعه نمودند. لیو و لی [۱۴] ارتعاشات سه بعدی ورق‌های دایره‌ای و حلقوی را با استفاده از روش المان محدود و ژائو و همکارانش [۱۵] با استفاده از روش چیشف-ریتز بررسی کردند. وو و لی [۱۶] و وو و

امروزه به دلیل مزایایی که سازه‌های ساندویچی دارند استفاده از آنها افزایش پیدا کرده است. یکی از مهمترین خواص ساندویچ‌ها کاهش وزن و افزایش مقاومت مکانیکی سازه می‌باشد. از سازه‌های ساندویچی در صنایع مختلفی از جمله بیومکانیک، خودرو، هوا-فضا، عمران، مهندسی دریا و نظامی استفاده می‌شود. این سازه‌های سبک ساختاری ترکیبی دارند که از دو لایه به صورت رویه و یک لایه به عنوان هسته در آنها استفاده می‌شود. این سازه‌ها همچنین می‌توانند در برابر رطوبت و حرارت مقاومت خوبی داشته باشند. لایه‌های رویه لزوماً هم‌جنس و یکسان نیستند و با هسته‌ای که معمولاً تراکم‌پذیر است پیوند می‌یابند. در یک ورق پیشرفته ساندویچی از دو رویه با مواد هدفمند که لزوماً شبیه هم نیستند استفاده می‌شود. قرار گرفتن یک هسته نرم بین این رویه‌ها، باعث افزایش فاصله بین آنها و در نتیجه افزایش صلبیت خمشی ورق خواهد شد، در حالی که وزن سازه افزایش اندکی خواهد داشت.

مواد با تابع هدفمند، مواد چند هدفی هستند که شامل تغییرات فضایی در ترکیب و ریزساختارهایشان می‌باشند که هدف مشخصی از کنترل تغییرات حرارت، خواص تابعی یا سازه‌ای دارند. این مواد اکنون یکی از موضوعات اصلی در تحقیقات مربوط به مواد در جهان می‌باشند [۲، ۱]. مواد هدفمند به طور میکروسکوپی کامپوزیت غیرهمگن هستند که معمولاً از ترکیب فلز و سرامیک به دست می‌آیند. مزایای قابل توجهی که در این مواد نسبت به مواد متداول وجود دارد و اینکه نیاز به غلبه بر مشکلات فنی در محیط‌های دما بالا را برطرف می‌کنند، استفاده از سازه‌های ساندویچی با رویه‌های هدفمند را افزایش داده است [۳، ۱].

محققان زیادی رفتار مکانیکی ورق‌ها و پوسته‌های ساندویچی را بررسی کرده‌اند و تئوری‌های مختلفی از جمله روش الاستیک سه بعدی، تئوری تک لایه معادل و تئوری لایه مجزا را برای مدل‌سازی و تحلیل این سازه‌ها ارائه داده‌اند [۴]. علی بیگلو و لیو [۵] حل دقیق سه بعدی تحلیل ارتعاشات آزاد را برای پنل ساندویچی استوانه‌ای با هسته‌ای

[۲۴] ارتعاشات آزاد ورق ساندویچی مستطیلی با رویه‌های هدفمند وابسته به دما و با تکیه‌گاه ساده را بررسی کردند. بررسی کارهای محققین دیگر نشان می‌دهد که کارهای محدودی با در نظر گرفتن خواص وابسته به دمای هسته و رویه‌ها در سازه‌های ساندویچی به خصوص ورق ساندویچی دایره‌ای انجام شده است. نوآوری‌های این پژوهش عبارتند از:

۱- چون مواد هدفمند معمولاً در محیط‌های با دمای بالا استفاده می‌شوند، در این پژوهش برای ورق ساندویچی دایره‌ای، خواص اجزای رویه‌های هدفمند هم وابسته به دما و هم وابسته به مکان می‌باشند. خواص در جهت ضخامت با توزیع توانی بر حسب کسر حجمی اجزا تغییر می‌کنند و با تابع مرتبه سوم وابسته به دما می‌باشند. وقتی خواص ماده وابسته به دما و مکان در نظر گرفته می‌شود و دما نیز تابعی از مکان باشد، پیچیدگی مساله بیشتر خواهد شد. همچنین خواص هسته همگن نیز با تابع مرتبه سومی وابسته به دما می‌باشد.

۲- تنش‌های صفحه‌ای هسته که معمولاً در مشخصه ارتعاشی سازه‌های ساندویچی مدور نادیده گرفته می‌شوند در اینجا در نظر گرفته شده است.

۳- شرایط مرزی برای ورق ساندویچ دایره‌ای، به صورت تکیه‌گاه گیردار است.

۴- روش حلی که بیشتر برای معادلات ورق دایره‌ای استفاده می‌شود روش حل به کمک توابع بسل است، اما روش حلی که در این پژوهش استفاده شده، گلرکین می‌باشد.

در نهایت برای اعتبارسنجی، فرکانس بی‌بعد شده اول در تحلیل حاضر با نتیجه یکی از مراجع مقایسه می‌شود. همچنین نتایج به دست آمده از تحلیل حاضر در چندین حالت ساندویچی نیز با نتایج المان محدود به دست آمده از نرم‌افزار Abaqus مقایسه می‌شود. در ادامه از نتایج عددی تحلیل حاضر برای نشان دادن اثرات تغییر دما و توزیع کسر حجمی رویه‌های هدفمند بر روی ارتعاشات آزاد در حالت‌های مختلف صفحه مدور ساندویچی استفاده شده است.

همکارانش [۱۷] ارتعاشات آزاد ورق مدور را با روش قانون GDQ تحلیل کردند. کونگ و پائو [۱۸] ارتعاشات خمشی غیرخطی ورق مدور گیردار در لبه‌ها را به صورت تجربی و تئوری بررسی کردند. بررسی هر دو کار محدود به مود اول متقارن می‌باشد. بخش مستقل از زمان معادلات غیرخطی ورق با روش ریتز-گلرکین به معادلات دافینگ کاسته می‌شود. قاهری و وثیر [۱۹] ارتعاشات غیرخطی اجباری ورق‌های نازک دایروی از جنس مواد هدفمند با در نظر گرفتن شرایط مرزی کلاسیک گیردار را بررسی نمودند و برای حل معادلات دینامیکی حاکم بر سیستم از روش اغتشاشات MMS و مُدهای فرضی در دستگاه مختصات قطبی استفاده کردند. نیروی عرضی اعمالی را به طور هارمونیک، به فرکانس نوسان نزدیک به یکی از فرکانس‌های طبیعی نامتقارن سیستم در نظر گرفتند و پدیده‌های ارتعاشات غیرخطی مانند پرش و رزونانس داخلی را مورد بررسی قرار داده و اثرات شرایط مرزی، تغییرات کسر حجمی ماده هدفمند، دامنه و فرکانس نیروی خارجی اعمالی بر رفتار دینامیکی را مطالعه نمودند.

معمولاً هسته سازه‌های ساندویچی انعطاف پذیر است، بنابراین لازم است فشار جانبی نیز در نظر گرفته شود. به همین دلیل برخورد با این نوع مسائل از ارتعاشات سازه‌های ساندویچی با هسته انعطاف‌پذیر، مشکلتر می‌شود. روش‌های مختلفی مانند روش ریتز و تئوری ورق ساندویچی مرتبه بالا توسط تعدادی از محققین استفاده شده است [۲۰]. ژوفنگ و همکارانش تحلیل ارتعاشات آزاد ورق مدور گیردار را در حین کوپل میدان تنش و دما بررسی کردند. معادلات غیرخطی با استفاده از روش گلرکین به دست آمد و نشان داده شد که اثر کوپل ترموالاستیک باعث افزایش فرکانس طبیعی می‌شود و اگر شرایط جابه‌جایی اولیه بزرگ باشد فرکانس طبیعی کاهش می‌یابد [۲۱]. فراستیک و تامسون، ارتعاشات آزاد تیر ساندویچی با خواص هسته وابسته به دما و پاسخ غیر خطی صفحات ساندویچی تک‌جهته با خواص وابسته به دما را بررسی کردند [۲۲، ۲۳]. خلیلی و محمدی

هدفمند (پیوست الف) و همچنین با تغییر دما در هر لایه تغییر می‌کنند و چگالی $\rho_c(T_c)$ چگالی هسته است که با دما تغییر می‌کند.

تغییرات خواص ماده در رویه‌ها و هسته با دما، P ، همانند مدول یانگ و چگالی و ضریب انبساط حرارتی و ضریب پواسون با تابع غیرخطی مرتبه سوم از دما بیان شده است.

$$P = C_0(C_{-1}T^{-1} + 1 + C_1T + C_2T^2 + C_3T^3) \quad (3)$$

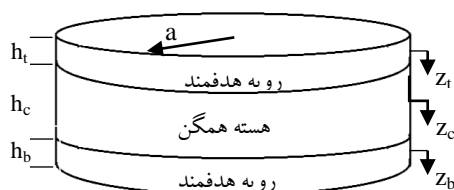
که $C_3, C_2, C_1, C_{-1}, C_0$ برای هر کدام از اجزای ماده مجزاست و دما به شکل $(T = T_0 + \Delta T)$ تغییر می‌کند که $T_0 = 300K$ می‌باشد [۲۶]. با فرض تغییر شکل‌ها و چرخش‌های کوچک، میدان جابه‌جایی رویه‌ها بر اساس فرض‌های کریشوف در دستگاه مختصات قطبی به صورت زیر در نظر گرفته شده است [۲۷]:

$$u_j(r, \theta, z, t) = u_{0j}(r, \theta, t) - z_j w_{j,r}(r, \theta, t) \quad (4)$$

$$v_j(r, \theta, z, t) = v_{0j}(r, \theta, t) - \frac{z_j}{r} w_{j,r}(r, \theta, t) \quad (5)$$

$$w_j(r, \theta, z, t) = w_{0j}(r, \theta, t) \quad (6)$$

که مطابق با شکل (۱)، $j = (t, b)$ ، $u_{0j}(r, \theta, t)$ و $v_{0j}(r, \theta, t)$ تغییر شکل‌های درون صفحه‌ای صفحه میانی هر رویه هدفمند در جهات r, θ و $w_{0j}(r, \theta, t)$ ، $j = (t, b)$ تغییر شکل عرضی هر رویه است که شش مجهول جابه‌جایی رویه‌ها می‌باشند.



