



## ارتعاش آزاد ورق دایره‌ای سوراخ‌دار تقویت شده با نانولوله‌های کربنی چند جداره مستقر بر بستر الاستیک با استفاده از تئوری بهبود یافته

مسعود رضایی<sup>۱</sup>، حمید محسنی منفرد<sup>۲\*</sup>، سید علیرضا مهاجرانی<sup>۳</sup>

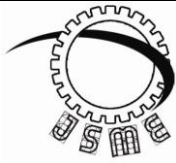
\* نویسنده مسئول: [h-mohsenimonfared@iau-arak.ac.ir](mailto:h-mohsenimonfared@iau-arak.ac.ir)

واژه‌های کلیدی	چکیده
فرکانس طبیعی، ورق دایره‌ای، نانولوله‌های کربنی، بستر الاستیک، تئوری بهبود یافته.	در این مقاله سعی بر این است که راه حلی برای تحلیل ارتعاش آزاد ورق دایره‌ای سوراخ‌دار تقویت شده با نانولوله‌های کربنی با توزیع یکنواخت و مستقر بر بستر الاستیک با استفاده از تئوری بهبود یافته ارائه شود. در این تئوری تنش برشی عرضی در سطح بالایی و پایینی ورق دایره‌ای سوراخ‌دار صفر در نظر گرفته شده و نیاز به ضریب اصلاحی مثل تئوری مرتبه اول نمی‌باشد. معادلات حرکت با استفاده از اصل همپلتون بدست آمده‌است و سپس با استفاده از روش تفاضلات مربعی تحمیم یافته این معادلات حل شده‌اند و فرکانس‌های طبیعی ورق دایره‌ای سوراخ‌دار بدست آمده‌است. در پایان پارامترهای تاثیرگذار بر فرکانس ورق دایره‌ای از جمله نسبت ضخامت ورق دایره‌ای به شعاع و نسبت شعاع داخلی به شعاع خارجی ورق دایره‌ای سوراخ‌دار در شرایط مختلف مرزی آورده شده‌است. همچنین برای بررسی همخوانی معادلات و همچنین روش حل به کار گرفته شده، مقایسه‌ای بین کار حاضر با مقالات معتبر انجام شده‌است. نتایج دقت بالای تئوری به کار گرفته شده RPT را در مقایسه با تئوری‌های دیگر نشان می‌دهد.
تاریخ ارسال: ۱۳۹۴/۰۵/۱۸	
تاریخ بازنگری: ۱۳۹۴/۰۹/۲۳	
تاریخ پذیرش: ۱۳۹۴/۱۱/۲۵	

۱- دانشجوی کارشناسی ارشد، گروه مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد اراک، اراک، ایران

۲- استادیار، گروه مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد اراک، اراک، ایران

۳- استادیار، گروه مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد اراک، اراک، ایران



Journal of  
Solid Mechanics  
in Engineering

Journal of  
**Solid Mechanics in Engineering**

<http://jsme.iaukhsh.ac.ir>



**Free Vibration of Annular Plate Reinforced with Multi-walled Carbon Nanotubes Resting on an Elastic Foundation Using Refined Theory**

Massod Rezaei<sup>1</sup>, Hamid Mohsenimonfared<sup>2,\*</sup>, Alireza Mohajerani<sup>3</sup>

\* Corresponding Author: h-mohsenimonfared@iau-arak.ac.ir

**Abstract:**

In this paper, an attempt is made for solution of free vibration analysis of annular plate reinforced with carbon nanotubes for Uniformly Distribution (UD), resting on an elastic foundation using a refined theory presented. In this theory, a parabolic distribution of shear stress and strain in the thickness direction and satisfies the boundary conditions of zero shear stress on the upper and lower crust cut without using a correction factor to be considered. The equations of motion are obtained using Hamilton's principle. And then these equations are solved by GDQ method. Factors affecting the frequency such large radius to small radius, the ratio of thickness to the radius of the annular plate, the length of the radius is obtained. To check the compatibility equations and solving method is used, a comparison between the present work has been done with papers.

**Key words:**

Natural Frequency,  
Annular Plate,  
Carbon Nanotubes,  
Elastic Foundation,  
Refined Theory.

1- MSc. Student, Department of Mechanical Engineering, Arak Branch, Islamic Azad University, Arak, Iran.

2- Assistant Professor, Department of Mechanical Engineering, Arak Branch, Islamic Azad University, Arak, Iran.

3 - Assistant Professor, Department of Mechanical Engineering, Arak Branch, Islamic Azad University, Arak, Iran.

## ۱- مقدمه

کمانش و ارتعاش از صفحه ضخیم روی متغیر پایه الاستیک استفاده کرد. هو تا تاهی و همکارانش [۷] با استفاده از تئوری بهبود یافته به تحلیل خمش، کمانش و ارتعاش یک صفحه ضخیم پرداخته‌اند. هو تا تاهی و همکارانش [۸] با استفاده از تئوری بهبود یافته راه‌حلی ساده و کارآمد برای تحلیل کمانش صفحه مواد مدرج تابعی بدست آورده‌اند. هو تا تاهی و همکارانش [۹] با استفاده از تئوری بهبود یافته دو متغیره راه‌حلی برای تحلیل خمش از صفحه ارتوتروپیک به روش لوی بدست‌آورده‌اند. در این تئوری که برای توزیع سهموی از تنش برشی عرضی و ارضا شرایط تنش برشی عرضی آزاد بر روی بالا و انتهای سطح از صفحه بدون استفاده از ضریب تصحیح برش انجام‌گرفته‌است راه حل لوی روشی با مفهوم فضای حالت مورد استفاده برای تعیین راه حل بسته‌ای از صفحه مستطیلی ارتوتروپیک با دو لبه متضاد تکیه گاه ساده و دو لبه دارای شرایط دلخواه است. دونگ هو چوی<sup>۲</sup> و همکارانش [۱۰] با استفاده از تئوری بهبود یافته برای صفحه بر روی بستر الاستیک به بررسی ارتعاشات آزاد صفحه مواد تابعی پرداخته‌اند. سونگ اک کیم<sup>۳</sup> و همکارانش [۱۱] با استفاده از تئوری بهبود یافته دو متغیره راه حل تحلیلی از کمانش ورق ارتوتروپیک و ایزوتروپیک انجام داده‌اند. سونگ اک کیم و همکارانش [۱۲] با استفاده از تئوری بهبود یافته دو متغیره برای صفحه کامپوزیتی که به صورت طبقه طبقه می‌باشد به بررسی کمانش صفحه کامپوزیتی پرداخته‌اند. هو تا تاهی و همکارانش [۱۳] با استفاده از ارتعاش آزاد صفحه کامپوزیتی طبقه‌ای و با استفاده از تئوری صفحه بهبود یافته دو متغیره توانست با روش بسته از آنتی سیمتریک زاویه و بدون حد فاصل طبقاتی و با استفاده از روش ناویر و با استفاده از

ورق‌ها سازه‌هایی هستند که شکل اولیه‌شان تخت و ضخامت آنها بسیار کوچکتر از دو بعد دیگر می‌باشد. معمولترین مثال‌ها برای ورق‌ها عبارتند از: پانل‌های جانبی، دیسک‌های توربین، دیواره‌ها و کف مخازن ذخیره. در دهه اخیر با افزایش چشمگیر تقاضا برای سازه‌های با مقاومت بالا در برابر حرارت بالا، جذب انرژی و وزن سبک، مطالعات زیادی روی رفتار پوسته‌ها و ورق‌ها صورت گرفته‌است. رفتار کمانشی اعضای سازه‌ای ساخته شده از مواد همگن که در معرض بارهای مکانیکی هستند توسط آل‌مروث و براش [۱] بیان شده‌است. گولترمن [۲] یک روش نسبی برای پیش‌گویی کمانش استوانه‌های جدار نازک با استفاده از تئوری‌های ساده و شناخته‌شده ارائه کرد. او کمانش بحرانی الاستیک برای یک استوانه کامل را مطابق با تئوری کلاسیک پوسته‌ها برای دو حالت بارگذاری تخمین زد و فاکتورهای تخریب مطابق با یک کد یا مطابق با تئوری پایداری کلاسیک کویتز محاسبه کرد [۳]. وینترستتر و اشمیت [۴] بررسی جامعی را در زمینه کمانش محوری و تحلیلی پوسته استوانه فولادی که تحت بارهای ترکیبی قرار دارند، انجام دادند.

ودینت چاروا و انسوریان [۵] به تحلیل کمانش پوسته‌های استوانه‌ای که تحت فشار جانبی یکنواخت قرار دارند، پرداختند. هو تا تاهی<sup>۱</sup> و همکارانش [۶] با استفاده از تئوری بهبود یافته به تحلیل کمانش، خمش و ارتعاش یک صفحه ضخیم بر روی بستر الاستیک پرداخته‌اند. بستر الاستیک مدلی از دو پارامتر متغیر پاسترناک است و معادلات حرکت از اصل همیلتون بدست آمده‌است تئوری پیشنهادی دقیق و کارآمد است واز آن می‌توان در پیشگویی پاسخ خمش،

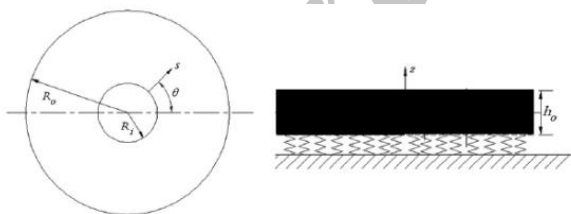
<sup>2</sup> Dong-Ho Choi<sup>3</sup> Seung-Eock Kim<sup>1</sup> Huu-Tai Thai

تلاش‌ها برای توسعه روش تحلیلی از مکانیک مولکولی در مدل کردن نانو ساختارها صورت گرفته شده است. جعفری و همکارانش [۲۱] ارتعاش آزاد پوسته مخروطی ناقص تقویت شده با نانولوله‌های کربنی تک‌جداره با توزیع یکنواخت و مستقر بر بستر الاستیک بر اساس تئوری مرتبه اول برشی مورد بررسی قرار داده‌اند.

در این پژوهش سعی بر این است که راه‌حلی برای تحلیل ارتعاش آزاد ورق دایره‌ای سوراخ‌دار تقویت شده با نانولوله‌های کربنی با توزیع یکنواخت و مستقر بر بستر الاستیک با استفاده از تئوری بهبود یافته ارائه شود. معادلات حرکت با استفاده از اصل همیلتون بدست آمده است. و سپس با استفاده از روش تفاضلات مربعی تعمیم یافته این معادلات حل شده‌اند و فرکانس‌های طبیعی ورق دایره‌ای سوراخ‌دار بدست آمده است. همچنین برای بررسی همخوانی معادلات و همچنین روش حل به کار گرفته شده، مقایسه‌ای بین کار حاضر با مقالات معتبر انجام شده است.

