

برآورد ارزش در معرض ریسک و ریزش موردانتظار پرتفوی با استفاده از نظریه امکان و الزام فازی

سید بابک ابراهیمی^۱، مژگان آقایی شیخ رضی^۲، نگین محبی^۳

چکیده: یکی از نگرانی‌های اصلی سرمایه‌گذاران و مدیران مالی، نحوه رویارویی با ریسک سرمایه‌گذاری و نوسان‌های بازده است؛ از این رو شناسایی، اندازه‌گیری و مدیریت ریسک، از موضوعات مهم در مباحث مالی تلقی می‌شود. در سال‌های اخیر، کانون توجه بسیاری از شرکت‌های مالی به معیار ارزش در معرض ریسک و ریزش مورد انتظار برای اندازه‌گیری ریسک پرتفوی است. از جمله مهم‌ترین مشکلات روش‌های ارائه شده در اندازه‌گیری ریسک، در نظر نگرفتن عدم قطعیت موجود در داده‌های مالی است. به همین دلیل در پژوهش پیش رو برای تطابق بیشتر مدل با واقعیت، به برآورد ارزش در معرض ریسک و ریزش موردانتظار پرتفوی با لحاظ عدم قطعیت داده‌ها، پرداخته می‌شود. در این رابطه از مفهوم متغیر تصادفی فازی و نظریه امکان و الزام فازی، به منظور پوشش عدم قطعیت موجود در داده‌های مالی، استفاده شده است. در نظر گرفتن عوامل ریسک به صورت متغیر تصادفی، این امکان را برای سرمایه‌گذار فراهم می‌کند که با پذیرش سطح خاصی از عدم قطعیت، میزان ریسک پرتفوی خود را برآورد کند. علاوه بر این در پژوهش پیش رو، کلیه برآوردها با دو فرض توزیع نرمال و تی استیودنت انجام شده و نتایج به دست آمده از حل مدل با داده‌های عددی، نشان‌دهنده این است که لحاظ توزیع t و نیز عوامل ریسک به صورت متغیر تصادفی، سبب ایجاد برآوردهای محافظه‌کارانه‌تری برای دو سنجه مد نظر شده است.

واژه‌های کلیدی: ارزش در معرض ریسک، ریزش موردانتظار، عدم قطعیت، متغیرهای تصادفی فازی، نظریه امکان و الزام فازی.

۱. استادیار گروه مهندسی مالی، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران، ایران

۲. دانشجوی کارشناسی ارشد مهندسی مالی، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران، ایران

۳. کارشناس ارشد مهندسی مالی، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران، ایران

تاریخ دریافت مقاله: ۱۳۹۵/۰۸/۰۳

تاریخ پذیرش نهایی مقاله: ۱۳۹۶/۰۲/۳۰

نویسنده مسئول مقاله: مژگان آقایی

E-mail: Aghaei.mojgan@yahoo.com

مقدمه

ریسک در بازارهای مالی مفهومی کلیدی است که باید نسبت به شناسایی، اندازه‌گیری و تصمیم‌گیری آن اقدام کرد. در تقسیم‌بندی کلی می‌توان دو دیدگاه برای ریسک در نظر گرفت: در دیدگاه اول ریسک هر گونه نوسان‌های احتمالی بازدهی در آینده در نظر گرفته می‌شود و دیدگاه دوم، ریسک هر گونه نوسان‌های احتمالی منفی بازدهی در آینده مد نظر قرار می‌گیرد (تبریزی و شریفیان، ۱۳۸۷). حال سؤال این است که کدام دیدگاه، ریسک سرمایه‌گذاران را بهتر تبیین کرده و نظر آنان را بهتر پوشش می‌دهد؟

مارکویتز (۱۹۵۲) اولین فردی بود که برای اندازه‌گیری ریسک معیار کمی ارائه داد. وی واریانس را معیاری برای اندازه‌گیری ریسک معرفی کرد؛ اما بعدها محققان بسیاری به این سنجه ریسک انتقاد کردند؛ زیرا واریانس، نوسان‌های مطلوب قیمت به سمت بالا را به اندازه نوسان‌های نامطلوب قیمت به سمت پایین جریمه می‌کند، در حالی که سرمایه‌گذاران از حرکت قیمت به سمت بالا استقبال می‌کنند و به دنبال مدیریت ریسک نامطلوب سرمایه‌گذاری خود هستند. ارزش در معرض ریسک^۱ یکی از معیارهای اندازه‌گیری ریسک نامطلوب پرتفوی و بازار است. ابتدا مورگان در سال ۱۹۹۶ ارزش در معرض ریسک (*Var*) را معرفی کرد و از آن پس به‌صورت گسترده توسط مؤسسه‌های مالی، سرمایه‌گذاران و مدیران مالی، به‌عنوان سنجه استاندارد برای ارزیابی ریسک‌های مالی استفاده شد. شایان ذکر است که این سنجه به شکل درصدی از توزیع سود - زیان پرتفوی تعریف می‌شود و بر فرض نرمال بودن بازده دارایی‌ها استوار است. به‌دلیل سادگی مفهوم و سهولت در محاسبات، سنجه ارزش در معرض ریسک جذابیت خاصی در برآورد ریسک سرمایه‌گذاری دارد، اما مفروضاتی که این سنجه بر آنها استوار است، کاستی‌هایی دارد که بسیاری از محققان به آن اشاره کرده‌اند. یکی از مشکلات اصلی آن، بی‌انسجامی این معیار است. از این رو در سال‌های اخیر، ارزش در معرض ریسک شرطی^۲ یا ریزش موردانتظار^۳ به‌منظور تکامل این سنجه ریسک معرفی شده است. ریزش موردانتظار برابر با میانگین وزنی زیان‌های بیشتر از ارزش در معرض ریسک در یک سطح اطمینان مشخص است؛ این معیار، زیان موردانتظار را برابر یا بالاتر از ارزش در معرض ریسک برآورد می‌کند، از این رو برآوردهای محافظه‌کارانه‌تری دارد. نکته شایان توجه در برآورد ریسک پرتفوی این است که اطلاعات موجود در بازارهای مالی کامل نیستند و به همین دلیل تصمیم‌گیری در این بازار دارای عدم قطعیت

1. Value at Risk

2. Conditional Value at Risk

3. Expected Shortfall

است؛ عدم قطعیت در داده‌های مالی دارای دو جزء مهم است: تصادفی بودن و ابهام داشتن. بنابراین در نظر گرفتن این عدم قطعیت در تخمین ریسک پرتفوی از اهمیت خاصی برخوردار خواهد بود. استفاده از نظریه‌های منطق فازی در برآورد ریسک پرتفوی، این هدف را محقق کرده و نتایج واقعی‌تری به دنبال خواهد داشت.

با توجه به اهمیت برآورد ریسک پرتفوی در یک موقعیت سرمایه‌گذاری مشخص، در تحقیق پیش رو به برآورد ریسک به کمک سنج‌های ارزش در معرض ریسک و ریزش موردانتظار، با لحاظ عدم قطعیت بازار و با استفاده از نظریه‌های امکان و الزام^۱ فازی اقدام شده است.

پیشینه پژوهش

در تئوری نوین پرتفوی مارکوویتز (۱۹۵۲)، ریسک، تغییرپذیری بازده‌ها حول بازده موردانتظار تعریف می‌شود و با استفاده از معیار واریانس به دست می‌آید. با فرض نرمال بودن توزیع بازده‌ها، واریانس معیار قابل قبولی برای اندازه‌گیری ریسک سبد سرمایه‌گذاری است، اما تحقیقات اخیر و نیز، مباحث تئوریک این فرض را رد می‌کنند. از آنجا که واریانس تغییرات مثبت و منفی قیمت را به یک اندازه جریمه می‌کند، معیار مناسبی برای سنجش و اندازه‌گیری ریسک نیست. در واقعیت، هر سرمایه‌گذار منطقی از نوسان‌های مثبت قیمت استقبال کرده و به دنبال راهی برای اندازه‌گیری نوسان‌های منفی سبد سرمایه‌گذاری خود است تا بتواند تصمیمات درستی اتخاذ کند. ارزش در معرض ریسک یکی از سنج‌های اندازه‌گیری ریسک نامطلوب پرتفوی است که به صورت درصدی از حداکثر سود - زیان توزیع پرتفوی در یک بازه زمانی مشخص و در سطح اطمینان معین، تعریف شده و بر فرض نرمال بودن بازده دارایی‌ها استوار است. مفروضاتی که این سنج بر آن استوارند، کاستی‌هایی دارند که از آن جمله می‌توان به تأکید این سنج بر نرمال بودن توزیع بازده دارایی‌ها اشاره کرد؛ اما در تحقیقات بسیاری فرضیه نرمال بودن بازده دارایی‌های مالی رد شده است. همچنین ارزش در معرض ریسک، درصد زیان پرتفوی را مشخص می‌کند، اما اطلاعاتی درباره اندازه زیان پرتفوی زمانی که در معرض ریسک قرار گرفته است، نمی‌دهد. علاوه بر این، چون ارزش در معرض ریسک جمع‌پذیر نیست، معیار منسجمی برای اندازه‌گیری ریسک محسوب نمی‌شود. برای برطرف کردن این ضعف، آرتزرنر، دلپائن و ایبر (۱۹۹۷) سنج‌ای به نام ریزش موردانتظار و با تعریف میزان زیان مورد انتظار در α درصد بدترین موارد را معرفی کردند. ریزش موردانتظار (ES) معیار منسجمی است و شدت زیان پرتفوی را اندازه‌گیری می‌کند.