شکل (۱) هندسه صفحه ساندویچی مدور با رویه‌های هدفمند

در این تحقیق، میدان جابه‌جایی هسته به صورت توزیع چند جمله‌ای مربعی و مکعبی در نظر گرفته شده است [۲۴]. ضرایب این چند جمله‌ای مجهولند و به کمک اصل تغییراتی مشخص می‌شوند. میدان جابه‌جایی هسته به صورت زیر است:

$$u_c(r, \theta, z_c, t) = u_0(r, \theta, t) + u_1(r, \theta, t)z_c + u_2(r, \theta, t)z_c^2 + u_3(r, \theta, t)z_c^3 \quad (7)$$

۲- مدل سازی تئوری

معادلات حرکت برای ارتعاشات آزاد صفحه ساندویچی مدور در دستگاه مختصات قطبی و به کمک اصل همپلتون به دست می‌آید [۲۵]:

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta K + \delta U) dt = 0 \quad (1)$$

که در آن، K و U به ترتیب انرژی جنبشی و انرژی کرنشی می‌باشند و t مختصات زمانی است که بین زمان‌های t_1 و t_2 تغییر می‌کند، یعنی زمان آغاز و زمان پایان δ عملگر تغییرات است.

یک صفحه ساندویچی مدور به شعاع a ، هسته با ضخامت h_c مدول یانگ و برشی E_c و G_c ، دو رویه هدفمند با ضخامت‌های h_t و h_b ، مدول یانگ E_i ($i=t, b$) و ضریب پواسون ν_i ($i=t, b$) مطابق با شکل (۱) در نظر گرفته می‌شود. اندیس‌های t و b به ترتیب بیانگر رویه‌های بالایی و پایینی است. تغییرات انرژی جنبشی برای صفحه ساندویچی مدور با خواص وابسته به دما مطابق زیر می‌باشد [۲۵].

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \delta K dt = & - \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_0^{2\pi} \int_0^a \int_{-\frac{h_t}{2}}^{\frac{h_t}{2}} \rho_t(z_t, T_t) (\ddot{u}_t \delta u_t + \dot{v}_t \delta v_t + \dot{w}_t \delta w_t) r dr d\theta dz_t + \int_0^{2\pi} \int_0^a \int_0^{\frac{h_b}{2}} \rho_b(z_b, T_b) (\ddot{u}_b \delta u_b + \dot{v}_b \delta v_b + \dot{w}_b \delta w_b) r dr d\theta dz_b + \int_0^{2\pi} \int_0^a \int_0^{\frac{h_c}{2}} \rho_c(T_c) (\ddot{u}_c \delta u_c + \dot{v}_c \delta v_c + \dot{w}_c \delta w_c) r dr d\theta dz_c \right\} dt \end{aligned} \quad (2)$$

که z_t, z_b, z_c به ترتیب مختصات عمودی رویه‌های بالا، پایین و هسته است و برای هر یک از صفحات میانی به سمت پایین اندازه‌گیری می‌شود، u_i ($i=t, b, c$)، v_i و w_i مختصات در جهات r, θ, z ؛ $\ddot{u}_i, \dot{v}_i, \dot{w}_i$ ($i=t, b, c$) شتاب در جهات r, θ, z است. اندیس c مطابق با هسته است. T_t, T_b, T_c تغییرات دما در رویه بالایی، رویه پایینی و هسته است. $\rho_b(z_b, T_b)$ و $\rho_t(z_t, T_t)$ چگالی رویه بالا و پایین هستند که در جهت ضخامت با z_t و z_b تابع توانی

که $\sigma_{\theta\theta}^j$ و $\sigma_{rr}^j, j=(t,b)$ تنش های نرمال صفحه ای و $\epsilon_{\theta\theta}^j$ و $\epsilon_{rr}^j, j=(t,b)$ کرنش های عمودی صفحه ای خطی در رویه های بالا و پایین است. σ_{rr}^{jT} و $\sigma_{\theta\theta}^{jT}, j=(t,b)$ تنش های حرارتی رویه ها و $d_{\theta\theta}^j$ و $d_{rr}^j, j=(t,b)$ کرنش های غیرخطی رویه هاست. $\epsilon_{\theta\theta}^c$ و $\epsilon_{rr}^c, \sigma_{\theta\theta}^c, \sigma_{rr}^c$ تنش ها و کرنش های عمودی صفحه ای هسته است. $\gamma_{r\theta}^j$ و $\tau_{r\theta}^j, (j=t,b,c)$ رویه ها و هسته است. ϵ_{zz}^c و σ_{zz}^c عمودی در جهت عرضی هسته می باشد. τ_{rz}^c و $\tau_{\theta z}^c$ و γ_{rz}^c و $\gamma_{\theta z}^c$ تنش ها و کرنش های برشی هسته هستند. V_b, V_t, V_{core} حجم رویه ها و هسته و $\lambda_{\theta i}$ و $\lambda_{r i}, j=(t,b)$ ضرایب مجهول لاگرانژ هستند. مشاهده می شود که اثرات تنش های صفحه ای هسته نیز در این تحقیق در نظر گرفته شده است. با فرض تغییر شکل های کوچک، روابط سینماتیک خطی و غیرخطی رویه ها به صورت زیر به دست می آید [۳۰].

$$\epsilon_{rr}^j(r, \theta, z_j, t) = u_{0j,r}(r, \theta, t) - z_j w_{j,rr}(r, \theta, t) \quad (17)$$

$$\epsilon_{\theta\theta}^j(r, \theta, z_j, t) = \frac{1}{r^2} \{ nu_{0j}(r, \theta, t) - r v_{0j,\theta}(r, \theta, t) - z_j w_{j,\theta\theta}(r, \theta, t) - rz_j w_{j,r}(r, \theta, t) \} \quad (18)$$

$$\epsilon_{r\theta}^j(r, \theta, z_j, t) = \frac{1}{r^2} \{ ru_{0j,\theta}(r, \theta, t) + r^2 v_{0j,r}(r, \theta, t) - rv_{0j}(r, \theta, t) + 2z_j w_{j,\theta}(r, \theta, t) - 2rz_j w_{j,r\theta}(r, \theta, t) \} \quad (19)$$

$$d_{rr}^j(r, \theta, z_j, t) = \frac{1}{2} (w_{j,r})^2 \quad (20)$$

$$d_{\theta\theta}^j(r, \theta, z_j, t) = \frac{1}{2} \left(\frac{w_{j,\theta}}{r} \right)^2 \quad (21)$$

که $\sigma_{i,i}$ مشتق جزئی نسبت به i را بیان می کند. روابط سینماتیک برای هسته نیز به شکل زیر به دست می آید [۲۹].

$$\epsilon_{rr}^c = u_{0,r}^c + z_c u_{1,r}^c + z_c^2 u_{2,r}^c + z_c^3 u_{3,r}^c \quad (22)$$

$$\epsilon_{\theta\theta}^c = \frac{1}{r} [v_{0,\theta}^c + z_c v_{1,\theta}^c + z_c^2 v_{2,\theta}^c + z_c^3 v_{3,\theta}^c] + \frac{1}{r} [u_0^c + z_c u_1^c + z_c^2 u_2^c + z_c^3 u_3^c] \quad (23)$$

$$v_c(r, \theta, z_c, t) = v_0(r, \theta, t) + v_1(r, \theta, t) z_c \quad (8)$$

$$+ v_2(r, \theta, t) z_c^2 + v_3(r, \theta, t) z_c^3$$

$$w_c(r, \theta, z_c, t) = w_0(r, \theta, t) + w_1(r, \theta, t) z_c \quad (9)$$

$$+ w_2(r, \theta, t) z_c^2$$

که $w_l (l=0,1,2)$ و $v_k (k=0,1,2,3)$ یازده مجهول جابه جایی هسته می باشند. شرایط سازگاری با فرض پیوند کامل بین وجه مشترک رویه بالا و پایین و هسته در $z_c = h_c/2, -h_c/2$ صورت زیر است:

$$u_i(z_i = h_i/2) = u_c(z_c = -h_c/2) \quad (10)$$

$$v_i(z_i = h_i/2) = v_c(z_c = -h_c/2) \quad (11)$$

$$w_t = w_c(z_c = -h_c/2) \quad (12)$$

$$u_c(z_c = h_c/2) = u_b(z_b = -h_b/2) \quad (13)$$

$$v_c(z_c = h_c/2) = v_b(z_b = -h_b/2) \quad (14)$$

$$w_c(z_c = h_c/2) = w_b \quad (15)$$

انرژی کرنشی برابر با مجموع انرژی کرنشی حرارتی و مکانیکی است. انرژی مکانیکی با استفاده از تنش های مکانیکی و کرنش های خطی و انرژی پتانسیل حرارتی با استفاده از تنش های حرارتی و کرنش های غیرخطی به دست می آید [۲۸]. همچنین شش شرط سازگاری در وجه مشترک هسته و رویه های بالا و پایین در معادلات (۱۰-۱۵) با شش ضریب لاگرانژ مجهول در رابطه انرژی کرنشی وارد می شوند. بنابراین تغییرات انرژی کرنشی در دستگاه مختصات قطبی به صورت زیر نوشته می شود [۲۹،۲۴].