### ۲- مدل سازی مسئله

ورق گرد، روی بستر الاستیک را مطابق شکل ۱ در نظر می‌گیریم.



شکل (۱) نمای شماتیک ورق گرد بر بستر الاستیک

جابجایی‌های  $(u, v, w)$  به ترتیب در راستای  $(x, \theta, z)$  می‌باشند.

### ۳- روابط حاکم بر ورق گرد

در شکل (۲) نمایی از ورق گرد روی بستر الاستیک دو پارامتری پاسترناک را مشاهده می‌نمایید.

معادلات حرکت به نتایج برسد. عبدال بنچور<sup>۱</sup> و همکارانش [۱۴] با استفاده از تئوری بهبود یافته به بررسی ارتعاش آزاد صفحه ساخته شده از مواد تابعی با شیب دلخواه پرداختند. اسماعیل ماچاب<sup>۲</sup> و همکارانش [۱۵] به تحلیل استاتیکی و دینامیکی صفحه مواد تابعی با استفاده از تئوری بهبود یافته پرداخته‌اند. هدف از این مقاله گسترش یک مدل جدید برای تحلیل استاتیکی و دینامیکی از صفحه مواد تابعی است، این نتایج همسو با راه حل ردی از تئوری کلاسیک، مرتبه اول و تئوری مرتبه بالاتر است. در سال ۲۰۱۱ هوانگ<sup>۳</sup> و همکارانش [۱۶] ارتعاشات ترک در ورق نازک مستطیلی تابعی مدرج را بررسی کرده‌اند.

در سال ۲۰۱۱ ژینگوانگ<sup>۴</sup> و همکارانش [۱۷] تحلیل غیر خطی ورق کامپوزیت لایه‌ای تابعی مدرج در بستر الاستیک را ارائه داده‌اند. در سال ۲۰۱۰ حسینی هاشمی و همکارانش [۱۸] آنالیز ارتعاشات ورق قطاعی دایره‌ای تابعی مدرج با ضخامت متغیر در بستر الاستیک را بر اساس تئوری کلاسیک ارائه داده‌اند. در سال ۲۰۰۹ زاهو<sup>۵</sup> و همکارانش [۱۹] در تحقیقی ارتعاشات آزاد قطاع ورق دایره‌ای سوراخ دار ضخیم از جنس مواد تابعی مدرج را با استفاده از روش ریتز مورد بررسی قرار داده‌اند. خواص ماده تابعی مطابق مدل توانی ردی متغیر در جهت ضخامت ورق در نظر گرفته شده است و معادلات دیفرانسیل حرکت مسئله بر اساس تئوری تغییر شکل مرتبه اول بدست آمده‌اند. تینچونگ چانگ<sup>۶</sup> و همکارانش [۲۰] در سال ۲۰۰۳ به بررسی وابستگی خواص نانولوله‌های کربنی تک‌جداره بر اساس مدل مکانیک مولکولی پرداخته‌اند. در واقع در این مطالعه اولین

<sup>1</sup> Abdelkader Benachour

<sup>2</sup> Ismail Mechab

<sup>3</sup> Huang. C.S

<sup>4</sup> Wang.Z.X

<sup>5</sup> Zhao. X

<sup>6</sup> Tienchong Chang

$$\begin{aligned}
 U(r, \theta, z, t) &= u(r, \theta) + z\psi_r(r, \theta) \\
 &+ z^3 \left(-\frac{4}{3h^2}\right) \left(\frac{\partial w(r, \theta)}{\partial r} + \psi_r(r, \theta)\right) \\
 V(r, \theta, z, t) &= v(r, \theta) + z\psi_\theta(r, \theta) \\
 &+ z^3 \left(-\frac{4}{3h^2}\right) \left(\frac{\partial w(r, \theta)}{r\partial\theta} + \psi_\theta(r, \theta)\right) \\
 W(r, \theta, z, t) &= w(r, \theta)
 \end{aligned} \quad (۴)$$

که می توان رابطه (۴) را به فرم رابطه (۵) بازنویسی کرد که در این رابطه  $g(z)$  طبق تئوری ردی  $\left(-\frac{4z^3}{3h^2}\right)$  می باشد.

$$\begin{aligned}
 U(r, \theta, z, t) &= u(r, \theta, t) + z\psi_r(r, \theta, t) \\
 &+ g(z) \left(\frac{\partial w(r, \theta, t)}{\partial r} + \psi_r(r, \theta, t)\right) \\
 V(r, \theta, z, t) &= v(r, \theta, t) + z\psi_\theta(r, \theta, t) \\
 &+ g(z) \left(\frac{\partial w(r, \theta, t)}{r\partial\theta} + \psi_\theta(r, \theta, t)\right) \Rightarrow \\
 &reddy \rightarrow g(z) = \left(-\frac{4z^3}{3h^2}\right) \\
 W(r, \theta, z, t) &= w(r, \theta, t)
 \end{aligned} \quad (۵)$$

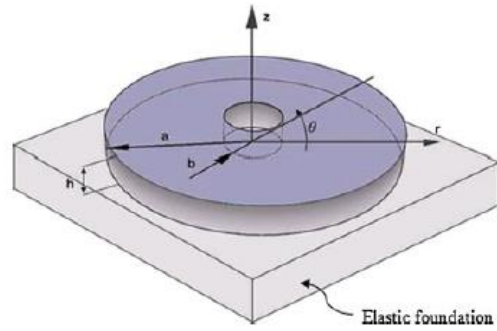
در این رابطه  $u, v, w$  داخل صفحه بوده و جابجایی های عرضی صفحه میانی می باشند،  $\psi_r, \psi_\theta$  چرخش حول بردارهای عمود بر سطح مقطع و  $h$  ضخامت ورق گرد می باشد [۲۲].

طبق تئوری تغییر شکل برشی بهبود یافته جابجایی عرضی  $w$  شامل دو مولفه خمشی  $w_b$  و برشی  $w_s$  می باشد که هر دو تابع  $(r, \theta, t)$  می باشند. همچنین جابجایی های  $\psi_r, \psi_\theta$  طبق تئوری کلاسیک ورق به صورت رابطه (۶) تعریف می شود [۲۲]:

$$\begin{aligned}
 w(r, \theta) &= w_b(r, \theta, t) + w_s(r, \theta, t) \\
 \left. \begin{aligned}
 \psi_r(r, \theta) &= -\frac{\partial w_b(r, \theta, t)}{\partial r} \\
 \psi_\theta(r, \theta) &= -\frac{\partial w_b(r, \theta, t)}{r\partial\theta}
 \end{aligned} \right\} \Rightarrow CPT \quad (۶)
 \end{aligned}$$

با قراردادن رابطه (۶) در رابطه (۵) و ساده سازی به رابطه (۷) رسیده که در این رابطه  $g(z)$  طبق تئوری تغییر شکل برشی

$$\text{بهبود یافته برابر } \frac{1}{4}z - \frac{5}{3}\left(\frac{z^3}{h^2}\right) \text{ می باشد.}$$



شکل (۲) نمایی از ورق گرد روی بستر الاستیک دو پارامتری باسترناک

طبق تئوری مرتبه ۳ ردی داریم:

$$\begin{aligned}
 U(r, \theta, z, t) &= u(r, \theta) + z\psi_r(r, \theta) + z^2\zeta_r(r, \theta) \\
 &+ z^3\eta_r(r, \theta) \\
 V(r, \theta, z, t) &= v(r, \theta) + z\psi_\theta(r, \theta) + z^2\zeta_\theta(r, \theta) \\
 &+ z^3\eta_\theta(r, \theta) \\
 W(r, \theta, z, t) &= w(r, \theta)
 \end{aligned} \quad (۱)$$

چنانچه تنش برش در سطح فوقانی و تحتانی ورق گرد صفر باشد، داریم:

$$\begin{cases}
 \sigma_{rz} = \sigma_{\theta z} = 0 & \text{at } z = \pm h/2 \\
 \left\{ \begin{aligned}
 \psi_r + 2z\zeta_r + 3z^2\eta_r + \frac{\partial w}{\partial r} &= 0 \\
 \psi_\theta + 2z\zeta_\theta + 3z^2\eta_\theta + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial\theta} &= 0
 \end{aligned} \right. \quad (۲)
 \end{cases}$$

با قراردادن  $z = \pm h/2$  در دو رابطه بالا به چهار رابطه زیر رسیده که با حل آنها چهار مولفه  $\zeta_r, \zeta_\theta, \eta_r, \eta_\theta$  به صورت زیر بدست می آیند:

$$\begin{cases}
 \left\{ \begin{aligned}
 \psi_r + h\zeta_r + \frac{3}{4}h^2\eta_r + \frac{\partial w}{\partial r} &= 0 \\
 \psi_\theta + h\zeta_\theta + \frac{3}{4}h^2\eta_\theta + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial\theta} &= 0 \\
 \psi_r - h\zeta_r + \frac{3}{4}h^2\eta_r + \frac{\partial w}{\partial r} &= 0 \\
 \psi_\theta - h\zeta_\theta + \frac{3}{4}h^2\eta_\theta + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial\theta} &= 0
 \end{aligned} \right. \quad (۳)
 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}
 \zeta_r = \zeta_\theta = 0 \\
 \eta_r = \left(-\frac{4}{3h^2}\right) \left(\frac{\partial w}{\partial r} + \psi_r\right) \\
 \eta_\theta = \left(-\frac{4}{3h^2}\right) \left(\frac{\partial w}{r\partial\theta} + \psi_\theta\right)
 \end{cases}$$

با قراردادن این چهار مولفه در رابطه (۱) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{\partial u}{\partial r} - z \frac{\partial^2 w_b}{\partial r^2} + g(z) \frac{\partial^2 w_s}{\partial r^2} \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{r} \left\{ u + \frac{\partial v}{\partial \theta} - z \left( \frac{\partial w_b}{\partial r} + \frac{\partial^2 w_b}{r \partial \theta^2} \right) \right. \\ &\quad \left. + g(z) \left( \frac{\partial w_s}{\partial r} + \frac{\partial^2 w_s}{r \partial \theta^2} \right) \right\} \\ \gamma_{r\theta} &= \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial u}{\partial \theta} - v + r \frac{\partial v}{\partial r} - 2z \left( \frac{\partial^2 w_b}{\partial r \partial \theta} - \frac{\partial w_b}{r \partial \theta} \right) \right. \\ &\quad \left. + 2g(z) \left( \frac{\partial^2 w_s}{\partial r \partial \theta} - \frac{\partial w_s}{r \partial \theta} \right) \right\} \\ \gamma_{rz} &= (1 + g'(z)) \frac{\partial w_s}{\partial r}, \quad \gamma_{\theta z} = (1 + g'(z)) \frac{\partial w_s}{r \partial \theta} \end{aligned} \quad (10)$$

### ۲-۳- پیاده‌سازی اصل همیلتون

طبق اصل همیلتون داریم:

$$\int_0^t (\delta T - \delta U + \delta U_f) dt = 0 \quad (11)$$

که  $T$  انرژی جنبشی،  $U$  انرژی پتانسیل، و  $U_f$  کار نیروی خارجی می‌باشد. با تعریف متجه‌های تنش طبق رابطه (۱۲) می‌توان رابطه (۱۱) را به فرم رابطه (۱۳) بازنویسی کرد.

