

## تحلیل آماری میکرومکانیکی اثرات توزیع اتفاقی الیاف بر خواص مکانیکی مواد مرکب الیافی

محمدجواد محمودی<sup>۱\*</sup> و محمدکاظم حسن‌زاده اقدم<sup>۲</sup>

### چکیده

در این مقاله، یک مدل میکرومکانیکی سه بعدی برای مطالعه اثر آرایش اتفاقی الیاف در زمینه بر مشخصه‌های مکانیکی مواد مرکب الیافی تک‌جهته ارائه می‌شود. المان حجمی نماینده مورد استفاده در مدل از  $r \times c$  سلول تشکیل شده است که سلول‌های الیاف به گونه اتفاقی در سلول‌های زمینه توزیع شده‌اند. این تحلیل عمومی بوده و می‌تواند جهت استخراج خواص انعطاف‌پذیری تحت بارگذاری مکانیکی عمودی و برشی و بارگذاری حرارتی و هم‌چنین بررسی شروع خرابی پلاستیک شدن زمینه انجام شود. جهت بررسی چگونگی آرایش الیاف، مدل‌های گوناگون آماری توزیع، شامل توزیع نرمال، یکنواخت و بتا مورد بررسی قرار گرفته است. نتایج بدست آمده از مدل برای خواص الاستیک که الیاف به گونه اتفاقی توزیع شده است، تطابق خوبی با داده‌های تجربی و مدل‌های موجود در دسترس نشان می‌دهد. با اعمال آزمون فرض و براساس قضیه حد مرکزی، تحلیل آماری وابستگی خواص انعطاف‌پذیری و استحکامی به آرایش الیاف در زمینه در هر یک از توزیع‌های نرمال، یکنواخت و بتا انجام گرفته و در هر مورد با توجه به نتایج عددی بدست آمده، تفسیر لازم انجام شده است. نتایج عددی اعمال آزمون فرض نشان داده است که خواص انعطاف‌پذیری ماده مرکب چندان تحت تأثیر آرایش الیاف نیست. این در حالی است که خواص استحکامی ماده مرکب بسیار تحت تأثیر آرایش الیاف درون زمینه است.

واژه‌های کلیدی: مواد مرکب الیافی، میکرومکانیک، توزیع اتفاقی، آزمون فرض.

۱- دانش‌آموخته کارشناسی ارشد، دانشکده مهندسی مکانیک و انرژی، دانشگاه شهید بهشتی، تهران.

۲- استادیار، دانشکده مهندسی مکانیک و انرژی، دانشگاه شهید بهشتی تهران.

\*- نویسنده مسئول مقاله: mj\_mahmoudi@sbu.ac.ir

## پیشگفتار

امروزه با توجه به نیاز صنایع پیشرفته از جمله صنایع هوافضا و خودروسازی به مواد سازه‌ای جهت عملکرد بهتر تحت شرایط محیطی و بارگذاری متفاوت، استفاده از مواد مرکب پایه پلیمری و فلزی روز به روز در حال افزایش است. مواد مرکب الیافی زمینه فلزی به دلیل کارکرد مناسب در دماهای بالاتر، استحکام و سفتی ویژه بالاتر، پایداری ابعادی، مقاومت مناسب در برابر خستگی، وزن پایین‌تر و سهولت تولید توجه زیادی را در سال‌های اخیر به خود جلب کرده است. استفاده مناسب از مواد مرکب زمینه فلزی منوط به درک بهتر از رفتار آن‌ها در شرایط گوناگون بارگذاری و خواص الاستیک-پلاستیک آن‌هاست. از سوی دیگر، هدف اصلی میکرومکانیک<sup>۱</sup> بدست آوردن خواص ماکروسکوپی مواد چندجنسی از ریزساختارهای تشکیل‌دهنده آن ماده است. از جمله مدل‌های میکرومکانیک تحلیلی ارایه شده، مدل کران‌های هاشین- شریکمن<sup>۲</sup> [۱]، مدل خودسازگار<sup>۳</sup> [۲]، مدل تعمیم یافته خودسازگار [۳] هستند. دو گروه اصلی مدل‌های تحلیلی میکرومکانیکی، مدل استوانه‌ای [۴] و مدل‌های سلول واحد<sup>۴</sup> [۵] هستند. در مدل سلول واحد به گونه معمول سطح مقطع المان حجمی نماینده<sup>۵</sup> شامل یک تقویت مستطیلی می‌باشد که به وسیله تعدادی بلوک زمینه دربرگرفته شده است. در طبقه مدل‌های سلول واحد، روش سلولی<sup>۶</sup> [۵] که به عنوان معروف‌ترین مدل شناخته می‌شود، دارای ریاضیات پیچیده می‌باشد. یک مدل ساده در [۶] و مدل سلول واحد ساده شده<sup>۷</sup> نیز در [۷] ارایه شده است. هم‌چنین، از مدل‌های میکرومکانیکی عددی نیز برای پیش‌بینی پاسخ مواد مرکب در شرایط بارگذاری حرارتی و مکانیکی گوناگون استفاده شده است [۸-۹]. در این روش‌ها مشخصات ذاتی الیاف و زمینه را حفظ شده و خواص کل ماده مرکب بر

حسب خواص اجزای تشکیل‌دهنده، نسبت حجمی آن‌ها و قیده‌های متقابل بین فازها که مربوط به هندسه میکروساختاری است، تعیین می‌شود. خواص تک‌لایه‌های مواد مرکب را می‌توان با استفاده از روش میکرومکانیکی پیش‌بینی کرد و سپس از این خواص در تحلیل‌های ماکرومکانیکی استفاده کرد. در مجموع روش‌های میکرومکانیک می‌تواند جایگزین روش‌های تجربی استخراج خواص مواد مرکب نظیر مطالعه انجام شده در [۱۰] با توجه به هزینه‌های بسیار تجهیزات و مربوط گردد. مدل سلول واحد ساده شده یک مدل تحلیلی میکرومکانیکی بوده که رفتار کلی ماده مرکب را از ریزساختارهای تشکیل‌دهنده آن استخراج می‌کند. دقت پاسخ این مدل میکرومکانیکی بستگی به مدل‌سازی دقیق فازها و واکنش بین آن‌ها در المان حجمی انتخاب شده برای ماده مرکب خواهد داشت. در روابط اولیه این مدل میکرومکانیکی [۷]، المان حجمی نماینده ماده مرکب شامل ۴ سلول بود که یکی از آن‌ها شامل الیاف و بقیه را مواد زمینه تشکیل می‌داد. قابلیت کاربرد این مدل پیش‌بینی رفتار مواد مرکب الیافی در شرایط گوناگون بارگذاری با توجه به اعتبارسنجی‌های انجام گرفته با داده‌های تجربی و روش‌های عددی به اثبات رسیده است. این مدل در [۱۱] بمنظور بررسی رفتار ماده مرکب الیاف کوتاه توسعه داده شده است.

با توجه به این‌که توزیع الیاف در زمینه به گونه اتفاقی بوده، اما بیش‌تر مدل‌های عددی و تحلیلی میکرومکانیکی آرایش الیاف را به صورت منظم در نظر می‌گیرند. از سوی دیگر، پژوهشی در خصوص چگونگی مدلسازی توزیع الیاف در زمینه با توزیع‌های گوناگون آماری و تاثیر آن بر پاسخ مواد مرکب انجام نشده است. در این مقاله، مدل میکرومکانیکی سلول واحد ساده شده بمنظور پیش‌بینی رفتار ماده مرکب الیافی ارایه می‌شود. هندسه المان حجمی نماینده مدل میکرومکانیکی جهت تأمین آرایش واقعی‌تر الیاف، به  $2 \times C$  سلول با مقطع مستطیلی گسترش می‌یابد. اجزای سازنده این المان حجمی نماینده ماده مرکب شامل الیاف و زمینه به صورت ایزوتروپ و همگن فرض می‌شود. از سوی دیگر، شرط اتصال کامل بین اجزای این المان حجمی نماینده در نظر گرفته می‌شود. در

<sup>1</sup> -Micromechanics

<sup>2</sup> -Shtrikman-Hashin

<sup>3</sup> -Self consistent

<sup>4</sup> - Unit Cell

<sup>5</sup> -Representative Volume Element

<sup>6</sup> -Method of Cell

<sup>7</sup> -Simplified Unit Cell (SUC) Model

## معادله‌های حاکم

## بارگذاری عمودی و حرارتی

فرض می‌شود المان نماینده مورد تنش عمودی و محوری قرار دارد.  $S_x, S_y, S_z$  به ترتیب تنش‌های جمعی (تنش ماکرو) روی المان نماینده در جهات  $x, y, z$  می‌باشند. از معادله تعادل تنش‌های داخلی در سلول‌ها و تنش‌های خارجی اعمالی، در مرز المان نماینده رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^r \sigma_x^{1j} b_j = S_x L_r \\ \sum_{i=1}^c \sigma_y^{i1} a_i = S_y L_c \\ \sum_{j=1}^r \sum_{i=1}^c b_j (a_i \sigma_z^{ij}) = S_z L_r L_c \end{cases} \quad (1)$$

که در آن  $\sigma^{ij}$  بردار تنش عمودی برای سلول  $ij$  می‌باشد. رابطه زیر از تعادل تنش‌ها در سطوح مشترک هر دو سلول مجاور بدست می‌آید:

$$\begin{cases} \sigma_x^{1j} = \sigma_x^{ij} \quad (i > 1) \\ \sigma_y^{i1} = \sigma_y^{ij} \quad (j > 1) \end{cases} \quad (2)$$

شرایط سازگاری بدین صورت است که تغییر مکان المان نماینده در یک جهت برابر مجموع تغییر مکان سلول‌های یک ردیف در همان جهت است:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^c a_i \varepsilon_x^{i1} = \sum_{i=1}^c a_i \varepsilon_x^{ij} = L_c \bar{\varepsilon}_x \quad (j > 1) \\ \sum_{j=1}^r b_j \varepsilon_y^{1j} = \sum_{j=1}^r b_j \varepsilon_y^{ij} = L_r \bar{\varepsilon}_y \quad (i > 1) \\ \varepsilon_z^{ij} = \bar{\varepsilon}_z \quad (i > 1, j > 1) \end{cases} \quad (3)$$

که در آن  $\varepsilon^{ij}$  بردار کرنش عمودی برای سلول  $ij$  و  $\bar{\varepsilon}$  بردار کرنش ماکرو برای المان نماینده می‌باشد. معادله‌های ساختاری ترموالاستیسیته سه بعدی بر اساس قانون هوک برای سلول  $ij$  با فرض رفتار الاستیک خطی برای هر فاز به صورت زیر است:

$$\varepsilon_x^{ij} = \frac{1}{E_{ij}} [\sigma_x^{ij} - \nu_{ij} (\sigma_y^{ij} + \sigma_z^{ij})] + \alpha_{ij} \times \Delta T \quad (4)$$

$$\varepsilon_y^{ij} = \frac{1}{E_{ij}} [\sigma_y^{ij} - \nu_{ij} (\sigma_x^{ij} + \sigma_z^{ij})] + \alpha_{ij} \times \Delta T$$

$$\varepsilon_z^{ij} = \frac{1}{E_{ij}} [\sigma_z^{ij} - \nu_{ij} (\sigma_x^{ij} + \sigma_y^{ij})] + \alpha_{ij} \times \Delta T$$

این بین، توزیع‌های گوناگون آماری در فضای گسسته شامل توزیع نرمال<sup>۱</sup>، یکنواخت<sup>۲</sup> و بتا<sup>۳</sup> جهت بررسی و مطالعه چگونگی آرایش تقویت در زمینه در مدل در نظر گرفته می‌شود. نتایج آرایه شده درباره خواص الاستیک و همچنین، استحکام مواد مرکب الیافی با توزیع اتفاقی تطابق خوبی را با داده‌های آزمایشگاهی و دیگر مدل‌ها نشان می‌دهد. اثرات آرایش اتفاقی بر خواص استحکامی بر خلاف خواص انعطاف‌پذیری به دلیل ایجاد تمرکز تنش موضعی شایان توجه است.

