

## ارزیابی ریزجدایش در حین انجماد دندریتی آلیاژ دوتایی با کاربرد روش میدان فازی و شبیه‌های تحلیلی

هادی براتی<sup>۱</sup>، محمدرضا ابوطالبی<sup>۲</sup> و سعید شبستری<sup>۳</sup>

### چکیده

در این پژوهش، ریزجدایش در انجماد جهت‌دار دندریتی با کاربرد شبیه‌سازی به وسیله‌ی روش میدان فازی و شبیه‌های تحلیلی موجود مورد بررسی قرار گرفت. مقایسه‌ی نتایج بدست آمده از شبیه‌سازی عددی و حل معادله‌های تحلیلی نشان داد که در شرایط مورد بررسی، روابط تحلیلی مقادیری بیش از آن‌چه از راه شبیه‌سازی بدست آمده را پیش بینی کرده‌اند. این امر هم برای شرایط وجود نفوذ در جامد هم عدم وجود آن صادق بوده است. هم‌چنین، در محدوده‌ای از کسر جامد، نتایج شبیه‌سازی و شبیه‌های تحلیلی تطابق مناسبی دارند که با زیاد شدن کسر جامد اختلاف بین آن‌ها افزایش می‌یابد.

واژه‌های کلیدی: ریزجدایش، انجماد دندریتی، روش میدان فازی، شبیه‌سازی.

۱- دانش‌آموخته‌ی کارشناسی ارشد دانشکده‌ی مهندسی مواد و متالورژی، دانشگاه علم و صنعت ایران.

۲- استاد دانشکده‌ی مهندسی مواد و متالورژی، دانشگاه علم و صنعت ایران.

۳- استاد دانشکده مهندسی مواد و متالورژی، دانشگاه علم و صنعت ایران.

\*- نویسنده‌ی مسئول مقاله: hbarati\_12@yahoo.com

## پیشگفتار

در طی انجماد یک آلیاژ دندریتی، عنصر آلیاژی پس زده شده در مقابل فصل مشترک جامد-مایع نفوذی دوباره توزیع می‌گردد. این توزیع دوباره در مقیاس فاصله بین بازوهای دندریتی ثانویه (یعنی حدود  $100\text{ }\mu\text{m}$ - $20$ ) صورت می‌گیرد. این پدیده که به عنوان ریزجدایش معرفی می‌شود، ترکیب ریزساختار و کسر یوتکتیک نهایی را کنترل می‌کند [۱].

شرح و تعریف ریزجدایش یکی از مراحل کلیدی برای فهم فرآیند انجماد بشمار می‌آید. شبیه‌های متعددی در مورد ریزجدایش در منابع ذکر شده اند. اختلاف آن شبیه‌ها در اصل در چگونگی در نظر گرفتن توزیع عنصر آلیاژی درون جامد است [۲]. در محدوده‌ی نفوذ کامل یا عدم نفوذ درون جامد، ریزجدایش را به راحتی با استفاده از قانون اهرم یا معادله‌ی شل<sup>۱</sup> می‌توان بیان نمود. برای حالت وجود نفوذ در جامد، شبیه‌هایی [۳ و ۴] با فرض‌هایی در مورد رفتار نفوذی در جامد توسعه یافته‌اند. در شبیه‌های یاد شده ریخت شناسی دانه به صورت یک بعدی در نظر گرفته می‌شود؛ در حالی که ریزجدایش رابطه نزدیکی با ریزساختار دارد [۲].

Du و Jacot [۵] با کاربرد روش شبه پیگیری جبهه<sup>۲</sup> تأثیر ریخت شناسی دانه بر ریزجدایش را بررسی نمودند و دریافتند که نتایج توسعه‌ی فصل مشترک جامد-مایع در حالت دو بعدی را می‌توان به خوبی با حالت یک بعدی برآورد کرد. Du و همکارانش [۶] هم‌چنین یک شبیه‌سازی دو بعدی برای تفسیر کاهش کسر یوتکتیک غیر تعادلی با افزایش نرخ سرد شدن انجام دادند و بیان داشتند که اختلاف در در سینتیک ضخیم شدن در نرخ‌های سرد شدن گوناگون به کاهش کسر یوتکتیک منجر می‌شود. با این وجود، به دلیل پیچیدگی مسئله،

مقایسه‌ی کیفی دقیق بین نتایج بدست آمده و شبیه‌های تحلیلی ریزجدایش در مورد اثرات ضخیم شدن دشوار است.