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} N_r \\ M_r \\ P_r \end{Bmatrix} &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_r \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ g(z) \end{Bmatrix} dz \\ \begin{Bmatrix} N_\theta \\ M_\theta \\ P_\theta \end{Bmatrix} &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_\theta \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ g(z) \end{Bmatrix} dz, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} N_{r\theta} \\ M_{r\theta} \\ P_{r\theta} \end{Bmatrix} &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{r\theta} \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ g(z) \end{Bmatrix} dz, \\ \begin{Bmatrix} Q_{rz} \\ Q_{\theta z} \end{Bmatrix} &= \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_{rz} \\ \sigma_{\theta z} \end{Bmatrix} (1 + g'(z)) dz \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta U &= \int \left[ N_r \frac{\partial \delta u}{\partial r} - M_r \frac{\partial^2 \delta w_b}{\partial r^2} + P_r \frac{\partial^2 \delta w_s}{\partial r^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{N_{r\theta}}{r} \left( \frac{\partial \delta u}{\partial \theta} - \delta v + r \frac{\partial \delta v}{\partial r} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{2M_{r\theta}}{r} \left( \frac{\partial^2 \delta w_b}{\partial r \partial \theta} - \frac{\partial \delta w_b}{r \partial \theta} \right) + \frac{2P_{r\theta}}{r} \left( \frac{\partial^2 \delta w_s}{\partial r \partial \theta} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\partial \delta w_s}{r \partial \theta} \right) + \frac{N_\theta}{r} (\delta u + \frac{\partial \delta v}{\partial \theta}) - \frac{M_\theta}{r} \left( \frac{\partial \delta w_b}{\partial r} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\partial^2 \delta w_b}{r \partial \theta^2} \right) + \frac{P_\theta}{r} \left( \frac{\partial \delta w_s}{\partial r} + \frac{\partial^2 \delta w_s}{r \partial \theta^2} \right) + Q_{z\theta} \left\{ \frac{\partial \delta w_s}{r \partial \theta} \right\} \right. \\ &\quad \left. + Q_{rz} \left\{ \frac{\partial \delta w_s}{\partial r} \right\} r dr d\theta \right] \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} U(r, \theta, z, t) &= u(r, \theta, t) - z \frac{\partial w_b(r, \theta, t)}{\partial r} \\ &\quad + g(z) \left( \frac{\partial w_s(r, \theta, t)}{\partial r} \right) \\ V(r, \theta, z, t) &= v(r, \theta, t) - z \frac{\partial w_b(r, \theta, t)}{r \partial \theta} \\ &\quad + g(z) \left( \frac{\partial w_s(r, \theta, t)}{r \partial \theta} \right) \Rightarrow g(z) = \frac{1}{4} z - \frac{5}{3} \left( \frac{z^3}{h^2} \right) \\ W(r, \theta, z, t) &= w_b(r, \theta, t) + w_s(r, \theta, t) \end{aligned} \quad (7)$$

### ۳-۱- روابط تنش- کرنش

رابطه تنش-کرنش در مختصات استوانه‌ای به صورت رابطه (۸) می‌باشد.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \sigma_z \\ \sigma_{z\theta} \\ \sigma_{rz} \\ \sigma_{r\theta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{z\theta} \\ \gamma_{rz} \\ \gamma_{r\theta} \end{Bmatrix} \quad (8)$$

که در این رابطه  $C_{ij}$  ماتریس سختی الاستیک،  $\varepsilon_i$  کرنش و  $\sigma_i$  تنش می‌باشند. همچنین رابطه کرنش-جابجایی در مختصات استوانه‌ای به صورت روابط (۹) می‌باشد.

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{\partial U}{\partial r}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{U}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta}, \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial W}{\partial z}, \quad \gamma_{r\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} + \frac{\partial V}{\partial r} - \frac{V}{r}, \\ \gamma_{rz} &= \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial r}, \quad \gamma_{\theta z} = \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{r \partial \theta} \end{aligned} \quad (9)$$

با جایگذاری روابط (۷) در روابط (۹) کرنش‌ها به صورت زیر از تئوری تغییر شکل برشی بهبود یافته استخراج می‌گردند.

$$\begin{aligned} \delta T = & \int_{\Omega} \{ I_1 \{ \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial \delta u}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial \delta v}{\partial t} + \frac{\partial w_b}{\partial t} \frac{\partial \delta w_b}{\partial t} \\ & + \frac{\partial w_s}{\partial t} \frac{\partial \delta w_s}{\partial t} + \frac{\partial \delta w_b}{\partial t} \frac{\partial w_s}{\partial t} + \frac{\partial w_b}{\partial t} \frac{\partial \delta w_s}{\partial t} \} + \\ & I_2 \{ - \frac{\partial \delta u}{\partial t} \frac{\partial^2 w_b}{\partial r \partial t} - \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial^2 \delta w_b}{\partial r \partial t} - \frac{\partial \delta v}{\partial t} \frac{\partial^2 w_b}{r \partial \theta \partial t} \\ & - \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial^2 \delta w_b}{r \partial \theta \partial t} \} + I_3 \{ \frac{\partial^2 w_b}{\partial r \partial t} \frac{\partial^2 \delta w_b}{\partial r \partial t} + \frac{\partial^2 w_b}{r \partial \theta \partial t} \frac{\partial^2 \delta w_b}{r \partial \theta \partial t} \} \\ & + I_4 \{ \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial^2 \delta w_s}{\partial r \partial t} + \frac{\partial \delta u}{\partial t} \frac{\partial^2 w_s}{\partial r \partial t} + \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial^2 w_s}{r \partial \theta \partial t} + \\ & \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial^2 \delta w_s}{r \partial \theta \partial t} \} + I_5 \{ - \frac{\partial^2 w_b}{\partial r \partial t} \frac{\partial^2 w_s}{\partial r \partial t} - \frac{\partial^2 w_b}{r \partial \theta \partial t} \frac{\partial^2 \delta w_s}{r \partial \theta \partial t} \\ & - \frac{\partial^2 \delta w_b}{r \partial \theta \partial t} \frac{\partial^2 w_s}{r \partial \theta \partial t} - \frac{\partial^2 w_b}{r \partial \theta \partial t} \frac{\partial^2 \delta w_s}{r \partial \theta \partial t} \} + I_6 \{ \frac{\partial^2 w_s}{\partial r \partial t} \frac{\partial^2 \delta w_s}{r \partial \theta \partial t} \\ & + \frac{\partial^2 w_s}{r \partial \theta \partial t} \frac{\partial^2 \delta w_s}{r \partial \theta \partial t} \} \} r dr d\theta \end{aligned} \quad (16)$$

با به کاربردن روابط (۱۳) و (۱۴) و (۱۶) در رابطه اصل همیلتون رابطه (۱۱) و ساده‌سازی، معادلات حرکت از ارتعاشات آزاد یک ورق گرد تقویت‌شده با نانولوله‌های کربن، روی بستر الاستیک با استفاده از تئوری بهبود یافته، بر حسب متجه‌های تنش به صورت روابط (۱۷) استخراج می‌گردد:

همچنین کار نیروی خارجی حاصل از بستر الاستیک به صورت رابطه (۱۴) نوشته می‌شود:

$$\delta U_f = \int_{\Omega} \left\{ \begin{matrix} K_w (w_b + w_s) \\ -K_g \left\{ \begin{matrix} \frac{\partial^2 (w_b + w_s)}{\partial r^2} \\ + \frac{1}{r} \frac{\partial (w_b + w_s)}{\partial r} \\ + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 (w_b + w_s)}{\partial \theta^2} \end{matrix} \right\} \end{matrix} \right\} \delta (w_b + w_s) r dr d\theta \quad (14)$$

که  $K_w, K_g$  ضرایب بستر الاستیک دو پارامتری پاسترناک می‌باشند.

انرژی جنبشی به صورت رابطه (۱۵) تعریف می‌گردد:

$$T = \int_V \rho \left\{ \left( \frac{\partial U}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial V}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial W}{\partial t} \right)^2 \right\} r dr d\theta dz \quad (15)$$

با قرار دادن روابط (۷) در رابطه (۱۵) و وریشال‌گیری خواهیم‌داشت:

$$\begin{aligned} \delta T = & \int_V \rho \left\{ \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial \delta u}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial \delta v}{\partial t} + \frac{\partial w_b}{\partial t} \frac{\partial \delta w_b}{\partial t} + \frac{\partial w_s}{\partial t} \frac{\partial \delta w_s}{\partial t} \right. \\ & + z^2 \frac{\partial^2 w_b}{\partial r \partial t} \frac{\partial^2 \delta w_b}{\partial r \partial t} + z^2 \frac{\partial^2 w_b}{r \partial \theta \partial t} \frac{\partial^2 \delta w_b}{r \partial \theta \partial t} + g(z)^2 \frac{\partial^2 w_s}{\partial r \partial t} \frac{\partial^2 \delta w_s}{\partial r \partial t} \\ & + g(z)^2 \frac{\partial^2 w_s}{r \partial \theta \partial t} \frac{\partial^2 \delta w_s}{r \partial \theta \partial t} - z \frac{\partial \delta u}{\partial t} \frac{\partial^2 w_b}{\partial r \partial t} - z \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial^2 \delta w_b}{\partial r \partial t} \\ & + g(z) \frac{\partial \delta u}{\partial t} \frac{\partial^2 w_s}{\partial r \partial t} + g(z) \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial^2 \delta w_s}{\partial r \partial t} - z g(z) \frac{\partial^2 w_b}{\partial r \partial t} \frac{\partial^2 w_s}{\partial r \partial t} \\ & - z g(z) \frac{\partial^2 w_b}{r \partial \theta \partial t} \frac{\partial^2 w_s}{r \partial \theta \partial t} + g(z) \frac{\partial \delta v}{\partial t} \frac{\partial^2 w_s}{r \partial \theta \partial t} + g(z) \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial^2 \delta w_s}{r \partial \theta \partial t} \\ & - z \frac{\partial \delta v}{\partial t} \frac{\partial^2 w_b}{r \partial \theta \partial t} - z \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial^2 \delta w_b}{r \partial \theta \partial t} - z g(z) \frac{\partial^2 w_b}{r \partial \theta \partial t} \frac{\partial^2 w_s}{r \partial \theta \partial t} \\ & \left. + z g(z) \frac{\partial^2 w_b}{r \partial \theta \partial t} \frac{\partial^2 \delta w_s}{r \partial \theta \partial t} + \frac{\partial \delta w_b}{\partial t} \frac{\partial w_s}{\partial t} + \frac{\partial w_b}{\partial t} \frac{\partial \delta w_s}{\partial t} \right\} r dr d\theta dz \end{aligned}$$