## تحلیل

## المان حجمی نماینده

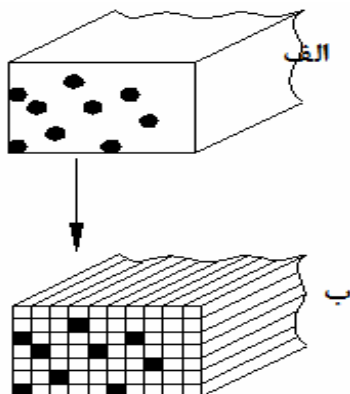
بمنظور در نظر گرفتن آرایش اتفاقی الیاف، در مدل میکرومکانیکی سلول واحد ساده شده آرایه شده در این پژوهش، المان حجمی نماینده مطابق شکل ۱ تعریف می‌شود. ابتدا سطح مقطع هر یک از الیاف به صورت مستطیلی در نظر گرفته می‌شود. سپس بر اساس شکل ۲ به صورت مکعب مستطیلی با ارتفاع واحد در راستای الیاف  $z$  (که فرض کرنش صفحه‌ای تعمیم‌یافته را برای مدل شامل می‌شود)، طول ضلع  $L_c$  در جهت محور  $x$  و طول ضلع  $L_r$  در جهت محور  $y$  در نظر گرفته می‌شود. ضلع  $L_c$  به  $C$  قسمت و ضلع  $L_r$  به  $r$  قسمت تقسیم می‌شود. اگر  $i$  متغیر شمارنده در جهت  $x$  و  $j$  در جهت  $y$  باشد، طول هر یک از تقسیمات در جهت  $x$  با  $a_i$  و در جهت  $y$  با  $b_j$  نامیده می‌شود. هم‌چنین، هر سلول با نام  $ij$  شناخته می‌شود.

در این مدل میکرومکانیکی، مقادیر تنش و کرنش هر سلول ثابت فرض می‌شود و هم‌چنین، فرض می‌شود که تنش‌های عمودی وارد بر المان نماینده هیچ‌گونه تنش برشی داخل سلول‌ها ایجاد نمی‌کند و برعکس. مشابه این فرضیات را می‌توان در مراجعی از قبیل [۵-۷، ۱۳، ۱۲] یافت. بنابراین، معادله‌های حاکم در بارگذاری عمودی و برشی به گونه مجزا بدست می‌آیند.

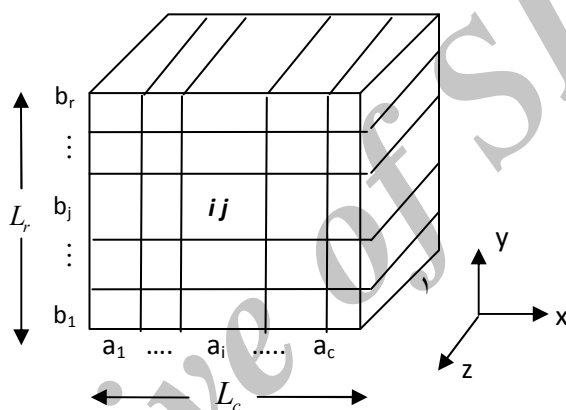
<sup>۱</sup>- Normal

<sup>۲</sup>- Uniform

<sup>۳</sup>-Beta



شکل ۱- الف) نمایشی از سطح مقطع واقعی مواد مرکب با الیاف تک جهته ب) المان نماینده برای مدل سلول واحد ساده شده SUC.



شکل ۲- هندسه سلولها در المان نماینده.

که  $[F]$  ماتریس نیرو،  $[A]$  ماتریس ضرایب و  $[\sigma]$  ماتریس تنشها نامیده می‌شوند.

### بارگذاری برشی

در این بخش تنها نیروهای برشی بر المان نماینده وارد می‌شوند. با فرض این‌که با اعمال نیروی برشی هیچ‌گونه تنش عمودی در داخل سلولها ایجاد نمی‌شود، لذا، در هر سلول سه مولفه تنش برشی مجهول وجود خواهد داشت. همچنین، تغییر درجه حرارت باعث ایجاد کرنش برشی نمی‌گردد. بنابراین،  $c \times r \times c$  مجهول وجود دارد. برای تعادل مابین تنش‌های برشی اعمالی و تنش‌های برشی داخلی سلولها باید رابطه زیر برقرار باشد:

که در آن  $E_{ij}$  مدول یانگ،  $\nu_{ij}$  نسبت پواسون،  $\alpha_{ij}$  ضرایب انبساط حرارت برای هر سلول است.  $\Delta T$  تغییر درجه حرارت از دمای پخت ماده مرکب تا دمای محیط بوده که در دمای پخت، بین اجزای ماده مرکب تنش وجود ندارد. چنانچه مقادیر مجهول تنش مشخص شوند، مقادیر کرنش آنها نیز بدست می‌آید. پس با جای‌گذاری تنش‌ها به جای کرنش‌ها، تعداد مجهولات به نصف کاهش می‌یابد. با جای‌گذاری رابطه (۴) در (۳) و با استفاده از روابط (۲) و (۱) می‌توان دستگاه زیر را با  $r \times c + r + c$  معادله و همین تعداد مجهول بدست آورد:

$$[A]_{m \times m} [\sigma]_{m \times 1} = [F]_{m \times 1} \text{ where } m = r + c + r \times c \quad ..(5)$$

$$\sum_{j=1}^r \frac{b_j L_c}{\sum_{i=1}^c a_i G_{ij}} = \frac{L_r}{G_{yz}}$$

$$\sum_{i=1}^c \frac{a_i L_r}{\sum_{j=1}^r b_j G_{ij}} = \frac{L_c}{G_{xz}}$$

$$\sum_{j=1}^r \sum_{i=1}^c \frac{a_i b_j}{G_{ij}} = \frac{L_c L_r}{G_{xy}} \quad (12)$$

### نتایج و بحث

در این پژوهش ماده مرکب سیلیکون کارباید/تیتانیوم (SiC/Ti) جهت اعمال در مدل و ارایه نتایج در نظر گرفته می‌شود. خواص الیاف و زمینه این ماده مرکب در جدول ۱ نشان داده شده است.

جدول ۱- خواص ماده مرکب سیلیکون کارباید/تیتانیوم [۱۴].

ماده	$E$ (GPa)	$\nu$	$\alpha(10^{-6}/K)$
SiC (F)	۴۰۹	۰/۲	۵
Ti (M)	۱۰۷	۰/۳	۱۰/۴

### اعمال مدل پیشنهادی جهت محاسبه خواص حالت الاستیک

شکل‌های ۳ و ۴ نشان دهنده مدول یانگ طولی نسبت به مدول یانگ زمینه در درصد‌های حجمی گوناگون می‌باشند. در شکل ۳ نتایج بدست آمده از آرایش اتفاقی دارای توزیع گوسی، بتا و یکنواخت با مدل میکرومکانیکی سلول واحد ساده شده نشان داده شده است. در شکل ۴ داده‌های مدول یانگ طولی در مقابل درصد حجمی الیاف روش سلولی [۱۵] با نتایج بدست آمده از مدل میکرومکانیکی ارایه شده با توزیع گوسی مقایسه شده است.

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^c a_i \tau_{yz}^{ij} = L_c \bar{\tau}_{yz} \\ \sum_{j=1}^r b_j \tau_{xz}^{ij} = L_r \bar{\tau}_{xz} \\ \tau_{xy}^{ij} = \bar{\tau}_{xy} \end{cases} \quad (6)$$

سازگاری کرنش‌ها در سلول‌های مجاور به صورت زیر است:

$$\begin{cases} \varepsilon_{yz}^{1j} = \varepsilon_{yz}^{ij} \quad (i > 1) \\ \varepsilon_{xz}^{il} = \varepsilon_{xz}^{ij} \quad (j > 1) \end{cases} \quad (7)$$

تغییر مکان زاویه‌ای کل المان نماینده برابر مجموع تغییر زاویه سلول‌های یک ردیف در آن جهت می‌باشد:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^c a_i \varepsilon_{xz}^{il} = L_c \bar{\varepsilon}_{xz} \\ \sum_{j=1}^r b_j \varepsilon_{yz}^{1j} = L_r \bar{\varepsilon}_{yz} \\ \sum_{j=1}^r \sum_{i=1}^c a_i b_j \varepsilon_{xy}^{ij} = L_c L_r \bar{\varepsilon}_{xy} \end{cases} \quad (8)$$

هم‌چنین، روابط زیر برای مدول‌های برشی ماده مرکب برقرار می‌باشد:

$$G_{yz} = \frac{\bar{\tau}_{yz}}{2\bar{\varepsilon}_{yz}} \quad G_{xz} = \frac{\bar{\tau}_{xz}}{2\bar{\varepsilon}_{xz}} \quad G_{xy} = \frac{\bar{\tau}_{xy}}{2\bar{\varepsilon}_{xy}} \quad (9)$$

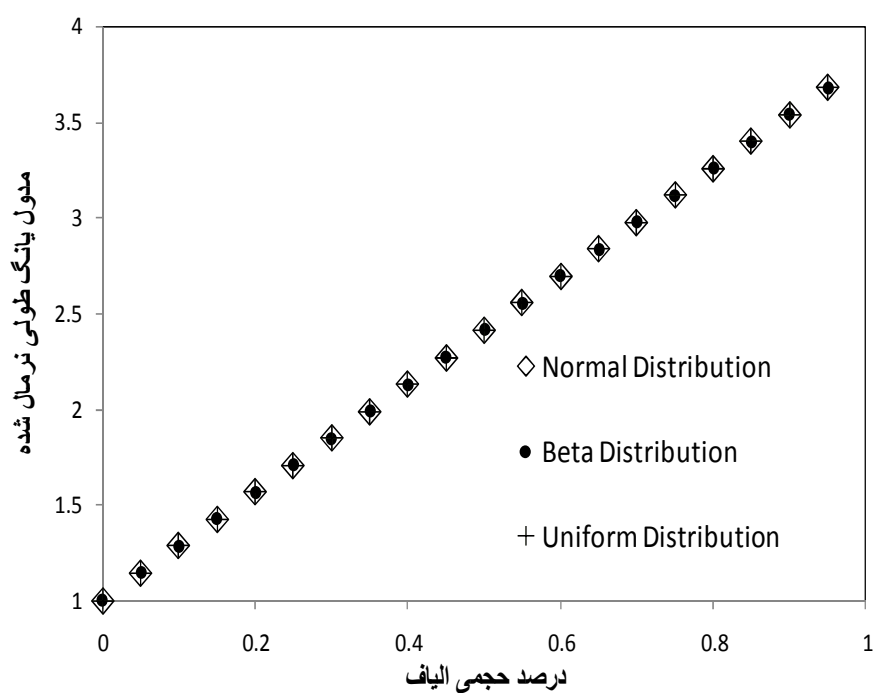
با جای‌گذاری (۹) در (۷) رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\begin{cases} \tau_{yz}^{ij} = \frac{G_{ij}}{G_{1j}} \tau_{yz}^{1j} \\ \tau_{xz}^{ij} = \frac{G_{ij}}{G_{il}} \tau_{xz}^{il} \end{cases} \quad (10)$$

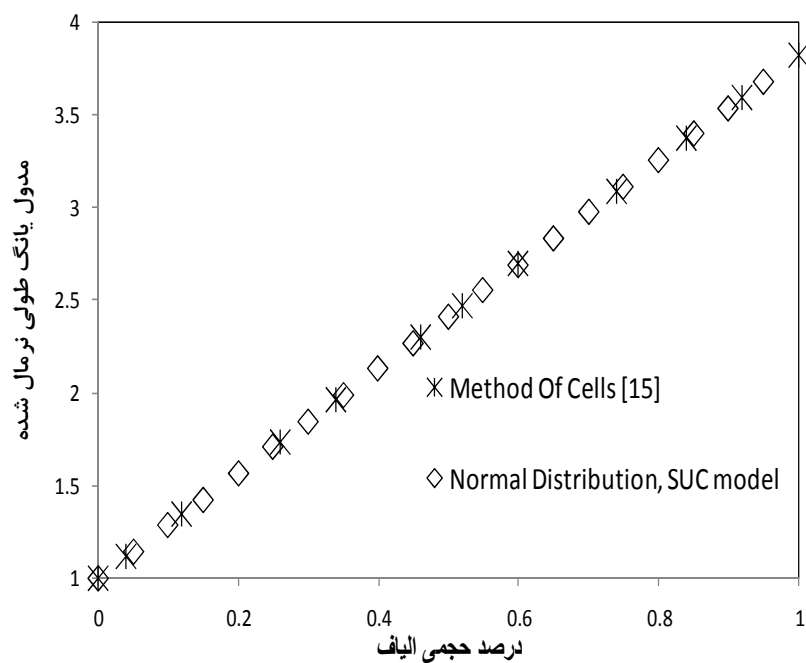
با جای‌گذاری معادله (۱۰) در معادله (۶) رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\begin{cases} \tau_{yz}^{1j} \times \sum_{i=1}^c (a_i \times \frac{G_{ij}}{G_{1j}}) = L_c \bar{\tau}_{yz} \\ \tau_{xz}^{il} \times \sum_{j=1}^r (b_j \times \frac{G_{ij}}{G_{il}}) = L_r \bar{\tau}_{xz} \\ \tau_{xy}^{ij} = \bar{\tau}_{xy} \end{cases} \quad (11)$$

و سپس با جای‌گذاری  $(\tau_{yz}^{1j}, \tau_{xz}^{il}, \tau_{xy}^{ij})$  در (۱۱) معادله‌های زیر بدست می‌آیند:



شکل ۳- مقایسه مدول یانگ طولی نسبت به مدول یانگ زمینه در مقابل درصد حجمی الیاف با روش SUC با آرایش اتفاقی دارای توزیع گوسی، بتا و یکنواخت.