Karma و Rappel [۷ و ۸] یک شبیه میدان فازی برای رشد مواد خالص توسعه دادند که نتایج آن تطابق کلی خوبی با برخی از تئوری‌ها در گستره وسیعی از ناهمسانگردی بلوری (به جز ناهمسانگردی‌های خیلی زیاد) نشان داد. در مواد آلیاژی، به دلیل وجود اثرات تغییر غلظت در طی انجماد، بررسی رشد دندریتی دشوارتر می‌شود. Loginova و همکارانش [۹] یک شبیه میدان فازی بر اساس شبیه Warren و Boettinger [۱۰] برای رشد حرارتی-غلظتی در شرایط ناهم‌دما دندریت توسعه دادند. Ramirez و همکارانش [۱۱ و ۱۲] یک شبیه میدان فازی بر اساس تحلیل فصل مشترک نازک ارایه کردند و مفهوم جریان ضد حبس<sup>۳</sup> را برای دستیابی به نتایج مستقل از ضخامت فصل مشترک بکار گرفتند. هم‌چنین از اثرات سینتیک فصل مشترک صرف‌نظر کردند. آن‌ها با استفاده از نتایج عددی خود، تئوری‌های موجود در رابطه با رشد آزاد دندریتی را آزمودند. با این حال، این شبیه تنها برای آلیاژهای رقیق کاربرد دارد.

در این پژوهش با استفاده شبیه میدان فازی انجماد جهت دار دندریتی به صورت ناهم‌دما شبیه‌سازی شده است. با استفاده از نتایج حاصل این شبیه‌سازی ریزجدایش بوجود آمده در مناطق بین دندریتی بررسی و با شبیه‌های تحلیلی موجود مقایسه شده است.

## روش پژوهش

بمنظور شبیه‌سازی انجماد ندریتی یک میدان محاسباتی به ابعاد  $2 \times 4 \mu\text{m}$  در نظر گرفته و دو هسته‌ی بسیار کوچک در کنج‌های پایینی میدان قرار داده شد و کلیه‌ی مرزها به صورت آدیاباتیک لحاظ گردید. در این

<sup>1</sup>- Scheil

<sup>2</sup>- pseudo front tracking

<sup>3</sup>- antitrapping current

بررسی شامل معادله‌ی میدان فاز، معادله‌ی غلظت جزء محلول و معادله‌ی انرژی به ترتیب به صورت زیر می‌باشند.

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = M_{\phi} \bar{\epsilon}^2 \left[ \nabla \cdot (\eta^2 \nabla \phi) - \frac{\partial}{\partial x} \left( \eta \eta' \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \eta \eta' \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \right] - M_{\phi} ((1-c)H_A + cH_B)$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} + v \nabla c = \nabla \cdot D \left[ \nabla c + \frac{V_m}{R} c(1-c)(H_B - H_A) \nabla \phi + a \delta(1-k) \left[ \frac{2c}{1+k-(1-k)\phi} \right] \frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} \right]$$

$$\bar{C} \left[ \frac{\partial T}{\partial t} + v \nabla T \right] + p'(\phi) \bar{L} \frac{\partial \phi}{\partial t} = \nabla \cdot K \nabla T$$

در معادله‌ی میدان فاز  $H_B$  و  $H_A$  به ترتیب بیانگر انتروپی جزء حلال و جزء حل شونده هستند. در رابطه‌ی بالا

$$M_{\phi} = (1-c)M_{\phi,A} + cM_{\phi,B} \quad , \quad M_i = \frac{T_m^i \mu_k^i}{6\sqrt{2}\Delta H^i \delta^i} \quad (i = A \text{ or } B)$$

$$\bar{\epsilon}^2 = (1-c)\epsilon_A^2 + c\epsilon_B^2 \quad , \quad \epsilon_i^2 = \frac{6\sqrt{2}\sigma^i \delta^i}{T_m^i} \quad (i = A \text{ or } B)$$

$$\bar{j} = a \delta(1-k) \left[ \frac{2c}{1+k-(1-k)\phi} \right] \frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|}$$

در این رابطه، ثابت  $a$  معادل  $\frac{1}{2\sqrt{2}}$  می‌باشد.