مطالعات بسیار روی ویژگی‌های داده‌های مالی نشان داده است که داده‌های مالی از توزیع نرمال تبعیت نمی‌کنند. مندلبورت (۱۹۶۳) و فاما (۱۹۶۵) نشان دادند در عمل، توزیع بازدهی‌ها دارای دم پهن تر و کشیدگی بیشتری نسبت به توزیع نرمال هستند. همچنین محققان دیگری نظیر امبرج، مک نیل و استرامن (۲۰۰۲)، هوسکینگ، بونتی و سیگل (۲۰۰۰) و مک نیل و فری (۱۹۹۹) در مطالعات خود با استفاده از داده‌های مالی مختلف، به درستی این فرضیه پی بردند. این نتایج باعث شد که پژوهشگران بسیاری مدل‌های ارزش در معرض ریسک پرتفوی را با فرض دم پهن بودن توزیع بازدهی‌ها و با رویکردهای مختلف معرفی کنند. لویز و والتز (۲۰۰۰) در پژوهشی به تخمین ارزش در معرض ریسک به روش پارامتریک و با استفاده از ماتریس واریانس و کوواریانس پرداختند و توزیع بازدهی‌ها را نرمال و تی استیودنت در نظر گرفتند. گلرمن، هیدلبرگر و شهاب‌الدین (۲۰۰۲) با استفاده از یک روش تخمین درجه دوم و شبیه‌سازی مونت کارلو به تخمین ارزش در معرض ریسک پرداختند و توزیع بازدهی‌ها را نرمال و تی استیودنت در نظر گرفتند. کمد (۲۰۰۵) به روش پارامتریک و با استفاده از ماتریس واریانس و کوواریانس، به برآورد ارزش در معرض ریسک پرداخت و توزیع بازدهی‌ها را نرمال و تی استیودنت در نظر گرفت. وی در پژوهش دیگری در سال ۲۰۰۹، به روش پارامتریک و با استفاده از مدل‌های گارچ، ارزش در معرض ریسک و ارزش در معرض ریسک دنباله‌ای^۱ را برآورد کرد. وی برآوردها را با دو فرض توزیع نرمال و تی استیودنت برای بازدهی‌ها انجام داد. مارتینز و یاو (۲۰۰۶) نیز به برآورد ارزش در معرض ریسک و ریزش موردانتظار با استفاده از مدل‌های غیرخطی تتوری ارزش فرین پرداختند. آنها از توزیع‌های شرطی برای بازدهی‌های مالی استفاده کردند و در نهایت نیز به مقایسه رویه معرفی شده و انواع قبلی آن پرداختند. چلسون (۲۰۱۳) در پژوهشی ریزش موردانتظار را با استفاده از مدل‌های خودرگرسیون و روش فراتر از آستانه برآورد کرد. نتایج به دست آمده حاکی از آن است که برآوردها بیش از آن که تحت تأثیر مدل‌های خودرگرسیونی باشند، از توزیع در نظر گرفته شده برای بازده‌ها تأثیر می‌پذیرند و برآورد انجام شده با فرض توزیع تی استیودنت به واقعیت نزدیک‌تر است. آلسن و وو (۲۰۱۳) در پژوهشی به بررسی عوامل مؤثر بر ناکارآمدی روش‌های تخمین ارزش در معرض ریسک، در زمان بروز بحران مالی ۲۰۰۸ پرداختند. یکی از این عوامل دم پهن بودن توزیع بازدهی‌ها و تأثیر این مقادیر نسبتاً بزرگ بر تخمین ارزش در معرض ریسک است. آنها در این پژوهش نتایج تخمین ارزش در معرض ریسک با فرض توزیع نرمال و توزیع لجستیک را با یکدیگر مقایسه کردند و دریافتند که در نظر گرفتن توزیع لجستیک، تخمین بهتری به دست می‌دهد. آسَف

1. Tail value at risk

(۲۰۱۵) در پژوهشی به پیش‌بینی ارزش در معرض ریسک در بازار کشورهای MENA پرداخت. وی در این پژوهش از مدل‌های آرچ نامتقارن برای پیش‌بینی ارزش در معرض ریسک بهره برد و توزیع بازدهی دارایی‌ها را نرمال، نامتقارن و تی استیودنت در نظر گرفت. نتیجه مطالعه وی نشان‌دهنده این است که در نظر گرفتن توزیع تی استیودنت، برآورد دقیق‌تری از ارزش در معرض ریسک به دست می‌دهد.

فلاح‌پور، رضوانی و رحیمی (۱۳۹۳) به برآورد ارزش در معرض ریسک شرطی با استفاده از مدل‌های ناهمسانی واریانس شرطی متقارن و غیرمتقارن در بازار نفت و طلا پرداختند. آنها از سه مدل گارچ، ای‌گارچ و تی‌گارچ برای برآورد استفاده کردند و تمام محاسبات را نیز با فرض دو توزیع نرمال و تی استیودنت انجام دادند و در نهایت مدل‌ها را از نظر اعتبار رتبه‌بندی کردند. نتایج به دست آمده نشان می‌دهد در هر دو بازار نفت و طلا، برآوردهای حاصل از لحاظ فرض توزیع تی استیودنت در بازه دارایی‌ها، از اعتبار بیشتری برخوردار بوده و به واقعیت نزدیک‌ترند. گرجی و سجاد (۱۳۹۴) به برآورد ارزش در معرض ریسک چند دوره‌ای برای شاخص‌های TEPIX، NASDAQ و FTSE بر پایه روش‌های شبیه‌سازی و پارامتریک پرداختند؛ نتایج به دست آمده گویای این است که مدل شبیه‌سازی تاریخی بوت استرپ شده، بهترین عملکرد را برای شاخص TEPIX دارد. همچنین در سطح اطمینان ۹۵ درصد مدل پارامتریک EGAECH با توزیع تی استیودنت و در سطوح اطمینان ۹۹ و ۹۹/۵ درصد مدل EGAECH با توزیع نرمال، عملکرد مطلوب‌تری نسبت به سایر مدل‌ها برای شاخص‌های NASDAQ و FTSE دارد. فلاح‌پور و احمدی (۱۳۹۳) ارزش در معرض ریسک پرتفوی نفت و طلا را با استفاده از روش کاپیولا-گارچ تخمین زدند و نتایج به دست آمده از روش یاد شده را با روش‌های سنتی مقایسه کردند؛ یافته‌های تجربی نشان می‌دهد روش کاپیولا-گارچ ریسک پرتفوی را با دقت بیشتری تخمین می‌زند. رستمی نوروزآباد، شجاعی، خضری و رحمانی نوروزآباد (۱۳۹۳) با ترکیب آنالیز موجک و روش‌های گارچ، ارزش در معرض ریسک بازده بورس اوراق بهادار تهران را تخمین زدند و نتیجه آن را با روش‌های سنتی مقایسه کردند؛ نتایج تجربی حاکی از برتری روش پیشنهاد شده نسبت به روش‌های سنتی است.

در تمام منابع یاد شده، فرض بر این است که عوامل ریسک، عوامل واقعی و شناخته شده هستند و بر پایه همین فرض، نویسندگان روابطی را برای محاسبه ارزش در معرض ریسک (Var) و ریزش موردانتظار (ES) ارائه داده و همچنین روش‌هایی را نیز برای برآورد آن معرفی کرده‌اند. اما در عمل، بازارهای مالی تحت تأثیر مشاهدات نادقیق، نارسایی اطلاعات و نظرات خبرگان قرار می‌گیرند و به همین دلیل سبب افزایش عدم قطعیت در این بازارها می‌شوند.

عدم قطعیت در عوامل ریسک دارای دو جزء مهم است: تصادفی بودن و ابهام داشتن. معرفی متغیر تصادفی فازی توسط کاکرناک (۱۹۷۸) و پوری و رالسکو (۱۹۸۶)، گام مؤثری در زمینه رویارویی با این دو جزء مهم از عدم قطعیت در مدل سازی های مالی بود. متغیرهای تصادفی فازی، متغیرهای تصادفی ای هستند که مقادیر آنها اعداد فازی است (کاکرناک، ۱۹۷۸).

یوشیدا (۲۰۰۹) به برآورد ارزش در معرض ریسک در محیط فازی پرداخت. وی بازدهی دارایی ها را متغیر تصادفی فازی در نظر گرفت و از نظریه امکان و الزام فازی برای اندازه گیری آنها استفاده کرد. همچنین موسی، کمدم و تراز (۲۰۱۲ و ۲۰۱۴) و اسمیمو، بکتور و جاکوبی (۲۰۰۸) نیز در مطالعات خود از متغیر تصادفی فازی برای اندازه گیری ریسک پرتفوی استفاده کردند.