شکل ۴- مقایسه مدول یانگ طولی نسبت به مدول یانگ زمینه در مقابل درصد حجمی الیاف.

۳ توزیع تصادفی گوسی، بتا و یکنواخت، توزیع یکنواخت نسبت به دو توزیع دیگر مقدار بیش‌تری برای مدول یانگ عرضی برآورد می‌کند و توزیع نرمال نیز نسبت به سایر توزیع‌ها کم‌ترین میزان برای این مدول می‌دهد. با توجه به شکل ۶ می‌توان این چنین نتیجه گرفت که در درصد حجمی پایین مدول الاستیسیته عرضی مستقل از چگونگی توزیع تصادفی الیاف در زمینه بوده و تنها به درصد حجمی الیاف وابسته است.

حال نسبت پواسون طولی ماده مرکب به ازای درصد‌های حجمی گوناگون بدست آورده می‌شود. در شکل ۷ داده‌های روش سلولی [۱۵] با نتایج بدست آمده از مدل میکرومکانیکی ارایه شده با توزیع گوسی مقایسه شده است.

$v_{equivalent}$  ای که به وسیله فرض آرایش اتفاقی با توزیع نرمال بدست می‌آید، به میزان بسیار اندکی (قابل اغماض) بیش‌تر از مقادیر بیش‌بینی شده با روش سلولی می‌باشد. از سوی دیگر، با افزایش درصد حجمی الیاف، ضریب پواسون به صورت خطی کاهش می‌یابد. در شکل ۸ نسبت پواسون طولی در مقابل درصد حجمی الیاف با آرایش اتفاقی دارای توزیع گوسی، بتا و یکنواخت با مدل میکرومکانیکی سلول واحد ساده شده نشان داده شده است.

با توجه به شکل ۸، هرچند در درصد‌های حجمی پایین تمامی مدل‌های آرایش اتفاقی مبتنی بر توزیع‌های گوناگون مقادیر یکسانی را برای  $v_{equivalent}$  پیش‌بینی می‌کنند، اما  $v_{equivalent}$  با آرایش اتفاقی دارای توزیع نرمال و یکنواخت که کاملاً با هم تطابق داشته و هر دوی آن‌ها اندکی از آنچه توزیع بتا برای  $v_{equivalent}$  پیش‌بینی می‌کند، بزرگ‌ترند. برای این خاصیت الاستیک نیز می‌توان این گونه بیان کرد که با تقریب خوبی می‌توان اندازه این خاصیت را مستقل از چگونگی توزیع الیاف در زمینه و تنها وابسته به درصد حجمی الیاف دانست.

حال نسبت پواسون عرضی ماده مرکب به ازای درصد‌های حجمی گوناگون بدست آورده می‌شود. در شکل ۹ داده‌های روش سلولی [۱۵] با نتایج بدست آمده از مدل میکرومکانیکی ارایه شده با توزیع گوسی مقایسه شده است.

دو نمودار بالا نشان می‌دهند که داده‌ها بر هم منطبق و تفاوت قابل ملاحظه‌ای بین آنها مشاهده نمی‌شود. از سوی دیگر، رابطه بین مدول یانگ با درصد حجمی الیاف خطی است. بدین معنا که با افزایش درصد حجمی الیاف مدول یانگ طولی نیز افزایش می‌یابد. نمودار برحسب مدول الاستیسیته معادلی رسم شده که نسبت به زمینه استاندارد شده است. در جایی که درصد حجمی الیاف برابر صفر است مدول یانگ طولی برابر مدول یانگ زمینه و جایی که درصد حجمی الیاف برابر یک است، مدول یانگ برابر مدول یانگ الیاف می‌باشد. برای محاسبه شیب خط می‌توان نوشت:

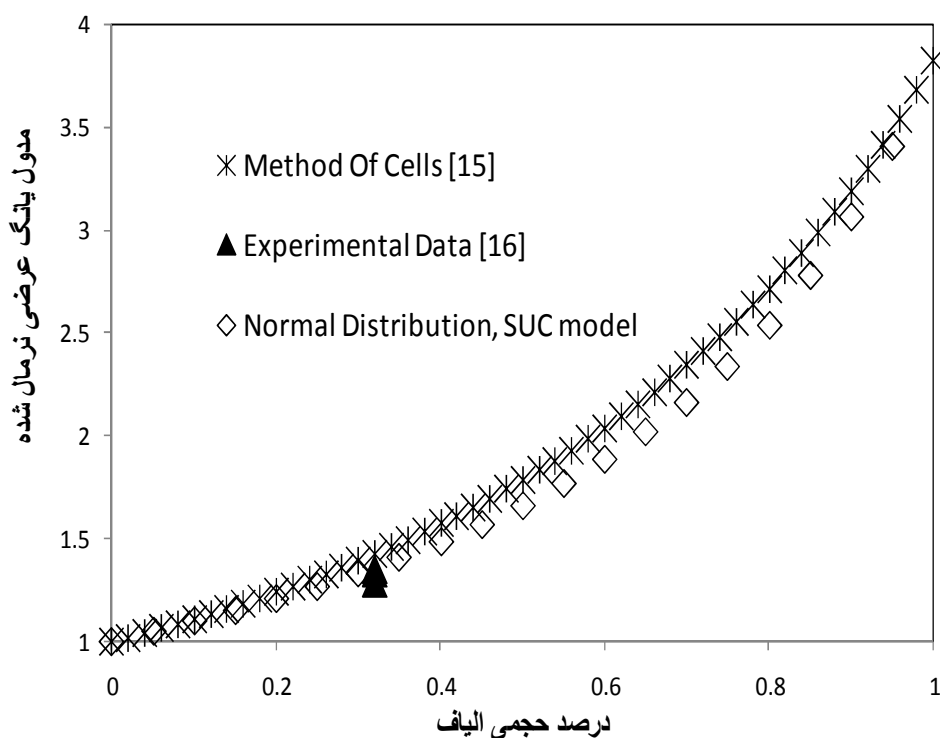
$$E = FVF \times E_f + (1 - FVF) \times E_m \quad (13)$$

بنابراین، می‌توان نتیجه گرفت که مدول یانگ طولی مستقل از چگونگی توزیع الیاف در زمینه است و تنها با تغییر درصد حجمی الیاف تغییر می‌کند.

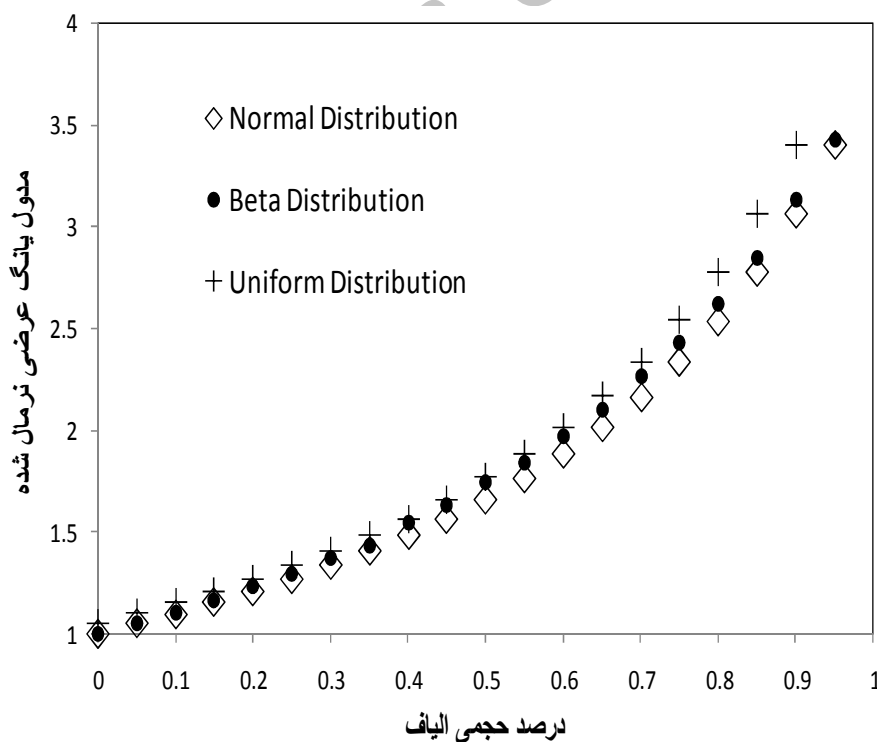
حال مدول یانگ عرضی ماده مرکب نسبت به مدول یانگ زمینه به ازای درصد‌های حجمی گوناگون بدست آورده می‌شود. در شکل ۵ نتایج بدست آمده از آرایش اتفاقی دارای توزیع گوسی با نتایج بدست آمده از روش سلولی [۱۵] و همچنین، داده تجربی [۱۶] مقایسه شده است.

همان‌گونه که شکل ۵ نشان می‌دهد، آرایش اتفاقی دارای توزیع نرمال بهترین تطابق را با داده تجربی دارد. این داده تجربی برای درصد حجمی ۳۳ درصد داده شده است. در شکل ۶ مدول یانگ عرضی نسبت به مدول یانگ زمینه با آرایش اتفاقی دارای توزیع گوسی، بتا و یکنواخت با مدل میکرومکانیکی سلول واحد ساده شده نشان داده شده است.

با توجه به شکل ۶ فرض آرایش اتفاقی با توزیع نرمال از تمامی معیارهای دیگر محتاطانه‌تر عمل می‌کند و کم‌ترین میزان برای مدول یانگ عرضی را بدست می‌دهد. با افزایش درصد حجمی الیاف این خاصیت نیز افزایش می‌یابد، اما همان‌گونه که شکل ۶ نشان می‌دهد، نمی‌توان رابطه خطی برای این مدول الاستیسیته متصور شد. اگر برای آرایش الیاف در زمینه چیدمان اتفاقی در نظر گرفته شود، چگونگی تغییر مدول یانگ عرضی با درصد حجمی الیاف غیر خطی و افزایشی خواهد بود. از سوی دیگر، بین

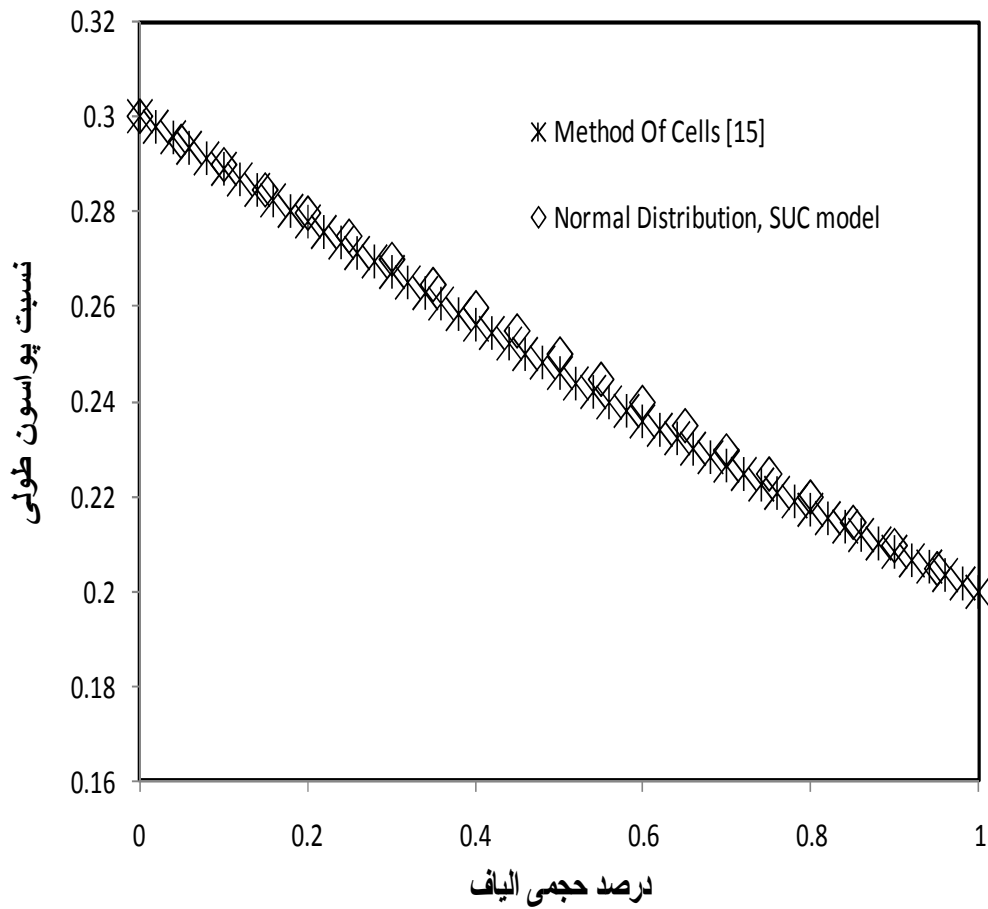


شکل ۵- مقایسه مدول یانگ عرضی نسبت به مدول یانگ زمینه در مقابل درصد حجمی الیاف.

