

## پایدارسازی حل صریح جریان دائمی تراکم‌ناپذیر با کاربرد روش ابداعی

کامبیز مظاهری<sup>۱\*</sup>، سعیدرضا صباغ‌یزدی<sup>۲</sup>، و ابوالفضل شمسایی<sup>۳</sup>

تاریخ دریافت: ۱۳۹۰/۱۲/۲۳ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۱/۶/۶

### چکیده

در این مقاله با استفاده از یک روش ابداعی، پایدارسازی حل عددی صریح جریان دائمی تراکم‌ناپذیر با کاربرد روش احجام محدود بر روی شبکه‌ی مثلثی بی‌ساختار مورد بررسی قرار گرفته است. جهت تحلیل جریان از معادلات ناویر استوکس به صورت دو بعدی با استفاده از روش تراکم‌پذیری مصنوعی بر پایه روش غیرهمبسته بهره گرفته شده است. به منظور صحت‌سنجی نتایج نیز از دو نوع آزمون استفاده شده است، در آزمون اول، جریان غیرلزج پیرامون یک استوانه‌ی دایروی در غیاب استهلاک فیزیکی، و در آزمون دوم، جریان لزج داخل حفره‌ی مربعی شبیه‌سازی شده، و در انتها نتایج حاصل از روش حاضر با نتایج تحلیلی و عددی موجود مقایسه و مورد ارزیابی قرار گرفته است.

واژه‌های کلیدی: حل صریح، روش متغیرهای اصلی، جریانهای لزج و غیرلزج، حل غیرهمبسته، شبکه‌ی مثلثی بی‌ساختار

Archive of SID

<sup>۱</sup> - دانشجوی مقطع دکترای تخصصی دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات، گروه عمران، تهران، ایران

<sup>۲</sup> - عضو هیأت علمی دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، گروه عمران، تهران، ایران

<sup>۳</sup> - عضو هیأت علمی دانشگاه صنعتی شریف، گروه عمران، تهران، ایران

\* - نویسنده مسئول: K.mazaheri@yahoo.com

## مقدمه

حل می‌گردد. نمونه‌های کاربردی روش گردابه‌ای را در کارهای محققین مختلف می‌توان یافت (تنهیل و همکاران، ۱۹۹۷).

در روش حل معادلات جریان با کاربرد متغیرهای اصلی می‌توان روشهای حل را به دو گروه اصلی تقسیم‌بندی کرد. گروه اول روشهای مبتنی بر تراکم‌پذیری مصنوعی<sup>۴</sup> بر پایه‌ی روش همبسته، و گروه دوم روشهای مبتنی بر اصلاح فشار<sup>۵</sup> بر پایه‌ی روش غیرهمبسته می‌باشند. در روش همبسته، معادله‌ی پیوستگی و معادلات اندازه‌ی حرکت توأمأ با اضافه کردن جمله فشار به معادله پیوستگی، فرض تراکم‌پذیری و مجهول فرض نمودن کلیه متغیرهای وابسته حل می‌گردند. در روش غیرهمبسته، معادلات اندازه‌ی حرکت برای محاسبه‌ی میدان سرعت به صورت غیرهمبسته به کار گرفته شده، و با عملیات تکرار، میدان فشار توسط معادله پواسون اصلاح می‌شود. در این روش با در نظر گرفتن میدان فشار معلوم، میدان سرعت با کاربرد معادلات اندازه‌ی حرکت محاسبه شده، و سپس با کاربرد معادله‌ی پیوستگی میدان فشار اصلاح می‌گردد. به همین علت است که به این روش، روش اصلاح فشار نیز گفته می‌شود (تنهیل و همکاران، ۱۹۹۷؛ چانگ، ۲۰۰۲). در ادامه، جهت حل معادلات گسسته شده‌ی جریان، بایستی یکی از دو روش بیان ریاضی صریح و ضمنی انتخاب گردد. در روش بیان ریاضی صریح، مقدار فراسنج مورد نظر در هر نقطه با استفاده از مقادیر فراسنجهای نقاط مجاور آن نقطه، که در گام قبلی محاسبه شده‌اند، به دست می‌آید. به بیان دیگر، در هر گام از محاسبه، تنها یک مجهول در معادله وجود دارد که به راحتی قابل محاسبه است. در روش بیان ریاضی ضمنی، در هر مرحله از محاسبات، چندین مجهول وجود دارد، زیرا فراسنج مورد نظر در هر نقطه با استفاده از مقادیر نقاط مجاور آن فراسنج، که مقدار آنها در گام فعلی به دست می‌آید، تعیین می‌گردد؛ یعنی در این روش، در هر گام محاسباتی با حل یک دستگاه معادلات، مقدار فراسنج مورد نظر در تمام نقاط به دست می‌آید. لذا، روشهای مبتنی بر حل ضمنی در مقایسه با حل