$$\delta U = \int_{V_t} (\sigma_{rr}^t \delta \epsilon_{rr}^t + \sigma_{\theta\theta}^{tT} \delta d_{rr}^t + \sigma_{\theta\theta}^t \delta \epsilon_{\theta\theta}^t + \sigma_{\theta\theta}^{tT} \delta d_{\theta\theta}^t + \tau_{r\theta}^t \delta \gamma_{r\theta}^t) dV + \int_{V_b} (\sigma_{rr}^b \delta \epsilon_{rr}^b + \sigma_{\theta\theta}^{bT} \delta d_{rr}^b + \sigma_{\theta\theta}^b \delta \epsilon_{\theta\theta}^b + \sigma_{\theta\theta}^{bT} \delta d_{\theta\theta}^b + \tau_{r\theta}^b \delta \gamma_{r\theta}^b) dV + \int_{V_{core}} (\sigma_{rr}^c \delta \epsilon_{rr}^c + \sigma_{\theta\theta}^c \delta \epsilon_{\theta\theta}^c + \sigma_{zz}^c \delta \epsilon_{zz}^c + \tau_{r\theta}^c \delta \gamma_{r\theta}^c + \tau_{rz}^c \delta \gamma_{rz}^c + \tau_{\theta z}^c \delta \gamma_{\theta z}^c) dV + \int_0^{a/2\pi} \int_0^{2\pi} [\lambda_{rt} (u_t(z_t = h_t/2) - u_c(z_c = -h_c/2)) + \lambda_{\theta t} (v_t(z_t = h_t/2) - v_c(z_c = -h_c/2)) + \lambda_{zt} (w_t(z_t = h_t/2) - w_c(z_c = -h_c/2)) + \lambda_{rb} (u_c(z_c = h_c/2) - u_b(z_b = -h_b/2)) + \lambda_{\theta b} (v_c(z_c = h_c/2) - v_b(z_b = -h_b/2)) + \lambda_{zb} (w_c(z_c = h_c/2) - w_b)] r dr d\theta$$

$$\begin{aligned}
 & -I_{1b}\ddot{u}_{0b} - I_{1b}r\ddot{u}_{0b,r} + I_{2b}\ddot{w}_{b,r} + I_{2t}r\ddot{w}_{b,r} \\
 & -I_{1b}\ddot{v}_{0b,0} + \frac{I_{2b}}{r}\ddot{w}_{b,r,0} - I_{0b}r\ddot{w}_b - 2M_{rr,r}^b \\
 & -rM_{rr,r}^b - N_{rr}^{bT}w_{b,r} - rN_{rr,r}^{bT}w_{b,r} \\
 & -rN_{rr}^{bT}w_{b,r} + 2M_{00,r}^b - \frac{2}{r}M_{00,r}^b \\
 & -\frac{h_b}{2}\lambda_{rb} - \frac{rh_b}{2}\frac{\partial\lambda_{rb}}{\partial r} - \frac{h_b}{2}\frac{\partial\lambda_{0b}}{\partial\theta} - r\lambda_{zb} = 0
 \end{aligned} \tag{۳۳}$$

یازده معادله هسته به صورت زیر است:

$$-I_{0c}n\ddot{u}_{0c} - I_{1c}n\ddot{u}_{1c} - I_{2c}n\ddot{u}_{2c} - I_{3c}n\ddot{u}_{3c} \tag{۳۴}$$

$$\begin{aligned}
 & -R_{rr}^c - rR_{rr,r}^c + R_{r0}^c - Q_{r0,0}^c - r\lambda_{rt} + r\lambda_{rb} = 0 \\
 & -I_{1c}n\ddot{u}_{0c} - I_{2c}n\ddot{u}_{1c} - I_{3c}n\ddot{u}_{2c} - I_{4c}n\ddot{u}_{3c} \\
 & -M_{r1}^c - rM_{r1,r}^c + M_{01}^c + rQ_{rc} - M_{Q1r,0}^c
 \end{aligned} \tag{۳۵}$$

$$\begin{aligned}
 & +\frac{h_c}{2}r\lambda_{rt} + \frac{h_c}{2}r\lambda_{rb} = 0 \\
 & -I_{2c}n\ddot{u}_{0c} - I_{3c}n\ddot{u}_{1c} - I_{4c}n\ddot{u}_{2c} - I_{5c}n\ddot{u}_{3c} \\
 & -M_{r2}^c - rM_{r2,r}^c + M_{02}^c + 2rM_{Q1rc} - M_{Q2r,0}^c
 \end{aligned} \tag{۳۶}$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{h_c^2}{4}r\lambda_{rt} + \frac{h_c^2}{4}r\lambda_{rb} = 0 \\
 & -I_{3c}n\ddot{u}_{0c} - I_{4c}n\ddot{u}_{1c} - I_{5c}n\ddot{u}_{2c} - I_{6c}n\ddot{u}_{3c} \\
 & -M_{r3}^c - rM_{r3,r}^c + M_{03}^c + 3rM_{Q2rc} - M_{Q3r,0}^c
 \end{aligned} \tag{۳۷}$$

$$\begin{aligned}
 & +\frac{h_c^3}{8}r\lambda_{rt} + \frac{h_c^3}{8}r\lambda_{rb} = 0 \\
 & -I_{0c}r\ddot{u}_{0c} - I_{1c}r\ddot{u}_{1c} - I_{2c}r\ddot{u}_{2c} - I_{3c}r\ddot{u}_{3c} \\
 & -R_{0,0}^c - 2Q_{r0}^c + rQ_{r0,r}^c - r\lambda_{0t} + r\lambda_{0b} = 0
 \end{aligned} \tag{۳۸}$$

$$\begin{aligned}
 & -I_{1c}r\ddot{u}_{0c} - I_{2c}r\ddot{u}_{1c} - I_{3c}r\ddot{u}_{2c} - I_{4c}r\ddot{u}_{3c} \\
 & -M_{01,0}^c + Q_{0c}r - 2M_{Q1r,0}^c - rM_{Q1r,0}^c \\
 & +\frac{h_c}{2}r\lambda_{0t} + \frac{h_c}{2}r\lambda_{0b} = 0
 \end{aligned} \tag{۳۹}$$

$$\begin{aligned}
 & -I_{2c}r\ddot{u}_{0c} - I_{3c}r\ddot{u}_{1c} - I_{4c}r\ddot{u}_{2c} - I_{5c}r\ddot{u}_{3c} \\
 & -M_{02,0}^c + 2rM_{Q10c} - 2M_{Q2r,0}^c - rM_{Q2r,0}^c \\
 & -\frac{h_c^2}{4}r\lambda_{0t} + \frac{h_c^2}{4}r\lambda_{0b} = 0
 \end{aligned} \tag{۴۰}$$

$$\begin{aligned}
 & -I_{3c}r\ddot{u}_{0c} - I_{4c}r\ddot{u}_{1c} - I_{5c}r\ddot{u}_{2c} - I_{6c}r\ddot{u}_{3c} \\
 & -M_{03,0}^c + 3rM_{Q20c} - 2M_{Q3r,0}^c - rM_{Q3r,0}^c \\
 & +\frac{h_c^3}{8}r\lambda_{0t} + \frac{h_c^3}{8}r\lambda_{0b} = 0
 \end{aligned} \tag{۴۱}$$

$$\begin{aligned}
 & -I_{0c}r\ddot{w}_{0c} - I_{1c}r\ddot{w}_{1c} - I_{2c}r\ddot{w}_{2c} - Q_{0c,0}^c \\
 & -Q_{rc}^c - rQ_{rc,r}^c - r\lambda_{zt} - r\lambda_{zb} = 0 \\
 & -I_{1c}r\ddot{w}_{0c} - I_{2c}r\ddot{w}_{1c} - I_{3c}r\ddot{w}_{2c} + -rR_z^c
 \end{aligned} \tag{۴۲}$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\partial M_{Q10c,0}^c}{\partial\theta} - M_{Q1rc} - rM_{Q1rc,r}^c \\
 & +\frac{h_c}{2}r\lambda_{zt} - \frac{h_c}{2}r\lambda_{zb} = 0
 \end{aligned} \tag{۴۳}$$

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{r0}^c & = \frac{1}{r} \left[u_{0,0}^c + z_c u_{1,0}^c + z_c^2 u_{2,0}^c + z_c^3 u_{3,0}^c \right] \\
 & + \left[v_{0,0}^c + z_c v_{1,0}^c + z_c^2 v_{2,0}^c + z_c^3 v_{3,0}^c \right]
 \end{aligned} \tag{۲۴}$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{r} \left[u_0^c + z_c u_1^c + z_c^2 u_2^c + z_c^3 u_3^c \right] \\
 \varepsilon_{rz}^c & = \left[u_1^c + 2u_2^c z_c + 3u_3^c z_c^2 \right] + \left[w_{0,r}^c + \right. \\
 & \left. z_c w_{1,r}^c + z_c^2 w_{2,r}^c \right]
 \end{aligned} \tag{۲۵}$$

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{0z}^c & = \left[v_1^c + 2v_2^c z_c + 3v_3^c z_c^2 \right] + \frac{1}{r} \left[w_{0,r}^c + \right. \\
 & \left. z_c w_{1,r}^c + z_c^2 w_{2,r}^c \right] \\
 \varepsilon_{zz}^c & = \left[w_1^c + 2w_2^c z_c \right]
 \end{aligned} \tag{۲۶}$$