در معادله‌ی انرژی،  $\bar{C}$ ،  $\bar{L}$  و  $K$  به ترتیب گرمای ویژه، گرمای نهان انجماد و ضریب هدایت حرارت هستند که بر حسب غلظت تغییر می‌کنند. در روابط ذکر شده تابع  $p(\phi) = \phi^3(10 - 15\phi + 6\phi^2)$  به صورت تعیین می‌شود و علامت پریم ( $'$ ) مشتق این تابع نسبت به  $\phi$  را نشان می‌دهد.

در این پژوهش، شبیه‌سازی انجماد دندریتی با استفاده از شبیه شرح داده شده در مورد آلیاژ نیکل-مس صورت گرفت زیرا این آلیاژ رفتاری بسیار مشابه محلول‌های ایده‌آل دارد. در این پژوهش، مشابه آنچه در کارهای گذشته [۹، ۱۰ و ۱۴] صورت گرفته بود، ضخامت فصل مشترک برابر با  $4/8 \times 10^{-8}$  m در نظر گرفته شد. حل معادله‌های حاکم بیان شده با استفاده از برنامه‌ای به زبان Fortran و روش حجم محدود صورت گرفت. در این برنامه گسسته‌سازی معادله‌های حالت ناپایدار به صورت کاملاً ضمنی (fully implicit) انجام شد و شبکه‌بندی

پژوهش از شبیه‌ی که به وسیله‌ی Loginova و همکارانش [۹] بر اساس شبیه Warren و Boettinger [۱۰] برای رشد ناهم‌دمای دندریتی با روش میدان فاز ارایه کردند، استفاده شد. معادله‌های حاکم بر فرآیند مورد

که  $\sigma$  انرژی سطحی ماده‌ی خالص،  $\delta$  ضخامت فصل مشترک و  $\mu_k$  ضریب سینتیکی خطی برای اتصال به فصل مشترک است و تابع ناهم‌سانگردی  $\eta$  به صورت  $\eta = 1 + \gamma \cos(4\theta)$  تعریف می‌شود.  $\theta = \tan^{-1}[(\partial \phi / \partial y) / (\partial \phi / \partial x)]$  زاویه‌ی بین زاویه‌ی نرمال فصل مشترک و محور X را مشخص می‌سازد.

ضریب نفوذ در معادله‌ی غلظت به صورت  $D = D_S + p(\phi)(D_L + D_S)$  تعیین می‌شود ( $D_L$  و  $D_S$  به ترتیب ضریب نفوذ جرمی در مایع و جامد هستند). آخرین ترم سمت راست معادله‌ی غلظت مربوط به مفهومی است که به نام جریان ضد حبس شناخته می‌شود که در نرخ‌های بالای انجماد موجب تعدیل شار غلظتی ناشی از اختلاف پتانسیل شیمیایی در محدوده‌ی فصل مشترک می‌گردد. در نتیجه، اثر غیر واقعی حبس عنصر آلیاژی در شبیه میدان فاز به دلیل استفاده از فصل مشترک ضخیم از بین می‌رود. این جریان بنا بر پیشنهاد Karma [۱۳] به صورت زیر بیان می‌شود و گرادیان آن را می‌توان به عنوان ترم منبع به معادله غلظت افزود.

خط  $X-X$  (که در شکل ۱ نشان داده شده) نسبت به مرکز این خط آمده است و نشان می‌دهد که با گذشت زمان و افزایش کسر جامد، توزیع غلظت در مذاب تقریباً یکنواخت می‌گردد و از این رو، می‌توان فرآیند انجماد را با شبیه‌های تئوری ارایه شده در این زمینه مقایسه نمود.

Giovanola و Kurz [۱۵] رابطه‌ای برای ریزجدایش در حین انجماد سریع ارایه کردند که در آن تغییرات غلظت مذاب بین دندریتی با اختلاط کامل به صورت زیر بدست می‌آید.

$$C_L = C_x \left[ 1 - \frac{f_s - f_x}{1 - f_x} \right]^{(k-1)}$$

در این رابطه،  $C_L$ ، غلظت مذاب؛  $f_s$ ، کسر جامد و  $k$ ، ضریب توزیع است. در این جا  $C_x$  و  $f_s$  در حقیقت به ترتیب غلظت مذاب و کسر جامد در آغاز مرحله‌ی اختلاط کامل هستند.