حل عددی معادلات ناویر استوکس از بخشهای مهم در پویایی سیال محاسباتی<sup>۱</sup> بوده و نقش مهمی در مسائل علمی و صنعتی، از جمله علوم فضایی، هواشناسی، جملهدینامیک، جریان در مخازن، نهرها و غیره جهت تحلیل جریان ایفاء می‌کند. بطور کلی، دو مشکل عمده در حل معادلات تراکم‌ناپذیر وجود دارد:

۱. بین معادله پیوستگی و معادلات اندازه‌ی حرکت از نظر فشار هیچ‌گونه ارتباط مستقیمی وجود ندارد. برای ایجاد ارتباط بین این معادلات، عملیات ریاضی لازم است. بطور کلی، دو روش برای رفع این مشکل وجود دارند. اولین روش استفاده از بیان ریاضی گردابه‌ای-تابع جریان<sup>۲</sup>، و روش دوم استفاده از جمله تراکم‌پذیری مصنوعی در معادله پیوستگی می‌باشد.

۲. مشکل دیگری که در حل عددی معادلات هذلولی به روش بیان ریاضی صریح وجود دارد، احتمال پدید آمدن نوسانهای عددی است. این نوسانهای عددی، که بویژه در نزدیکی نواحی با شیب‌های بالا به وجود می‌آیند، می‌توانند موجب واگرایی و ناپایداری در جریان چرخه‌ی حل گردند، ضمن آن که در نواحی خارج از لایه‌ی مرزی، به دلیل ناچیز بودن شیبهای سرعت، عبارتهای مربوط به تاثیر لزجت کم اثر شده و لذا نبودن استهلاک کافی برای میرا نمودن نوسانهای عددی باعث رشد خطاهای ناشی از حل صریح می‌گردد.

همان طور که در بالا عنوان شد، به منظور برطرف کردن مشکل اول، دو روش کلی حل معادلات وجود دارند. روش اول استفاده از متغیرهای تابع جریان و گردابه‌ای، و روش دوم استفاده از متغیرهای اصلی<sup>۳</sup> جهت حل معادلات جریان می‌باشند.

بیان ریاضی گردابه‌ای-تابع جریان شامل عبارت فشار نبوده، بنابراین، نخست میدان جریان به دست آمده، و پس از آن معادله‌ی پواسون برای پیدا کردن میدان فشار

4- artificial compressibility  
5- pressure-correction approach

1- Computational fluid dynamics  
2 - stream function-vorticity method  
3 - primitive-variable method

حل عددی، جمله‌های مستهلک‌کننده مرتبه‌ی دوم و چهارم به معادلات اصلی افزوده می‌گردد. نکته‌ی اصلی در افزودن این جمله‌های استهلاکی به معادلات جبری، انتخاب یک جمله‌ی استهلاکی بهینه‌ی متناسب با الگوریتم حل بر روی شبکه بی‌ساختار، با ضرایب مناسب می‌باشد، که در هر مورد به شرایط مسأله مورد بررسی بستگی دارد. توصیه شده است که ضرایب استهلاک را باید در پایین‌ترین حد ممکن انتخاب کرد تا ضمن تامین پایداری و مستهلک کردن نوسانها، لطمه‌ای به دقت حل وارد نگردد. این عبارت اضافی می‌تواند مخلوطی از یک عملگر لاپلاسیان<sup>۴</sup> و یک عملگر دوبار هماهنگ‌کننده<sup>۵</sup> بوده، بوده، که به ترتیب مستهلک‌کننده‌هایی با مرتبه دوم و مرتبه چهارم می‌باشند.

البته با توجه به مطالب بالا می‌توان بیان نمود که استفاده از روش استهلاک مصنوعی معایب زیر را نیز به همراه دارد:

۱. نیاز به سعی و خطا برای تنظیم فرانسجهای استهلاک مصنوعی و حداقل‌سازی آنها؛
  ۲. ایجاد لزجت ناخواسته در حل عددی در مکانهای دارای شیبهای شدید سرعت؛
  ۳. میرا کردن مقادیر حداقل و حداکثر در سرعت و فشار.
- با بررسی تحقیقات گذشته و موارد اشاره شده فوق، می‌توان نتیجه گرفت استفاده از روشهایی مانند TVD و استهلاک مصنوعی، برای کاستن نوسانهای عددی کار پرهزینه‌ای می‌باشد، ضمن آن‌که پیاده‌سازی آنها نیز با مشکلاتی همراه است. به همین لحاظ در کار حاضر روش نوینی به کار گرفته شده است که نوسانها را به حداقل ممکن رسانده، حل پایدار بوده و هزینه محاسباتی کمی را به همراه دارد. الگوریتم ارائه شده یک راه حل عددی با بیان ریاضی صریح و پایدار (با کاربرد متغیرهای میانی) بوده که ترکیبی از روش اصلاح فشار و روش تراکم‌پذیری مصنوعی می‌باشد. لازم به ذکر است جهت گسسته‌سازی معادلات اندازه حرکت و پیوستگی بر روی شبکه مثلثی بدون ساختار از روش حجم محدود گالرکین بهره گرفته

صریح نیاز به حجم ذخیره‌ی بالاتر اطلاعات داشته، و زمان محاسبات آن نیز بیشتر و پیاده‌سازی آن سخت‌تر است (اسپنسر، ۲۰۱۰)؛ لذا در کار حاضر به حل عددی مبتنی بر روش بیان ریاضی صریح پرداخته شده است (کاکس و ترسی، ۱۹۹۱).