با بررسی مطالعات صورت گرفته در زمینه برآورد دو سنج ریسک یاد شده، مشخص می شود که در پژوهش های گذشته به استفاده از نظریه های فازی و به طور مشخص متغیر تصادفی فازی در برآورد VaR و ES، توجه زیادی نشده است. از این رو، در پژوهش حاضر به معرفی معیارهای ریسک یاد شده با استفاده از متغیر تصادفی فازی تمرکز شده و مراحل برآورد آنها در بخش های بعدی به طور کامل توضیح داده شده است.

روش شناسی پژوهش

در این بخش به مرور و بررسی برخی مفاهیم پایه ای در زمینه اعداد و متغیرهای فازی که در بخش های بعدی استفاده شده اند، پرداخته شده است و در ادامه رابطه ها و مدل های ارزش در معرض ریسک و ریزش موردانتظار در محیط فازی با فرض توزیع نرمال و تی استیودنت برای بازده دارایی ها معرفی می شوند.

اعداد فازی و نظریه امکان و الزام فازی

تابع عضویت: فرض کنید X یک مجموعه مرجع با اعداد حقیقی باشد که اعضای آن را با x نشان می دهند. هر زیرمجموعه فازی A از X را با تابع عضویت $\mu_A: X \rightarrow [0, 1]$ تعریف می کنند که هر عضو x از X را به درجه عضویت $\mu_A(x)$ مربوط می کند. هرگاه $\mu_A(x) = 0$ ($\mu_A(x) = 1$) باشد، می توان با قطعیت گفت که آن عضو به A تعلق ندارد (دارد) (زاده، ۱۹۶۵).

برش α : عناصر زیرمجموعه ای از مجموعه فازی A که درجه عضویت آنها حداقل به بزرگی α باشد ($\alpha > 0$) را برش α گویند که با A_α و به صورت رابطه ۱ نشان داده می شود.

$$A_\alpha = \{x \in X \mid \mu_A(x) \geq \alpha\} \quad \text{رابطه ۱}$$

عدد فازی: عدد فازی \tilde{A} ، زیرمجموعه فازی از X با تابع عضویت $\mu_{\tilde{A}}: X \rightarrow [0, 1]$ بوده، هرگاه \tilde{A} نرمال $(\exists x \in X \mid \mu_{\tilde{A}}(x) = 1)$ و محدد $(\forall x_1, x_2 \in X \mid \mu_{\tilde{A}}(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \min\{\mu_{\tilde{A}}(x_1), \mu_{\tilde{A}}(x_2)\} \quad \forall \lambda \in [0, 1])$ باشد و همچنین $\mu_{\tilde{A}}$ از بالا پیوسته و کراندار باشد $(\text{Sup}(\tilde{A}) = \{x \in X \mid \mu_{\tilde{A}}(x) \geq 0\})$.

عدد فازی LR با نماد $\tilde{A} = \langle l, c, r \rangle_{LR}$ نمایش داده می‌شود که در آن $(c \in \mathcal{R})$ هسته و $(l, r \in \mathcal{R})$ کران چپ و راست عدد هستند و با تابع عضویت ارائه شده در رابطه ۲ به نمایش درمی‌آید:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} L\left(\frac{c-x}{l}\right) & c-l \leq x \leq c \\ R\left(\frac{x-c}{r}\right) & c \leq x \leq c+r \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad \text{رابطه ۲}$$

L و R توابع شکل راست و چپ و $L, R: \mathcal{R}^+ \rightarrow [0, 1]$ توابع پیوسته و غیرافزایشی هستند؛ به طوری که $(L(1) = R(1) = 0)$ و $(L(0) = R(0) = 1)$. اگر این توابع با هم برابر باشند، عدد فازی LR را متقارن گویند و با $\tilde{A} = (c, \Delta)$ نمایش می‌دهند که همان مرز چپ و راست بوده و $(l = r)$ است (زیمرن، ۲۰۰۱).

اعداد فازی مثلثی، حالت خاصی از اعداد فازی است که اگر در آنها توابع شکل سمت راست و چپ، به صورت $R(x) = L(x) = \max\{1-x, 0\}$ تعریف شوند، تابع عضویت آنها به صورت رابطه ۳ خواهد بود.

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} 1 - \frac{c-x}{l} & c-l \leq x \leq c \\ 1 - \frac{x-c}{r} & c \leq x \leq c+r \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad \text{رابطه ۳}$$

متغیر تصادفی فازی: فرض کنید $F_c(\mathcal{R})$ مجموعه‌ای شامل تمام زیرمجموعه‌های فازی نرمال و محدب از \mathcal{R} و (Ω, A, P) گویای یک فضای احتمال باشد، تابع $\tilde{X}: \Omega \rightarrow F_c(\mathcal{R})$ را متغیر تصادفی فازی گویند، هرگاه به ازای هر $\alpha \in [0, 1]$ برش α مجموعه‌ای فشرده و محدب باشد.

فرض کنید برش α مربوط به متغیر تصادفی \tilde{X} به صورت بازه بسته $\tilde{A}_\alpha^+ := [\tilde{A}_\alpha^+, \tilde{A}_\alpha^-]$ نوشته شود و \preceq بیان کننده رابطه حداکثری میان اعداد فازی مجموعه $F_C(\mathcal{R})$ باشد. همچنین فرض کنید $\tilde{A}, \tilde{B} \in F_C(\mathcal{R})$ دو عدد فازی هستند؛ $\tilde{A} \succeq \tilde{B}$ به این معناست که برای تمام مقادیر $\alpha \in [0, 1]$ $\tilde{A}_\alpha^- \geq \tilde{B}_\alpha^-$ و $\tilde{A}_\alpha^+ \geq \tilde{B}_\alpha^+$ است. علاوه بر این، عملیات تفریق اعداد فازی و ضرب اسکالر آنها بر اساس اصل گسترش ارائه شده توسط پرفسور زاده به شرح زیر خواهد بود. حاصل عملیات جمع و تفریق $(\tilde{A} \pm \tilde{B})$ برای دو عدد فازی $\tilde{A}, \tilde{B} \in F_C(\mathcal{R})$ و ضرب اسکالر $\xi \tilde{A}$ که در آن $\xi \in \mathcal{R}$ است، اعداد فازی خواهند بود که به کمک برش‌های آلفا اگر $(\xi \geq 0)$ باشد، به صورت زیر به دست می‌آیند.

$$\begin{aligned}(\tilde{A} + \tilde{B})_\alpha &:= [\tilde{A}_\alpha^- + \tilde{B}_\alpha^-, \tilde{A}_\alpha^+ + \tilde{B}_\alpha^+] \\(\tilde{A} - \tilde{B})_\alpha &:= [\tilde{A}_\alpha^- - \tilde{B}_\alpha^+, \tilde{A}_\alpha^+ - \tilde{B}_\alpha^-] \\(\xi \tilde{A})_\alpha &:= [\xi \tilde{A}_\alpha^-, \xi \tilde{A}_\alpha^+]\end{aligned}$$

بر اساس آنچه معرفی شد، نگاشت $\tilde{X}: \Omega \rightarrow F_C(\mathcal{R})$ یک متغیر تصادفی فازی نامیده می‌شود، اگر نگاشت‌های آن $\omega \rightarrow \tilde{X}_\alpha^-(\omega)$ و $\omega \rightarrow \tilde{X}_\alpha^+(\omega)$ برای تمام مقادیر $\alpha \in (0, 1]$ قابل اندازه‌گیری باشند، به طوری که رابطه زیر برقرار باشد (یوشیدا، ۲۰۰۹).

$$\tilde{X}_\alpha(\omega) = [\tilde{X}_\alpha^-(\omega), \tilde{X}_\alpha^+(\omega)] = \{x \in \mathbb{R} \mid \tilde{X}(\omega)(x) \geq \alpha\}$$

نظریه امکان و الزام فازی: نظریه امکان، نظریه‌ای ریاضی در محیط فازی است که در واقع جایگزین نظریه احتمال شده است. این نظریه برای اولین بار توسط پروفسور زاده در سال ۱۹۷۸ معرفی شد. به طور خلاصه محتوای این نظریه را می‌توان این گونه بیان کرد که در تحلیل پیشامدها و شرایط محیطی، تنها به دنبال رخدادهاى محتمل نیستیم و در شرایط نامطمئن در پی یافتن تمام پیشامدهای امکان‌پذیری هستیم که با درجه (اندازه) امکان این پیشامدها و نماد pos معرفی می‌شوند. در حالی که در نظریه احتمالات، تنها از یک عدد (احتمال) برای توصیف میزان محتمل بودن وقوع یک پیشامد استفاده می‌شود؛ در نظریه امکان، اندازه دیگری به نام اندازه الزام با نماد nec تعریف می‌شود که مزدوج اندازه امکان است و میزان ضرورت برای هر مجموعه \tilde{A} را به صورت زیر برآورد می‌کند:

$$nec(\tilde{A}) = 1 - pos(\tilde{A}) \quad \text{رابطه ۴}$$

که در آن \tilde{A} متمم مجموعه \tilde{A} است.