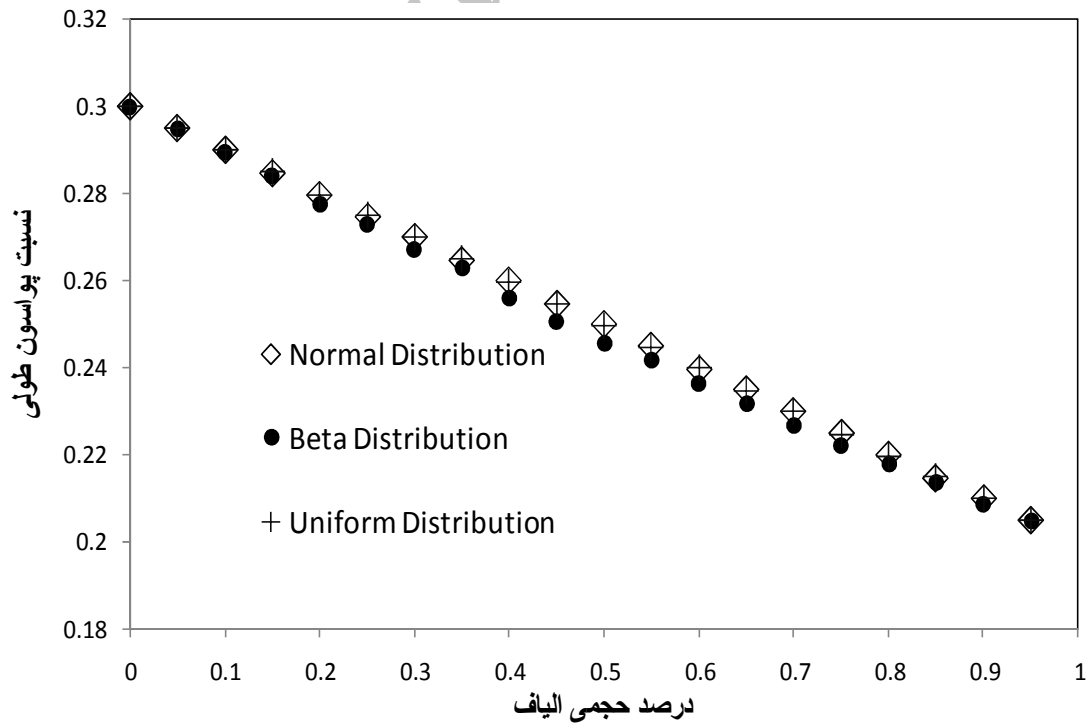


شکل ۶- مقایسه مدول یانگ عرضی نسبت به مدول یانگ زمینه با روش SUC با آرایش اتفاقی دارای توزیع گوسی، بتا و یکنواخت.





شکل ۷- مقایسه نسبت پواسون طولی در مقابل درصد حجمی الیاف.

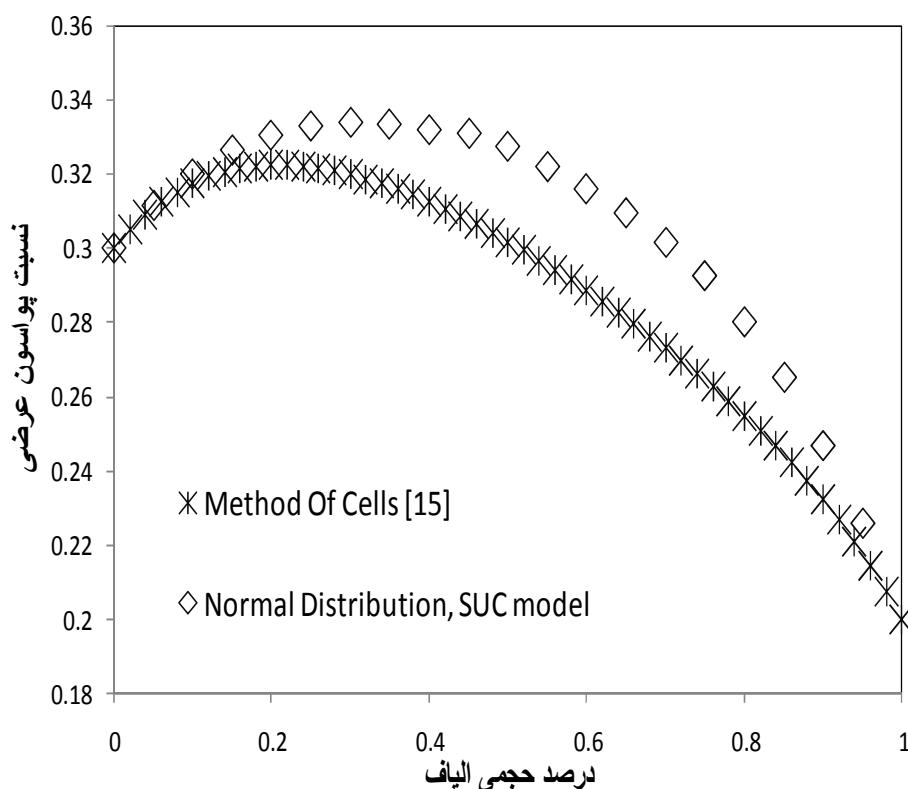


شکل ۸- مقایسه نسبت پواسون طولی با مدل SUC با آرایش اتفاقی دارای توزیع گوسی، بتا و یکنواخت.

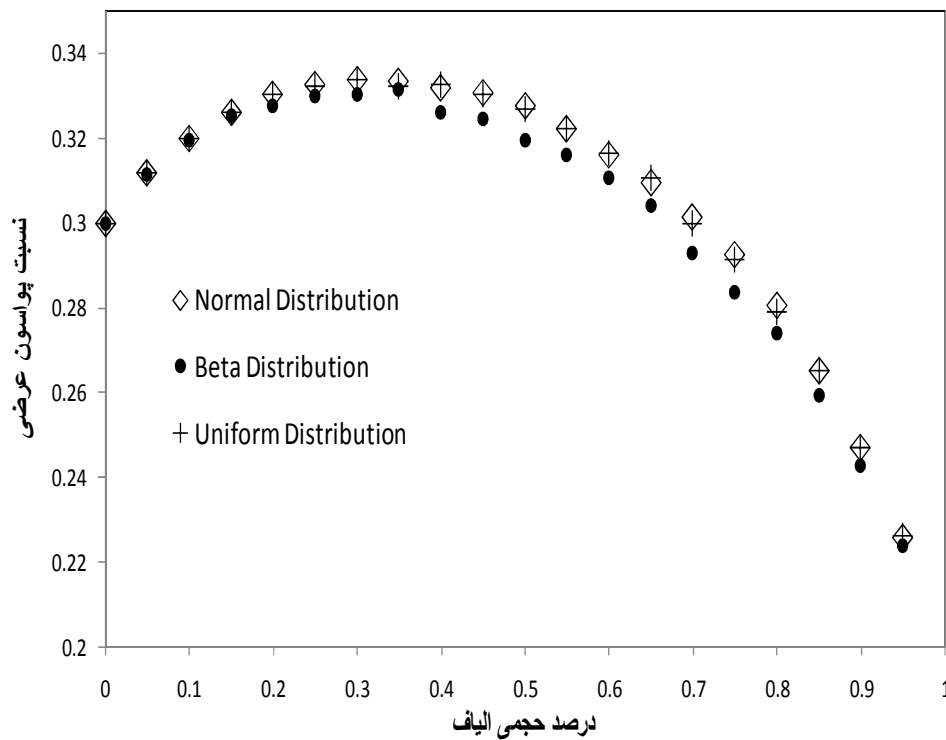
خوبی با یکدیگر برابرند. در ضمن بررسی این نمودار نشان می‌دهد که با افزایش درصد حجمی الیاف مقدار ضریب پواسون عرضی معادل ابتدا افزایش و سپس کاهش می‌یابد. این افزایش نسبت پواسون عرضی به دلیل قید وارد شده در زمینه به وسیله الیاف در جهت محوری می‌باشد که سبب حالت کرنش صفحه‌ای در صفحه  $x-y$  شده و در نتیجه، موجب افزایش کرنش می‌شود.

با توجه به شکل ۹ چگونگی تغییر ضریب پواسون عرضی در دو حالت آرایش اتفاقی دارای توزیع نرمال و روش سلولی از لحاظ رفتار بسیار به هم شبیه بوده، با این تفاوت که مقادیر پیش‌بینی شده به وسیله توزیع نرمال همواره بیش‌تر از مقادیر پیش‌بینی شده با روش سلولی است.

با توجه به شکل ۱۰ ضریب پواسون‌های معادلی که به ازای توزیع‌های اتفاقی گوناگون بدست می‌آیند با تقریب



شکل ۹- مقایسه نسبت پواسون عرضی در مقابل درصد حجمی الیاف.

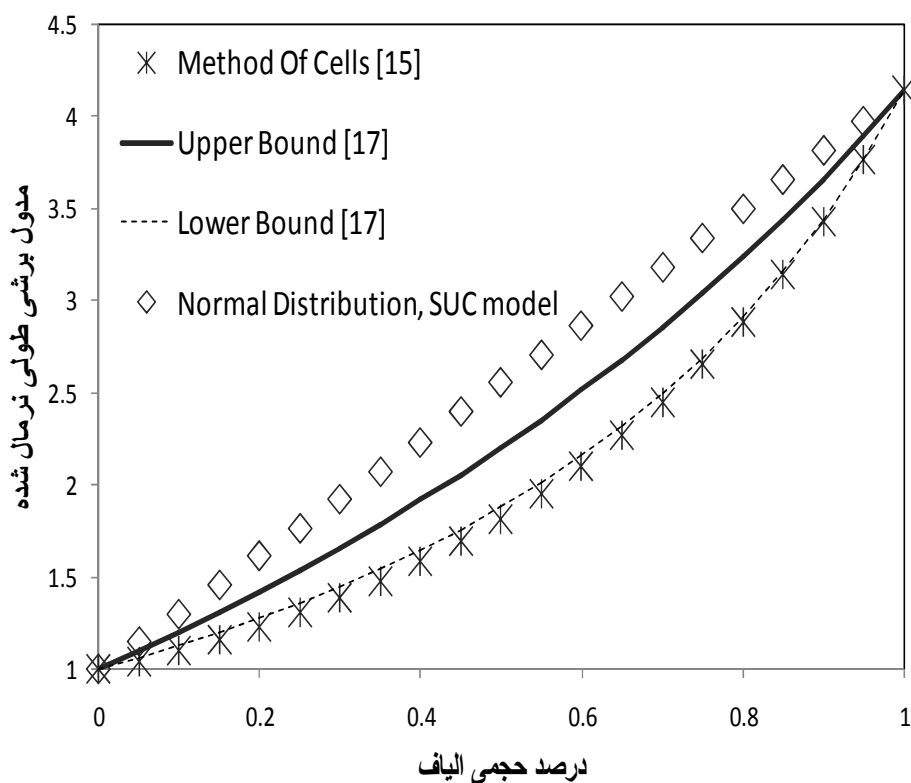


شکل ۱۰- مقایسه نسبت پواسون عرضی با مدل SUC با آرایش اتفاقی دارای توزیع گوسی، بتا و یکنواخت