لکن همانگونه که در بالا عنوان شد، روش بیان ریاضی صریح از منظر وجود نوسانهای ناخواسته در جریان حل عددی دارای مشکل است، که برای برطرف کردن و کاهش مشکل نوسانهای حل صریح معمولاً از دو روش یکنواخت و استهلاک مصنوعی استفاده می‌گردد.

روش یکنواخت دارای این ویژگی می‌باشد که با پیشروی حل در طول زمان، هیچ‌گونه جوابهای افراطی موضعی ایجاد نمی‌شود. از جمله این روشها، روش تغییرات کل از بین رونده (TVD)<sup>۱</sup> بوده، که بویژه برای معادلات هذلولی بقایایی کاربرد دارد، لکن روش‌های مبتنی بر TVD معایبی را به همراه دارند که عبارتند از (هارتن، ۱۹۸۳؛ لوک، ۱۹۹۲)؛

۱. زمان عملیات محاسباتی را افزایش می‌دهد؛
۲. به سهولت به دقت بالاتر از مرتبه‌ی دوم توسعه نمی‌یابد. البته، برای غلبه بر این محدودیت می‌توان از روشهای ذاتاً "غیرنوسانی"<sup>۲</sup> استفاده نمود (آدام و شریف، ۱۹۹۶؛ ژاونگ، ۱۹۹۸)؛
۳. برخی مشکلات پیش بینی نشده را برای اعمال شرایط مرزی به همراه می‌آورد؛
۴. علاوه بر کاستن نوسانها، باعث کاهش گستردگی امواج ضربه‌ای نیز می‌شود؛
۵. بر روی شبکه بی‌ساختار براحتی قابل پیاده‌سازی نمی‌باشد.

همان‌گونه که بیان شد، روش دیگر برای کاهش نوسانهای عددی ناشی از روش بیان ریاضی صریح، روش استهلاک مصنوعی<sup>۳</sup> بوده که به‌وسیله‌ی جیمسون و همکاران (۱۹۸۱) ارائه شده است. استهلاک مصنوعی هیچ مفهوم فیزیکی نداشته و تنها برای کاستن نوسانهای عددی کاربرد دارد. در این روش، برای غلبه بر مشکل نوسانهای

4- Laplacian operator  
5- biharmonic

1- total tvd validation diminishing schemes (TVD)  
2- ENO (essentially non-oscillatory)  
3- artificial dissipation

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \left( \frac{\partial F^C}{\partial x} + \frac{\partial G^C}{\partial y} \right) = \left( \frac{\partial F^D}{\partial x} + \frac{\partial G^D}{\partial y} \right) \quad (4)$$

برای معادله‌ی پیوستگی:

$$\begin{aligned} W &= (p/\rho_0), \\ F^C &= (\beta^2 u), \quad G^C = (\beta^2 v), \\ F^D &= (0), \quad G^D = (0) \end{aligned} \quad (5)$$

و برای معادلات اندازه حرکت:

$$\begin{aligned} W &= \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \\ F^C &= \begin{pmatrix} u^2 + p/\rho_0 \\ uv \end{pmatrix}, \quad G^C = \begin{pmatrix} uv \\ v^2 + p/\rho_0 \end{pmatrix}, \\ F^D &= \begin{pmatrix} v \frac{\partial u}{\partial x} \\ v \frac{\partial v}{\partial x} \end{pmatrix}, \quad G^D = \begin{pmatrix} v \frac{\partial u}{\partial y} \\ v \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (6)$$

در معادله‌ی پیوستگی ضریب  $\beta^2$  همان ضریب تراکم‌پذیری مصنوعی است. هر چند ضریب تراکم‌پذیری مصنوعی را مطابق با پیشنهاد چورین می‌توان به صورت یک عدد ثابت اعمال کرد (چورین، ۱۹۹۷)، اما در عمل براساس تجربه‌ی محققین مختلف مقدار فراسنج  $\beta^2$  را برای جریان تراکم‌ناپذیر در حالت دو بعدی متناسب با مربع سرعت محلی پیشنهاد شده است (دریر، ۱۹۹۰).

$$\beta^2 = C_\beta |U^2|, \quad \beta_{\min}^2 < \beta^2 < \beta_{\max}^2 \quad (7)$$

در این رابطه، به منظور اجتناب از مشکلات عددی در نواحی با سرعت‌های خیلی کم، نظیر نقاط نزدیک به نقاط سکون، یک مقدار کمینه و یک مقدار بیشینه برای ضریب  $\beta^2$  پیش‌بینی شده است. محدوده‌ی تغییرات ضریب کمینه را بین ۰.۱ تا ۰.۳، و ضریب بیشینه را ۱۰ پیشنهاد کرده‌اند. همچنین، ضریب  $C$  نیز یک عدد ثابت، بین ۱ تا ۵ پیشنهاد شده است (لی و ژو، ۲۰۰۲).