مطابق آنچه تعریف شد، فرض کنید $\tilde{A} \in F_c(\mathcal{R})$ یک عدد فازی باشد. معیار اندازه‌گیری $M_{\tilde{A}}$ ، اندازه امکان و اندازه الزام برای عدد فازی \tilde{A} نامیده می‌شود، هرگاه برای هر $I \in F_c(\mathcal{R})$ برقرار باشد و همچنین معیار اندازه‌گیری $M_{\tilde{A}}$ در ویژگی‌های یک اندازه فازی صدق کند (وانگ و کلیر، ۱۹۹۳).

$$M_{\tilde{A}}^P(I) := \sup_{x \in I} \tilde{A}(x) \quad \text{رابطه ۵}$$

$$M_{\tilde{A}}^N(I) := 1 - \sup_{x \in I} \tilde{A}(x) \quad \text{رابطه ۶}$$

ارزش در معرض ریسک (VaR) و ریزش مورد انتظار (ES) با فرض بیضوی بودن توزیع بازدهی‌ها

فرض کنید پرتفویی متشکل از n دارایی با بازده‌های قطعی $R^i, i = 1, \dots, n$ و وزن‌های $w_i, i = 1, \dots, n$ داریم. اگر ارزش پرتفوی در زمان t برابر با $\Pi(t)$ باشد، در این صورت سود یا زیان پرتفوی در افق زمانی $[0, t]$ برابر است با:

$$\Delta\Pi(t) = \Pi(t) - \Pi(0) = w_1 R_1^t + w_2 R_2^t + \dots + w_n R_n^t \quad \text{رابطه ۷}$$

$$\sum_{i=1}^n w_i = 1$$

$$w_i \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$$

ارزش در معرض ریسک با سطح اطمینان $1 - \theta$ و یا سطح ریسک θ برابر است با:

$$P\{\Delta\Pi(t) < -VaR_{\theta}\} = \theta \quad \text{رابطه ۸}$$

همان‌طور که گفته شد ارزش در معرض ریسک معیار منسجمی نیست و اطلاعاتی درباره میزان زیان مورد انتظار به دست نمی‌دهد. برای رفع این مشکل آرتزیر و همکارانش (۱۹۹۷) ریزش مورد انتظار را معرفی کردند.

$$ES_{\theta} = E[-\Delta\Pi | -\Delta\Pi > VaR_{\theta}] \quad \text{رابطه ۹}$$

فرض کنید $R = (R_1, R_2, \dots, R_n)$ دارای توزیع بیضوی با میانگین $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$ ، ماتریس کوواریانس $\Sigma = (\sigma_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ که در آن $\sigma_{ij} = \text{COV}(R_i, R_j)$ و با تابع چگالی مولد g باشد:

$$R \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma, g) \quad \text{رابطه ۱۰}$$

تابع چگالی R در صورت وجود، به صورت رابطه ۱۱ است.

$$f_R(r) = \frac{c_n}{\sqrt{|\Sigma|}} g \left[\frac{1}{\nu} (r - \mu)^T \Sigma^{-1} (r - \mu) \right] \quad \text{رابطه ۱۱}$$

که در آن $|\Sigma|$ دترمینان ماتریس واریانس و کوواریانس است. همچنین داریم (کِلر، ۱۹۷۰؛ فانگ، کای - تای، کوتز و کای - وانگ، ۱۹۸۷):

$$\int_0^{+\infty} u^{\frac{n-1}{\nu}} g(u) du < \infty \quad \text{رابطه ۱۲}$$

$$c_n = \frac{\Gamma(\frac{n}{\nu})}{(\nu\pi)^{\frac{n}{\nu}}} \left[\int_0^{+\infty} u^{\frac{n-1}{\nu}} g(u) du \right]^{-1} \quad \text{رابطه ۱۳}$$

با توجه به آنچه تعریف شد، کمیم (۲۰۰۵) رابطه ۱۴ را برای ارزش در معرض ریسک پرتفوی، با فرض بیضوی بودن توزیع بازدهی دارایی‌ها، ارائه کرده است:

$$VaR_\theta = \sum_{i=1}^n w_i \mu_i + q_{\theta, n}^g \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \sigma_{ij}} \quad \text{رابطه ۱۴}$$

وی همچنین رابطه ۱۵ را برای ریزش مورد انتظار پرتفوی ارائه کرده است:

$$ES_\theta = \sum_{i=1}^n w_i \mu_i + \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \sigma_{ij}} \cdot \frac{\pi}{\theta \Gamma(\frac{n+1}{2})} \cdot \int_{q_{\theta, n}^g}^{\infty} (u - (q_{\theta, n}^g)^2)^{\frac{n-1}{2}} g(u) du \quad \text{رابطه ۱۵}$$

که در آن $\Gamma(u) = \int_0^{+\infty} t^{u-1} \exp(-t) dt$, $u \in (0, +\infty)$ جواب منحصر به فرد رابطه ۱۶ است.

$$\theta = \frac{\pi^{\frac{n-1}{\nu}}}{\Gamma(\frac{n-1}{\nu})} \int_{q_\theta}^{\infty} \int_z^{\infty} (u-z)^{\frac{n-1}{\nu}} g(u) du dz. \quad \text{رابطه ۱۶}$$

در این پژوهش از دو توزیع بیضوی نرمال و تی استیودنت استفاده شده است؛ از این رو بر پایه این دو فرض و با استفاده از مقدمات ارائه شده، روابط ارزش در معرض ریسک و ریزش مورد انتظار فازی در ذیل بحث خواهد شد.

بر آورد VaR و ES با فرض توزیع تی استیودنت

فرض کنید R_{it} بازده دارایی i ام در زمان t باشد؛ همان طور که گفته شد این بازده دارای عدم قطعیت است. بنابراین فرض کنید \tilde{R}_{it} بازده غیرقطعی دارایی i بوده و یک عدد فازی مثلثی متقارن است. هسته این عدد فازی R_{it} و فاکتور عدم قطعیت (کران چپ و راست) c_{it} است $(\tilde{R}_{it} = (R_{it}, c_{it}))$ ؛ شایان ذکر است که عوامل ریسک پرتفوی (بازده دارایی های پرتفوی) و به طور مشخص فاکتور عدم قطعیت، غیرتصادفی است. در این صورت بازده غیرقطعی پرتفویی متشکل از n دارایی با بازده های غیرقطعی \tilde{R}_{it} و وزن های w_i به صورت رابطه ۱۷ خواهد بود.

$$\Delta \tilde{\Pi}_t = w_1 \tilde{R}_{1t} + w_2 \tilde{R}_{2t} + \dots + w_n \tilde{R}_{nt} \quad (\text{رابطه ۱۷})$$

یوشیدا (۲۰۰۹) ابتدا با استفاده از نظریه امکان و الزام فازی، مقادیر میانگین و واریانس پرتفوی را به دست آورد، سپس با استفاده از رابطه ۱۴ ارزش در معرض ریسک را با فرض نرمال بودن بازده دارایی ها به صورت رابطه ۱۸ معرفی کرد؛ ارزش در معرض ریسک پرتفوی با بازده $\Delta \tilde{\Pi}_t$ و با سطح ریسک θ به صورت رابطه ۱۸ است.

$$VaR_{\theta}^{PN} = \sum_{i=1}^n w_i \left(\mu_i - \frac{2}{3} c_i \right) + q_{1-\theta} \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j (\sigma_{ij} + c_i c_j)} \quad (\text{رابطه ۱۸})$$

که در آن $q_{1-\theta}$ چارک $(1 - \theta)$ توزیع نرمال است. همان طور که قبلاً نیز اشاره شد، داده های مالی اغلب دارای توزیع غیرنرمال بوده و دارای کشیدگی بیشتر و دم پهن تری نسبت به توزیع نرمال هستند. بنابراین با فرض توزیع t برای بازده دارایی ها، ارزش در معرض ریسک برابر با رابطه ۱۹ خواهد بود.

$$VaR_{\theta}^{PN} = \sum_{i=1}^n w_i \left(\mu_i - \frac{2}{3} c_i \right) + q_{1-\theta}^v \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j (\sigma_{ij} + c_i c_j)} \quad (\text{رابطه ۱۹})$$

که در آن $q_{1-\theta}^v$ چارک $(1 - \theta)$ توزیع t با درجه آزادی v است. با استفاده از رابطه ۱۵ و مقادیر بازده و ریسک برآورد شده توسط یوشیدا (۲۰۰۹)، ریزش موردانتظار نرمال به کمک رابطه ۲۰ برآورد خواهد شد.

$$ES_{\theta}^{PN} = \sum_{i=1}^n w_i \left(\mu_i - \frac{r}{3} c_i \right) + k_{\theta} \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j (\sigma_{ij} + c_i c_j)} \quad \text{رابطه ۲۰}$$

$$\left(k_{\theta} = \frac{1}{\theta \sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{(q\theta)^r}{2} \right) \right)$$

با فرض توزیع t برای بازده دارایی‌ها، به‌منظور برآورد ریزش موردانتظار می‌توان از رابطه ۲۱ استفاده کرد.

$$ES_{\theta}^{PN} = \sum_{i=1}^n w_i \left(\mu_i - \frac{r}{3} c_i \right) + k_{\theta,v} \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j (\sigma_{ij} + c_i c_j)} \quad \text{رابطه ۲۱}$$

$$\left(k_{\theta,v} = \frac{\Gamma \left(\frac{v-1}{2} \right)}{\theta \sqrt{\pi} \Gamma \left(\frac{v}{2} \right)} \times v^{\frac{v}{2}} \times \left((q_{\theta,v})^r + v \right)^{\frac{-(v-1)}{2}} \right)$$

که در آن v درجه آزادی توزیع t است.