با تعریف ثوابت زیر و به کاربردن آن در رابطه انرژی جنبشی (رابطه (۱۵))، انرژی جنبشی به صورت رابطه (۱۶) ساده شده و بازنویسی می‌گردد.

$$(I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6) = \int_{-h/2}^{h/2} \rho \{ 1, z, z^2, g(z), zg(z), g(z)^2 \} dz$$

جابجایی  $u, v, w_s, w_b$  که مجهول می‌باشند استخراج می‌گردند.

$$\begin{aligned} & \{A_{11}, A_{22}, A_{33}, A_{44}, A_{55}, A_{66}\} = \\ & \int_{-h/2}^{h/2} C_{ij} \{1, z, g(z), z^2, zg(z), g(z)^2\} dz, \\ & i = j = 1, 2, 3 \\ & \{B_{11}, B_{22}, B_{33}, B_{44}, B_{55}, B_{66}\} = \\ & \int_{-h/2}^{h/2} C_{ij} \{1, z, g(z), z^2, zg(z), g(z)^2\} dz, \quad (18) \\ & ij = 12, 13, 23 \\ & \{D_{11}, D_{22}, D_{33}, D_{44}, D_{55}, D_{66}\} = \\ & \int_{-h/2}^{h/2} C_{ij} \left\{ 1, z, g(z), z^2, zg(z), \right. \\ & \left. g(z)^2, 1 + 2g'(z) + g'(z)^2 \right\} dz, \\ & i = j = 4, 5, 6 \end{aligned}$$

که ضرایب ماتریس الاستیک به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} C_{11} = C_{22} = C_{33} &= \frac{E}{(1-\nu^2)} \\ C_{12} = C_{13} = C_{23} &= \frac{E\nu}{(1-\nu^2)} \\ C_{44} = C_{55} = C_{66} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \end{aligned} \quad (19)$$

### ۳-۳- حل معادلات با بیان تابع موج

برای حل معادلات تابع موج زیر در نظر گرفته شده است:

$$\begin{aligned} u(r, \theta, t) &= u(r) \cos(m\theta) e^{i\omega t} \\ v(r, \theta, t) &= v(r) \sin(m\theta) e^{i\omega t} \\ w_s(r, \theta, t) &= w_s(r) \cos(m\theta) e^{i\omega t} \\ w_b(r, \theta, t) &= w_b(r) \cos(m\theta) e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (20)$$

### ۳-۴- حل معادلات حرکت بدست آورده شده از روش عددی دیفرانسیل کوادریچر

برای حل معادلات حرکت بدست آورده شده از روش عددی دیفرانسیل کوادریچر استفاده شده است که فرم

$$\begin{aligned} \delta u &\Rightarrow \frac{N_r}{r} + \frac{\partial N_r}{\partial r} + \frac{\partial N_{r\theta}}{r\partial\theta} - \frac{N_\theta}{r} \\ &= I_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - I_2 \frac{\partial^3 w_b}{\partial r \partial t^2} + I_4 \frac{\partial^3 w_s}{\partial r \partial t^2} \\ \delta v &\Rightarrow 2 \frac{N_{r\theta}}{r} + \frac{\partial N_{r\theta}}{\partial r} + \frac{\partial N_\theta}{r\partial\theta} \\ &= I_1 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - I_2 \frac{\partial^3 w_b}{r\partial\theta\partial t^2} + I_4 \frac{\partial^3 w_s}{r\partial\theta\partial t^2} \\ \delta w_s &\Rightarrow -\frac{\partial^2 P_r}{\partial r^2} - \frac{2\partial P_r}{r\partial r} + \frac{\partial P_\theta}{r\partial r} \\ &- \frac{\partial^2 P_\theta}{r^2\partial\theta^2} + \frac{Q_{rz}}{r} + \frac{\partial Q_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial Q_{\theta z}}{r\partial\theta} \\ &+ \frac{\partial N_{\theta z}}{r\partial\theta} - 2 \frac{\partial^2 P_{r\theta}}{r\partial r\partial\theta} - 2 \frac{\partial P_{r\theta}}{r^2\partial\theta} + K_w (w_b + w_s) \\ &- K_g \left\{ \frac{\partial^2 w_b}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 w_s}{\partial r^2} + \frac{\partial w_b}{r\partial r} + \frac{\partial w_s}{r\partial r} + \frac{\partial^2 w_b}{r^2\partial\theta^2} \right. \\ &+ \left. \frac{\partial^2 w_s}{r^2\partial\theta^2} \right\} = I_1 \left\{ \frac{\partial^2 w_b}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 w_s}{\partial t^2} \right\} - I_4 \left\{ \frac{\partial^3 u}{\partial r \partial t^2} \right. \\ &+ \left. \frac{\partial^3 v}{r\partial\theta\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{r\partial t^2} \right\} + I_3 \left\{ \frac{\partial^4 w_b}{\partial r^2 \partial t^2} + \frac{\partial^4 w_b}{r^2 \partial \theta^2 \partial t^2} \right. \\ &+ \left. \frac{\partial^3 w_b}{r\partial r \partial t^2} \right\} - I_6 \left\{ \frac{\partial^4 w_s}{\partial r^2 \partial t^2} + \frac{\partial^4 w_s}{r^2 \partial \theta^2 \partial t^2} \right. \\ &+ \left. \frac{\partial^3 w_s}{r\partial r \partial t^2} \right\} \\ \delta w_b &\Rightarrow \frac{\partial^2 M_r}{\partial r^2} + \frac{2\partial M_r}{r\partial r} - \frac{\partial M_\theta}{r\partial r} \\ &+ \frac{\partial^2 M_\theta}{r^2\partial\theta^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{r\theta}}{r\partial r\partial\theta} + 2 \frac{\partial M_{r\theta}}{r^2\partial\theta} \\ &+ K_w (w_b + w_s) - K_g \left\{ \frac{\partial^2 w_b}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 w_s}{\partial r^2} \right. \\ &+ \left. \frac{\partial w_b}{r\partial r} + \frac{\partial w_s}{r\partial r} + \frac{\partial^2 w_b}{r^2\partial\theta^2} + \frac{\partial^2 w_s}{r^2\partial\theta^2} \right\} \\ &= I_1 \left\{ \frac{\partial^2 w_b}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 w_s}{\partial t^2} \right\} + I_2 \left\{ \frac{\partial^3 u}{\partial r \partial t^2} \right. \\ &+ \left. \frac{\partial^3 v}{r\partial\theta\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{r\partial t^2} \right\} - I_3 \left\{ \frac{\partial^4 w_b}{\partial r^2 \partial t^2} + \frac{\partial^4 w_b}{r^2 \partial \theta^2 \partial t^2} \right. \\ &+ \left. \frac{\partial^3 w_b}{r\partial r \partial t^2} \right\} + I_5 \left\{ \frac{\partial^4 w_s}{\partial r^2 \partial t^2} + \frac{\partial^4 w_s}{r^2 \partial \theta^2 \partial t^2} + \frac{\partial^3 w_s}{r\partial r \partial t^2} \right\} \end{aligned} \quad (17)$$

با تعریف ثوابت زیر و به کار بردن آنها در روابط (۱۲) که نتیجه‌های نیرو و ممان می‌باشند، و سپس ساده‌سازی این روابط، نتیجه‌ها بر حسب مولفه‌های جابجایی  $u, v, w_s, w_b$  بدست می‌آیند، که در نهایت با جایگذاری این نتیجه‌ها که بر حسب مولفه‌های جابجایی بوده، در روابط (۱۷)، چهار معادله حرکت بر حسب مولفه‌های



$$k_l = 1 - \frac{\tanh \varphi}{\varphi}, \quad \varphi = \frac{2l}{d} \sqrt{\frac{-2E_m}{E_{CNT}(1-\nu_m) \ln V_{CNT}}} \quad (26)$$

$$\gamma = \frac{\ln(\beta')}{V_{CNT}}, \quad \beta' = \frac{\bar{E}_c - E_m}{(k_l k_o k_w E_{CNT} - E_m) \bar{V}_{CNT}}$$

که  $E_m$  و  $E_{CNT}$  مدول یانگ طولی از نانولوله‌های کربنی و پلیمر خالص می‌باشند.  $V_{CNT}$  کسر حجمی از نانولوله‌های کربنی،  $k_o$ ،  $k_l$  و  $k_w$  پارامتر موثر طول، فاکتور موثر جهت نانولوله‌های کربنی و پارامتر موج نانولوله‌های کربنی به ترتیب می‌باشند.  $l$  و  $d$  طول و قطر نانولوله‌های کربنی و  $\nu_m$  ضریب پواسون پلیمر می‌باشد. پارامترهای با علامت ۸ باید آزمایشگاهی و از طریق تست کشش برای نانولوله‌های با درصد وزنی بالا، بدست آورده شود. همچنین دانسیته جرمی و ضریب پواسون از کامپوزیت‌های پلی‌استیرین و نانولوله‌های کربنی طبق قانون خطی از مخلوط‌ها می‌تواند به صورت زیر محاسبه شود:

$$\rho = V_{CNT} \rho_{CNT} + V_m \rho_m \quad (27)$$

$$\nu = V_{CNT} \nu_{CNT} + V_m \nu_m$$

که  $\rho_m$  و  $\rho_{CNT}$  دانسیته جرمی از نانولوله‌های کربنی و پلیمر خالص می‌باشد. ما فرض کرده‌ایم ماتریس پلی‌استیرین با نانولوله‌های کربنی تقویت شده‌است که کسر حجمی از آنها به صورت زیر می‌باشد:

$$V_{CNT} + V_m = 1 \quad (28)$$

در جدول (۱) خواص مکانیکی از پلی‌استیرین و نانولوله‌های کربنی خالص آورده شده‌است. در این کار نتایج آزمایشگاهی که برای مدول یانگ از کامپوزیت‌های پلی‌استیرین و نانولوله‌های کربنی با کسر حجمی مختلف از نانولوله‌ها توسط مرجع [۲۳] آورده شده‌است با فرم جدید از قانون مخلوط‌ها که روابط آنها ذکر گردید مقایسه شده‌است. براساس شکل (۳)، مدول یانگ پیش‌بینی شده توسط رابطه (۲۹) با نتایج آزمایشگاهی منطبق می‌باشد.