هم‌چنین، Voller و Beckermann [۱۶] و Mortensen [۱۷] دو شبیه‌سازی تحلیلی ریزجدایش در حین رشد ساختار دندریتی یا سلولی را ارایه کرده‌اند که در آن‌ها نفوذ در جامد لحاظ نشده است. روابط این دو شبیه به ترتیب به صورت زیر است.

$$C_L = C_x \frac{2n[1 - (f_s - f_x)/(1 - f_x)]^{(1+2n)k-1}}{[(f_s - f_x)/(1 - f_x)]} \times \int_0^{(f_s - f_x)/(1 - f_x)} \xi^{2n-1} (1 - \xi)^{-(1+2n)k} d\xi$$

$$f_s = 1 - (1 - f_x) \frac{1 + n C_L^{[k/(1-k)]}}{1 - k(C_L - C_x)^n} \int_{C_x}^{C_L} \xi^{[k/(1-k)]} (\xi - C_x)^n d\xi$$

که در حالت یک بعدی محاسبه شده‌اند، با مقادیر بدست آمده از شبیه‌سازی دو بعدی متفاوت می‌شود. هم‌چنین، گفتنی است که از بین روابط تحلیلی ذکر شده، نتایج شبیه Mortensen با مقادیر شبیه‌سازی هم‌خوانی بیش‌تری دارد. این رابطه با فرض ثابت بودن نرخ سرد کردن بدست آمده است، در حالی که رابطه‌ی Voller و Beckermann بر اساس فرض سهمی بودن نرخ رشد بنا شده است. با توجه به شکل ۲-الف مشخص می‌شود که به ازای کسر جامد بیش از ۰/۸۵، مادون انجماد تقریباً به مقدار ثابتی می‌رسد؛ بنابراین، نزدیک بودن نتایج رابطه‌ی Mortensen و این شبیه‌سازی معقول بنظر می‌آید.

میدان محاسباتی به گونه‌ای صورت گرفت که ابعاد حجم کنترل  $0.4 \mu\text{m}$  باشد.

## نتایج و بحث

### شرایط عدم نفوذ در جامد

نتایج بدست آمده از شبیه‌سازی انجماد دندریتی آلیاژ دوتایی مس-نیکل در شکل ۱ نشان داده شده است. شکل ۱-الف توزیع غلظت تا زمان  $1/4 \text{ms}$  را نشان می‌دهد و در شکل ۱-ب تغییرات ریخت شناسی دندریتی با گذشت زمان آمده است. این شکل را می‌توان به سه بخش خمیری، نوک دندریت و مذاب تقسیم کرد. هدف از انجام این پژوهش بررسی ریزجدایش در منطقه‌ی خمیری یا به بیان دیگر، مناطق بین دندریتی بوده است. بررسی تغییرات مادون انجماد کل به عنوان تابعی از کسر حجمی، چنانچه در شکل ۲-الف آمده است، نشان می‌دهد که در آغاز فرآیند، مادون انجماد زیادی حاکم است. بنابراین، انجماد غیرتعادلی رخ می‌دهد. با گذشت زمان و پس‌زده شدن عنصر آلیاژی به درون مذاب، رفته رفته مادون انجماد غلظتی کم می‌شود. با افزایش کسر جامد و تشکیل منطقه‌ی خمیری، مادون انجماد تقریباً به مقداری ثابت می‌رسد، به گونه‌ای که می‌توان گفت حالتی شبه‌تعادلی بدست آمده است. در شکل ۲-ب تغییرات غلظت در طول

در این روابط  $n$  برابر با  $1/3$  در نظر گرفته شده است. چنانچه  $n$  برابر با صفر باشد، روابط بالا به صورت معادله‌ی Scheil در می‌آیند. در شکل ۳، تغییرات غلظت مذاب بین دندریتی با کسر جامد تشکیل شده برای نتایج شبیه‌سازی و روابط تحلیلی بیان شده، آمده است. چنانچه در این شکل مشاهده می‌شود، نتایج شبیه‌سازی حاضر در مقادیر بالای کسر جامد از غلظت پیش‌بینی شده به وسیله‌ی شبیه‌های تحلیلی فاصله گرفته است. بنابراین، می‌توان گفت هنگامی که کسر جامد زیاد می‌شود، به احتمال زیاد، به دلیل پیچیدگی ریخت شناسی شاخه‌های دندریتی ثانویه، مقدار غلظت بدست آمده از روابط تحلیلی