برآورد VaR و ES با استفاده از نظریه امکان و الزام با لحاظ تصادفی بودن عوامل ریسک

در این بخش، بر اساس پژوهش موسی و همکارانش (۲۰۱۴)، VaR و ES را در حالتی که عوامل ریسک پرتفوی متغیر تصادفی است، معرفی کرده و از تعریف پوری و رالسکو (۱۹۸۶) برای متغیر تصادفی فازی، استفاده می‌شود. در شرایطی که عوامل ریسک پرتفوی و به‌طور مشخص فاکتور عدم قطعیت متغیر تصادفی هستند، یک حد بالا (μ) و یک حد پایین (l) برای متغیرهای فازی تعیین می‌شود. فرض کنید $\tilde{\Delta\Pi}(t)$ بازده غیرقطعی پرتفوی در زمان t است و کران بالا و پایین بازده، براساس برش α تعیین شده سرمایه‌گذار با $\Delta\Pi_{\alpha}^{\mu}$ و $\Delta\Pi_{\alpha}^l$ نشان داده می‌شود. در این صورت VaR نیز براساس $\alpha \in [0,1]$ و در سطح ریسک θ دارای دو کران بالا و

پایین خواهد بود $(VaR_\theta^\alpha = \{VaR_\theta(\Delta\Pi_\alpha^l), VaR_\theta(\Delta\Pi_\alpha^u)\})$ که به صورت رابطه‌های ۲۲ و ۲۳ تعریف می‌شوند.

$$P\{\Delta\Pi_\alpha^l < -VaR_\theta(\Delta\Pi_\alpha^l)\} = \theta \quad \text{رابطه ۲۲}$$

$$P\{\Delta\Pi_\alpha^u < -VaR_\theta(\Delta\Pi_\alpha^u)\} = \theta \quad \text{رابطه ۲۳}$$

بر همین اساس سنجۀ ریسک ES نیز دارای دو کران بالا و پایین خواهد بود که به صورت رابطه‌های ۲۴ و ۲۵ تعریف می‌شوند.

$$ES_\theta(\Delta\Pi_\alpha^l) = E[-\Delta\Pi_\alpha^l | -\Delta\Pi > VaR_\theta(\Delta\Pi_\alpha^l)] \quad \text{رابطه ۲۴}$$

$$ES_\theta(\Delta\Pi_\alpha^u) = E[-\Delta\Pi_\alpha^u | -\Delta\Pi > VaR_\theta(\Delta\Pi_\alpha^u)] \quad \text{رابطه ۲۵}$$

حدود به دست آمده برای دو سنجۀ VaR و ES را می‌توان به عنوان مقادیر خوش‌بینانه و بدبینانه برای این معیارهای ریسک تفسیر کرد. بنابراین سرمایه‌گذار با پذیرفتن سطح خاصی از عدم قطعیت (به ازای یک مقدار مشخص برای α)، می‌تواند ریسک پرتفوی خود را تخمین زده و بر اساس مقادیر خوش‌بینانه و بدبینانه به دست آمده (حد پایین ریسک و حد بالای ریسک)، تصمیم‌گیری کند. در حالتی که $(\alpha = 1)$ باشد، عدم قطعیتی وجود ندارد، بنابراین فقط یک مقدار برای VaR و ES به دست می‌آید. همچنین در حالت $(\alpha = 0)$ ، بدبینانه‌ترین و خوش‌بینانه‌ترین حالت برای VaR و ES پرتفوی اتفاق می‌افتد.

فرض کنید پرتفوی متشکل از n دارایی ریسکی با بازده‌هایی به صورت اعداد فازی مثلثی متقارن با تابع شکل L داریم $(\tilde{R}_i = (R_i, c_i))$ ؛ اگر بازده غیرقطعی پرتفوی را با $\tilde{\Delta\Pi}$ نشان دهیم، برای مقدار مشخص $\alpha \in [0, 1]$ ، کران پایین و بالای بازده پرتفوی به کمک رابطه‌های ۲۶ و ۲۷ به دست خواهد آمد.

$$\Delta\Pi_\alpha^l = \sum_{i=1}^n w_i (R_i - L^{-1}(\alpha)c_i) \quad \text{رابطه ۲۶}$$

$$\Delta\Pi_\alpha^u = \sum_{i=1}^n w_i (R_i + L^{-1}(\alpha)c_i) \quad \text{رابطه ۲۷}$$

با فرض $R \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma_R, g)$ و $C \sim \mathcal{N}(\nu, \Sigma_C, g)$ ، خواهیم داشت (موسی و همکاران، ۲۰۱۴):

$$R - L^{-1}(\alpha)C = (R_1 - L^{-1}(\alpha)c_1, \dots, R_n - L^{-1}(\alpha)c_n) \sim \mathfrak{N}(\mu - L^{-1}(\alpha)v, \underline{\Sigma}, g) \quad \text{رابطه ۲۸}$$

$$R + L^{-1}(\alpha)C = (R_1 + L^{-1}(\alpha)c_1, \dots, R_n + L^{-1}(\alpha)c_n) \sim \mathfrak{N}(\mu + L^{-1}(\alpha)v, \bar{\Sigma}, g) \quad \text{رابطه ۲۹}$$

که در آن،

$$\underline{\Sigma} = \Sigma_R - L^{-1}(\alpha)(\Sigma_{RC} + \Sigma_{RC}^t) + (L^{-1}(\alpha))^t \Sigma_C \quad \text{رابطه ۳۰}$$

$$\bar{\Sigma} = \Sigma_R + L^{-1}(\alpha)(\Sigma_{RC} + \Sigma_{RC}^t) + (L^{-1}(\alpha))^t \Sigma_C. \quad \text{رابطه ۳۱}$$

$$\Sigma_{RC} = (\text{cov}[R_i, c_j])_{1 \leq i, j \leq n}$$

حال اگر $\Delta \bar{\Pi} = w_1 \bar{R}_1 + w_2 \bar{R}_2 + \dots + w_n \bar{R}_n$ را بازده غیرقطعی پرتفوی در نظر بگیریم که در آن $(\bar{R}_i = (R_i, c_i))$ و توزیع آن برای بازده دارایی‌ها، توزیع نرمال باشد $(C \sim N(v, \Sigma_C), R \sim N(\mu, \Sigma_R))$ ؛ برش α تعیین شده سرمایه گذار، کران بالا و پایین VaR پرتفوی در سطح اطمینان $(1 - \theta)$ ، به صورت رابطه‌های ۳۲ و ۳۳ برآورد خواهد شد.

$$\text{VaR}_\theta(\Delta \Pi_\alpha^l) = \sum_{i=1}^n w_i (\mu_i - L^{-1}(\alpha)v_i) + q_{1-\theta} \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \underline{\sigma}_{ij}} \quad \text{رابطه ۳۲}$$

$$\text{VaR}_\theta(\Delta \Pi_\alpha^u) = \sum_{i=1}^n w_i (\mu_i + L^{-1}(\alpha)v_i) + q_{1-\theta} \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \bar{\sigma}_{ij}} \quad \text{رابطه ۳۳}$$

که در آن پارامترهای $\underline{\sigma}_{ij}$ و $\bar{\sigma}_{ij}$ با استفاده از رابطه‌های ۳۴ و ۳۵ محاسبه می‌شوند.

$$\underline{\sigma}_{ij} = \text{cov}(R_i, R_j) - L^{-1}(\alpha)(\text{cov}(R_i, c_j) + \text{cov}(R_j, R_i)) + (L^{-1}(\alpha))^t \text{cov}(c_i, c_j) \quad \text{رابطه ۳۴}$$

$$\bar{\sigma}_{ij} = \text{cov}(R_i, R_j) + L^{-1}(\alpha)(\text{cov}(R_i, c_j) + \text{cov}(R_j, R_i)) + (L^{-1}(\alpha))^t \text{cov}(c_i, c_j) \quad \text{رابطه ۳۵}$$

با در نظر گرفتن مفروضات فوق، سنجه ES پرتفوی نیز به کمک رابطه‌های ۳۶ و ۳۷ برآورد می‌شود.

$$\text{ES}_\theta(\Delta \Pi_\alpha^l) = \sum_{i=1}^n w_i (\mu_i - L^{-1}(\alpha)v_i) + k_\theta \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \underline{\sigma}_{ij}} \quad \text{رابطه ۳۶}$$

$$ES_{\theta}(\Delta\Pi_{\alpha}^u) = \sum_{i=1}^n w_i (\mu_i + L^{-1}(\alpha)v_i) + k_{\theta} \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \bar{\sigma}_{ij}} \quad \text{رابطه ۳۷}$$

$$\left(k_{\theta} = \frac{1}{\theta \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(q\theta)^r}{2}\right) \right)$$

حال با فرض توزیع t برای بازده دارایی‌ها یا به بیان دیگر $R \sim T(\mu, \Sigma_R, \nu)$ و $C \sim T(\nu, \Sigma_C, \nu)$ ، حد بالا و پایین سنجه VaR پرتفوی در سطح اطمینان $(1 - \theta)$ ، به صورت رابطه‌های ۳۸ و ۳۹ برآورد خواهد شد.