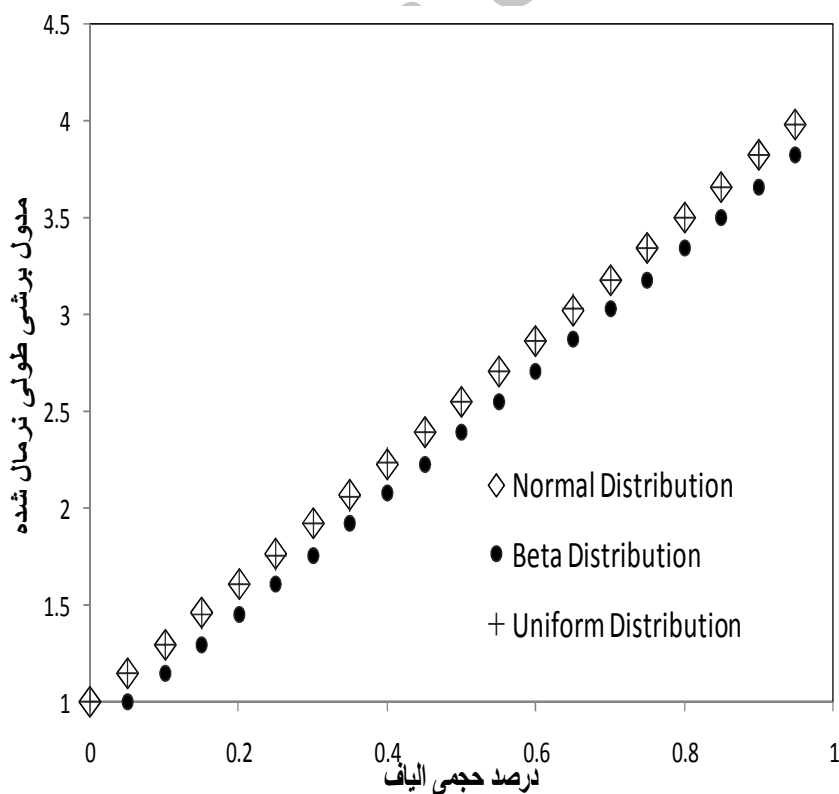
در شکل ۱۲ مدل برشی طولی در مقابل درصد حجمی الیاف با آرایش اتفاقی دارای توزیع گوسی، بتا و یکنواخت با مدل میکرومکانیکی سلول واحد ساده شده نشان داده شده است. با توجه به شکل ۱۲ اگر آرایش اتفاقی به عنوان چگونگی چیدمان الیاف در زمینه در نظر گرفته شود، مستقل از آن که این آرایش اتفاقی دارای چه توزیعی است، چگونگی تغییرات مدل برشی با درصد حجمی خطی خواهد بود. تنها موردی که در این بخش باید به آن توجه شود این است که مقادیری که دو توزیع یکنواخت و نرمال پیش‌بینی می‌کنند، یکسان و همواره بزرگ‌تر از مقادیر برآورد شده به وسیله توزیع بتا خواهد بود.

حال مدل برشی عرضی ماده مرکب به ازای درصدهای حجمی گوناگون بدست آورده می‌شود. در شکل ۱۳ نتایج بدست آمده از مدل میکرومکانیکی سلول واحد ساده شده با آرایش اتفاقی دارای توزیع گوسی با نتایج بدست آمده از روش سلولی [۱۵]، کران بالا، کران پایین [۱۷] و استوانه کامپوزیتی [۱۸] مقایسه شده است.

حال مدل برشی طولی ماده مرکب به ازای درصدهای حجمی گوناگون بدست آورده می‌شود. در شکل ۱۱ نتایج بدست آمده از مدل میکرومکانیکی سلول واحد ساده شده با آرایش اتفاقی دارای توزیع گوسی با نتایج بدست آمده از سایر روش‌ها مقایسه شده است. در شکل ۱۱ مقادیری که برای مدل برشی طولی با به کار بردن مدل‌های کران بالا، کران پایین [۱۷] و روش سلولی [۱۵] پیش‌بینی شده است. در کنار مقادیر محاسبه شده مدل سلول واحد ساده شده با فرض آرایش اتفاقی دارای توزیع نرمال آورده شده‌اند تا بتوان براحتی آن‌ها را با هم مقایسه کرد. با مراجعه به این نمودار مشاهده می‌شود که اگر آرایش الیاف در زمینه اتفاقی فرض شود، نمودار چگونگی تغییرات مدل برشی طولی با تغییر درصد حجمی، خطی خواهد بود. بدین معنا که با افزایش درصد حجمی الیاف، مدل برشی متناسب با آن افزایش می‌یابد. حال آن که در مدل‌های دیگر مشاهده می‌شود چگونگی افزایش مدل برشی با افزایش درصد حجمی خطی نیست.



شکل ۱۱- مقایسه مدول برشی طولی در مقابل درصد حجمی الیاف.

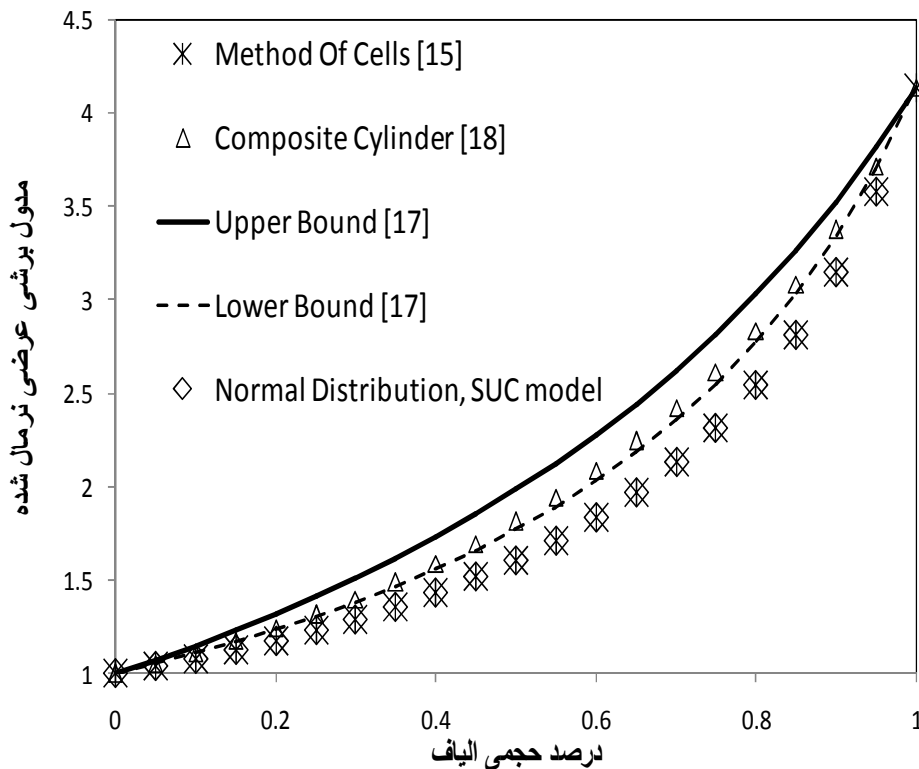


شکل ۱۲- مقایسه مدول برشی طولی با مدل SUC با آرایش اتفاقی دارای توزیع گوسی، بتا و یکنواخت.

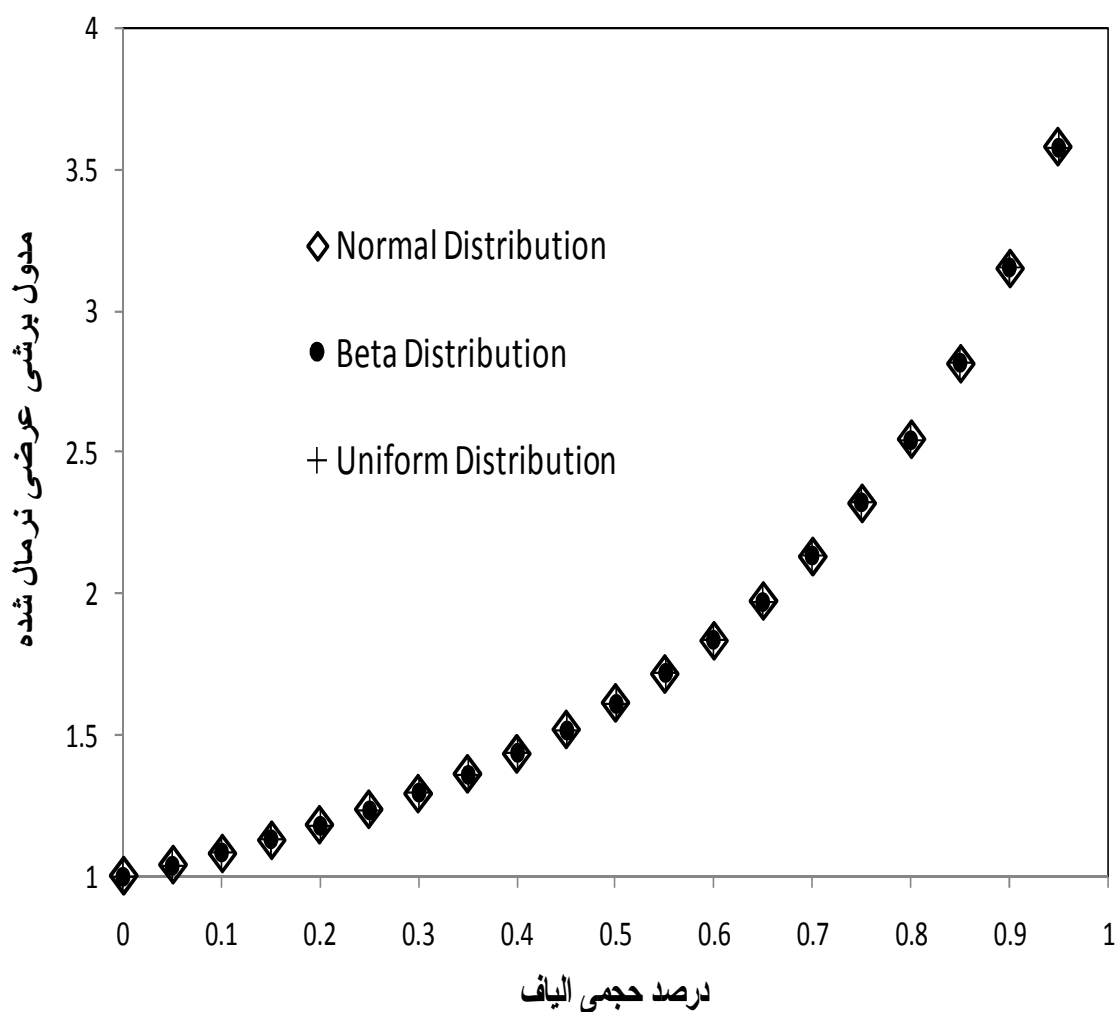
یکنواخت با مدل میکرومکانیکی سلول واحد ساده شده نشان داده شده است. با توجه به شکل ۱۴، نتایج بدست آمده از این مدل میکرومکانیکی با آرایش اتفاقی دارای توزیع گوسی، بتا و یکنواخت یک مقدار برای مدول برشی عرضی را پیش‌بینی می‌کنند. لذا، می‌توان گفت این خاصیت مستقل از چگونگی توزیع است و تنها به درصد حجمی الیاف در زمینه بستگی دارد.

با توجه به شکل ۱۳ تمامی مدل‌ها چگونگی تغییر مدول برشی عرضی با افزایش درصد حجمی الیاف را غیرخطی و افزایشی پیش‌بینی می‌کنند. هر دو مدل روش سلولی و سلول واحد ساده شده با آرایش اتفاقی با توزیع گوسی به ازای درصدهای حجمی گوناگون میزان مدول برشی عرضی یکسانی بدست می‌دهند.

در شکل ۱۴ مدول برشی عرضی در مقابل درصد حجمی الیاف با آرایش اتفاقی دارای توزیع گوسی، بتا و



شکل ۱۳- مقایسه مدول برشی عرضی در مقابل درصد حجمی الیاف.



شکل ۱۴- مقایسه مدول برشی طولی با مدل SUC با آرایش اتفاقی دارای توزیع گوسی، بتا و یکنواخت.

آزمون فرض یکی از ابزارهای قدرتمند در آمار استنباطی می‌باشد. با استفاده از [۱۶] مقادیری که برای مدول یانگ طولی و عرضی به صورت تجربی در درصد حجمی ۳۳٪ بدست می‌آید به ترتیب برابر با ۱۹۹ و ۱۴۵ گیگا پاسکال می‌باشد.