## شرایط نفوذ در جامد

برای پیش‌بینی ریزجدایش در شرایطی که نفوذ در فاز جامد نیز وجود داشته باشد، رابطه‌ی Brody و Flemings به خوبی شناخته شده است که فرم کلی آن به صورت زیر است.

$$C_L = C_x \left[ 1 - \left( \frac{f_s - f_x}{1 - f_x} \right) (1 - \beta k) \right]^{\frac{k-1}{1-\beta k}}, \quad \beta = 2\alpha$$

که در این رابطه،  $\alpha$  عدد فوریه است که بر اساس ضریب نفوذ جرمی در فاز جامد (D)، فاصله‌ی بین دندریته‌های ثانویه ( $\lambda$ ) و زمان انجماد موضعی ( $t_f$ ) به صورت  $\alpha = 4Dt_f / (\lambda^2)$  [۱]. اصلاحاتی به وسیله‌ی Clyne و Kurz [۳] و Ohnaka [۴] بر روی این رابطه نیمه‌تحلیلی انجام گرفت که بیش‌تر در مقادیر بالای  $\alpha$  نمود می‌یابند. در شکل ۴-الف نتایج بدست آمده از این شبیه‌سازی با در نظر گرفتن ضریب نفوذ  $10^{-11} \text{ m}^2/\text{s}$  در فاز جامد در مقایسه با شبیه‌سازی تحلیلی ذکر شده، آمده است. چنانچه مشاهده می‌شود، در این‌جا نیز نتایج شبیه‌سازی در کسرهای جامد بالا اختلاف قابل توجهی با پیش‌بینی‌های شبیه Brody و Flemings نشان می‌دهد. در شکل ۴-ب نیز ضریب نفوذ جامد از صفر تا  $10^{-11} \text{ m}^2/\text{s}$  تغییر می‌کند. از این شکل می‌توان دریافت که با افزایش  $D_s$  از صفر تا  $10^{-13} \text{ m}^2/\text{s}$ ، تغییر چندانی در توزیع مذاب بین دندریته‌ی پدید نمی‌آید، ولی وقتی ضریب نفوذ جامد به  $10^{-11} \text{ m}^2/\text{s}$  می‌رسد، این اختلاف قابل توجه می‌شود. عدم تفاوت در نتیجه‌ی تغییر ضریب نفوذ در مقادیر کم، به احتمال زیاد، به دلیل نرخ بالای انجماد در شرایط مورد بررسی است زیرا در زمان محدود انجماد، عنصر آلیاژی فرصتی برای نفوذ در جامد و در نتیجه، تغییر غلظت در فصل مشترک را ندارد مگر آن‌که ضریب نفوذ در جامد به اندازه‌ی کافی زیاد باشد.

## نتیجه‌گیری

در این پژوهش انجماد دندریته‌ی آلیاژ دوتایی مس-نیکل با استفاده از شبیه‌سازی میدان فازی در حالت دو بعدی شبیه‌سازی شد. مقایسه‌ی ریزجدایش بوجود آمده در

فاز مذاب با حل روابط تحلیلی نشان داد که:

در منطقه‌ی بین دندریته‌ی، روابط تحلیلی، مقادیر غلظت را بیش از مقدار بدست آمده به وسیله‌ی شبیه‌سازی میدان فازی، پیش‌بینی کرده‌اند. این امر هم برای شرایط وجود نفوذ در جامد و هم برای شرایط عدم نفوذ در جامد قابل مشاهده است.

در حالت عدم نفوذ در جامد، شبیه‌سازی Mottesen [۱۷] بیش‌ترین تطابق را با نتایج شبیه‌سازی نشان داد.

در حالت وجود نفوذ در جامد، نرخ بالای انجماد مانع از تغییر در غلظت مذاب بین دندریته‌ی می‌گردد مگر آن‌که ضریب نفوذ جامد به اندازه‌ی کافی بالا باشد. در شرایطی که کسر جامد بسیار زیاد می‌شود، اختلاف بین نتایج شبیه‌سازی و شبیه‌های تحلیلی بیش‌تر می‌شود.