با استفاده از اصل همیلتون و عبارت انرژی جنبشی و انرژی کرنشی، روابط سینماتیک رویه‌های هدفمند و هسته، شرایط سازگاری مطابق با پیوند کامل در وجه مشترک رویه و هسته، متجه‌های تنش رویه‌ها در پیوست (الف)، متجه‌های تنش مرتبه بالای هسته و تنش‌های هسته در پیوست (ب) و بعد از محاسبات، تعداد بیست و سه معادله وجود دارد که شامل شش معادله تعادل برای هر رویه و یازده معادله برای هسته و شش معادله برای شرایط سازگاری می‌باشد. سه معادله رویه بالایی به صورت زیر است:

$$\begin{aligned}
 & -I_{0t}\ddot{u}_{0t}r + I_{1t}r\ddot{w}_{t,r} - N_{rr}^t - rN_{rr,r}^t + N_{00}^t \\
 & -N_{r0,0}^t + r\lambda_{rt} = 0
 \end{aligned} \tag{۲۸}$$

$$\begin{aligned}
 & -I_{0t}\ddot{v}_{0t}r + I_{1t}r\ddot{w}_{t,r} - N_{00,0}^t - rN_{r0,r}^t \\
 & -2N_{r0}^t + r\lambda_{0t} = 0
 \end{aligned} \tag{۲۹}$$

$$\begin{aligned}
 & -I_{1t}\ddot{u}_{0t} - I_{1t}r\ddot{u}_{0t,r} + I_{2t}\ddot{w}_{t,r} + I_{2t}r\ddot{w}_{t,r} \\
 & -I_{1t}\ddot{v}_{0t,0} + \frac{I_{2t}}{r}\ddot{w}_{t,r,0} - I_{0t}r\ddot{w}_t - 2M_{rr,r}^t \\
 & -rM_{rr,r}^t - N_{rr}^{tT}w_{t,r} - rN_{rr,r}^{tT}w_{t,r} \\
 & -rN_{rr}^{tT}w_{t,r} + 2M_{00,r}^t - \frac{2}{r}M_{00,r}^t
 \end{aligned} \tag{۳۰}$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{N_{00}^{tT}}{r}w_{t,00} - N_{r0,0}^t - M_{r0,0}^t - \frac{4}{r}M_{r0,0}^t \\
 & +\frac{h_t}{2}\lambda_{rt} + \frac{rh_t}{2}\frac{\partial\lambda_{rt}}{\partial r} + \frac{h_t}{2}\frac{\partial\lambda_{0t}}{\partial\theta} + r\lambda_{zt} = 0
 \end{aligned}$$

سه معادله رویه پایینی به شکل زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned}
 & -I_{0b}\ddot{u}_{0b}r + I_{1b}r\ddot{w}_{b,r} - N_{rr}^b - rN_{rr,r}^b \\
 & +N_{00}^b - N_{r0,0}^b - r\lambda_{rb} = 0
 \end{aligned} \tag{۳۱}$$

$$\begin{aligned}
 & -I_{0b}\ddot{v}_{0b}r + I_{1b}r\ddot{w}_{b,r} - N_{00,0}^b - rN_{r0,r}^b \\
 & -2N_{r0}^b - r\lambda_{0b} = 0
 \end{aligned} \tag{۳۲}$$

$$Q_{r0}^c, M_{Q1r0}^c, M_{Q2r0}^c, M_{Q3r0}^c = \int_{-hc/2}^{hc/2} (1, z_c, z_c^2, z_c^3) \tau_{r\theta}^c dz_c \quad (54)$$

$$R_r^c, M_{r1}^c, M_{r2}^c, M_{r3}^c = \int_{-hc/2}^{hc/2} (1, z_c, z_c^2, z_c^3) \sigma_r^c dz_c \quad (55)$$

$$R_{\theta}^c, M_{\theta1}^c, M_{\theta2}^c, M_{\theta3}^c = \int_{-hc/2}^{hc/2} (1, z_c, z_c^2, z_c^3) \sigma_{\theta\theta}^c dz_c \quad (56)$$

به منظور تعیین معادلات حاکم بر حرکت، عبارات متوجه تنش مرتبه بالای هسته باید بر حسب مولفه های جابه جایی تعریف شوند. میدان تنش و عبارات مرتبه بالاتر با در نظر گرفتن این که هسته ایزوتروپ است و با استفاده از جابه جایی های معادلات (7-9) و ترم های مرتبه بالای معادلات (51-56) به دست می آیند. در نهایت، معادلات حاکم حرکت با جایگذاری متوجه های تنش رویه ها از پیوست (الف) در معادلات حاکم بر رویه ها و تنش های هسته از پیوست (ب) در معادلات هسته به دست می آیند. این معادلات بر حسب بیست و سه مجهول به دست می آیند که شامل شش جابه جایی عمودی و صفحه ای رویه ها، شش ضریب لاگرانژ و یازده ضریب چند جمله ای هسته است. برای حالت ورق ساندویچی دایره ای با شرایط تکیه گاه گیردار، حل این معادلات به کمک روش گلرکین در بخش بعدی ارائه می شود.

3- صفحه ساندویچی مدور با تکیه گاه گیردار

روش حل گلرکین برای حالت صفحه ساندویچی مدور با تکیه گاه گیردار انتخاب شده است. رویه ها از مواد تابع هدفمند و هسته ایزوتروپ در نظر گرفته شده است. برای این حالت یک روش تحلیلی به کمک توابع مثلثاتی ارائه شده است که شرط های مرزی هندسی را بر آورده می کند:

$$u_{0j} = [C_{uj} r \sin \lambda r] e^{i\omega t}, (j=t, b) \quad (57)$$

$$v_{0j} = 0, (j=t, b) \quad (58)$$

$$w_{0j} = [C_{wj} (\cos \lambda r + r \lambda \sin \lambda r - \lambda a)] e^{i\omega t}, (j=t, b) \quad (59)$$

$$u_k = [C_{uk} r \sin \lambda r] e^{i\omega t}, k = (0, 1, 2, 3) \quad (60)$$

$$v_{k=0} = 0, k = (0, 1, 2, 3) \quad (61)$$

$$\begin{aligned} & -I_{2c} r \ddot{w}_{0c} - I_{3c} r \ddot{w}_{1c} - I_{4c} r \ddot{w}_{2c} + 2r M_z^c \\ & - M_{Q2\theta c, 0}^c - M_{Q2rc}^c - r M_{Q2rc, r}^c \\ & - \frac{h_c^2}{4} r \lambda_{zt} + \frac{h_c^2}{4} r \lambda_{zb} = 0 \end{aligned} \quad (44)$$

و شش معادله سازگاری نیز به صورت زیر می باشد:

$$\begin{aligned} u_{0r} - \frac{h_t}{2} \frac{\partial w_t}{\partial r} - u_{0c} + \frac{h_c}{2} u_{1c} - \frac{h_c^2}{4} u_{2c} \\ + \frac{h_c^3}{8} u_{3c} = 0 \end{aligned} \quad (45)$$

$$\begin{aligned} v_{0r} - \frac{h_t}{2r} \frac{\partial w_t}{\partial \theta} - v_{0c} + \frac{h_c}{2} v_{1c} - \frac{h_c^2}{4} v_{2c} \\ + \frac{h_c^3}{8} v_{3c} = 0 \end{aligned} \quad (46)$$

$$w_{0t} - w_{0c} + \frac{h_c}{2} w_{1c} - \frac{h_c^2}{4} w_{2c} = 0 \quad (47)$$

$$u_{0c} + \frac{h_c}{2} u_{1c} + \frac{h_c^2}{4} u_{2c} + \frac{h_c^3}{8} u_{3c} - u_{0b} \quad (48)$$

$$\begin{aligned} - \frac{h_b}{2} \frac{\partial w_b}{\partial r} = 0 \\ v_{0c} + \frac{h_c}{2} v_{1c} + \frac{h_c^2}{4} v_{2c} + \frac{h_c^3}{8} v_{3c} \end{aligned} \quad (49)$$

$$\begin{aligned} -v_{0b} - \frac{h_b}{2r} \frac{\partial w_b}{\partial \theta} = 0 \\ w_{0c} + \frac{h_c}{2} w_{1c} + \frac{h_c^2}{4} w_{2c} - w_{0b} = 0 \end{aligned} \quad (50)$$

که $N_{rr}^j, N_{\theta\theta}^j, N_{r\theta}^j, M_{rr}^j, M_{\theta\theta}^j, M_{r\theta}^j, (j=t, b)$ متوجه های تنش و گشتاور رویه های بالا و پایین است (پیوست الف). عبارات $I_{kt}, I_{kb} (k=0, 1, 2)$ عبارات اینرسی رویه های بالا و پایین و $I_{lc} (l=0, \dots, 6)$ عبارت اینرسی هسته است (پیوست ب). هشت متوجه تنش مرتبه بالای ناشی از تنش های خارج از صفحه هسته برابر است با:

$$Q_{rc}, M_{Q1rc}, M_{Q2rc} = \int_{-hc/2}^{hc/2} (1, z_c, z_c^2) \sigma_{rc}^c dz_c \quad (51)$$

$$Q_{\theta c}, M_{Q1\theta c}, M_{Q2\theta c} = \int_{-hc/2}^{hc/2} (1, z_c, z_c^2) \sigma_{\theta c}^c dz_c \quad (52)$$

$$R_{zc}, M_{zc} = \int_{-hc/2}^{hc/2} (1, z_c) \sigma_{zz}^c dz_c \quad (53)$$

و چون اثرات تنش های صفحه ای هسته در این تحقیق در نظر گرفته شده، دوازده متوجه تنش مرتبه بالای ناشی از تنش های صفحه ای هسته نیز در معادلات حرکت ظاهر می شوند که برابر است با:

ساندویچ‌های مختلف محاسبه شده و در جداول ارائه خواهد شد.