$$VaR_{\theta}(\Delta\Pi_{\alpha}^l) = \sum_{i=1}^n w_i (\mu_i - L^{-1}(\alpha)v_i) + q_{1-\theta}^{\nu} \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \underline{\sigma}_{ij}} \quad \text{رابطه ۳۸}$$

$$VaR_{\theta}(\Delta\Pi_{\alpha}^u) = \sum_{i=1}^n w_i (\mu_i + L^{-1}(\alpha)v_i) + q_{1-\theta}^{\nu} \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \bar{\sigma}_{ij}} \quad \text{رابطه ۳۹}$$

به منظور برآورد کران‌های سنجه ES نیز می‌توان از رابطه‌های ۴۰ و ۴۱ بهره برد (موسی و همکاران، ۲۰۱۴).

$$ES_{\theta}(\Delta\Pi_{\alpha}^l) = \sum_{i=1}^n w_i (\mu_i - L^{-1}(\alpha)v_i) + k_{\theta, \nu} \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \underline{\sigma}_{ij}} \quad \text{رابطه ۴۰}$$

$$ES_{\theta}(\Delta\Pi_{\alpha}^u) = \sum_{i=1}^n w_i (\mu_i + L^{-1}(\alpha)v_i) + k_{\theta, \nu} \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \bar{\sigma}_{ij}} \quad \text{رابطه ۴۱}$$

$$\left(k_{\theta, \nu} = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu-1}{2}\right)}{\theta \sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \times \nu^{\frac{\nu}{r}} \times \left((q_{\theta, \nu})^r + \nu \right)^{\frac{-(\nu-1)}{r}} \right)$$

یافته‌های پژوهش

در این بخش پس از برآورد ارزش در معرض ریسک و ریزش موردانتظار برای بازدهی دو پرتفوی با استفاده از نظریه امکان و الزام فازی، برای عوامل ریسک پرتفوی دو حالت ثابت و تصادفی در

نظر گرفته شده است. پرتفوی‌های یاد شده، هر یک شامل ۱۰ سهم هستند که از بین سهام ۵۰ شرکت فعال تر بازار بورس اوراق بهادار تهران انتخاب شده‌اند. شایان ذکر است که علاوه بر قدرت بالای نقدشوندگی سهام شرکت‌های یاد شده، حجم معاملات و میزان تأثیرگذاری آنها بر بازار نیز، از جمله عوامل کلیدی در انتخاب این سهامها بوده است. داده‌های استفاده‌شده، داده‌های روزانه مربوط به قیمت پایانی سهام به مدت دو سال (از ابتدای سال ۹۳ تا پایان سال ۹۴) است و طول دوره در نظر گرفته شده برای به دست آوردن فاکتور عدم قطعیت (فاکتور فازی) به صورت ماهانه است. در این پژوهش فاکتور عدم قطعیت برای بازدهی هر سهم، انحراف معیار بازدهی‌های سهام در دوره‌ها در نظر گرفته شده و تمام محاسبه‌ها با فرض دو توزیع نرمال و تی استیودنت برای بازدهی پرتفوی‌ها انجام شده است. برای به دست آوردن فاکتور فازی، بازه زمانی مد نظر را به زیربازه‌هایی با طول یک ماه طبقه‌بندی کرده و انحراف معیار بازدهی سهام را در طول این زیربازه به دست می‌آوریم. بازه استفاده‌شده در تحقیق، بازه ماهانه لگاریتمی به صورت $\log\left(\frac{x_t}{x_{t-1}}\right)$ تعریف شده است که در آن x_t قیمت پایانی سهم در ماه t ام است. محاسبه‌ها در نرم‌افزارهای اکسل و ایویوز انجام گرفته است. سهم‌های تشکیل‌دهنده دو پرتفوی در جدول ۱ ارائه شده‌اند.

جدول ۱. سهام منتخب موجود در پرتفوی‌های بررسی شده

پرتفوی	نام سهام									
۱	خبهن	خپارس	خودرو	رانفور	رمپنا	فاذر	فملی	وبملت	وغدیر	ونفت
۲	خسایا	تاپیکو	تایرا	اخابر	فارس	فولاد	کگل	همراه	وبصادر	وپاسار

جدول ۲ ویژگی‌های آماری پرتفوی‌های بررسی شده را نشان می‌دهد؛ همان‌طور که مشاهده می‌شود هر دو پرتفوی دارای کشیدگی و چولگی متفاوت نسبت به توزیع نرمال هستند. از مقایسه مقادیر به دست آمده برای دو معیار میانگین و واریانس، مشخص است که پرتفوی ۱ بازدهی بیشتر و به طبع ریسک بیشتری را نیز برای سرمایه‌گذار به دنبال خواهد داشت.

جدول ۲. ویژگی‌های آماری پرتفوی‌های مورد بررسی

پرتفوی	میانگین	واریانس	چولگی	کشیدگی
۱	۰/۰۰۴۲	۰/۰۰۰۰۸	-۰/۸۳	۲/۷
۲	-۰/۰۰۰۸	۰/۰۰۰۰۶	۰/۲۵	۱/۶

جدول ۳ برآورد VaR فازی را تحت دو فرض توزیع نرمال و توزیع t برای بازده دارایی‌ها، در حالت ثابت بودن عوامل ریسک (ثابت بودن فاکتور عدم قطعیت) نشان می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌شود، از آنجا که پرتفوی ۱ ریسک بیشتری دارد، از سنجه VaR بزرگ‌تری نسبت به پرتفوی ۲ برخوردار است.

جدول ۳. برآورد VaR در حالت ثابت بودن فاکتور عدم قطعیت

توزیع تی استیودنت			توزیع نرمال			سطح اطمینان 1-θ	پرتفوی
%۹۵	%۹۷/۵	%۹۹	%۹۵	%۹۷/۵	%۹۹		
%۸/۶۵	%۱۱/۴	%۱۵	%۷/۴۱	%۹/۴۶	%۱۱/۸۴	۱	
%۵/۵۱	%۷/۴	%۹/۸۵	%۴/۶۶	%۶/۱	%۷/۷	۲	

با توجه به مقادیر به‌دست آمده در جدول ۳، می‌توان دریافت که فرض توزیع t برای بازده دارایی‌ها سبب ایجاد برآوردهای محافظه‌کارانه‌تری برای سنجه مورد بررسی در هر سطح اطمینان می‌شود. برای مثال، در پرتفوی ۱، میزان VaR پرتفوی در طول یک ماه و در سطح اطمینان ۹۹ درصد با فرض دو توزیع نرمال و تی استیودنت به ترتیب برابر ۱۱/۸۴ و ۱۵ درصد به‌دست آمده که گواهی بر برآوردهای سخت‌گیرانه‌تر توسط توزیع t است.

جدول ۴ برآورد سنجه ریزش موردانتظار را تحت دو فرض توزیع نرمال و توزیع t برای بازده دارایی‌های هر دو پرتفوی، در حالت ثابت بودن فاکتور عدم قطعیت نشان می‌دهد. بر اساس نتایج جدول، سنجه مد نظر در پرتفوی ۱ به دلیل داشتن ریسک بیشتر، مقدار بزرگ‌تری را اختیار کرده است.

جدول ۴. برآورد ES در حالت ثابت بودن فاکتور عدم قطعیت

توزیع t			توزیع نرمال			سطح اطمینان 1-θ	پرتفوی
%۹۵	%۹۷/۵	%۹۹	%۹۵	%۹۷/۵	%۹۹		
%۲۸/۴	%۳۴	%۴۱/۳	%۱۰/۲۳	%۱۱/۹	%۱۳/۸۳	۱	
%۱۹/۰۳	%۲۲/۸	%۲۷/۸۵	%۶/۶	%۷/۷۴	%۹/۰۵	۲	

با توجه به مقادیر به‌دست آمده در جدول ۴، در صورت وقوع ریسک برای پرتفوی ۱، با فرض توزیع نرمال و در سطح اطمینان ۹۹ درصد، به‌طور متوسط انتظار می‌رود ۱۳/۸۳ درصد از ارزش

پرتفوی کاسته شود، در حالی که با فرض توزیع t ، این مقدار برابر $41/3$ درصد است. همان‌طور که مشاهده می‌شود در نظر گرفتن توزیع t برای بازده دارایی‌ها در هر دو پرتفوی و تحت هر سطح اطمینان مشخص، موجب دستیابی به برآوردهایی محافظه‌کارانه‌تر می‌شود. نتایج برآورد VaR فازی، با در نظر گرفتن توزیع نرمال برای بازده دارایی‌ها، در حالت تصادفی بودن فاکتور عدم قطعیت، در جدول ۵ ارائه شده است.