#### آزمون فرض و بررسی مدول یانگ طولی

فرض صفر (فرض آماری که برای رد شدن تنظیم می‌شود)  $H_0$ ، و فرض مقابل (فرض آماری که در مقابل فرض صفر قرار می‌گیرد)  $H_1$ ، به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

#### بررسی نتایج خواص الاستیک از راه اعمال آزمون فرض

در این بخش به بررسی نتایج بدست آمده از دید آماری پرداخته و آزمون فرض بر نتایج اعمال می‌شود. اغلب امکان مطالعه روی کل جامعه وجود ندارد زیرا کل جامعه در دسترس نیست. لذا، به ناچار تعداد محدودی از افراد جامعه که نمونه نامیده می‌شود، انتخاب و مورد بررسی قرار می‌گیرد و از نتایج بدست آمده درباره پارامترهای نمونه به کمک روش‌های علمی پارامترهای جامعه را می‌توان در حد قابل قبولی برآورد کرد. این بخش از علم آمار که درباره برآورد پارامترهای جامعه از روی پارامترهای نمونه است، آمار استنباطی نامیده می‌شود. از سوی دیگر،

و انحراف معیار  $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$  است (قضیه‌ی حد مرکزی). در

نتیجه:

$$N(0,1) \cong Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \quad (15)$$

از جدول‌های کتاب‌های آماری [۱۹] برای این مقدار  $\alpha$  مقدار  $Z$  برابر با ۱/۹۶ می‌باشد. با استفاده از قضیه حد مرکزی برای نقاط بدست آمده مقدار  $Z$  محاسبه می‌شود، اگر این مقدار از ۱/۹۶ بزرگ‌تر شد، فرض صفر رد می‌شود، در غیر این صورت فرض صفر درست خواهد بود. در جدول ۲ نتایج بدست آمده از توزیع نرمال برای ۲۵ مرتبه تکرار آمده است.

$$H_0: \mu = 199$$

$$H_1: \mu > 199$$

برنامه برای درصد حجمی ۳۳٪ به تعداد ۲۵ مرتبه تکرار می‌شود. احتمال خطای نوع اول  $\alpha$ ، که به صورت زیر تعریف شده [۱۹] برابر با ۰/۰۵ در نظر گرفته می‌شود که در مسایل مهندسی این فرض برای  $\alpha$  فرض معقولی است.  $\alpha = P(H_0 \text{ درست باشد} | \text{رد فرض } H_0)$  (۱۴) بدین مفهوم که با وجود درستی فرض صفر، اگر رد شود خطای نوع اول ایجاد می‌شود [۱۸].

در نمونه‌گیری تصادفی از یک جامعه اختیاری با میانگین  $\mu$  و انحراف معیار  $\sigma$  هنگامی که  $n$  (تعداد نمونه) بزرگ است، توزیع  $\bar{X}$  به گونه تقریبی نرمال با میانگین  $\mu$

جدول ۲- نتایج توزیع نرمال برای مدول یانگ طولی.

گام ۱	۲۰۶/۶۷۵	گام ۱۴	۲۰۶/۶۷۱
گام ۲	۲۰۶/۶۷۳۴	گام ۱۵	۲۰۶/۶۷۴۴
گام ۳	۲۰۶/۶۷۲۴	گام ۱۶	۲۰۶/۶۷۳۴
گام ۴	۲۰۶/۶۷۷۳	گام ۱۷	۲۰۶/۶۷۶۵
گام ۵	۲۰۶/۶۷۵۳	گام ۱۸	۲۰۶/۶۷۴۵
گام ۶	۲۰۶/۶۷۱۳	گام ۱۹	۲۰۶/۶۷۳۷
گام ۷	۲۰۶/۶۷۲۲	گام ۲۰	۲۰۶/۶۷۴۵
گام ۸	۲۰۶/۶۷۱۳	گام ۲۱	۲۰۶/۶۷۲۱
گام ۹	۲۰۶/۶۷۳۴	گام ۲۲	۲۰۶/۶۷۶۲
گام ۱۰	۲۰۶/۶۷۱۱	گام ۲۳	۲۰۶/۶۷۵۱
گام ۱۱	۲۰۶/۶۷۶۵	گام ۲۴	۲۰۶/۶۷۱
گام ۱۲	۲۰۶/۶۷۶	گام ۲۵	۲۰۶/۶۷۴۷
گام ۱۳	۲۰۶/۶۷۵۳	میانگین	۲۰۶/۶۷۳۹

در این جا نیز مقدار محاسبه شده  $Z=19778$  بوده و بزرگتر از مقدار مرزی است که نتیجه آن باطل شدن فرض صفر و برقرار بودن فرض مقابل است. مقداری که برای  $Z$  بدست می آید، بسیار نزدیک به مقداری است که برای این پارامتر با در نظر گرفتن آرایش اتفاقی دارای توزیع نرمال بدست آمده است. این امر بیانگر آن است انحراف معیار در آرایش تصادفی یکنواخت مشابه حالت نرمال است.

### آزمون فرض و بررسی مدول یانگ عرضی

فرض صفر  $H_0$ ، و فرض مقابل  $H_1$ ، به صورت زیر در نظر گرفته می شود:

$$H_0: \mu=145$$

$$H_1: \mu>145$$

در جدول ۵ نتایج بدست آمده از توزیع نرمال برای ۲۵ مرتبه تکرار آمده است. با توجه به داده های جدول ۵،  $Z=108$  بدست می آید که در نتیجه آن فرض صفر باطل و فرض خلف آن برقرار است. در جدول ۶ نتایج بدست آمده از توزیع بتا برای ۲۵ مرتبه تکرار آمده است.

با توجه به داده های بالا  $Z=19880$  محاسبه شده و از مقدار مرزی ای که برای آن در نظر گرفته شده بسیار بزرگتر است. لذا، فرض صفر باطل و فرض مخالف برقرار است. بدین معنا که اگر آرایش الیاف در زمینه اتفاقی و دارای توزیع نرمال می بود، مقدار مدول یانگ بدست آمده برای آن قطعاً بزرگتر از مقداری می شد که از راه ساخت با روش های کنونی بدست آمده است. در جدول ۳ نتایج بدست آمده از توزیع بتا برای ۲۵ مرتبه تکرار آمده است.

در این جا  $Z=4641$  می باشد که این مقدار بزرگتر از مقدار مرزی است که نتیجه آن مشابه بالا، باطل شدن فرض صفر و برقرار بودن فرض مقابل است. تفاوتی که با حالت قبل وجود دارد این است که در این جا مقدار  $Z$  نسبت به بالا کوچکتر بدست می آید. این امر بیانگر آن است انحراف معیار در آرایش اتفاقی بتا نسبت به حالت نرمال بیشتر است، یعنی اگر چیدمان الیاف در زمینه را دارای آرایش اتفاقی با توزیع بتا در نظر بگیریم، نتایج پراکندگی مقادیر بدست آمده برای مدول یانگ طولی حول میانگین بیشتر از آرایش اتفاقی با توزیع نرمال خواهد بود. در جدول ۴ نتایج بدست آمده از توزیع یکنواخت برای ۲۵ مرتبه تکرار آمده است.

جدول ۳- نتایج توزیع بتا برای مدول یانگ طولی.

گام ۱	۲۰۶/۷۳۰۹	گام ۱۴	۲۰۶/۷۲۸۷
گام ۲	۲۰۶/۷۱۳۳	گام ۱۵	۲۰۶/۷۲۲
گام ۳	۲۰۶/۷۳۸۷	گام ۱۶	۲۰۶/۷۱۷۷
گام ۴	۲۰۶/۷۳	گام ۱۷	۲۰۶/۷۲۳۹
گام ۵	۲۰۶/۷۲۲۸	گام ۱۸	۲۰۶/۷۱۴۸
گام ۶	۲۰۶/۷۲۹	گام ۱۹	۲۰۶/۷۲۷۴
گام ۷	۲۰۶/۷۳۳۵	گام ۲۰	۲۰۶/۷۱۷۹
گام ۸	۲۰۶/۷۱۳۸	گام ۲۱	۲۰۶/۷۱۳۱
گام ۹	۲۰۶/۷۱۰۵	گام ۲۲	۲۰۶/۷۱۷۳
گام ۱۰	۲۰۶/۷۲۹۹	گام ۲۳	۲۰۶/۷۱۹۵
گام ۱۱	۲۰۶/۷۲۳۸	گام ۲۴	۲۰۶/۷۱۸۵
گام ۱۲	۲۰۶/۷۰۳۷	گام ۲۵	۲۰۶/۷۱۲۴
گام ۱۳	۲۰۶/۷۱۷۵	میانگین	۲۰۶/۷۲۱۲



جدول ۴- نتایج توزیع یکنواخت برای مدول یانگ طولی

گام ۱	۲۰۶/۶۷۳۴	گام ۱۴	۲۰۶/۶۷۵۳
گام ۲	۲۰۶/۶۷۵	گام ۱۵	۲۰۶/۶۷۱
گام ۳	۲۰۶/۶۷۳۴	گام ۱۶	۲۰۶/۶۷۴۴
گام ۴	۲۰۶/۶۷۲۴	گام ۱۷	۲۰۶/۶۷۳۴
گام ۵	۲۰۶/۶۷۷۳	گام ۱۸	۲۰۶/۶۷۶۵
گام ۶	۲۰۶/۶۷۵۳	گام ۱۹	۲۰۶/۶۷۴۵
گام ۷	۲۰۶/۶۷۱۳	گام ۲۰	۲۰۶/۶۷۳۷
گام ۸	۲۰۶/۶۷۲۲	گام ۲۱	۲۰۶/۶۷۴۵
گام ۹	۲۰۶/۶۷۱۳	گام ۲۲	۲۰۶/۶۷۲۱
گام ۱۰	۲۰۶/۶۷۳۴	گام ۲۳	۲۰۶/۶۷۶۲
گام ۱۱	۲۰۶/۶۷۱۱	گام ۲۴	۲۰۶/۶۷۵۱
گام ۱۲	۲۰۶/۶۷۶۵	گام ۲۵	۲۰۶/۶۷۱
گام ۱۳	۲۰۶/۶۷۶	میانگین	۲۰۶/۶۷۳۹

جدول ۵- نتایج توزیع نرمال برای مدول یانگ عرضی.

گام ۱	۲۰۶/۶۷۳۴	گام ۱۴	۲۰۶/۶۷۵۳
گام ۲	۲۰۶/۶۷۵	گام ۱۵	۲۰۶/۶۷۱
گام ۳	۲۰۶/۶۷۳۴	گام ۱۶	۲۰۶/۶۷۴۴
گام ۴	۲۰۶/۶۷۲۴	گام ۱۷	۲۰۶/۶۷۳۴
گام ۵	۲۰۶/۶۷۷۳	گام ۱۸	۲۰۶/۶۷۶۵
گام ۶	۲۰۶/۶۷۵۳	گام ۱۹	۲۰۶/۶۷۴۵
گام ۷	۲۰۶/۶۷۱۳	گام ۲۰	۲۰۶/۶۷۳۷
گام ۸	۲۰۶/۶۷۲۲	گام ۲۱	۲۰۶/۶۷۴۵
گام ۹	۲۰۶/۶۷۱۳	گام ۲۲	۲۰۶/۶۷۲۱
گام ۱۰	۲۰۶/۶۷۳۴	گام ۲۳	۲۰۶/۶۷۶۲
گام ۱۱	۲۰۶/۶۷۱۱	گام ۲۴	۲۰۶/۶۷۵۱
گام ۱۲	۲۰۶/۶۷۶۵	گام ۲۵	۲۰۶/۶۷۱
گام ۱۳	۲۰۶/۶۷۶	میانگین	۲۰۶/۶۷۳۹

جدول ۶- نتایج توزیع بتا برای مدول یانگ عرضی.

گام ۱	۱۵۲/۳۰۲۸	گام ۱۴	۱۵۲/۳۶۵۲
گام ۲	۱۵۰/۹۵۰۷	گام ۱۵	۱۵۱/۷۶۶۸
گام ۳	۱۵۳/۱۹۸	گام ۱۶	۱۵۱/۴۰۰۸
گام ۴	۱۵۲/۲۰۰۳	گام ۱۷	۱۵۱/۷۳۴۱
گام ۵	۱۵۱/۸۸۱۲	گام ۱۸	۱۵۰/۹۴۴۲
گام ۶	۱۵۲/۴۰۴۸	گام ۱۹	۱۵۲/۲۰۹۹
گام ۷	۱۵۲/۷۴۸۴	گام ۲۰	۱۵۱/۳۲۱۲
گام ۸	۱۵۱/۰۸۴۹	گام ۲۱	۱۵۰/۹۵۹۳
گام ۹	۱۵۰/۸۵۱۸	گام ۲۲	۱۵۱/۲۴۹۹
گام ۱۰	۱۵۲/۲۸۰۸	گام ۲۳	۱۵۱/۴۳۸۱
گام ۱۱	۱۵۱/۸۴۸۴	گام ۲۴	۱۵۱/۲۴۶۴
گام ۱۲	۱۴۹/۹۸۱۴	گام ۲۵	۱۵۰/۸۲۲۲
گام ۱۳	۱۵۱/۰۴۸۳	میانگین	۱۵۱/۶۰۹۷

الیاف در زمینه دارای آرایش اتفاقی با توزیع یکنواخت باشد، پراکندگی داده‌ها حول میانگین بسیار نزدیک به چیدمان اتفاقی دارای آرایش نرمال است.