۵- اعتبار سنجی

به منظور اعتبارسنجی تحلیل حاضر، نتایج به دست آمده از این روش با نتایج به دست آمده در مرجع [۱۲] مقایسه می‌شود. ورق مدور هدفمندی با شعاع a که از آلومینیوم با مدول یانگ 70GPa و چگالی 2700 kg/m^3 و آلومینا با مدول یانگ 380GPa و چگالی 3800 kg/m^3 و ضریب پواسون ثابت 0.3 تشکیل شده است را در نظر بگیرید. فرکانس طبق رابطه زیر بی‌بعد می‌شود.

$$\lambda = \omega a^2 \sqrt{\frac{\rho_c h}{D_c}} \quad (68)$$

$$D_c = \frac{E_c h^3}{12(1-\nu^2)}$$

که ρ_c چگالی سرامیک، E_c مدول یانگ سرامیک و h ضخامت ورق می‌باشد. با در نظر گرفتن ورق مدور به صورت ایزوتروپیک و در حالت سرامیک خالص، فرکانس بی‌بعد اول در حالت گیردار در مرجع [۱۲] و تحلیل حاضر در جدول (۱) ارائه می‌شود.

جدول (۱) مقایسه فرکانس بی‌بعد اول تحلیل حاضر و مرجع [۱۲]		
مرجع [۱۲]	تحلیل حاضر	فرکانس بی‌بعد اول
۱۰/۲۱۳	۹/۸۶۴۲	

اختلاف بین نتایج به دلیل تفاوت روش‌های استفاده شده در هر یک می‌باشد. در تحلیل حاضر از تئوری مرتبه بالای اصلاح شده ورق برای به دست آوردن نتایج استفاده شده است، در حالی که در مرجع [۱۲] از روش المان محدود استفاده گردیده است.

۶- بررسی عددی

اکنون برای بررسی بیشتر نتایج، یک ورق ساندویچی مدور هدفمند که در شکل (۲) نشان داده شده را در نظر بگیرید. سطح داخلی رویه‌ها در $z_c = \pm h_c/2$ از فولاد ضدزنگ با مدول یانگ و چگالی 207GPa و 8166 kg/m^3 ساخته

$$w_l = [C_{wl} (\cos \lambda r + r \lambda \sin \lambda r - \lambda a)] e^{i \omega t} \quad (62)$$

$$, l = (0, 1, 2)$$

$$\lambda_{lj} = [C_{\lambda_{lj}} r \sin \lambda r] e^{i \omega t}, (j = t, b) \quad (63)$$

$$\lambda_{0j} = 0, (j = t, b) \quad (64)$$

$$\lambda_{zj} = [C_{\lambda_{zj}} (\cos \lambda r + r \lambda \sin \lambda r - \lambda a)] e^{i \omega t} \quad (65)$$

$$, j = (t, b)$$

$$\lambda = \frac{\pi}{2a} (2(2m-1) - 1) \quad (66)$$

که ضرایب $C_{\lambda_{zj}}, C_{\lambda_{lj}}, C_{wl}, C_{uk}, C_{wj}, C_{uj}$ چهار ثابت مجهول در سری‌ها هستند. C_{wj}, C_{uj} چهار ثابت رویه‌ها، C_{wl} و C_{uk} هفت ثابت هسته و $C_{\lambda_{zj}}$ و $C_{\lambda_{lj}}$ چهار ثابت لاگرانژ می‌باشند. به دلیل تقارن، معادلات از بیست و سه به پانزده کاهش و تعداد مجهولات معادله کم می‌شود.

۴- کاهش تعداد معادلات

کاهش تعداد معادلات شامل جداسازی چهار ثابت مجهول رویه بر حسب تابعی از هفت ثابت هسته با استفاده از شش معادله سازگاری است که با جداسازی چهار ضریب لاگرانژ بر حسب چهار ثابت رویه همراه است [۲۴]. ثابت‌های جدا شده رویه‌ها در هفت معادله هسته جایگزین می‌شوند. در نهایت هفت معادله بر حسب هفت ثابت هسته باقی می‌ماند. هر چند مجموعه معادلات شامل پانزده ثابت است اما در حقیقت هفت فرکانس ویژه مستقل داریم. بنابراین ماتریس‌های سفتی و جرم با ابعاد 7×7 به دست می‌آیند که منجر به گروهی از معادلات همگن برای هر شماره موج m می‌شود که در ماتریس‌های جرم و سفتی ممکن است تعریف شده باشد که فرکانس ویژه برابر با مقدار ویژه و ثابت‌های سری‌ها برای هر شماره موج m بردار ویژه‌های متناظر است که به صورت زیر می‌باشد.

$$(k_m - \omega_m^2 M_m) C_m = 0 \quad (67)$$

در این معادله k_m و M_m ماتریس‌های سفتی و جرم هستند که متناظر با عبارت هارمونیک m در سری‌ها می‌باشند. ω_m فرکانس ویژه متناظر با مقدار m است. صفر بردار خشتی است و C_m بردار ویژه و مولفه‌های آن برابر با هفت ثابت هسته است. در اینجا فرکانس ویژه مربوط به $m=1$ برای

در جداول (۳)، (۴) و (۵) اولین فرکانس طبیعی به دست آمده از این روش با اولین فرکانس طبیعی به دست آمده از نرم افزار در دمای $T=300K$ برای k (توان تابع توانی) های مختلف در ساندویچ های ۱-۸-۱، ۱-۱-۱، ۱-۲-۱ مقایسه شده است که اختلاف قابل قبولی را نشان می دهند. ثابت مثبت توان تابع توانی (k) مربوط به نحوه توزیع سرامیک و فلز در رویه های هدفمند می باشد (پیوست الف). به دلیل اینکه در مدل سازی ورق ساندویچی مدور در نرم افزار المان محدود، رویه های هدفمند علی رغم تغییرات پیوسته به صورت لایه های مجزا و به صورت گسسته در نظر گرفته شده است، بین نتایج تحلیل حاضر و نتایج المان محدود اختلاف دیده می شود.

جدول (۳) مقایسه نتایج تحلیل حاضر و نتایج به دست آمده از نرم افزار در دمای ($T=300(K)$) برای ساندویچ ۱-۸-۱

اندیس توانی	تحلیل حاضر	آباکوس	اختلاف (%)
۰/۱	۰/۰۰۰۵۸۲۰	۰/۰۰۰۵۴۳۱	۶/۶۸
۱	۰/۰۰۰۶۱۲۴	۰/۰۰۰۵۶۱۰	۸/۳۹
۵	۰/۰۰۰۶۴۲۷	۰/۰۰۰۵۷۸۵	۹/۹

جدول (۴) مقایسه نتایج تحلیل حاضر و نتایج به دست آمده از نرم افزار در دمای ($T=300K$) برای ساندویچ ۱-۱-۱

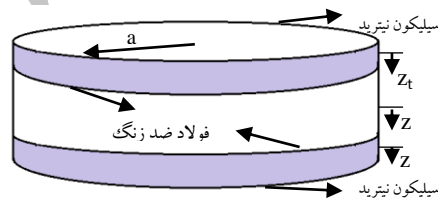
اندیس توانی	تحلیل حاضر	آباکوس	اختلاف (%)
۰/۱	۰/۰۰۰۸۸۶۴	۰/۰۰۰۸۰۱۰	۹/۶
۱	۰/۰۰۰۹۳۹۳	۰/۰۰۰۸۴۲۲	۱۰/۳۳
۵	۰/۰۰۱۰۲۰	۰/۰۰۰۹۱۱	۱۰/۶۸

جدول (۵) مقایسه نتایج تحلیل حاضر و نتایج به دست آمده از نرم افزار در دمای ($T=300K$) برای ساندویچ ۱-۲-۱

اندیس توانی	تحلیل حاضر	آباکوس	اختلاف (%)
۰/۱	۰/۰۰۰۷۶۷۷	۰/۰۰۰۶۹۹۷	۸/۸۵
۱	۰/۰۰۰۸۲۵۹	۰/۰۰۰۷۵۱۲	۹/۰۴
۵	۰/۰۰۰۸۹۲۳	۰/۰۰۰۸۰۵۴	۹/۷۴

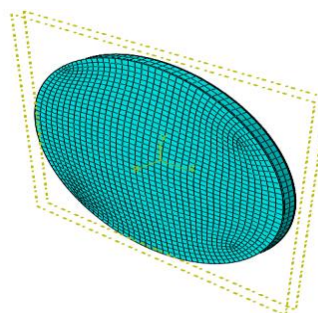
نتایج بدست آمده از این روش برای ساندویچ های ۱-۸-۱، ۱-۱-۱ و ۱-۲-۱ به ترتیب در جداول (۶-۸) ارائه گردیده است که مشاهده می شود با کاهش دما و افزایش توان تابع توانی مقدار فرکانس طبیعی افزایش می یابد. افزایش توان باعث افزایش مقدار سرامیک در رویه ها می شود که باعث

شده است. همچنین سطح خارجی رویه ها از سیلیکون نیتريد با مدول یانگ و چگالی $348GPa$ و $2707 kg / m^3$ ساخته شده است. مدول یانگ، چگالی و خواص دیگر هر رویه مطابق با قانون تابع توانی و با تغییرات دما تغییر می کنند. هسته منعطف در صفحه ساندویچی نیز از فولاد ضدزنگ ساخته شده و خواص آن وابسته به دما می باشد. در جدول (۲) که در پیوست (ت) آمده است خواص وابسته به دمای مواد تشکیل دهنده رویه های هدفمند و هسته که با پنج ثابت برای تابع مرتبه سوم وابسته به دمایی که در معادله (۳) ارائه شد تعریف شده است [۲]. تحلیل ارتعاشات آزاد در این کار برای حالت تکیه گاه گیردار و با تئوری مرتبه بالای اصلاح شده صفحه ساندویچی انجام شده است. تئوری مرتبه بالای صفحه ساندویچی در این کار با در نظر گرفتن اثرات تنش های صفحه ای هسته و اثرات خواص وابسته به دما اصلاح شده است. خواص فولاد ضد زنگ با (M) و خواص سیلیکون نیتريد با (Ce) مشخص شد.