### محاسبه‌ی گام زمانی محاسباتی

فراسنج  $\Delta t$  به عنوان یک ابزار محاسباتی برای حفظ ثبات محاسبات تکرار شونده استفاده می‌گردد. به منظور افزایش در سرعت همگرایی و پایداری حل، از گام زمانی محلی استفاده شده است که بایستی اثر انتقال و نیز اثر استهلاک را در نظر داشت؛ بدین منظور، می‌توان معادله‌ی تعیین گام زمانی محلی را به صورت زیر بیان نمود (ماورپلیس، ۱۹۹۰):

شده است. در این روش پس از گسسته‌سازی معادلات در هرگام تکرار از حل تکرار شونده، میدان سرعت از معادلات حرکت تراکم‌ناپذیر با استفاده از متغیرهای میانی به دست آمده و پس از آن فشار با حل معادله پیوستگی تراکم‌ناپذیر مصنوعی اصلاح می‌گردد.

در مقاله‌ی حاضر، دو جریان دایمی لزج و غیرلزج شبیه‌سازی و مورد ارزیابی قرار گرفته است. در ابتدا، به منظور بررسی توانایی روش ارائه شده بدون وجود لزجت فیزیکی، معادلات حاکم بر جریان تراکم‌ناپذیر غیرلزج در اطراف استوانه دایروی بررسی شده، و نتایج به دست آمده با نتایج حل تحلیلی مقایسه شده است (صباغ یزدی و همکاران، ۲۰۰۸). همچنین، به منظور بررسی کاستن نوسانها، همگرایی میدان سرعت و فشار با روش پایدارسازی بر پایه‌ی استهلاک مصنوعی مقایسه شده است. سپس، جریان دایمی لزج در حفره‌ی مربعی در مقادیر رینولدز کم شبیه‌سازی شده، و نتایج به دست آمده با نتایج عددی موجود در مقالات مقایسه شده است (مانوزی، ۲۰۰۵؛ دامونا و همکاران، ۲۰۱۱).

### معادلات حاکم

در این تحقیق، جهت حل جریان تراکم‌ناپذیر دو بعدی از معادلات ناویر-استوکس شامل یک معادله پیوستگی و دو معادله اندازه‌ی حرکت در مختصات قائم استفاده شده است:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

معادله اندازه حرکت در جهت X:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} - \frac{\partial(P/\rho_0)}{\partial x} = v \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] \quad (2)$$

معادله اندازه حرکت در جهت Y:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial uv}{\partial x} + \frac{\partial v^2}{\partial y} - \frac{\partial(P/\rho_0)}{\partial y} = v \left[ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] \quad (3)$$

در معادلات فوق  $u$  و  $v$  عبارت از سرعت در دو راستای X و Y،  $p$  فشار،  $\rho_0$  چگالی و  $\nu$  لزجت سیال می‌باشند.

معادلات ناویر-استوکس دو بعدی پس از اضافه کردن جمله‌ی تراکم‌پذیری مصنوعی به شکل کلی زیر تبدیل می‌شوند:

همان‌طور که قبلاً نیز عنوان گردید، در این مقاله برای حل معادلات ناویر-استوکس از تلفیق روش تراکم‌پذیری مصنوعی با روش اصلاح-فشار به صورت غیرهمبسته مبتنی بر بیان ریاضی حل صریح با استفاده از شکل اصلی معادلات بهره گرفته شده است.

در الگوریتم ابداعی با بهره‌گیری از مقادیر میانی سرعت و فشار و تکرار ( $m_{Max}$ ) در هر گام زمانی مجازی نسبت به سامان دادن نوسانها و پایدارسازی حل صریح اقدام شده است؛ به بیان دیگر، در هر گام تکرارشونده از گام زمانی مجازی با استفاده از معادلات اندازه حرکت سرعت مرحله‌ی بعد ( $m+1$ ) با کاربرد سرعت در گام زمانی قبل ( $t$ )، و فشار و سرعت میانی ( $m+1/2$ ) حاصل از میانگین‌گیری مقادیر محاسبه شده مرحله‌ی بعد ( $m+1$ )، و گام زمانی قبل ( $t$ ) محاسبه می‌گردد، سپس فشار با کاربرد معادله‌ی پیوستگی تغییر یافته اصلاح می‌شود و فشار در مرحله‌ی بعد ( $P^{m+1}$ ) تعیین می‌گردد. در هر گام زمانی این مراحل به تعداد تکرار مشخص ( $m_{Max}$ ) انجام می‌شود، سپس به گام زمانی مجازی بعدی رفته و مجدداً مراحل بالا تا رسیدن به همگرایی مناسب ادامه می‌یابد؛ لذا می‌توان مراحل حل را به چهار بخش اصلی زیر تقسیم کرد:

۱- در شروع هر گام زمانی مجازی، مقادیر سرعت و فشار میانی ( $m+1/2$ ) برابر با مؤلفه‌های فشار و سرعت در گام زمانی قبلی ( $t$ ) در نظر گرفته می‌شود:

$$\begin{aligned} u^{m+1/2} &= u^t, v^{m+1/2} = v^t \\ p^{m+1/2} &= p^t, p^m = p^t \end{aligned} \quad (13)$$

۲- در هر گام تکرار شونده، مؤلفه‌های سرعت مرحله بعد ( $u^{m+1}$  و  $v^{m+1}$ ) با کاربرد مؤلفه‌های فشار و سرعت میانی ( $m+1/2$ ) محاسبه می‌گردد که این امر با حل معادلات اندازه‌حرکت تراکم‌ناپذیر میسر می‌باشد.

$$\frac{u^{m+1} - u^t}{\Delta t} = \left[ -\frac{\partial u^2}{\partial x} - \frac{\partial uv}{\partial y} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} + v \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \right]^{m+1/2} \quad (14)$$

$$\frac{v^{m+1} - v^t}{\Delta t} = \left[ -\frac{\partial v^2}{\partial y} - \frac{\partial uv}{\partial x} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y} + u \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \right]^{m+1/2} \quad (15)$$

$$\Delta t_i = CFL \left( \frac{\Delta t_i^c \Delta t_i^v}{\Delta t_i^c + \Delta t_i^v} \right) \quad (8)$$

که در آن  $CFL$  عدد کورانتی<sup>۱</sup> است که در روش حل عددی مورد نظر مجاز شمرده می‌شود و در کار حاضر برابر یک انتخاب گردیده است.  $\Delta t_i^c$  جمله زمانی انتقال بوده که به صورت زیر نوشته می‌شود (ماورپلیس، ۱۹۹۰):

$$\Delta t_i^c = \frac{\Omega_i}{\lambda_i^c} \quad (9)$$

که در آن  $\Omega_i$  سطح حجم بسامان داری است که  $i$  در مرکزیت آن قرار دارد و  $\lambda_i^c$  حداکثر سرعت محلی انتقال موج سامانه است و برای هر ضلع به صورت زیر محاسبه می‌گردد (وود، ۱۹۹۱):

$$\lambda_i^c = \sum_{k=1}^{Ne} \left| (u\Delta y - v\Delta x)_k + \sqrt{(u\Delta y - v\Delta x)_k^2 + \beta^2(\Delta x^2 + \Delta y^2)_k} \right| \quad (10)$$

در این رابطه،  $u$  و  $v$  برای هر سطح مرزی میانگین سرعت گره‌های ابتدا و انتهای آن سطح مرزی می‌باشد و  $\Delta x$  و  $\Delta y$  نیز با کاربرد مختصات گره‌های ابتدا و انتها به دست می‌آید.  $Ne$  نیز تعداد بنپارهای منتهی به گره  $i$  است.

همچنین  $\Delta t_i^v$  جمله زمانی لزجت با کاربرد رابطه زیر محاسبه می‌گردد (ماورپلیس، ۱۹۹۰):

$$\Delta t_i^v = K_v \frac{\Omega_i}{\lambda_i^v} \quad (11)$$

ضریب  $K_v$  ضریب تجربی بوده و بیانگر درجه‌ی اهمیت جمله لزجت زمانی می‌باشد که در کار حاضر برابر با ۰/۲۵ منظور شده است، و  $\lambda_i^v$  براساس خواص استهلاکی معادلات حاکم به صورت زیر به دست می‌آید (ماورپلیس، ۱۹۹۰):

$$\lambda_i^v = 2 \sum_{k=1}^{Ne} v(\Delta x^2 + \Delta y^2)_k \quad (12)$$

در رابطه‌ی فوق،  $\Delta x$  و  $\Delta y$  مختصات گره‌های ابتدا و انتها و  $Ne$  تعداد بنپارهای منتهی به گره  $i$  بوده و  $v$  لزجت سیال می‌باشد.

### روش ابداعی پایدارسازی حل عددی صریح

1- Courant number

### نتایج شبیه سازی عددی

جهت صحت‌سنجی نتایج حاصل از روش فوق همان‌طور که در ابتدا نیز عنوان گردید، از دو نوع آزمون استفاده شده است. در آزمون اول نتایج تحلیل جریان غیرلزج پیرامون استوانه‌ی دایروی در غیاب لزجت فیزیکی با نتایج حل عددی حاضر مقایسه گردیده است، و در آزمون دوم جهت ارزیابی شبیه‌سازی جریان لزج جریان درون حفره‌ی مربعی بررسی شده و نتایج آن با نتایج عددی موجود در مقالات مقایسه گردیده است.