#### بررسی اثر توزیع الیاف بر تسلیم زمینه

فرض شروع تسلیم بر اساس تسلیم اولین سلول زمینه (رسیدن به تنش تسلیم زمینه  $\sigma_{y,p}$ ،  $910$  مگاپاسکال [۲۰]) می‌باشد. در رسم منحنی‌های تسلیم از شکست الیاف صرف نظر شده و فقط تسلیم زمینه ملاک بوده است. معیار تسلیم، معیار فون میزس طبق رابطه زیر می‌باشد:

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \left[ (\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_x - \sigma_z)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 \right] \quad (16)$$

= yield stress

در شکل ۱۵ منحنی تسلیم زمینه به ازای درصد حجمی ۳۵٪ و در صفحه  $x-y$  به ازای توزیع‌های گوناگون آمده است.

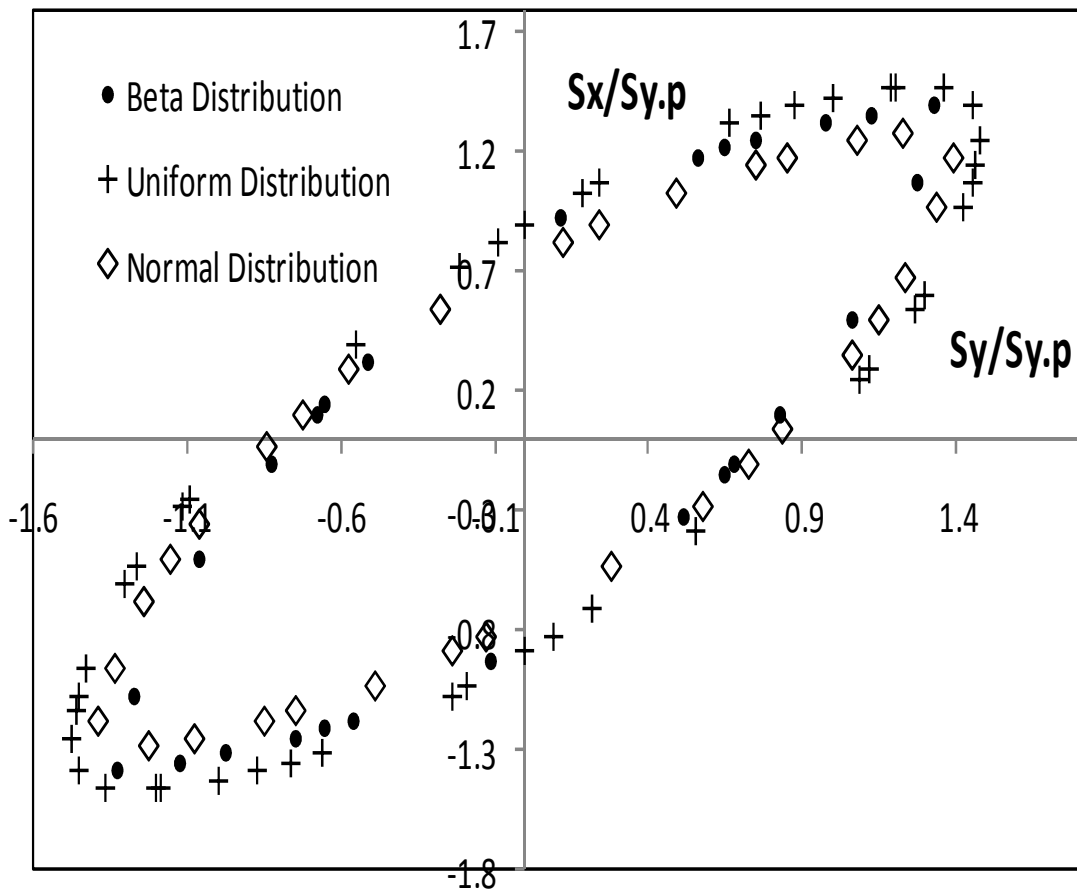
با مشاهده شکل ۱۵، با وجود این که درصد حجمی الیاف یکسان است، شکل منحنی‌های تسلیم با هم تفاوت می‌کند و این بیانگر وابستگی منحنی تسلیم به چگونگی چیدمان الیاف است.

در این جا نیز از محاسبات مقدار  $Z=44$  بدست آمده و بزرگ‌تر از مقدار مرزی است که نتیجه آن مشابه قبل، باطل شدن فرض صفر و برقرار بودن فرض مقابل است. تفاوتی که در آیین حالت، با حالت قبل وجود دارد این است که در این جا مقدار  $Z$  نسبت به بالا کوچک‌تر بدست می‌آید. این امر بیانگر آن است انحراف معیار در آرایش اتفاقی بتا نسبت به حالت نرمال بزرگ‌تر است، یعنی اگر چیدمان الیاف در زمینه دارای آرایش اتفاقی با توزیع بتا در نظر گرفته شود، نتایج پراکندگی مقادیر بدست آمده برای مدول یانگ عرضی حول میانگین بیش‌تر از آرایش اتفاقی با توزیع نرمال خواهد بود. در جدول ۷ نتایج بدست آمده از توزیع یکنواخت برای ۲۵ مرتبه تکرار آمده است.

در این جا مقداری که برای  $Z$  بدست می‌آید، بسیار نزدیک به مقداری است که برای این پارامتر با در نظر گرفتن آرایش اتفاقی دارای توزیع نرمال بدست می‌آید. مقدار محاسبه شده برای  $Z$  بزرگ‌تر از مقدار مرزی است که در نتیجه باطل شدن فرض صفر و برقرار بودن فرض مقابل است. از تشابه  $Z$  بین توزیع یکنواخت و توزیع نرمال می‌توان نتیجه گرفت انحراف معیار در آرایش اتفاقی یکنواخت مشابه حالت نرمال است، یعنی اگر چیدمان

جدول ۷- نتایج توزیع یکنواخت برای مدول یانگ عرضی.

گام ۱	۱۴۷/۳۹۹	گام ۱۴	۱۴۷/۴۸۵۶
گام ۲	۱۴۷/۵۳۲۵	گام ۱۵	۱۴۷/۵۷۹۸
گام ۳	۱۴۷/۳۱۹۳	گام ۱۶	۱۴۷/۲۶۱۵
گام ۴	۱۴۷/۳۲۷۶	گام ۱۷	۱۴۷/۳۵۷۶
گام ۵	۱۴۷/۴۵۷۶	گام ۱۸	۱۴۷/۳۳۸۸
گام ۶	۱۴۷/۵۶۲۹	گام ۱۹	۱۴۷/۵۱۳۹
گام ۷	۱۴۷/۲۰۳۴	گام ۲۰	۱۴۷/۳۷۹۴
گام ۸	۱۴۷/۳۰۵۲	گام ۲۱	۱۴۷/۳۸۴۴
گام ۹	۱۴۷/۳۱۴۵	گام ۲۲	۱۴۷/۴۴۸۶
گام ۱۰	۱۴۷/۳۸۰۷	گام ۲۳	۱۴۷/۴۰۲۲
گام ۱۱	۱۴۷/۲۷۲۶	گام ۲۴	۱۴۷/۵۹۱۵
گام ۱۲	۱۴۷/۲۷۳۴	گام ۲۵	۱۴۷/۵۰۸۳
گام ۱۳	۱۴۷/۵۳۵۶	میانگین	۱۴۷/۴۰۵۴

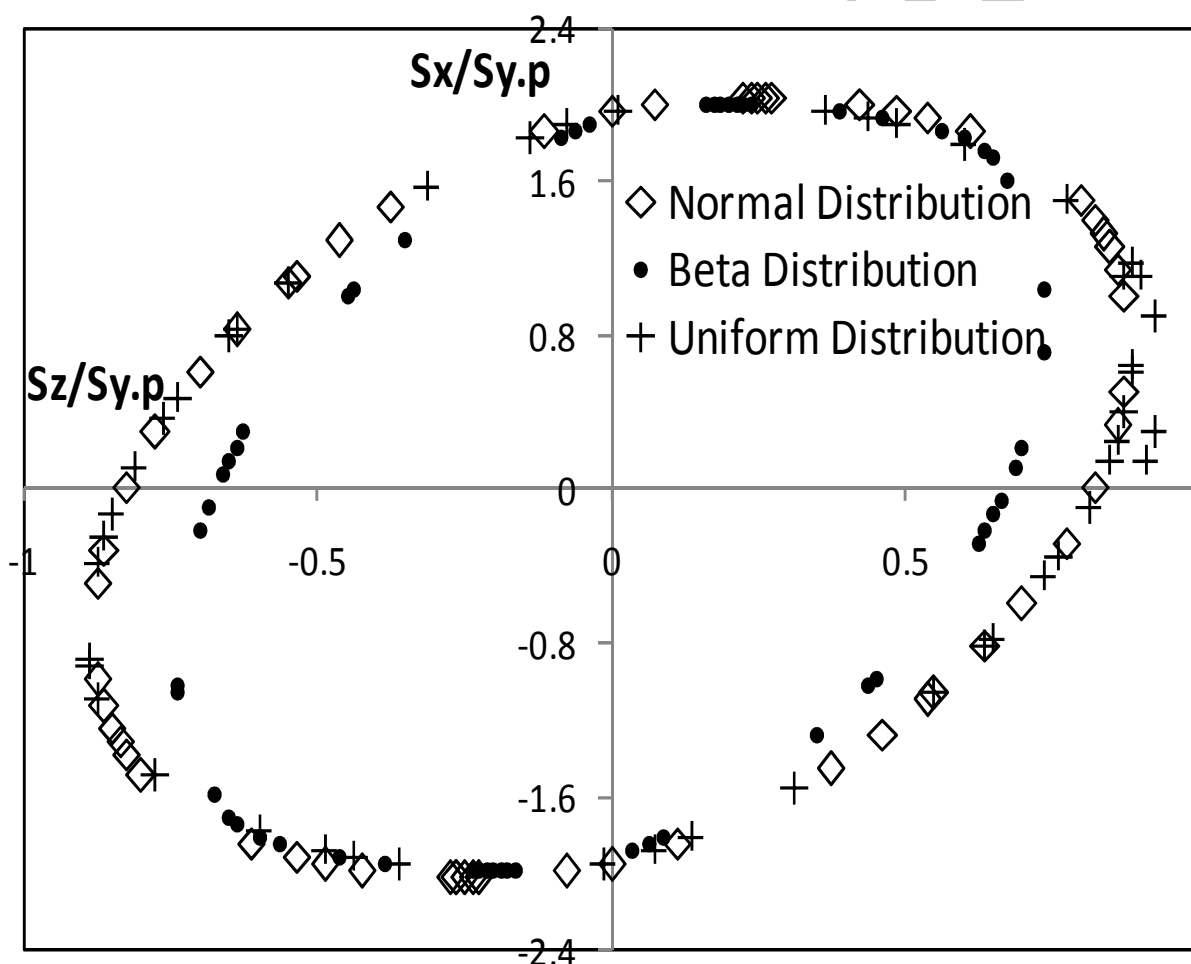


شکل ۱۵- بررسی اثر چگونگی چیدمان الیاف در ماده مرکب روی منحنی شروع تسلیم زمینه در صفحه  $x-y$ .

## تسلیم زمینه و آزمون فرض

مقادیر تجربی استحکام طولی و عرضی برای ماده مرکب مورد نظر سیلیکون کارباید/تیتانیوم با درصد حجمی ۳۳٪ برابر ۸۰۰ MPa و ۱۴۵ MPa می‌باشد [۲۰].  $\alpha$  برابر با ۰/۰۵ در نظر گرفته می‌شود. از جداول برای این مقدار  $\alpha$  مقدار  $Z$  برابر با ۱/۹۶ است. با استفاده از قضیه حد مرکزی برای نقاط بدست آمده مقدار  $Z$ ، محاسبه می‌شود، اگر این مقدار از ۱/۹۶ کوچک‌تر شد، فرض صفر رد، در غیر این صورت فرض صفر درست خواهد بود. در جدول ۸ نتایج بدست آمده از توزیع نرمال برای ۱۰ مرتبه تکرار آمده است.