شکل (۲) صفحه ساندویچی هدفمند با رویه های (سیلیکون نیتريد و فولاد ضدزنگ) و هسته فولادی ضدزنگ

نتایج تحلیلی ارتعاشات آزاد ورق ساندویچی مدور که با روش گلرکین حل شده با نتایج المان محدود مقایسه شده است که در جداول ۳-۵ ارائه می شود. نتایج المان محدود با استفاده از نرم افزار ABAQUS، شکل (۳)، به دست آمده است.



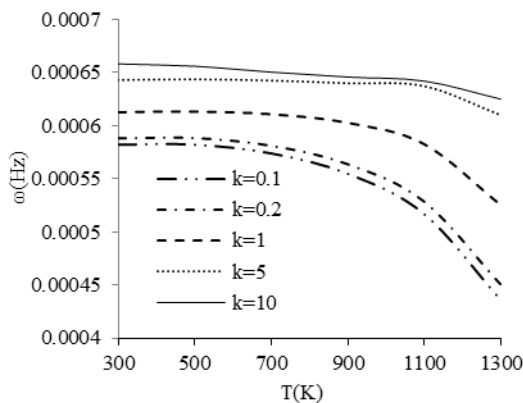
شکل (۳) مدل المان محدود ورق ساندویچی مدور با تکیه گاه گیردار

باعث کاهش صلیبیت صفحه ساندویچی می شود که یکی از دلایل کاهش فرکانس در دماهای بالاست.

جدول (۹) اثر دما بر مدول الاستیسیته سیلیکون نیتريد و فولاد ضدزنگ

دما (K)	سیلیکون نیتريد	فولاد ضد زنگ
۳۰۰	۳۲۲/۲۷(GPa)	۲۰۷/۷۹(GPa)
۱۳۰۰	۲۶۸/۰۸(GPa)	۵۹/۵۲۳(GPa)
تغییرات	%۱۶/۸۱	%۷۱/۳۵

شکل های (۴-۶) تغییرات فرکانس طبیعی نسبت به دما را به ترتیب برای حالت های ۱-۸-۱، ۱-۱-۱ و ۱-۲-۱ با رویه گیردار و برای مقادیر مختلف توان تابع توانی نمایش می دهد. به عنوان مثال ساندویچ ۱-۸-۱ یک صفحه ساندویچی متقارن است که ضخامت هسته هشت برابر ضخامت هر یک از رویه هاست. در شکل های (۴-۶) مشاهده می شود که در یک توان ثابت تابع توانی با افزایش دما فرکانس طبیعی کاهش می یابد. در یک دمای ثابت با افزایش مقدار توان تابع توانی مقدار فرکانس طبیعی افزایش می یابد. از طرفی شیب تغییرات فرکانس تا دمای (K) ۹۰۰ بسیار ملایم است ولی در توان های کمتر از یک به خصوص در حالت های ۱-۸-۱ و ۱-۲-۱، این شیب تغییرات، شدید است.



شکل (۴) تغییرات فرکانس طبیعی با دما در صفحه ساندویچی ۱-۸-۱ برای توان های مختلف تابع توانی

افزایش استحکام سازه و همچنین افزایش مقدار فرکانس ویژه اول می گردد.

جدول (۶) فرکانس طبیعی صفحه ساندویچی ۱-۸-۱ با توان های تابع توانی و دماهای مختلف

اندیس توانی	۳۰۰(K)	۹۰۰(K)	۱۳۰۰(K)
۰/۱	۰/۰۰۰۵۸۲۰۵	۰/۰۰۰۵۵۴۷۷۵	۰/۰۰۰۴۳۶۵۹
۰/۲	۰/۰۰۰۵۸۷۷۴	۰/۰۰۰۵۶۳۳۵	۰/۰۰۰۴۵۰۵۰
۱	۰/۰۰۰۶۱۲۴	۰/۰۰۰۶۰۲۵	۰/۰۰۰۵۲۵۹
۵	۰/۰۰۰۶۴۲۷	۰/۰۰۰۶۳۹۷	۰/۰۰۰۶۱
۱۰	۰/۰۰۰۶۵۸	۰/۰۰۰۶۴۶	۰/۰۰۰۶۲۵

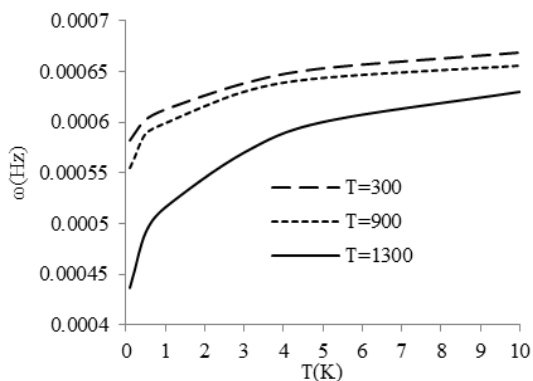
جدول (۷) فرکانس طبیعی صفحه ساندویچی ۱-۱-۱ با توان های تابع توانی و دماهای مختلف

اندیس توانی	۳۰۰(K)	۹۰۰(K)	۱۳۰۰(K)
۰/۱	۰/۰۰۰۸۸۶۴۴۳	۰/۰۰۰۸۵۲۲۰۳	۰/۰۰۰۸۱۲۲
۰/۲	۰/۰۰۰۸۹۴۸	۰/۰۰۰۸۶۰۷۵	۰/۰۰۰۸۲۲۰
۱	۰/۰۰۰۹۳۹۳	۰/۰۰۰۹۱۶	۰/۰۰۰۸۳۹۷
۵	۰/۰۰۱۰۲	۰/۰۰۰۹۹۱	۰/۰۰۰۹۶۸۹
۱۰	۰/۰۰۱۰۵۱	۰/۰۰۱۰۲۷	۰/۰۰۱۰۱۵

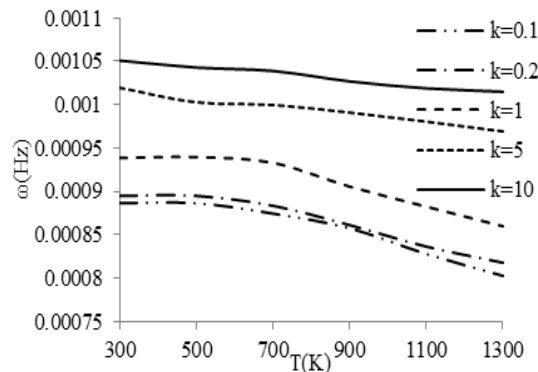
جدول (۸) فرکانس طبیعی صفحه ساندویچی ۱-۲-۱ با توان های تابع توانی و دماهای مختلف

اندیس توانی	۳۰۰(K)	۹۰۰(K)	۱۳۰۰(K)
۰/۱	۰/۰۰۰۷۶۷۷۵	۰/۰۰۰۷۲۰۶۸	۰/۰۰۰۵۹۵۱
۰/۲	۰/۰۰۰۷۷۷۵۹	۰/۰۰۰۷۳۳۵۷	۰/۰۰۰۶۰۲۹
۱	۰/۰۰۰۸۲۵۹	۰/۰۰۰۸۰۱۸	۰/۰۰۰۶۷۴۸
۵	۰/۰۰۰۸۹۲۳	۰/۰۰۰۸۸۷۵	۰/۰۰۰۸۵۶
۱۰	۰/۰۰۰۹۲۵	۰/۰۰۰۹۱	۰/۰۰۰۸۹۹

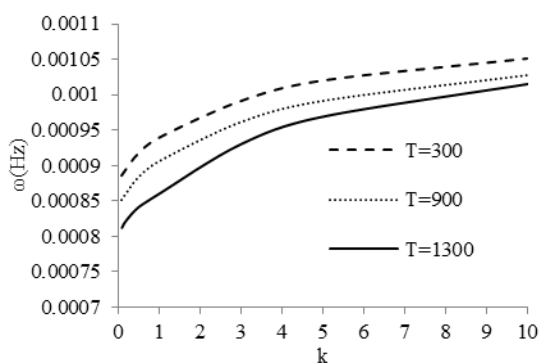
در جدول (۹) بین مدول الاستیک وابسته به دمای مواد تشکیل دهنده هسته و رویه ها مقایسه انجام شده است. مشاهده می شود که با افزایش دما مدول فلز و مدول سرامیک کاهش می یابد اما کاهش مدول الاستیک فلز بسیار چشمگیرتر است و یکی از عوامل استفاده از مواد هدفمند جلوگیری از کاهش خاصیت ماده در برابر تغییرات دما می باشد که با ترکیب فلز و سرامیک یک ماده با خواص مکانیکی فلز و خواص حرارتی سرامیک خواهیم داشت. همچنین افزایش دما خواص مکانیکی را کاهش می دهد و



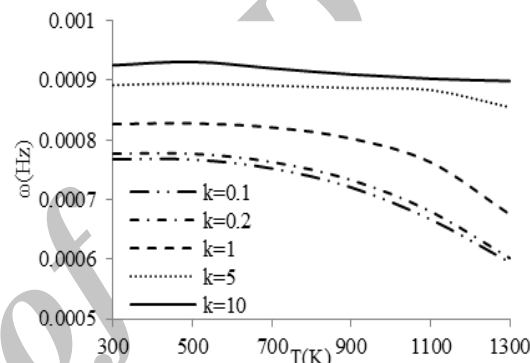
شکل (۷) تغییرات فرکانس طبیعی با توان تابع طبیعی برای صفحه ساندویچی ۱-۸-۱ در دماهای مختلف