### جریان دایمی غیر لزج اطراف یک استوانه دایروی

در این آزمون، نتایج تحلیلی جریان غیرلزج پیرامون استوانه دایروی به عنوان دیواره‌ی صلب به قطر ۰.۲ متر برای سرعت جریان آزاد برابر با ۰.۱ متر بر ثانیه با نتایج حاصل از روش حل عددی حاضر مقایسه گردیده است. میدان مسأله به صورت دایروی و ۱۰ برابر قطر استوانه دایروی صلب (به قطر ۲ متر) انتخاب شده و شبکه بندی میدان حل به صورت مثلثی بی‌ساختار (شولتینگ، ۱۹۷۹) با تعداد ۱۲۱۵ نقطه‌ی گرهی، تعداد ۲۴۹۱ بنپار مثلثی و ۳۵۰۶ ضلع می‌باشد (شکل ۲). تمامی نتایج حل عددی در دو مقطع  $\theta = 60^\circ, 90^\circ$  (مشخص شده در شکل ۳)، با نتایج تحلیلی مقایسه گردیده‌اند.

۳- در هر گام تکرار شونده، میدان فشار مرحله بعد  $(p^{m+1})$  با کاربرد میدان فشار محاسبه شده از مرحله‌ی قبلی  $(m)$  و میدان سرعت مرحله‌ی بعد  $(m+1)$  به روز می‌شود:

$$\frac{p^{m+1} - p^m}{\Delta t} = -\rho_0 \beta^2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)^{m+1} \quad (16)$$

۴- در این مرحله، شرایط مرزی با کاربرد شارهای محاسبه شده اعمال گردیده، سپس سرعت و فشار میانی  $(m+1/2)$  با کاربرد میانگین‌گیری مقادیر محاسبه شده  $(m+1)$  مرحله بعد و مقادیر گام زمانی قبلی  $(t)$  به دست می‌آیند.

$$\begin{aligned} u^{m+1/2} &= \frac{u^t + u^{m+1}}{2} \\ v^{m+1/2} &= \frac{v^t + v^{m+1}}{2} \\ p^{m+1/2} &= \frac{p^t + p^{m+1}}{2} \end{aligned} \quad (17)$$

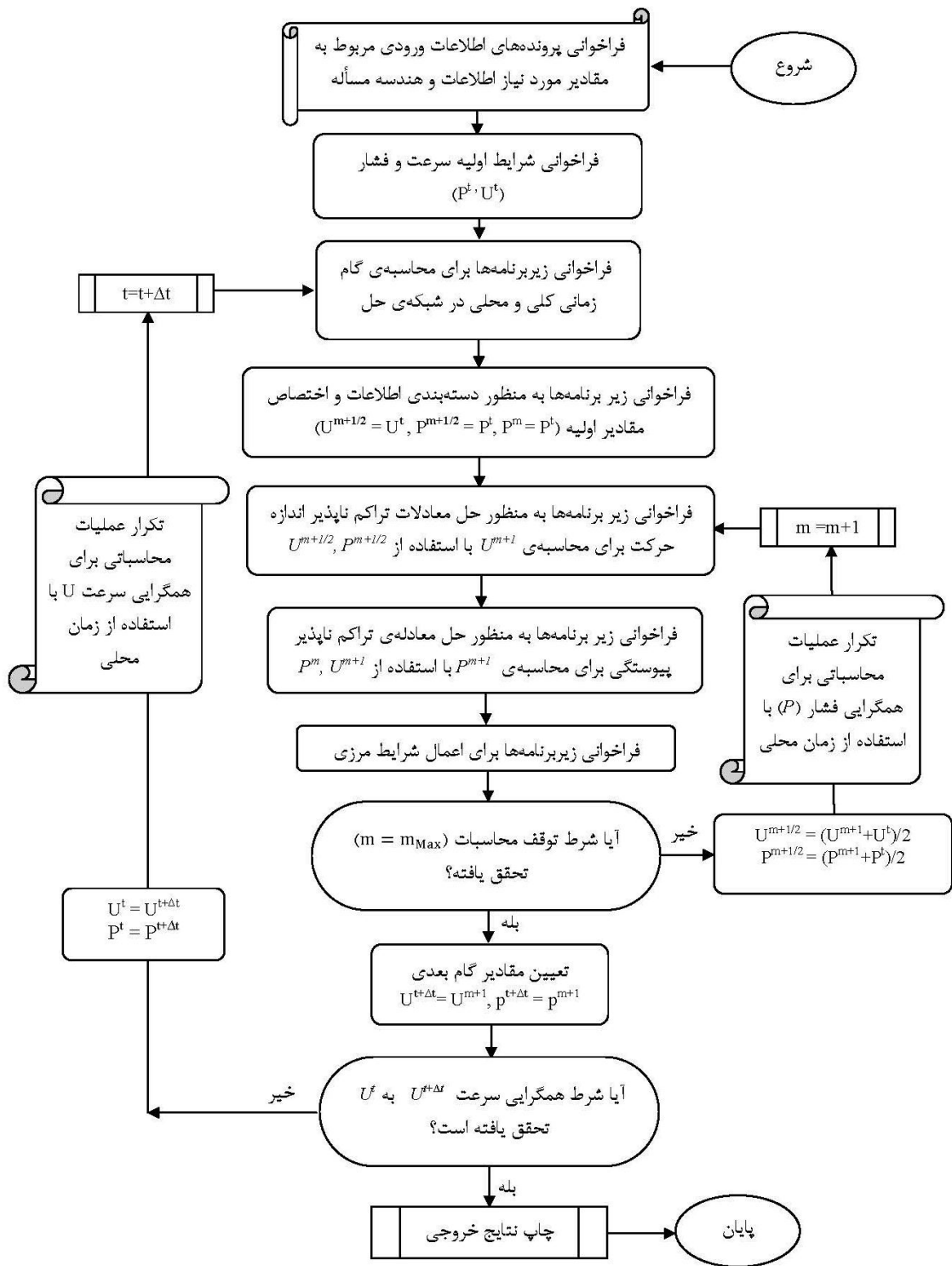
در ادامه، مجدداً به بخش دوم (۲) رفته و اصلاح میدان سرعت و فشار صورت می‌پذیرد، و این مراحل تا رسیدن تعداد تکرار در هر گام زمانی مجازی به  $m_{Max}$  ادامه می‌یابند. لازم بذکر است که برای جریان دایمی، این چرخه حداقل باید دو بار در هر گام زمانی مجازی تکرار شود  $(m_{Max} \geq 2)$ .