دیفرانسیل کوادریچر از چهار معادله حرکت بالا به صورت روابط موجود در پیوست (۱) می‌باشد.

### ۳-۵- استخراج فرکانس‌های طبیعی ورق

به منظور استخراج سیستم معادلات مقدار ویژه، متغیرها در تمام دامنه محاسباتی به دو بخش تقسیم می‌شوند. متغیرهای بخش اول شامل نقاط داخلی می‌باشند که با زیرنویس  $d$  مشخص می‌شوند. متغیرهای باقی‌مانده که شامل متغیرها در مرزها می‌باشند با زیرنویس  $b$  اندیس گذاری می‌شوند.

با تعریف بالا، معادلات حرکت را می‌توان به فرم ماتریسی زیر بازنویسی نمود:

$$[[K_{db}][K_{dd}]] \begin{Bmatrix} \{b\} \\ \{d\} \end{Bmatrix} - \omega^2 [M] \begin{Bmatrix} \{d\} \end{Bmatrix} = \{0\} \quad (21)$$

به طور مشابه شرایط مرزی را نیز می‌توان به فرم زیر نوشت:

$$[K_{bd}] \begin{Bmatrix} \{d\} \end{Bmatrix} + [K_{bb}] \begin{Bmatrix} \{b\} \end{Bmatrix} = \{0\} \quad (22)$$

با جایگذاری رابطه (۲۲) در رابطه (۲۱) مسئله مقدار ویژه به شکل کلی زیر نتیجه می‌شود:

$$([K] - \omega^2 [M]) \begin{Bmatrix} \{d\} \end{Bmatrix} = \{0\} \quad (23)$$

که:

$$[K] = [K_{dd}] - [K_{db}] [K_{bb}]^{-1} [K_{bd}] \quad (24)$$

### ۳-۶- بررسی خواص مکانیکی ورق گورد تقویت شده با نانولوله:

مدول یانگ از کامپوزیت‌های پلیمری تقویت شده با نانولوله‌های کربنی می‌تواند طبق فرم جدید از قانون مخلوط‌ها تخمین زده شود [۲۳].

$$E_c = (k_l k_o k_w E_{CNT} - E_m) V_{CNT} e^{\gamma V_{CNT}} + E_m \quad (25)$$

که:

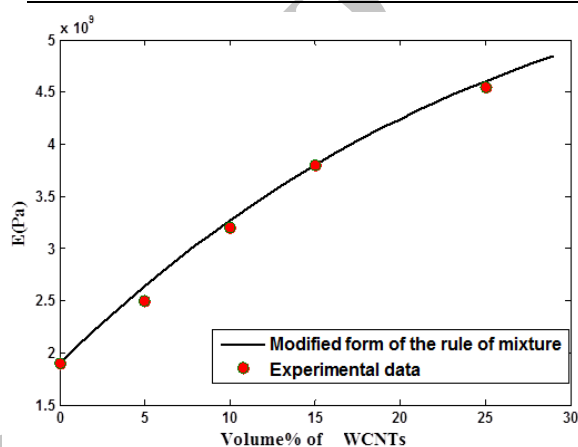
گرد سوراخ‌دار با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه ۳ بوده و به صورت دقیق حل شده‌است، پرداخته شده‌است.

در جدول (۲) می‌توان نتایج بدست آمده از این کار را با نتایج مرجع [۲۴] مقایسه کرد. مشاهده می‌شود که نتایج بدست آمده از تئوری بهبود یافته در این کار بسیار نزدیک به نتایج بدست آمده از تئوری مرتبه ۳ می‌باشد. برای بررسی ارتعاشات ورق گرد سوراخ‌دار تقویت شده با نانولوله‌های کربنی، کسر حجمی نانولوله‌ها یعنی  $V_{CNT}$  را برابر ۰/۳ در نظر گرفته شده و سه شرط مرزی تکیه گاه گیردار - تکیه گاه گیردار (C-C)، تکیه گاه ساده - تکیه گاه ساده (S-S) و تکیه گاه گیردار - تکیه گاه ساده (S-C) در شعاع داخلی و خارجی ورق، مورد بررسی قرار گرفته‌است.

در جداول (۳) همگرایی پاسخ‌های گرفته شده به ازای تعداد گره‌های مختلف، مورد بررسی قرار گرفته‌است. در این جدول مقادیر فرکانس طبیعی به ازای اعداد موج ۰، ۱ و ۲ و نسبت‌های ضخامت به شعاع خارجی ۰/۱ و ۰/۲ آورده شده‌است. ملاحظه می‌گردد پاسخ‌ها دارای نرخ همگرایی بالا در تعداد گره پایین می‌باشند.

جدول (۱) خواص مکانیکی از پلی‌استیرن و نانولوله‌های کربنی خالص

خواص مکانیکی پلی‌استیرن	خواص مکانیکی نانولوله‌های کربنی خالص
$E_m = 1/9 \text{ GPa}$	$E_m = 900 \text{ GPa}$
$\rho_m = 1050 \text{ kgm}^{-3}$	$\rho_m = 2100 \text{ kgm}^{-3}$
$\nu_m = 0/34$	$\nu_m = 0/28$
اندازه‌های نانولوله‌های کربنی	
$d = 25 \text{ nm}, l = 60 \mu\text{m}$	$K_0 = 0/2, K_w = 0/1$
	$E_c = 3/8 \text{ GPa}$
	$V_{NT} = 0/15$



شکل (۳) مدول یانگ پیش بینی شده

#### ۴- نتایج و یافته‌ها

##### ۴-۱- اعتبار سنجی

برای بررسی صحت روابط استخراج شده و حل انجام گرفته، مقایسه‌ای با کارهای مشابه دیگر صورت گرفته‌است. در مقایسه‌ای که با مرجع [۲۴] که به بررسی ارتعاشات آزاد ورق

$$N=15, \frac{R_i}{R_o} = 0.2, \chi = \frac{h}{R_o}, \Omega = \omega R_o^2 \sqrt{\frac{\rho h}{D}}, D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \text{جدول (۲) ورق گرد ایزوتروپیک،}$$

شرط مرزی	$\chi$	m	کار حاضر	[۲۴] تئوری مرتبه سوم	$\chi$	m	کار حاضر	[۲۴] تئوری مرتبه سوم
C-C	0/01	0	34/5564	34/5648	0/01	0	30/3054	30/9766
		1	36/04311	36/0524	1	1	31/4542	32/1469
		2	41/7430	41/7538	2	2	36/4293	37/0939
		3	53/2901	53/3006	3	3	46/6003	47/2063

جدول (۳) همگرایی پاسخ‌های گرفته شده  $\Omega = \omega R_o^2 \sqrt{\frac{\rho h}{D}}$ ،  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ ،  $K_w = K_g = 0$ ،  $\frac{R_i}{R_o} = 0.2$  و شرایط مرزی C-C

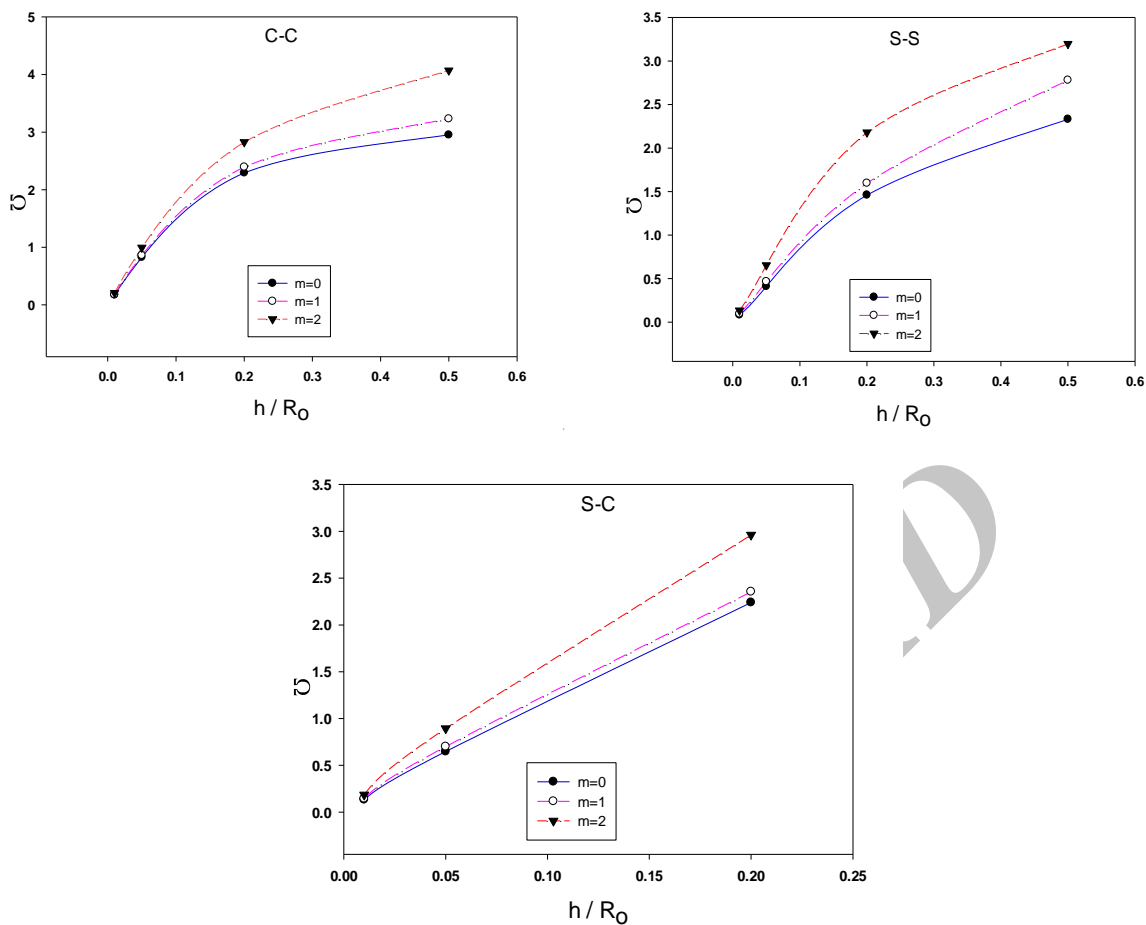
		N					
		۷	۹	۱۱	۱۳	۱۵	۱۷
h/Ro=۰/۱	m=۰	۳۰/۱۷۵۳	۳۰/۱۸۹۲	۳۰/۱۹۴۵	۳۰/۱۹۶۱	۳۰/۱۹۶۶	۳۰/۱۹۶۷
	m=۱	۳۱/۳۲۰۶	۳۱/۳۳۳۵	۳۱/۳۳۹۷	۳۱/۳۴۰۳	۳۱/۳۳۹۹	۳۱/۳۳۹۵
	m=۲	۳۶/۳۰۰۱	۳۶/۳۰۲۵	۳۶/۳۰۸۰	۳۶/۳۰۷۱	۳۶/۳۰۷۲	۳۶/۳۰۷۱
h/Ro=۰/۲	m=۰	۲۳/۰۷۲۲	۲۳/۱۱۵۶	۲۳/۱۲۶۴	۲۳/۱۳۰۱	۲۳/۱۳۱۵	۲۳/۱۳۲۰
	m=۱	۲۴/۱۲۹۵	۲۴/۱۶۰۳	۲۴/۱۶۰۲	۲۴/۱۵۸۴	۲۴/۱۵۷۱	۲۴/۱۵۶۴
	m=۲	۲۸/۵۲۹۶	۲۸/۵۵۰۹	۲۸/۵۴۱۶	۲۸/۵۳۴۰	۲۸/۵۲۹۲	۲۸/۵۲۶۵