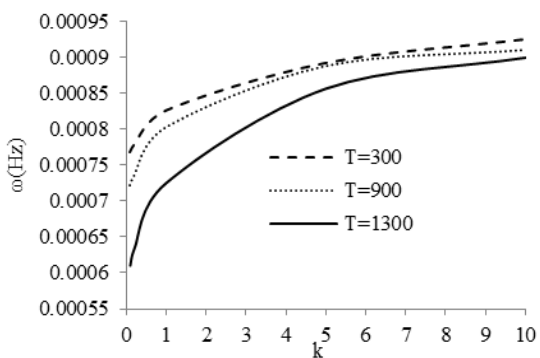
شکل (۵) تغییرات فرکانس طبیعی با دما در صفحه ساندویچی ۱-۱-۱ برای توانهای مختلف تابع توانی



شکل (۸) تغییرات فرکانس طبیعی با توان تابع طبیعی برای صفحه ساندویچی ۱-۱-۱ در دماهای مختلف



شکل (۶) تغییرات فرکانس طبیعی با دما در صفحه ساندویچی ۱-۲-۱ برای توانهای مختلف تابع توانی



شکل (۹) تغییرات فرکانس طبیعی با توان تابع طبیعی برای صفحه ساندویچی ۱-۲-۱ در دماهای مختلف

در شکل های (۷-۹) اثر کرنش غیرخطی رویه ها بر مقدار پارامتر فرکانس ω مورد بررسی قرار گرفته است. با دقت در شکل ها مشاهده می شود که در دمای ثابت با افزایش توان تابع توانی، مقدار فرکانس طبیعی زیاد می شود. این افزایش در ثابت های کوچکتر از یک شدت بیشتری دارد. با کاهش دما در یک مقدار ثابت توان تابع توانی، مقدار فرکانس افزایش می یابد و همچنین در یک توان ثابت تابع توانی مشاهده می شود که افزایش دما از دمای $300(K)$ تا $900(K)$ تاثیر کمی در تغییر فرکانس دارد ولی در دماهای بالاتر از این مقدار افت شدید در مقدار فرکانس طبیعی دیده می شود. همچنین در دمای ثابت، تغییر فرکانس از توان تابع توانی برابر پنج به بعد با شیبی ملایم انجام می شود.

۷- بحث و نتایج

ارتعاشات آزاد صفحه ساندویچی دایره ای با رویه های هدفمند وابسته به دما در این پژوهش بررسی شد. توزیع های مربع و مکعبی برای جابه جایی عمودی و افقی هسته در نظر گرفته شده است. بنابراین، مجهولات این مدل شامل ضرایب

T	دما (K)
u	مختصات در جهت r
v	مختصات در جهت θ
w	مختصات در جهت Z
δ	عملگر تغییرات
ω	فرکانس طبیعی (Hz)
λ	ضریب لاگرانژ

۹- پیوست

۹-۱- پیوست الف

برای تعیین منته‌های تنش و منته‌های گشتاور برای هر کدام از رویه‌ها، معادلات به شکل زیر می‌باشد.

$$\begin{Bmatrix} N_{rr}^j \\ N_{\theta\theta}^j \\ N_{r\theta}^j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}^j & A_{12}^j & 0 \\ A_{12}^j & A_{22}^j & 0 \\ 0 & 0 & A_{66}^j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_r^0 \\ \varepsilon_\theta^0 \\ \varepsilon_{r\theta}^0 \end{Bmatrix} + \quad (۶۸)$$

$$\begin{bmatrix} B_{11}^j & B_{12}^j & 0 \\ B_{12}^j & B_{22}^j & 0 \\ 0 & 0 & B_{66}^j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k_r \\ k_\theta \\ k_{r\theta} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} N_{rr}^{Tj} \\ N_{\theta\theta}^{Tj} \\ 0 \end{Bmatrix},$$

($j = t, b$)

$$\begin{Bmatrix} M_{rr}^j \\ M_{\theta\theta}^j \\ M_{r\theta}^j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11}^j & B_{12}^j & 0 \\ B_{12}^j & B_{22}^j & 0 \\ 0 & 0 & B_{66}^j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_r^0 \\ \varepsilon_\theta^0 \\ \varepsilon_{r\theta}^0 \end{Bmatrix} + \quad (۶۹)$$

$$\begin{bmatrix} D_{11}^j & D_{12}^j & 0 \\ D_{12}^j & D_{22}^j & 0 \\ 0 & 0 & D_{66}^j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k_r \\ k_\theta \\ k_{r\theta} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} M_{rr}^{Tj} \\ M_{\theta\theta}^{Tj} \\ 0 \end{Bmatrix},$$

($j = t, b$)

که $M_{\theta\theta}^{Tj}$ و M_{rr}^{Tj} ، $N_{\theta\theta}^{Tj}$ ، N_{rr}^{Tj} منته‌های حرارتی نیرو و گشتاور است. ($k, l = 1, 2, 6, j = t, b$)، A_{kl}^j و B_{kl}^j مولفه‌های ماتریس سفتی است که برای رویه‌های بالا و پایین به صورت زیر است:

$$N_{rr}^{Tj} = N_{\theta\theta}^{Tj} = \int_{-h_j/2}^{h_j/2} \left(\frac{E_j(z_j, T_j)}{1 - \nu_j(z_j, T_j)} \alpha_j(z_j, T_j) T_j \right) dz_j \quad (۷۰)$$

$$M_{rr}^{Tj} = M_{\theta\theta}^{Tj} = \int_{-h_j/2}^{h_j/2} \left(\frac{E_j(z_j, T_j)}{1 - \nu_j(z_j, T_j)} \alpha_j(z_j, T_j) T_j \right) z_j dz_j \quad (۷۱)$$

این چند جمله‌ای‌ها به همراه جابه‌جایی‌های رویه‌هاست. این مدل بر وجود منته‌های مرتبه بالای هسته اشاره دارد که با هیچ تعبیر فیزیکی سازگاری ندارد. این مدل با در نظر گرفتن تنش‌های درون صفحه‌ای هسته و معادلات حرکت که با استفاده از روش کاهش معادلات حل می‌شود، اصلاح شده است. نتایج به دست آمده برای صفحه ساندویچی مدور هدفمند با توان‌های تابع توانی مختلف و هسته نرم با نتایج نرم‌افزار Abaqus برای تحلیل ارتعاشات آزاد صفحه ساندویچی هدفمند مدور مقایسه شد که نتایج زیر به دست آمده است:

۱- با افزایش دما در یک توان ثابت تابع توانی، فرکانس طبیعی کاهش می‌یابد.

۲- افزایش توان تابع توانی در یک دمای ثابت باعث افزایش فرکانس طبیعی می‌شود.

۳- افزایش دما از دمای (K) ۳۰۰ تا (K) ۹۰۰ تاثیر کمی در تغییر فرکانس دارد ولی در دماهای بالاتر از این مقدار، افت شدید در مقدار فرکانس طبیعی دیده می‌شود.

۴- شیب تغییرات فرکانس تا دمای (K) ۹۰۰ بسیار ملایم است ولی در توان‌های کوچکتر از یک به خصوص در حالت‌های ۱-۸-۱ و ۱-۲-۱، این شیب تغییرات، شدید است.

۵- با افزایش دما مدول الاستیسیته فلز و سرامیک کاهش می‌یابد اما کاهش مدول فلز بسیار چشمگیرتر از کاهش مدول سرامیک است که منجر به استفاده از ترکیب سرامیک-فلز به صورت مواد هدفمند می‌شود.

۸- فهرست علائم

K	انرژی جنبشی
U	انرژی کرنشی (J)
t	زمان (s)
E	مدول یانگ (GPa)
G	مدول برشی (GPa)
h	ضخامت (m)
ϑ	ضریب پواسون

$$(I_{0c}, I_{1c}, I_{2c}, I_{3c}, I_{4c}, I_{5c}, I_{6c}) = \int_{-hc/2}^{hc/2} (\rho_c(T_c)(1, z_c, z_c^2, z_c^3, z_c^4, z_c^5, z_c^6)) dz_c \quad (77)$$

که I_{kt}, I_{kb} ($k=0,1,2$) عبارات اینرسی رویه های FG بالا و پایین است؛ I_{lc} ($l=0, \dots, 6$) عبارات اینرسی هسته است؛ $\rho_j(z_j, T_j)$ ($j=t, b$) چگالی رویه های بالا و پایین است که به صورت P-FGM در پیوست الف تعریف شد. $\rho_c(T_c)$ چگالی هسته است.

۳-۹- پیوست پ

با در نظر گرفتن اینکه هسته ایزوتروپ است، تنش های وابسته به دمای هسته به شکل زیر تعریف می شود.

$$\sigma_{rr}^c = E_c(T_c) \varepsilon_{rr}^c \quad (78)$$

$$\sigma_{\theta\theta}^c = E_c(T_c) \varepsilon_{\theta\theta}^c \quad (79)$$

$$\sigma_{zz}^c = E_c(T_c) \varepsilon_{zz}^c \quad (80)$$

$$\tau_{rz}^c = G_c(T_c) \varepsilon_{rz}^c \quad (81)$$

$$\tau_{\theta z}^c = G_c(T_c) \varepsilon_{\theta z}^c \quad (82)$$

$$\tau_{r\theta}^c = G_c(T_c) \varepsilon_{r\theta}^c \quad (83)$$

یادآور می شود که این روابط در متجه های تنش هسته مرتبه بالا جایگذاری می شود.