## منابع

- 1- V. R. Voller., "A semi-analytical model of microsegregation in a binary alloy", Journal of Crystal Growth, 197, 325-332. 1999.
- 2- J. Li, J. Wang., and G. Yang., "Investigation into microsegregation during solidification of a binary alloy by phase-field simulations", Journal of Crystal Growth, 311, 1217-1222. 2009.
- 3- T. W. Clyne., and W. Kurz., "Solute Redistribution during Solidification with Rapid Solid State Diffusion", Metallurgical transactions. A, Physical metallurgy and materials science, 12 A, 1981, 965-971.
- 4- I. Ohnaka., "Mathematical Analysis of Solute Redistribution during Solidification with Diffusion in Solid Phase", Transactions of the Iron and Steel Institute of Japan, 26, 1045-1051. 1986.,
- 5- Q. Du., and A. Jacot., "A two-dimensional microsegregation model for the description of microstructure formation during solidification in multicomponent alloys: Formulation and behaviour of the model", Acta Materialia, 53, 3479-3493. 2005.
- 6- Q. Du., D. G. Eskin., A. Jacot., and L. Katgerman., "Two-dimensional modelling and experimental study on microsegregation during solidification of an Al-Cu binary alloy", Acta Materialia, 55, 1523-1532. 2007.
- 7- A. Karma., and W. J. Rappel., "Phase-field

and H. J. Diepers., "Phase-field modeling of binary alloy solidification with coupled heat and solute diffusion", *Physical Review E - Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*, 69, 051607. 2004.

13- A. Karma., "Phase-Field Formulation for Quantitative Modeling of Alloy Solidification", *Physical Review Letters*, 87, 115701. 2001.

14- C. W. Lan., and C. J. Shih., "Phase field simulation of non-isothermal free dendritic growth of a binary alloy in a forced flow", *Journal of Crystal Growth*, 264, 2004, 472-482.

15- B. Giovanola., and W. Kurz., "Modeling of microsegregation under rapid solidification conditions", *Metallurgical Transactions A*, 21, 260-263. 1990.

16- V. R. Voller., and C. Beckermann., "A unified model of microsegregation and coarsening", *Metallurgical and Materials Transactions A: Physical Metallurgy and Materials Science*, 30, 2183-2189. 1999.

17- A. Mortensen, "On the influence of coarsening on microsegregation", *Metallurgical Transactions A*, 20, 247-253. 1989.

method for computationally efficient modeling of solidification with arbitrary interface kinetics", *Physical Review E - Statistical Physics, Plasmas, Fluids, and Related Interdisciplinary Topics*, 53, R3017-R3020. 1996.

8- A. Karma., and W. J. Rappel., "Numerical simulation of three-dimensional dendritic growth", *Physical Review Letters*, 77, 4050-4053. 1996.

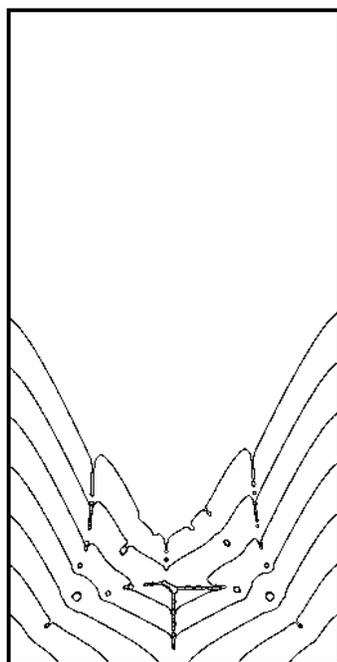
9- I. Loginova., G. Amberg., and J. Agren., "Phase-field simulations of non-isothermal binary alloy solidification", *Acta Materialia*, 49, 573-581. 2001.

10- J. A. Warren., and W. J. Boettinger., "Prediction of dendritic growth and microsegregation patterns in a binary alloy using the phase-field method", *Acta Metallurgica Et Materialia*, 43, 1995, 689-703.

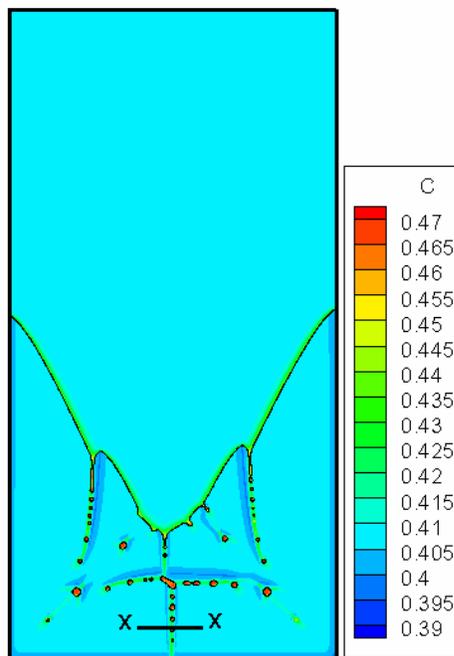
11- J. C. Ramirez and C. Beckermann, "Examination of binary alloy free dendritic growth theories with a phase-field model", *Acta Materialia*, 53, 1721-1736. 2005.