ازای افزایش ضرائب Kw و Kg هستیم به طوری که در مقادیر بالا از این دو پارامتر، فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد تغییرات چندانی پیدا نمی‌کنند. همچنین به ازای  $Kw < 10^3$  و  $Kw > 10^6$  تغییرات محسوسی در فرکانس طبیعی مشاهده نمی‌شود. زمانی که  $Kg < 10$  به ازای مقادیر مختلف Kw تغییرات فرکانس طبیعی کم و همچنین زمانی که Kw مقادیر بالا را به خود اختصاص می‌دهد، مقادیر کم یا زیاد Kg روی فرکانس طبیعی تاثیر چندانی ندارد. در شکل (۸) افزایش فرکانس طبیعی بی‌بعد برای عدد موج  $m=1$  به ازای افزایش نسبت شعاع داخلی به شعاع خارجی و همچنین افزایش پارامترهای بستر الاستیک در شرایط مرزی مختلف C-C و S-S و S-C، مشاهده می‌شود.

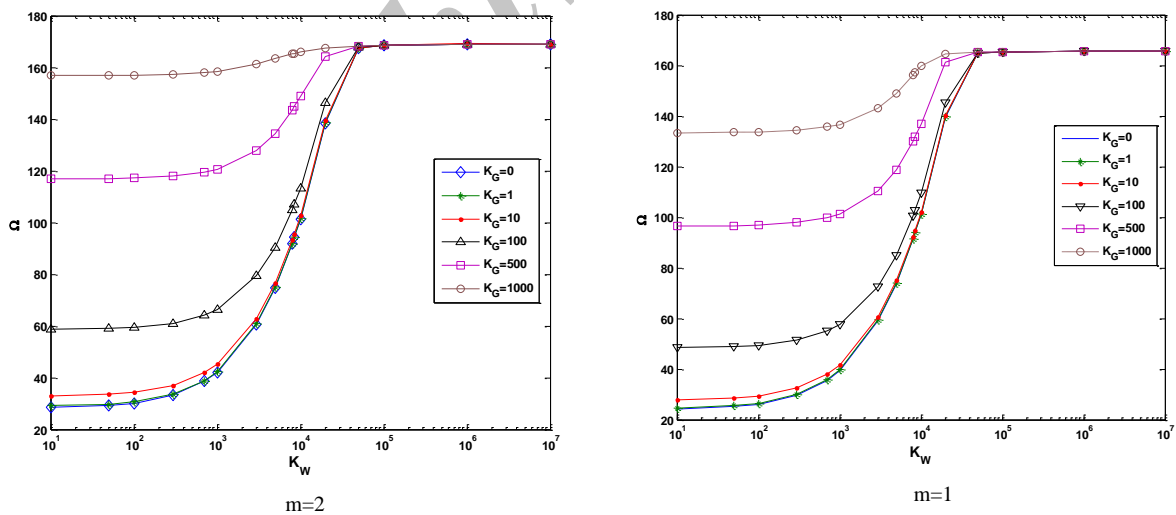
#### ۴-۲- بررسی نتایج

در شکل (۴) که به ترتیب مربوط به شرایط مرزی C-C، S-C و S-S می‌باشند، هشت فرکانس طبیعی اول به ازای اعداد موج مختلف ۱ و ۰ و  $m=$  و نسبت‌های مختلف ضخامت به شعاع خارجی ۰/۱ و ۰/۰۵ و ۰/۲ و ۰/۵ آورده شده‌است. در تمام شرایط مرزی بررسی شده و در تمامی اعداد موج آورده شده شاهد افزایش فرکانس‌های طبیعی به ازای افزایش نسبت ضخامت به شعاع هستیم.

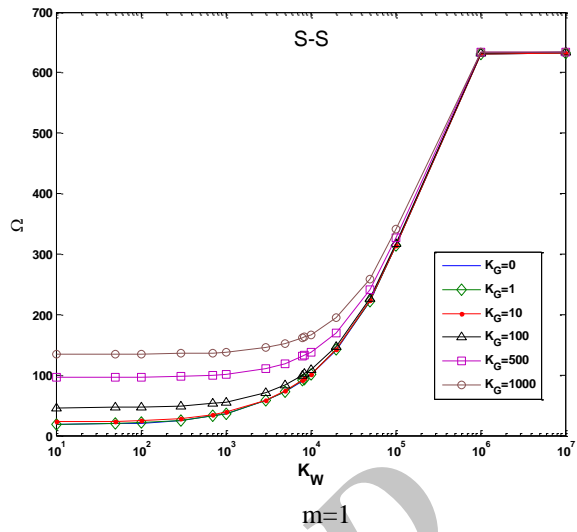
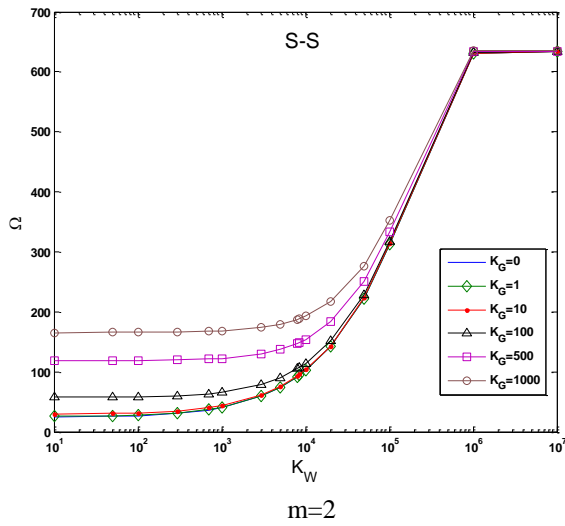
شکل‌های (۵، ۶ و ۷) فرکانس‌های طبیعی اول به ازای عدد موج ۱ و ۲ از ورق گرد سوراخ‌دار تقویت شده با نانولوله‌های کربنی روی بستر الاستیک دو پارامتری به ازای مقادیر مختلف از  $K_w$  و  $K_g$  در شرایط مرزی مختلف را نشان می‌دهند. همانطور که ملاحظه می‌گردد، برای اعداد موج ۱ و ۲  $m=$  می‌باشند شاهد افزایش فرکانس طبیعی به



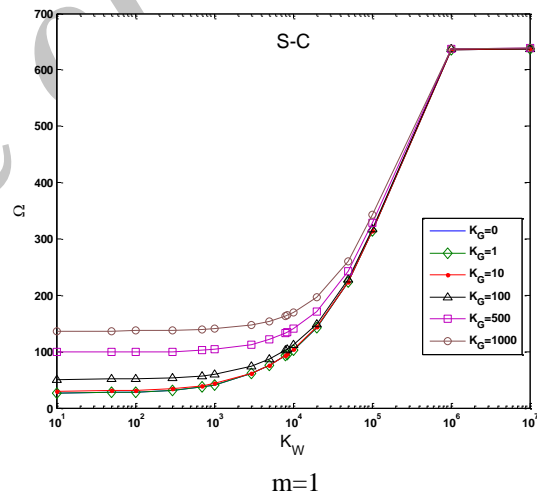
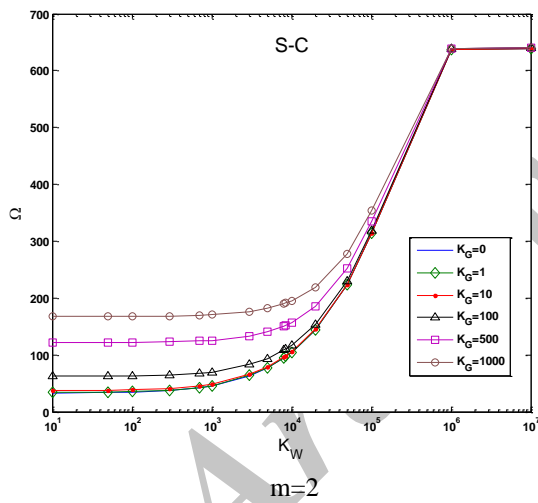
شکل (۴) تغییرات فرکانس طبیعی به ازای عدد موج  $m=1$  برحسب نسبت ضخامت به شعاع در اعداد موج مختلف برای شرایط مرزی مختلف