اگر به نمودار منحنی تسلیم زمینه به ازای درصد حجمی ۳۵٪ و در صفحه  $x-z$  در شکل ۱۶ توجه شود، مشاهده می‌شود که منحنی تسلیم در این صفحه نیز وابسته به آرایش الیاف در صفحه است. با توجه به دو شکل ۱۵ و ۱۶ به ازای توزیع‌های گوناگون در درصد حجمی یکسان هیچ دو منحنی تسلیم زمینه‌ای بر همدیگر منطبق نخواهند بود. این امر بیانگر آن است که منحنی تسلیم افزون بر درصد حجمی الیاف به چگونگی توزیع الیاف در زمینه نیز بستگی دارد.



شکل ۱۶- بررسی اثر چگونگی چیدمان الیاف در ماده مرکب روی منحنی شروع تسلیم زمینه در صفحه  $x-z$

یعنی استحکام تسلیم طولی به شدت به آرایش الیاف در زمینه وابسته است. در مورد استحکام عرضی مقدار میانگین برابر  $۶۸۰/۲۲۵۵$  بدست می‌آید. مقدار  $Z$  نیز  $۰/۲۸۳۰$  محاسبه می‌شود که کم‌تر از مقدار مرزی  $۱/۹۶$  است. مشابه بالا فرض صفر باطل و فرض مقابل درست است، یعنی استحکام عرضی به شدت به چگونگی توزیع الیاف در زمینه وابسته است. در جدول ۱۰ نتایج بدست آمده از توزیع یکنواخت برای ۱۰ مرتبه تکرار آمده است.

با تکرار برنامه به اندازه ۱۰ مرتبه برای توزیع یکنواخت، میانگین استحکام طولی برابر  $۸۹۰/۴۳۵۸$  بدست می‌آید. با استفاده از داده‌های جدول ۱۰ و اعمال آزمون فرض مقدار  $Z$  برابر  $۱/۴۱۱۵$  بدست می‌آید که کم‌تر از مقدار مرزی است. لذا، فرض صفر باطل و فرض مقابل برقرار است، یعنی استحکام تسلیم طولی به شدت به آرایش الیاف در زمینه وابسته است. در مورد استحکام عرضی مقدار میانگین برابر  $۶۴۵/۵۷۷$  بدست می‌آید. مقدار  $Z$  نیز از رابطه،  $۰/۳۵۷۴$  محاسبه می‌شود که کم‌تر از مقدار مرزی  $۱/۹۶$  است. مشابه بالا فرض صفر باطل و فرض مقابل درست است، یعنی استحکام عرضی به شدت به چگونگی توزیع الیاف در زمینه وابسته است.

با تکرار برنامه به اندازه ۱۰ مرتبه برای توزیع نرمال، میانگین استحکام طولی برابر  $۸۶۷/۷۱۱۵$  بدست می‌آید. با استفاده از داده‌های جدول ۸ و اعمال آزمون فرض مقدار  $Z$  برای استحکام طولی  $۲/۰۱۱۱$  بدست می‌آید که به مقدار ناچیزی بزرگ‌تر از مقدار مرزی است که البته، علت این امر کوچک بودن حجم نمونه است. اگر حجم نمونه بزرگ‌تر انتخاب شود، مقدار  $Z$  کم‌تر از مقدار مرزی خواهد شد. لذا، فرض صفر باطل و فرض مقابل برقرار خواهد شد. یعنی استحکام تسلیم طولی به شدت به آرایش الیاف در زمینه وابسته است. در مورد استحکام عرضی میانگین مقدار برابر  $۶۰۴/۵۹۷$  بدست می‌آید. مقدار  $Z$  نیز از رابطه مربوط  $۰/۲۸۱۴۰$  محاسبه می‌شود که کم‌تر از مقدار مرزی  $۱/۹۶$  است و فرض صفر باطل و فرض مقابل درست است، یعنی استحکام عرضی به شدت به چگونگی توزیع الیاف در زمینه وابسته است. در جدول ۹ نتایج بدست آمده از توزیع بتا برای ۱۰ مرتبه تکرار آمده است.

با تکرار برنامه به اندازه ۱۰ مرتبه برای توزیع بتا میانگین استحکام طولی برابر  $۴۸۱/۰۰۷۶$  بدست می‌آید. با استفاده از داده‌های جدول ۹ و اعمال آزمون فرض مقدار  $Z$  برابر  $۰/۸۴۷۳$  بدست می‌آید که کم‌تر از مقدار مرزی است. لذا، فرض صفر باطل و فرض مقابل برقرار است.

جدول ۹- نتایج بدست آمده از توزیع بتا.

توزیع گوسی	استحکام عرضی	استحکام محوری
گام نخست	۶۰۲/۸۷۵	۸۱۲/۵۴
گام دوم	۶۲۵/۶۳	۴۲۲/۵۱
گام سوم	۶۸۲/۵	۵۸۵/۰۴
گام چهارم	۶۰۲/۸۷	۸۴۵/۰۲۶
گام پنجم	۸۵۳/۱۲۵	۱۶۲/۵۳
گام ششم	۸۶۴/۵	۶۵۰/۰۱
گام هفتم	۳۵۲/۶۳	۳۲۴/۹۶
گام هشتم	۶۷۱/۱۲۵	۱۶۲/۵۳
گام نهم	۶۵۹/۷۵	۹۷/۴۶
گام دهم	۸۸۷/۲۵	۷۴۷/۴۷
میانگین	۶۸۰/۲۲۵۵	۴۸۱/۰۰۷۶

جدول ۱۰- نتایج بدست آمده از توزیع یکنواخت.

توزیع گوسی	استحکام عرضی	استحکام محوری
گام نخست	۶۳۷	۹۴۲/۷۶
گام دوم	۸۴۱/۷۵	۵۵۲/۴۶
گام سوم	۶۰۲/۸۷۵	۹۷۴/۶۱
گام چهارم	۴۴۳/۶۲۵	۱۰۰۷/۳۷
گام پنجم	۹۶۷/۳۳	۸۴۵/۰۲۶
گام ششم	۴۳۲/۲۵	۹۴۲/۸۶
گام هفتم	۵۰۶/۱۹	۸۷۷/۵۱۳
گام هشتم	۵۸۰/۱۲۵	۹۷۴/۶۱
گام نهم	۵۵۷/۳۷۵	۸۱۲/۵۳۹
گام دهم	۸۸۷/۲۵	۹۷۴/۶۱
میانه	۶۴۵/۵۷۷	۸۹۰/۴۳۵۸

چگونگی چیدمان الیاف در زمینه وابسته نیست. اگر منحنی تسلیم ماده مرکب به ازای یک درصد حجمی مشخص و با توزیع‌های گوناگون رسم شود، شکل منحنی‌های تسلیم با هم متفاوت است و این بیانگر وابستگی منحنی تسلیم به چگونگی چیدمان الیاف است زیرا آرایش الیاف اتفاقی است و احتمال دارد در برخی نقاط الیاف در تماس هم قرار گیرند و ایجاد تمرکز تنش کنند. تمرکز تنش در یک ناحیه سبب می‌شود مقدار تنش در آن نقطه از مقدار تنش نامی بزرگ‌تر شده و احتمال تسلیم زمینه افزایش یابد.

#### References

- 1- Z. Hashin, and A. Shtrikman, "A Variational Approach to the theory of Elastic Behavior of Multiphase Materials", Journal of the Mechanics and Physics of Solids, Vol. 11, pp. 127-140, 1963.
- 2- A. V. Hershey, "The Elasticity of an Isotropic Aggregate of Anisotropic Cubic Crystals", Journal of the Application of Mechanics, Vol. 21, pp. 239, 1954.
- 3- B. Budiansky, "On the Elastic Moduli of Some Heterogeneous Materials", Journal of the Mechanics and Physics of Solids, Vol. 13, pp. 223, 1965.

#### نتیجه گیری

برای مطالعه رفتار کلی ماده مرکب الیافی یک مدل میکرومکانیکی تحلیلی سه بعدی ارائه شد. بمنظور در نظر گرفتن هندسه واقعی‌تر مدل تحلیلی، المان حجمی نماینده به  $c \times r$  سلول مستطیلی تقسیم شد. تمامی آرایش‌های اتفاقی دارای توزیع‌های مختلف آماری برای نحوه تغییر خواص الاستیک با درصد حجمی، یک روند تغییر را پیش‌بینی می‌کنند. تقریباً در تمامی درصدهای حجمی، مقداری که برای یک خاصیت الاستیک بدست آمدند، مستقل از نحوه‌ی آرایش اتفاقی الیاف در زمینه بودند. این بدین مفهوم است که مقدار خواص الاستیک به

- 4- M. Uemura, H. Iyama and Y. Yamaguchi, "Thermal Residual Stress in Filament Wound Carbon-Fiber-Reinforced Composites", Journal of Thermal Stress, Vol. 2, pp. 393-412, 1979.
- 5- J. Aboudi, "A Continuum Theory for Fiber Reinforced Elastic Visco-Plastic Composites", International Journal of Engineering Science, Vol. 20, pp. 605-620, 1982.
- 6- R. P. Nimmer, "Fiber-Matrix Interface Effects in the Presence of Thermally Induced Residual Stress", Journal of Composites Technology and Research, Vol. 12, pp. 65-75, 1990.
- 7- M. M. Aghdam, D. J. Smith and M. J. Pavier, "Finite Element Micromechanical

- Modelling of Yield and Collapse Behaviour of Metal Matrix Composites”, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 48, pp. 499-528, 2000.
- 8- I. Ahmadi and M. M. Aghdam, “A truly Generalized Plane Strain Meshless Method for Combined Normal and Shear Loading of Fibrous Composites”, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 35, pp. 395-403, 2011.
- 9- M. Bayat and M. M. Aghdam, “A Micromechanics-Based Analysis of Effects of Square and Hexagonal Fiber Arrays in Fibrous Composites Using DQEM”, *European Journal of Mechanics A/Solids*, Vol. 32, pp. 32-40, 2012.
- ۱۰- ا. ح. اسلامی، م. م. مشکسار، س. م. زبرجد، بررسی اثرات ذرات دی سیلیساید مولیبدن ( $\text{MoSi}_2$ ) بر رفتار مکانیکی و الکتریکی ماده مرکب زمینه مس تولید شده به روش اتصال نوردی تجمعی (ARB)، *مواد نوین* / دوره ۴ شماره ۱۳ صص ۵۷-۶۸، پاییز ۱۳۹۲.
- ۱۱- م. ک. حسن‌زاده اقدم، م. ج. محمودی، تحلیل میکرومکانیکی خرابی ماده مرکب زمینه تیتانیومی با الیاف کوتاه تحت اثر بارگذاری محوری مرکب، *مهندسی مکانیک مدرس* / دوره ۱۳ شماره ۴ صص ۸۶-۹۷، تابستان ۱۳۹۲.
- 12- M. J. Mahmoodi, M. M. Aghdam and M. Shakeri, “Micromechanical Modeling of Interface Damage of Metal Matrix Composites Subjected to off-Axis Loading”, *Materials & Design*, Vol. 31, pp. 829-836, 2010.
- 13- D. D. Robertson and S. Mall, “Micromechanical Relations for Fiber-Reinforced Composites Using the Free Transverse Shear Approach”, *Journal of Composites Technology and Research*, Vol. 151, pp. 181-192, 1993.
- 14- IMI Titanium Ltd. Brochure, High temperature alloys, 1993.
- 15- J. Aboudi, “Closed Form Constitutive Equations for Metal Matrix Composites”, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 25, pp. 1229-1240, 1987.
- 16- M. P. Thomas and M. R. Winstone, “Effect of the Angle between Fibers and Tensile Axis on Static Properties of Unidirectional Reinforced Titanium MMC”, *Proceedings of the European Conference on Composite Materials, (ECCM-8)*, 4, Naples- Italy, pp. 147-154, 1998.
- 17- Z. Hashin, “On Elastic behaviour of fiber Reinforced Materials of Arbitrary Transverse Phase Geometry”, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 13, pp. 119-134, 1965.
- 18- D. F. Adams and D. A. Crane, “Combined loading micro micromechanical analysis of a unidirectional composite”, *Composites*, Vol. 15, pp 181-191, 1984.
- ۱۹- آر. ای. والپون، مقدمه‌ای بر احتمالات و آمار کاربردی، ترجمه م. ب. ق. آریانزاد، م. ذهبیون، دانشگاه علم و صنعت ایران، ۱۳۸۷.
- 20- M. J. Mahmoodi and M. M. Aghdam, “Damage Analysis of Fiber Reinforced Ti-Alloy Subjected to Multi-Axial Loading—A Micromechanical Approach”, *Materials Science and Engineering A*, Vol. 528, pp. 7983-7990, 2011.