12- J. C. Ramirez., C. Beckermann., A. Karma.,

پیوست‌ها

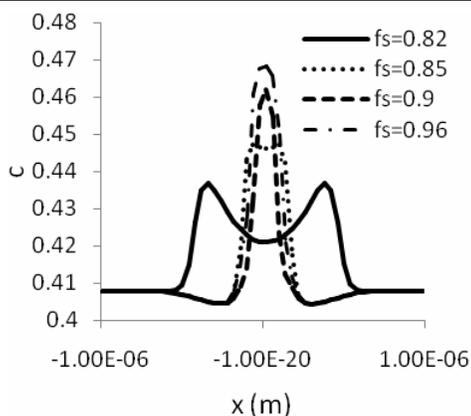


ب

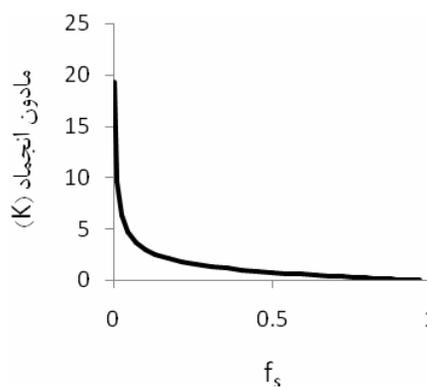


الف

شکل ۱- (الف) توزیع غلظت در میدان محاسباتی پس از  $1/4\text{ms}$ ، (ب) تغییرات ریخت شناسی دندریتی با گذشت زمان (فاصله‌ی زمانی بین خطوط متوالی  $0/2\text{ms}$  می‌باشد).

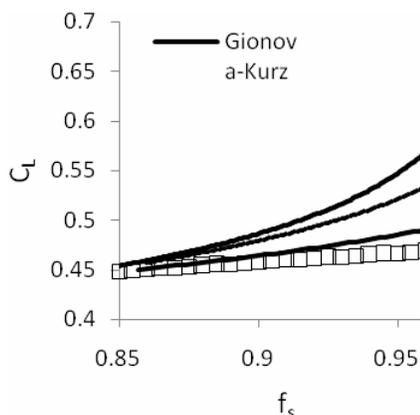


ب

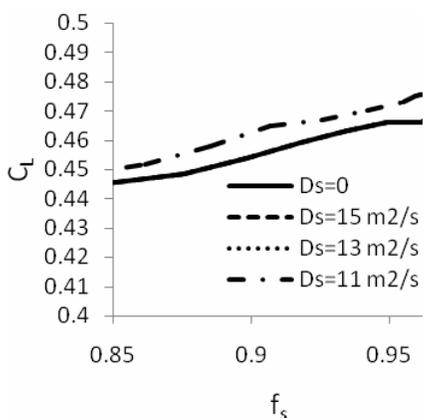


الف

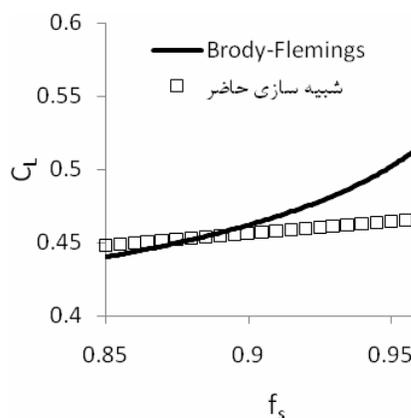
شکل ۲- (الف) تغییرات مادون انجماد بر حسب کسر جامد، (ب) تغییرات غلظت در طول خط X-X.



شکل ۳- تغییرات غلظت مذاب بر حسب کسر جامد برای شبیه‌های تحلیلی و شبیه‌سازی حاضر.



ب



الف

شکل ۴- (الف) تغییرات غلظت مذاب بر حسب کسر جامد در شرایط وجود نفوذ در فاز جامد، (ب) تغییرات غلظت مذاب بر حسب کسر جامد به ازای مقادیر گوناگون ضریب نفوذ در فاز جامد.