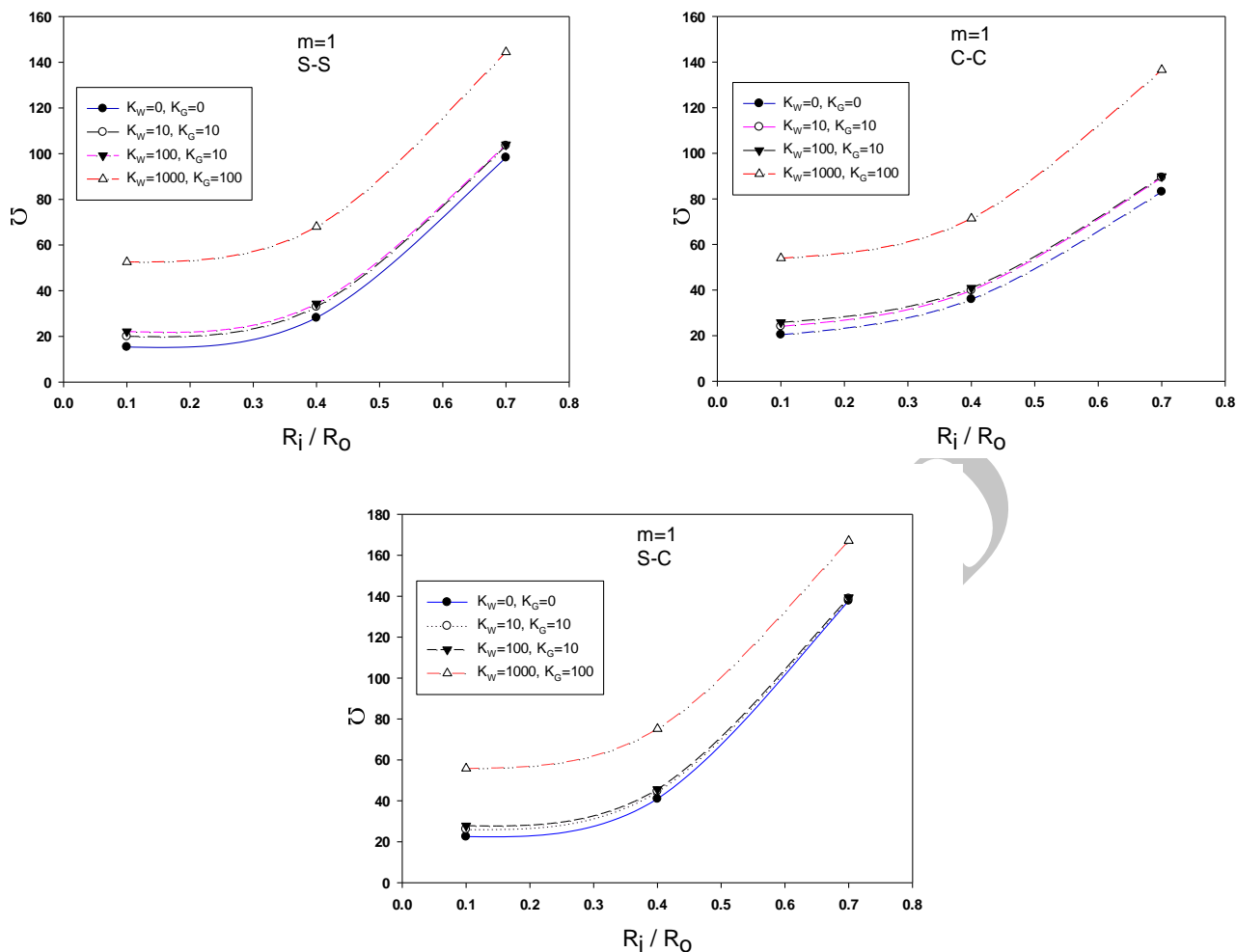
شکل (۵) فرکانس‌های طبیعی اول به ازای عدد موج ۱ و ۲، به ازای مقادیر مختلف از  $K_G$  و  $K_w$  در شرایط مرزی C-C



شکل (۶) فرکانس‌های طبیعی اول به ازای عدد موج ۱ و ۲،  $m=1$  و  $m=2$ ، به ازای مقادیر مختلف از  $K_w$  و  $K_G$  در شرایط مرزی C-C



شکل (۷) فرکانس‌های طبیعی اول به ازای عدد موج ۱ و ۲،  $m=1$  و  $m=2$ ، به ازای مقادیر مختلف از  $K_w$  و  $K_G$  در شرایط مرزی C-C



شکل (۸) تغییرات فرکانس طبیعی اول در عدد موج  $m=1$  بر حسب نسبت شعاع داخلی به شعاع خارجی به ازای پارامترهای مختلف از بستر الاستیک برای شرایط مرزی مختلف

## ۵- نتیجه گیری

\* افزایش عدد موج باعث افزایش میزان فرکانس طبیعی در همه شرایط مرزی می‌گردد.

\* اثرات بستر الاستیک بدین صورت است که شاهد افزایش فرکانس طبیعی به ازای افزایش ضرایب  $K_w$  و  $K_g$  هستیم و به ازای مقادیر مختلف  $K_w$  تغییرات فرکانس طبیعی کم و همچنین زمانی که  $K_w$  مقادیر بالا را به خود اختصاص می‌دهد، مقادیر کم یا زیاد  $K_g$  روی فرکانس طبیعی تاثیر چندانی ندارد.

بررسی ارتعاش آزاد ورق دایره‌ای سوراخ‌دار تقویت شده با نانولوله‌های کربنی با توزیع یکنواخت و مستقر بر بستر الاستیک با استفاده از تئوری بهبود یافته انجام شد.

نتایج بیان می‌کند که:

- \* به ازای افزایش نسبت ضخامت به شعاع فرکانس‌های طبیعی افزایش می‌یابد.
- \* با افزایش نسبت شعاع داخلی به شعاع خارجی فرکانس‌های طبیعی افزایش می‌یابد.

## ۶- سمبل‌ها و علائم

$\rho$	مدول پانگ ( $\text{kg/m}^3$ )
$E$	دانسیته (GPa)

$P_{cr}$	بار بحرانی کماتش (Pa)	$\nu$	مدول برشی
$n$	توان کسر حجمی الیاف	$G$	ضریب پواسون
$C_{ij}$	پارامترهای ماتریس سختی	$\sigma_x, \sigma_z, \sigma_{xz}$	پارامترهای تنش
$N_x, N_y$	تعداد گره ها در راستای طول و عرض شبکه بندی	$\epsilon_{xx}, \epsilon_{zz}, \epsilon_{xz}$	پارامترهای کرنش بر حسب جابجایی
		$\Omega$	سامد بی بعد (HZ)
		$\omega$	سامد طبیعی

### ۷- پیوستها

معادلات نهایی حاصل از روش مربعات تفاضلی تعمیم یافته

$$\begin{aligned}
 & -\frac{A_{22}m^2}{r^3}w_{bi} + \frac{A_{33}m^2}{r^3}w_{si} + \frac{A_{11}}{r}\sum_{j=1}^N c_{ij}^{(1)}u_j + \frac{B_{11}m}{r}\sum_{j=1}^N c_{ij}^{(1)}v_j - \frac{B_{22}m^2}{r^3}w_{bi} + \frac{B_{22}m^2}{r^2}\sum_{j=1}^N c_{ij}^{(1)}w_{bj} + \frac{B_{33}m^2}{r^3}w_{si} \\
 & -\frac{B_{33}m^2}{r^2}\sum_{j=1}^N c_{ij}^{(1)}w_{sj} - \frac{D_{11}m^2}{r^2}u_i + \frac{2D_{22}m^2}{r^2}\sum_{j=1}^N c_{ij}^{(1)}w_{bj} - \frac{2D_{33}m^2}{r^2}\sum_{j=1}^N c_{ij}^{(1)}w_{sj} + \frac{D_{11}m}{r}\sum_{j=1}^N c_{ij}^{(1)}v_j \\
 & -\frac{2D_{22}m^2}{r^3}w_{bi} + \frac{2D_{33}m^2}{r^3}w_{si} - \frac{D_{11}m}{r^2}v_i - \frac{A_{11}}{r^2}u_i + \frac{A_{22}}{r^2}\sum_{j=1}^N c_{ij}^{(1)}w_{bj} - \frac{A_{33}}{r^2}\sum_{j=1}^N c_{ij}^{(1)}w_{sj} - \frac{A_{11}m}{r^2}v_i + A_{11}\sum_{j=1}^N c_{ij}^{(2)}u_j \\
 & -A_{22}\sum_{j=1}^N c_{ij}^{(3)}w_{bj} + A_{33}\sum_{j=1}^N c_{ij}^{(3)}w_{sj} - \frac{A_{22}}{r}\sum_{j=1}^N c_{ij}^{(2)}w_{bj} + \frac{A_{33}}{r}\sum_{j=1}^N c_{ij}^{(2)}w_{sj} = -I_4\omega^2\sum_{j=1}^N c_{ij}^{(1)}w_{sj} + I_2\omega^2\sum_{j=1}^N c_{ij}^{(1)}w_{bj} - I_1\omega^2u_i \\
 & -\frac{D_{11}m}{r^2}u_i - \frac{D_{11}m}{r}\sum_{j=1}^N c_{ij}^{(1)}u_j + \frac{2D_{22}m}{r}\sum_{j=1}^N c_{ij}^{(2)}w_{bj} - \frac{2D_{33}m}{r}\sum_{j=1}^N c_{ij}^{(2)}w_{sj} - \frac{D_{11}}{r^2}v_i + \frac{D_{11}}{r}\sum_{j=1}^N c_{ij}^{(1)}v_j - \frac{B_{11}m}{r}\sum_{j=1}^N c_{ij}^{(1)}u_j \\
 & + \frac{B_{22}m}{r}\sum_{j=1}^N c_{ij}^{(2)}w_{bj} - \frac{B_{11}m}{r}\sum_{j=1}^N c_{ij}^{(3)}w_{sj} - \frac{A_{11}m}{r^2}u_i + \frac{A_{22}m}{r^2}\sum_{j=1}^N c_{ij}^{(1)}w_{bj} - \frac{A_{33}m}{r^2}\sum_{j=1}^N c_{ij}^{(1)}w_{sj} - \frac{A_{11}m^2}{r^2}v_i \\
 & -\frac{A_{22}m^3}{r^3}w_{bi} + \frac{A_{33}m^3}{r^3}w_{si} + D_{11}\sum_{j=1}^N c_{ij}^{(2)}v_j = -\frac{I_2m}{r}\omega^2w_{bi} + \frac{I_4m}{r}\omega^2w_{si} - I_1\omega^2v_i
 \end{aligned}$$

(الف)