پس از آن به گام زمانی مجازی بعدی رفته و گامهای تکرار شونده و مراحل فوق مجدداً تا رسیدن به همگرایی مناسب میدان سرعت و فشار ادامه می‌یابند. جهت محاسبه‌ی همگرایی فراسنج  $W$  در دو زمان متوالی از رابطه‌ی زیر استفاده شده است.

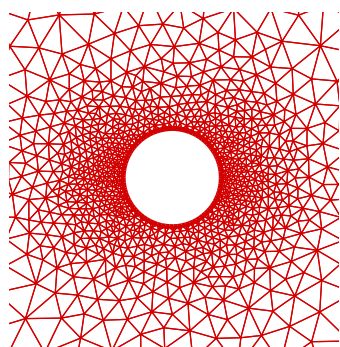
$$\text{Log}(\text{RMS}(W)) = \text{Log} \left( \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N_{node}} (W_i^{t+\Delta t} - W_i^t)^2}{N_{node}}} \right) \quad (18)$$

در رابطه‌ی فوق  $N_{node}$  تعداد گرههای شبکه میدان حل می‌باشد.

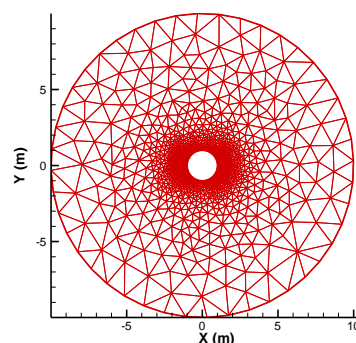
ضمناً، در نمودار گردش‌ی نمایش داده شده در شکل ۱ مراحل حل به صورت جزئی‌تر نمایش داده شده‌اند.



شکل ۱- نمودار گردش الگوریتم ابداعی ارائه شده

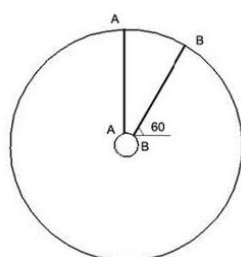


ب- شبکه بندی اطراف استوانه



الف- شبکه بندی بی ساختار دو بعدی اطراف استوانه

شکل ۲- شبکه بندی مثلثی بی ساختار برای شبیه استوانه دایروی.



شکل ۳- دو مقطع انتخابی برای مقایسه‌ی نتایج.

در خصوص شرایط مرزی حل عددی، در مرز روی استوانه دایروی به‌عنوان دیواره‌ی صلب شرایط مرزی لغزان، یعنی در نظر گرفتن سرعت عمودی برابر با صفر و شرایط مرز جریان نیز با در نظر گرفتن مرز به اندازه‌ی کافی دور، شرایط مرز دور با جریان آزاد اعمال شده است. در تمام نقاط گرهی نیز به‌عنوان شرایط اولیه‌ی سرعت برابر با سرعت جریان آزاد لحاظ شده است (شکل ۴).

ابتدا در شکل ۵ همگرایی سرعت و فشار حاصل از حل صریح (بدون استفاده از روشهای کاستن نوسان) در اطراف استوانه بررسی شده است و همانگونه که ملاحظه می‌شود، حل ناپایدار است.