جدول ۵. برآورد VaR نرمال در حالت تصادفی بودن فاکتور عدم قطعیت

سطح اطمینان $1 - \theta$						سطح عدم قطعیت (α)	پرتفوی
%۹۵		%۹۷/۵		%۹۹			
حد بالای VaR	حد پایین VaR	حد بالای VaR	حد پایین VaR	حد بالای VaR	حد پایین VaR		
۶/۱۰	۶/۱۰	۷/۸۳	۷/۸۳	۹/۸۵	۹/۸۵	۰	۱
۸/۱۵	۴/۱۵	۹/۵۷	۴/۹۷	۱۱/۲۱	۵/۹۱	۰/۵	
۹/۷۳	۱/۲۰	۱۱/۳۷	۱/۸۳	۱۳/۲۸	۲/۶۸	۱	
۳/۳۲	۳/۳۲	۴/۹۰	۴/۹۰	۵/۹۰	۵/۹۰	۰	۲
۵/۰۴	۲/۳۶	۵/۹۷	۲/۹۰	۷/۰۶	۳/۵۲	۰/۵	
۶/۱۱	۰/۱۸۵	۷/۲۰	۱/۰۴	۸/۴۶	۱/۲۳	۱	

با توجه به جدول ۵، در حالتی که سطح عدم قطعیت صفر است ($\alpha = 0$) حدود بالا و پایین به‌دست آمده برای سنجه ارزش در معرض ریسک با هم برابرند و یک مقدار را نشان می‌دهند؛ اما در صورتی که سطح عدم قطعیت ۱ باشد ($\alpha = 1$)، خوش‌بینانه‌ترین و بدبینانه‌ترین حالت برای VaR به‌دست می‌آید که خوش‌بینانه‌ترین حالت (حد پایین) مقدار ارزش در معرض ریسک را کمتر از واقع و بدبینانه‌ترین حالت (حد بالا) مقدار VaR را بیشتر از واقع تخمین می‌زند. همان‌طور که مشاهده می‌شود در سطح اطمینان ۹۹ درصد و در سطح عدم قطعیت صفر، حدود پایین و بالا برای سنجه VaR در پرتفوی ۱، به‌ترتیب برابر $9/85$ و $9/85$ درصد و در سطح عدم قطعیت یک نیز، به‌ترتیب برابر با $2/68$ و $13/28$ درصد به‌دست آمده است. در نتیجه سرمایه‌گذار با پذیرفتن سطح خاصی از عدم قطعیت، می‌تواند ریسک پرتفوی خود را تخمین زده و بر اساس آن تصمیم‌گیری کند.

جدول ۶ نتایج برآورد VaR فازی را با در نظر گرفتن توزیع t برای بازده دارایی‌ها، در حالت تصادفی بودن فاکتور عدم قطعیت نشان می‌دهد.

جدول ۶. برآورد VaR با فرض توزیع t در حالت تصادفی بودن فاکتور عدم قطعیت

سطح اطمینان ۱-θ						سطح عدم قطعیت (α)	پرتفوی
۹۵٪		۹۷/۵٪		۹۹٪			
حد بالای VaR	حد پایین VaR	حد بالای VaR	حد پایین VaR	حد بالای VaR	حد پایین VaR		
۷/۹۰٪	۷/۹۰٪	۱۰/۲۳٪	۱۰/۲۳٪	۱۴/۱۰٪	۱۴/۱۰٪	۰	۱
۹٪	۴/۶۵٪	۱۰/۹۱٪	۵/۷۴٪	۱۳/۳۹٪	۷/۱۶٪	-۰/۵	
۱۰/۷۰٪	۱/۸۴٪	۱۲/۹۲٪	۲/۳۵٪	۱۵/۸۰٪	۳/۱۱٪	۱	
۴/۹۰٪	۴/۹۰٪	۶/۶۴٪	۶/۶۴٪	۸/۴۱٪	۸/۴۱٪	۰	۲
۵/۶۰٪	۲/۶۸٪	۶/۸۶٪	۳/۴۰٪	۸/۵۰٪	۴/۳۴٪	-۰/۵	
۶/۷۷٪	۰/۱۶۰٪	۸/۲۳٪	۰/۷۴٪	۱۰/۱۳٪	۱٪	۱	

در جدول ۶ و در سطح عدم قطعیت صفر، حدود به دست آمده برای سنجه VaR با هم برابرند و در سطح عدم قطعیت یک، این حدود که بیان کننده مقادیر خوش بینانه (کمتر از واقع) و بدبینانه (بیشتر از واقع) برای سنجه مد نظر هستند، مقادیر متفاوتی را اختیار کرده اند. در جدول ۷، نتایج برآورد ریزش مورد انتظار فازی با لحاظ توزیع نرمال برای بازده دارایی ها، در حالت تصادفی بودن فاکتور عدم قطعیت ارائه شده است.

جدول ۷. برآورد ES نرمال در حالت تصادفی بودن فاکتور عدم قطعیت

سطح اطمینان ۱-θ						سطح عدم قطعیت (α)	پرتفوی
۹۵٪		۹۷/۵٪		۹۹٪			
حد بالای ES	حد پایین ES	حد بالای ES	حد پایین ES	حد بالای ES	حد پایین ES		
۹/۰۸٪	۹/۰۸٪	۱۰/۶۵٪	۱۰/۶۵٪	۱۱/۲۳٪	۱۱/۲۳٪	۰	۱
۱۰/۱۰٪	۵/۲۷٪	۱۱/۲۶٪	۵/۹۴٪	۱۲/۶۰٪	۶/۷۰٪	-۰/۵	
۱۲٪	۲/۰۳٪	۱۳/۳۳٪	۲/۴۵٪	۱۴/۸۷٪	۲/۷۴٪	۱	
۵/۲۰٪	۵/۲۰٪	۵/۹۰٪	۵/۹۰٪	۷/۵۳٪	۷/۵۳٪	۰	۲
۶/۳۳٪	۳/۱۰٪	۷/۰۹٪	۳/۵۳٪	۷/۹۷٪	۴/۰۴٪	-۰/۵	
۷/۶۱٪	۰/۱۶۵٪	۸/۵۰٪	۰/۱۸۳٪	۹/۵۱٪	۰/۹۸٪	۱	

نتایج جدول ۷ نشان می‌دهد در حالتی که سطح عدم قطعیت صفر باشد ($\alpha = 0$) حدود بالا و پایین به‌دست آمده برای سنجه ES با هم برابرند، اما در صورتی که سطح عدم قطعیت برابر با ۱ باشد ($\alpha = 1$)، خوش‌بینانه‌ترین و بدبینانه‌ترین حالت برای ES به‌دست می‌آید که خوش‌بینانه‌ترین حالت (حد پایین) مقدار ریزش موردانتظار را کمتر از واقع و بدبینانه‌ترین حالت (حد بالا) مقدار ES را بیشتر از واقع برآورد می‌کند. همان‌طور که در جدول فوق مشاهده می‌شود، در سطح اطمینان ۹۹ درصد و در سطح عدم قطعیت صفر، حدود پایین و بالا برای سنجه ریزش موردانتظار در پرتفوی ۱، به‌ترتیب برابر ۱۱/۲۳ و ۱۱/۲۳ درصد و در سطح عدم قطعیت یک نیز، به‌ترتیب برابر با ۲/۷۴ و ۱۴/۸۷ درصد به‌دست آمده است.

نتایج برآورد ریزش موردانتظار فازی تحت توزیع t برای بازده دارایی‌ها، در حالت تصادفی بودن فاکتور عدم قطعیت در جدول ۸ به‌صورت خلاصه ارائه شده است.

جدول ۸. برآورد ES با فرض توزیع t در حالت تصادفی بودن فاکتور عدم قطعیت

سطح اطمینان $1 - \theta$						سطح عدم قطعیت (α)	پرتفوی
۹۵٪		۹۷/۵٪		۹۹٪			
حد بالای ES	حد پایین ES	حد بالای ES	حد پایین ES	حد بالای ES	حد پایین ES		
٪۱۹/۸۰	٪۱۹/۸۰	٪۲۳/۲۰	٪۲۳/۲۰	٪۲۶/۹۰	٪۲۶/۹۰	۰	۱
٪۲۲/۶۸	٪۱۲/۴۸	٪۲۶/۵۰	٪۱۴/۶۶	٪۳۱/۶۱	٪۱۷/۶۰	۰/۵	
٪۲۶/۵۴	٪۵/۹۱	٪۳۰/۹۶	٪۶/۴۳	٪۳۷	٪۷/۸۸	۱	
٪۱۲/۸۰	٪۱۲/۸۰	٪۱۶/۲۰	٪۱۶/۲۰	٪۱۸/۴۰	٪۱۸/۴۰	۰	۲
٪۱۴/۶۲	٪۷/۸۴	٪۱۷/۱۵	٪۹/۲۸	٪۲۰/۵۲	٪۱۱/۲۱	۰/۵	
٪۱۷/۲۴	٪۱/۸۶	٪۳۰/۱۶	٪۲/۱۴	٪۲۴/۰۸	٪۳/۷۶	۱	

نتایج مندرج در جدول ۸ نشان می‌دهد در سطح عدم قطعیت صفر، حدود به‌دست آمده برای سنجه ES با هم برابرند. همچنین در سطح عدم قطعیت یک، این حدود که بیان‌کننده مقادیر خوش‌بینانه (کمتر از واقع) و بدبینانه (بیشتر از واقع) برای سنجه مد نظرند، مقادیر متفاوتی را اختیار کرده‌اند.