(ب)

$$\begin{aligned}
& -\frac{2A_{66}}{r} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(3)} w_{sj} - \frac{4D_{66}m^2}{r^3} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(1)} w_{sj} - \frac{4D_{55}m^2}{r^4} w_{bi} - A_{33} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(3)} u_j + A_{55} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(4)} w_{bj} - K_g \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(2)} w_{sj} \\
& - \frac{A_{33}}{r^3} u_i + \frac{A_{33}}{r^2} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(1)} u_j + \frac{A_{55}}{r^3} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(1)} w_{bj} - \frac{A_{66}}{r^3} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(1)} w_{sj} - K_g \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(2)} w_{bj} + \frac{4D_{66}m^2}{r^4} w_{si} - \frac{A_{55}}{r^2} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(2)} w_{bj} \\
& + \frac{A_{66}}{r^2} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(2)} w_{sj} - \frac{A_{33}m}{r^3} v_i + \frac{A_{33}m}{r^2} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(1)} v_j - \frac{2A_{55}m^2}{r^4} w_{bi} + \frac{2A_{66}m^2}{r^4} w_{si} - \frac{K_g}{r} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(1)} w_{bj} - \frac{K_g}{r} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(1)} w_{sj} \\
& + \frac{K_g m^2}{r^2} w_{bi} + \frac{K_g m^2}{r^2} w_{si} + \frac{B_{33}m^2}{r^2} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(1)} u_j + \frac{A_{33}m^2}{r^3} u_i + \frac{A_{33}m^3}{r^3} v_i + \frac{A_{55}m^4}{r^4} w_{bi} - \frac{A_{66}m^4}{r^4} w_{si} - \frac{2A_{33}}{r} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(2)} u_j \\
& + \frac{2A_{55}}{r} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(3)} w_{bj} + \frac{2B_{55}m^2}{r^3} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(1)} w_{bj} + \frac{D_{77}}{r} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(1)} w_{sj} + \frac{2B_{66}m^2}{r^4} w_{si} - \frac{2B_{55}m^2}{r^4} w_{bi} - \frac{2B_{66}m^2}{r^3} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(1)} w_{sj} \\
& - \frac{D_{77}m^2}{r^2} w_{si} + \frac{2D_{33}m^2}{r^2} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(1)} u_j + \frac{4D_{55}m^2}{r^3} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(1)} w_{bj} + D_{77} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(2)} w_{bj} - A_{66} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(4)} w_{sj} + K_w w_{bi} + K_w w_{si} \\
& + \frac{4D_{66}m^2}{r^2} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(2)} w_{sj} - \frac{2D_{33}m}{r} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(2)} v_j - \frac{2B_{33}m}{r} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(2)} v_j - \frac{2B_{55}m^2}{r^2} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(2)} w_{bj} + \frac{2B_{66}m^2}{r^2} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(2)} w_{sj} \\
& - \frac{4D_{55}m^2}{r^2} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(2)} w_{bj} = I_2 \omega^2 \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(2)} w_{sj} - I_5 \omega^2 \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(2)} w_{bj} - \frac{I_6 m^2}{r^2} \omega^2 w_{si} + \frac{I_6}{r} \omega^2 \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(1)} w_{sj} + \frac{I_5 m^2}{r^2} \omega^2 w_{bi} \\
& - I_5 \omega^2 \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(1)} w_{bj} - I_1 \omega^2 w_{bi} - I_1 \omega^2 w_{si} + I_4 \omega^2 \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(1)} u_j + \frac{I_4 m}{r} \omega^2 v_i + \frac{I_4}{r} \omega^2 u_i
\end{aligned} \tag{ج}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{A_{44}}{r^2} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(2)} w_{bj} + \frac{2A_{22}}{r} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(2)} u_j - A_{44} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(4)} w_{bj} + A_{55} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(4)} w_{sj} + A_{22} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(3)} u_j - \frac{2A_{55}m^2}{r^4} w_{si} + \frac{2A_{55}}{r} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(3)} w_{sj} \\
& - \frac{A_{55}}{r^2} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(2)} w_{sj} + \frac{2B_{55}m^2}{r^3} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(1)} w_{sj} - \frac{2D_{22}m^2}{r^2} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(1)} u_j - \frac{4D_{44}m^2}{r^3} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(1)} w_{bj} + \frac{4D_{55}m^2}{r^3} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(1)} w_{sj} + \frac{4D_{44}m^2}{r^4} w_{bi} \\
& - \frac{4D_{55}m^2}{r^4} w_{si} - \frac{B_{22}m^2}{r^2} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(1)} u_j - \frac{A_{22}m^2}{r^3} u_i + \frac{B_{22}m}{r} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(2)} v_j - K_g \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(2)} w_{sj} - \frac{2B_{55}m^2}{r^4} w_{si} + \frac{2B_{44}m^2}{r^4} w_{bi} \\
& - \frac{2B_{44}m^2}{r^3} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(1)} w_{bj} - \frac{2B_{55}m^2}{r^2} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(2)} w_{sj} - K_g \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(2)} w_{bj} - \frac{2A_{44}}{r} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(3)} w_{bj} - \frac{K_g}{r} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(1)} w_{bj} - \frac{K_g}{r} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(1)} w_{sj} \\
& + \frac{K_g m^2}{r^2} w_{bi} + \frac{K_g m^2}{r^2} w_{si} + \frac{4D_{44}m^2}{r^2} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(2)} w_{bj} - \frac{4D_{55}m^2}{r^2} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(2)} w_{sj} + \frac{2D_{22}m}{r} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(2)} v_j + \frac{2B_{44}m^2}{r^2} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(2)} w_{bj} \\
& + K_w w_{bi} + K_w w_{si} + \frac{A_{22}}{r^3} u_i - \frac{A_{22}}{r^2} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(1)} u_j - \frac{A_{44}}{r^3} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(1)} w_{bj} + \frac{A_{55}}{r^3} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(1)} w_{sj} + \frac{A_{22}m}{r^3} v_i - \frac{A_{22}m}{r^2} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(1)} v_j \\
& + \frac{2A_{44}m^2}{r^4} w_{bi} - \frac{A_{22}m^3}{r^3} v_i - \frac{A_{44}m^4}{r^4} w_{bi} + \frac{A_{55}m^4}{r^4} w_{si} = I_3 \omega^2 \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(2)} w_{bj} - I_2 \omega^2 \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(1)} u_j - I_5 \omega^2 \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(2)} w_{sj} \\
& - I_1 \omega^2 w_{bi} - I_1 \omega^2 w_{si} - \frac{I_2 m}{r} \omega^2 v_i - \frac{I_2}{r} \omega^2 u_i - \frac{I_3 m^2}{r^2} \omega^2 w_{bi} + \frac{I_3}{r} \omega^2 \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(1)} w_{bj} + \frac{I_5 m^2}{r^2} \omega^2 w_{si} - \frac{I_5}{r} \omega^2 \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(1)} w_{sj}
\end{aligned} \tag{د}$$

[3] Koiter W.T., Over de stabiliteit van het elastisch evenwicht, doctoral thesis, Delft University of Technology, The Netherlands, 1945.

[4] Winterstetter T.A., Schmidt H., Stability of circular shells under combined loading, *Journal of Thin-walled Structures*, Vol. 40, 2002, pp. 893-909.

مراجع:

[1] Brush D.O., Almorh B.O., Buckling of bars, plates and shells, McGraw-Hill, New York, 1975.

[2] Goltermann P.M., Buckling of short, thin-walled cylinders under combined loading, *ASME Journal of Offshore Mechanics Arct Engineering*, Vol. 113, 1991, pp. 306-311.



- [15] Mechab I., Mechab B., Benaissa S., Static and dynamic analysis of functionally graded plates using Four-variable refined plate theory by the new function, *Journal of Composites: Part B*, Vol. 45, 2013, pp. 748–757.
- [16] Huang. C.S., McGee O.G., Chang M.J., Vibration of cracked rectangular FGM Thick plate, *Composite structure*, 2011, pp.1747-1764.
- [17] Wang Z.X., Shen H.S., Nonlinear analysis of sandwich plates with FGM face Sheets resting on elastic foundations, *Composite Structures*, 2011, pp. 2521-2532.
- [18] Hosseini Hashemi S.H., Rokni Damavandi Taher H., Akhavan H., Vibration Analysis of radially FGM sectorial plate of variable thickness on elastic foundation, *Composite Structure*, 2010, pp. 1734-1743.
- [19] Zhao X., Lee Y.Y., Liew K.M., Free vibration analysis of functionally Graded plate using the element –free KP-RITZ method, *Journal of sound and vibration*, Vol. 319, 2009, pp. 918-939.
- [20] Chang T., Gao H., Size–dependent elastic properties of a Single–walled carbon nanotubes via a molecular model, *Journal of mechanics And physics of solid*, 2003, pp. 1059-1074.
- [21] Jafari Mehrabadi S., Jalilian M., Zarouni E., Free vibration analysis of nanotube –reinforced composite truncated conical shell resting on elastic foundation, *Journal Modares mechanic Engineering*, Vol. 14, No. 12, 2014, pp. 122-132.
- [22] Heshmati M., Yas M.H., Dynamic analysis of functionally graded multi-walled carbon nanotube-polystyrene nanocomposite beams subjected to multi-moving loads, *Materials and Design*, Vol. 49, 2013, pp. 894–904.
- [23] Andrews R., Jacques D., Minot M., Rantell T., Fabrication of carbon multiwall nanotube/polymer composites by shear mixing, *Macromol Mater Engineering*, Vol. 287, 2002, pp. 395–403.
- [24] Bisadi H., Es’haghi M., Rokni H., Ilkhani M., Benchmark solution for transverse vibration of annular Reddy plates, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 56, 2012, pp. 35–49.
- [5] Vodenticharova T., Ansourian P., Buckling of circular cylindrical shells subjected to uniform lateral pressure, *Journal of Engineering Structure*, Vol. 18, 1996, pp. 604-614.
- [6] Thai H.-T., Park M., Choi D.-H., A simple refined theory for bending, buckling, and vibration of thick plates resting on elastic foundation, *International Journal of Mechanical Sciences*, 2013.
- [7] Thai H.-T., Choi D.-H., Analytical solutions of refined plate theory for bending, buckling and vibration analyses of thick plates, *Applied Mathematical Modeling*, 2013.
- [8] Thai H.-T., Choi D.-H., Analytical solutions of refined plate theory for bending, buckling and vibration analyses of thick plates, *Journal of Applied Mathematical Modelling*, 2013.
- [9] Thai H.-T., Kim S.-E., Analytical solution of a two variable refined plate theory for bending analysis of orthotropic Levy-type plates, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 54 , 2012, pp. 269–276.
- [10] Thai H.-T., Choi D.-H., A refined plate theory for functionally graded plates resting on elastic foundation, *Journal of Composites Science and Technology*, Vol. 71, 2011, pp. 1850-1858.
- [11] Kim S.-E., Thai H.-T., Lee J., A two variable refined plate theory for laminated composite plates, *Journal of Composite Structures*, Vol. 89, 2009, pp. 197–205.
- [12] Kim S.-E., Thai H.-T., Lee J., Buckling analysis of plates using the two variable refined plate theory, *Journal of Composite Structures*, Vol. 47, 2009, pp. 455 -462.
- [13] Thai H.-T., Kim S.-E., Free vibration of laminated composite plates using two variable refined plate theories, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 52, 2010, pp. 626-633.
- [14] Benachour A., Daouadji Tahar H., Ait Atmane H., Tounsi A., Sid Ahmed M., A four variable refined plate theory for free vibrations of functionally gradedplates with arbitrary gradient, *Journal of Composites: Part B*, Vol. 42, 2011, pp. 1386-1394.