۴-۹- پیوست ت

جدول شماره (۱) که مربوط به خواص مواد به کار رفته در ساندویچ مدور می باشد.

$$\begin{Bmatrix} A_{11}^j \\ B_{11}^j \\ D_{11}^j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} A_{22}^j \\ B_{22}^j \\ D_{22}^j \end{Bmatrix} = \int_{-hj/2}^{hj/2} \left(\frac{E_j(z_j, T_j)}{1 - \nu_j(z_j, T_j)} \right) \begin{Bmatrix} 1 \\ z_j \\ z_j^2 \end{Bmatrix} dz_j \quad (72)$$

$$\begin{Bmatrix} A_{12}^j \\ B_{12}^j \\ D_{12}^j \end{Bmatrix} = \int_{-hj/2}^{hj/2} \left(\frac{\nu_j(z_j, T_j) E_j(z_j, T_j)}{1 - \nu_j(z_j, T_j)} \right) \begin{Bmatrix} 1 \\ z_j \\ z_j^2 \end{Bmatrix} dz_j \quad (73)$$

$$\begin{Bmatrix} A_{66}^j \\ B_{66}^j \\ D_{66}^j \end{Bmatrix} = \int_{-hj/2}^{hj/2} \left(\frac{E_j(z_j, T_j)}{1 - \nu_j(z_j, T_j)} \right) \begin{Bmatrix} 1 \\ z_j \\ z_j^2 \end{Bmatrix} dz_j \quad (74)$$

که $\alpha_j(z_j, T_j)$ ، $\nu_j(z_j, T_j)$ ، $E_j(z_j, T_j)$ مدول ارتجاعی، ضریب پواسون و ضریب انبساط حرارتی رویه هاست و توسط تابع توانی FGM برای هسته نرم و هسته سخت صفحه ساندویچی است:

$$P_t(z_t, T_t) = (P_m(T_t) - P_{ce}(T_t)) \left(\frac{z_t + h_t/2}{h_t} \right)^k + P_{ce}(T_t) \quad (75)$$

$$P_b(z_b, T_b) = (P_m(T_b) - P_{ce}(T_b)) \left(\frac{z_b + h_b/2}{h_b} \right)^k + P_{ce}(T_b)$$

که اندیس های "m" و "ce" مربوط به فلز و سرامیک است؛ k توان مثبت ثابت تابع P-FGM و P برابر است با هر خاصیت رویه FG، مثلا مدول الاستیسیته E ضریب پواسون ν ، ضریب انبساط حرارتی α و چگالی ρ .

۲-۹- پیوست ب

$$(I_{0j}, I_{1j}, I_{2j}) = \int_{-hj/2}^{hj/2} (\rho_j(z_j, T_j)(1, z_j, z_j^2)) dz_j, (j=t, b) \quad (76)$$

جدول (۲) خواص وابسته به دمای مواد تشکیل دهنده رویه های هدفمند، فولاد ضدزنگ (SUS304) و سیلیکون نیتريد (Si3N4) [۲]

E(Ce)	α (Ce)	ν (Ce)	ρ (Ce)	E(M)	α (M)	ν (M)	ρ (M)	
9e۳۴۸/۴۳۲۳	-6e۵/۸۷۲۳	۰/۲۴	۲۳۷۰	9e۲۰۱/۰۳۵۴۷	-6e۱۲/۳۳	۰/۳۲۶۲۲۳۵۱	۸۱۶۶	C ₀
.	C ₁
-۴e-۳/۰۶۹۷۳۸۶	۰/۰۰۰۹	.	.	-۴e۳/۰۷۹۲۹۶	۰/۰۰۰۸	-۴e-۲/۰۰۱۸۲۲	.	C ₁
-۷e۲/۱۶۰۱۸۶	.	.	.	-۷e-۶/۵۳۳۷۱	.	-۷e۳/۷۹۷۳۵۷۸	.	C ₂
-۱۱e-۸/۹۴۶۱۶۵	C ₃

- [9] Loy CT, Lam KY, Reddy JN., Vibration of functionally graded cylindrical shells, Int J Mech Sci, N0.41, 1999, pp.309-324. مراجع:
- [10] Mantari JL., Granados EV., Guedes Soares C., Vibrational analysis of advanced composite plates resting on elastic foundation, Compos Part B – Eng, No.66, 2014, pp.407-419.
- [11] H. A. Sherif., Free flexural vibrations of clamped circular sandwich plates, Journal of Sound and Vibration, Vol.3, No.157, 1992, pp.531-537.
- [12] T. Prakash, M. Ganapathi, Asymmetric flexural vibration and thermoelastic stability of FGM circular plates using finite element method, Composites-Part B, No.37, 2006, pp. 642-649.
- [13] G.J. Nie, Z. Zhong., Semi-analytical solution for three-dimensional vibration of functionally graded circular plates, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg, No.196, 2007, pp.4901-4910.
- [14] Liu, C.F., Lee, Y.T., Finite element analysis of three-dimensional vibrations of thick circular and annular plates. J. Sound Vib. Vol. 233, 2000, pp. 63-80.
- [15] Zhao, D., Au, F.T.K., Cheung, Y.K., Lo, S.H., Three-dimensional vibration analysis of circular and annular plates via the Chebyshev-Ritz method. Int. J. Solids Struct. Vol. 40, 2003, pp. 3089-3105.
- [16] Wu, T.Y., Liu, G.R., Free vibration analysis of circular plates with variable thickness by the generalized differential quadrature rule. Int. J. Solids Struct. Vol.38, 2001, pp. 7967-7980.
- [17] Wu, T.Y., Wang, Y.Y., Liu, G.R., Free vibration analysis of circular plates using generalized differential quadrature rule. Comput. Methods Appl. Mech. Eng. Vol. 191, 2002, pp.5365-5380.
- [18] G. C. Kung, Y.H. Pao, Nonlinear flexural vibrations of a clamped circular plate, J. Appl. Mech Vol. 39, No.4, 1972, pp.1050-1054.
- [1] Shen Shen, H., Rong Li, S., Post-buckling of sandwich plates with FGM face sheets and temperature-dependent properties, Compos. Part B 39, 2008, pp.332-344.
- [2] Reddy, J.N., Thermo Mechanical Behavior of Functionally Graded Materials .Texas. 1998.
- [3] Zhao, J., Li, Y., Ai, X., Analysis of transient thermal stress in sandwich plate with functionally graded coatings. Thin Solid Films No. 516, 2008, pp.7581-7587.
- [4] Reddy JN., Analysis of functionally graded plates, Int J Numer Meth Eng, No.47, 2000, pp.663-684.
- [5] A. Alibeiglooa, K.M. Liew, Free vibration analysis of sandwich cylindrical panel with functionally graded core using three-dimensional theory of elasticity. Composite Structures, Vol.113, 2014, pp. 23-30.
- [6] F.Tornabene, E. Viola, N. Fantuzzi, General higher-order equivalent single layer theory for free vibrations of doubly-curved laminated composite shells and panels. Composite Structures, Vol.104, 2013, pp. 94-117.
- [7] M. B. Dehkordi, S.M.R. Khalili, E. Carrera, Non-linear transient dynamic analysis of sandwich plate with composite face-sheets embedded with shape memory alloy wires and flexible core- based on the mixed LW (layer-wise)/ESL(equivalent single layer) models. Composites Part B: Engineering, Vol.87, 2016, pp. 59-74.
- [8] Cheng ZQ, Batra RC., Exact correspondence between eigenvalues of membranes and functionally graded simply supported polygonal plates,"J Sound Vib, No.229, 2000, pp.879-895.

- [30] M.M. Najafzadeh, M.R. Eslami, Buckling analysis of circular plates of functionally graded materials under uniform radial compression, *International Journal of Mechanical Sciences*, No.44, 2002, pp.2479–2493.
- [19] Ghaheri, A. and Nosier, A., Nonlinear forced vibrations of thin circular functionally graded plates,” In Persian, *Journal of Science and Technology of Composite*, Vol. 1, No. 2, 2015, pp. 1-10.
- [20] Ming Liu, Yuansheng Cheng, Jun Liu., High-order free vibration analysis of sandwich plates with both functionally graded face sheets and functionally graded flexible core, *Composites-Part B*, No.72, 2015, pp.97–107.
- [21] Shu Xuefeng, Zhang Xiaoqing, Zhang Jinxiang, Thermoelastic free vibration of clamped circular plate, *Appl Math Mech*, Vol. 21, No.6, 2000, pp. 715-724.
- [22] Frostig, Y., Thomsen, O.T., On the free vibration of sandwich panels with a transversely flexible and temperature-dependent core material e, part I: mathematical formulation. *J. Compos. Sci. Technol*, No.69, 2009, pp.856-862.
- [23] Frostig, Y., Thomsen, O.T., Non-linear thermal response of sandwich panels with a flexible core and temperature dependent mechanical properties." *Compos. Part B: Eng (special issue, Rajapakse YDS.ONR)*, Vol.1, No.39, 2008, pp.165-184.
- [24] S.M.R. Khalili, Y. Mohammadi, Free vibration analysis of sandwich plates with functionally graded face sheets and temperature-dependent material properties: A new approach, *European Journal of Mechanics A/Solids*, No.35, 2012, pp.61-74.
- [25] Reddy, J.N., *Energy Principles and Variational Methods in Applied Mechanics*, Wiley & Sons, New York, 1984.
- [26] Reddy, J.N., *Thermo Mechanical Behavior of Functionally Graded Materials*, Texas, 1998.
- [27] Y. Kiani, M. R. Eslami., Instability of heated circular FGM plates on a partial Winkler-type foundation, *Acta Mech*, No.224, 2013, pp.1045–1060.
- [28] Young-Wann Kim, Temperature dependent vibration analysis of functionally graded rectangular plates, *Journal of Sound and Vibration*, No. 284 , 2005, pp.531–549.
- [29] M. Es’haghi n, Sh.HosseiniHashemi, M. Fadaee., Vibration analysis of piezoelectric FGM sensors using an accurate method, *International Journal of Mechanical Sciences*, No.53, 2005, pp.585–594.