نتیجه‌گیری و پیشنهادها

در این پژوهش، دو سنجه ریسک VaR و ES پرتفوی با لحاظ عدم قطعیت در داده‌های مالی برآورد شدند. در برآوردهای عددی به‌منظور رویارویی با عدم قطعیت بیان‌شده، از مفهوم متغیر

تصادفی فازی استفاده شده است. با توجه به اینکه داده‌های مالی دارای کشیدگی بیشتر و دم پهن تری نسبت به توزیع نرمال هستند، در این پژوهش برآوردها با فرض دو توزیع نرمال و تی استیودنت برای داده‌ها و همچنین در نظر گرفتن دو حالت ثابت و تصادفی برای فاکتور عدم قطعیت انجام شده است. تصادفی بودن فاکتور عدم قطعیت به سرمایه‌گذار امکان می‌دهد که براساس میزان عدم قطعیت قابل قبول برای وی، خوش‌بینانه‌ترین و بدبینانه‌ترین مقدار را برای هر دو سنجه ریسک به‌دست آورده و بر حسب میزان ریسک‌پذیری خود، تصمیم‌های مناسبی اتخاذ کند. برآوردهای عددی نشان می‌دهد با توجه به اینکه پرتفوی ۱ نسبت به پرتفوی ۲ ریسک بیشتری دارد، دو سنجه VaR و ES مقادیر بیشتری را در پرتفوی ۱ نسبت به پرتفوی ۲ اختیار کرده‌اند. همچنین نتایج به‌دست آمده حاکی از آن است که در نظر گرفتن توزیع t برای بازده دارایی‌ها، سبب دستیابی به برآوردهای محافظه‌کارانه‌تری برای هر دو سنجه ریسک شده است. در حالتی که فاکتور عدم قطعیت تصادفی است، در هر سطح اطمینان و به ازای هر میزان عدم قطعیت قابل قبول برای سرمایه‌گذار، دو مقدار برای ریسک برآورد شده است که حدود بالا و پایین به‌دست آمده در هر حالت، به ترتیب بیان‌کننده مقادیر بدبینانه و خوش‌بینانه برای سنجه ریسک مد نظر هستند. توجه به حدود به‌دست آمده می‌تواند سرمایه‌گذار را در تصمیم‌گیری یاری کرده و میزان سرمایه در معرض خطر را در هر موقعیت سرمایه‌گذاری برآورد کند.

فهرست منابع

- فلاح‌پور، س.؛ احمدی، ا. (۲۰۱۴). تخمین ارزش در معرض ریسک پرتفوی نفت و طلا با بهره‌مندی از روش کاپیولا-گارج. *فصلنامه علمی - پژوهشی تحقیقات مالی*، ۱۶ (۲)، ۳۲۶-۳۰۹.
- فلاح‌پور، س.؛ رضوانی، ف.؛ رحیمی، م. (۲۰۱۵). برآورد ارزش در معرض ریسک شرطی (CVaR) با استفاده از مدل‌های ناهمسانی واریانس شرطی متقارن و نامتقارن در بازار طلا و نفت. *دانش مالی تحلیل اوراق بهادار*، ۸ (۲۶)، ۱۸-۱.
- گرچی، م.؛ سجاد، ر. (۱۳۹۵). برآورد ارزش در معرض خطر چند دوره‌ای بر پایه روش‌های شبیه‌سازی و پارامتریک. *تحقیقات مالی*، ۱۸ (۱)، ۱۸۴-۱۶۷.
- عبده تبریزی، ح.؛ شریفیان، ر. (۲۰۰۱). بررسی اثر ریسک نامطلوب بر عملکرد تعدیل شده بر اساس ریسک شرکت‌های سرمایه‌گذاری پذیرفته شده در بورس اوراق بهادار تهران. *تحقیقات مالی*، ۳۹ (۳)، ۲۰-۳.

Abdoe-Tabrizi, H. & Sharifian, R.A. (2001). The impact of downside risk on risk-adjusted performance of investment companies in the (Tehran Stock

- Exchange). *Quarterly Journal of Securities Exchange*, 1(1), 35-70. (in Persian)
- Artzner, P. & Delbaen, F. & Eber, J.M. & Heath, D. (1997). Thinking coherently. *Risk*, 10, 68-71.
- Assaf, A. (2015). Value-at-Risk analysis in the MENA equity markets: Fat tails and conditional asymmetries in return distributions. *Journal of Multinational Financial Management*, 29, 30-45.
- Embrechts, P. & McNeil, A. & Straumann, D. (2002). *Correlation and dependence in risk management: properties and pitfalls*. Cambridge, Cambridge University Press.
- Fallahpour, S. & Ahmadi, E. (2015). Estimating Value at Risk of Portfolio of Oil and Gold by Copula-GARCH Method. *Journal of Financial Research*, 16(2), 309-326. (in Persian)
- Fallahpour, S. & Rezvani, F. & Rahimi, M. (2015). Forecasting Conditional Value-at-Risk by Using Symmetric & Asymmetric Conditional Volatility Models in Gold & Oil Market. *Financial Knowledge of Securities Analysis*, 8(26), 1-18. (in Persian)
- Fama, E. (1965). The behavior of stocks market prices. *Journal of Business*, 38(1), 34-105.
- Fang, K. T., Kotz, S. & Ng, K. W. (1987). *Symmetric multivariate and related distributions*. Chapman and Hall.
- Glasserman, P. & Heidelberger, P. & Shahabuddin, P. (2002). Portfolio Value-at-Risk with Heavy-Tailed Risk Factors. *Mathematical Finance*, 12(3), 239-269.
- Hosking, J.R.M. & Bonti, G. & Siegel, D. (2000). Beyond the lognormal. *Risk*, 13 (5), 59-62.
- Kamdern, J.S. & Moussa, A.M. & Terraza, M. (2012). Fuzzy risk adjusted performance measures: Application to hedge funds. *Insurance: Mathematics and Economics*, 51(3), 702-712.
- Kamdern, J.S. (2005). Value-at-Risk and expected shortfall for linear portfolios with elliptically distributed risk factors. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 8(05), 537-551.
- Kamdern, J.S. (2009). Δ -VaR and Δ -TVaR for portfolios with mixture of elliptic distributions risk factors and DCC. *Insurance: Mathematics and Economics*, 44(3), 325-336.

- Kelker, D. (1970). Distribution theory of spherical distributions and a location-scale parameter generalization. *Sankhyā: The Indian Journal of Statistics, Series A*, 32(4), 419-430.
- Kjellson, B. (2013). *Forecasting expected shortfall: an extreme value approach* (Bachelor's Thesis), Lund university.
- Kwakernaak, H. (1978). Fuzzy random variable definitions and theorems. *Information Sciences*, 15(1), 1-29.
- Lopez, J.A. & Walter, C.A. (2000). *Evaluating covariance matrix forecasts in a value-at-risk framework*. Federal Reserve Bank of San Francisco.
- Markowitz, H. (1952). Portfolio selection. *The journal of finance*, 7(1), 77-91.
- Mandelbrot, B. (1963). The variation of certain speculative prices. *Journal of Business*, 36(4), 394 - 419.
- Martins, C. & Yao, F. (2006). *Estimation of value-at-risk and expected shortfall based on nonlinear models of return dynamics and extreme value theory*. Berkeley Electronic Press.
- McNeil, A.J. & Frey, R. (2000). Estimation of tail-related risk measures for heteroscedastic financial time series: an extreme value approach. *Journal of Empirical Finance*, 7(3), 271-300.
- Morgan, J.P. (1996). *Riskmetrics technical document* (4th ed.). New York.
- Moussa, A. M., Kamdem, J. S., & Terraza, M. (2014). Fuzzy value-at-risk and expected shortfall for portfolios with heavy-tailed returns. *Economic Modelling*, 39, 247-256.
- Olson, D. L. & Wu, D. (2013). The impact of distribution on value-at-risk measures. *Mathematical and Computer Modelling*, 58(9), 1670-1676.
- Puri, M.L. & Ralescu, D.A. (1996). Fuzzy random variables. *Journal of Mathematical Analysis & Applications*, 114: 409-422.
- Rostami Noroozabad, M. & Shojaei, A. & Khezri, M. & Rahmani Noroozabad, S. (2015). Estimation of value at risk of return in Tehran Stock Exchange using wavelet analysis. *Journal of Financial Research*, 17(1), 59-82. (in Persian)
- Sajjad, R. & Gorji, M. (2016). Estimation of multi-period VaR based on the simulation and parametric methods. *Journal of Financial Research*, 18(1), 167-184. (in Persian)
- Smimou, K. & Bector, C. R. & Jacoby, G. (2008). Portfolio selection subject to experts' judgments. *International Review of Financial Analysis*, 17(5), 1036-1054.

Yoshida, Y. (2009). An estimation model of value-at-risk portfolio under uncertainty. *Fuzzy Sets and Systems*, 160(22), 3250-3262.

Wang, Z. & Kilr, G.J. (1993). *Fuzzy Measure Theory*. Plenum Press, New York.

Zadeh, L.A. (1965). Fuzzy sets. *Information and control*, 8(3), 338-353.

Zimmermann, H.J. (2001). *Fuzzy Set Theory and its Applications*. Kluwer.

Archive of SID