سپس در شکل ۶، با به کارگیری روش استهلاک مصنوعی جهت پایدارسازی حل صریح و در نظر گرفتن ضریب استهلاک مصنوعی مرتبه‌ی چهارم برابر با ۰.۰۱ در روش همبسته همگرایی سرعت و فشار در مقایسه با روش ابداعی غیرهمبسته حاضر، ارائه شده است. بیان این نکته ضروری است که در حل عددی صریح با کاربرد روش پایدارسازی مبتنی بر استهلاک مصنوعی باضریب استهلاکی مرتبه‌ی چهارم کوچکتر از یک صدم

نتایج به دست آمده پایدار نبوده و این امر ناشی از وجود نوسانها در حل صریح است. در روش ابداعی حاضر، جهت پایدارسازی حل صریح به منظور بررسی مقدار بهینه‌ی حداکثر گام تکرار شونده ( $m_{Max}$ ) نسبت به زمان محاسباتی، در شکل ۷ طی گامهای تکرار شونده مختلف مقایسه صورت گرفته است. با توجه به شکل ۷، در همگرایی حل جریانهای دائمی، انتخاب حداکثر گام تکرار شونده ( $m_{Max}$ ) بر زمان محاسبات تأثیر دارد. لذا، با توجه به زمان محاسباتی مورد نیاز برای مقادیر مختلف گام تکرار شونده، برای استوانه‌ی مورد نظر  $m=10$ ، به عنوان مقدار مطلوب انتخاب شده است.

در شکل ۸ زمان محاسبات در مقابل همگرایی فشار در حل عددی حاضر به ازای حداکثر گام تکرار برابر ۱۰ در  $(m=10)$  در هر گام زمانی مجازی و شبیه عددی همبسته با پایدارسازی به روش استهلاک مصنوعی آورده شده است. میتوان گفت زمان محاسباتی شبیه عددی حاضر مناسب بوده، ضمناً با توجه به نیاز به سعی و خطا در تنظیم فراسنجهای استهلاک مصنوعی، شبیه عددی حاضر دارای هزینه‌ی محاسباتی کمتری است.



شبکه بندی میدان حل شامل ۱۵۳۳ نقطه گره‌ی، ۲۸۶۵ پیکار مثلثی به صورت مثلثی بی‌ساختار (شولتینگ، ۱۹۷۹) می‌باشد (شکل ۱۳).

در ابتدا، طبق شکل ۱۴، تاثیر حداکثر تعداد تکرار در هر مرحله ( $m_{max}$ ) در مورد زمان زمان محاسبات در مقادیر مختلف رینولدز ارائه شده است. با توجه به نتایج ارائه شده، مقدار بهینه‌ی  $m_{max} = 2$  برای حل عددی حاضر انتخاب گردیده است، که در شکل ۱۵ همگرایی مؤلفه‌های سرعت و فشار در رینولدزهای مختلف با روش پایدارسازی ابداعی حل صریح ارائه گردیده برای مقادیر ذکر شده در زیر به‌عنوان مقادیر بهینه آورده شده است:

$$m_{max} = 2, C_{\beta} = 1, \beta_{min}^2 = 0.1, \beta_{max}^2 = 10$$

شکل ۱۶ نیز خطوط جریان میدان سرعت را برای مقادیر مختلف رینولدز نشان می‌دهد. همان‌گونه که مشاهده می‌شود، با افزایش عدد رینولدز، گردابه‌های جریان در گوشه‌های مربع شکل گرفته و توسعه می‌یابند. در شکل ۱۷ نیز مؤلفه‌های سرعت در دو راستای X و Y درون حفره مربعی با نتایج حاصل از تحقیقات Ghia و همکاران در رینولدزهای مختلف مقایسه شده است (قیبا و همکاران، ۱۹۸۲؛ مانوزی، ۲۰۰۵؛ دامونا و همکاران، ۲۰۰۱).

در نهایت، در جدول ۱، میزان تفاوت محاسبه شده مؤلفه سرعت در اعداد مختلف رینولدز در مقایسه با نتایج حل عددی Ghia و همکاران نمایش داده شده است (قیبا و همکاران، ۱۹۸۲؛ مانوزی، ۲۰۰۵؛ دامونا و همکاران، ۲۰۱۱). ضمناً، برای محاسبه‌ی درصد تفاوت در هر نقطه از رابطه‌ی زیر استفاده گردیده است:

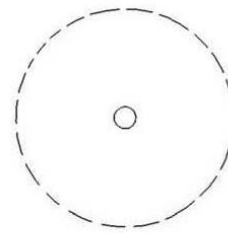
$$Difference(Velocity) = \frac{|V_{CFD} - V_{Ghia}|}{V_{Ghia}} \times 100 \quad (19)$$

جدول ۱- درصد تفاوت محاسبه شده از نتایج سرعت برای

مقادیر مختلف رینولدز:

عدد رینولدز			
۱۰۰۰	۴۰۰	۱۰۰	سرعت در راستای X
۱۲	۸.۷	۵	سرعت در راستای Y
۴.۹۵	۹	۱۱.۵	میزان تفاوت (%)

در شکل ۹ خطوط جریان اطراف استوانه حاصل از حل تحلیلی و حل عددی حاضر با استفاده از میدان سرعت محاسبه شده به‌دست آمده است. همچنین در شکل‌های ۱۰ و ۱۱ نیز به مقایسه نتایج تحلیلی در خصوص فشار و مؤلفه سرعت در دو مقطع A و B با نتایج حل عددی حاضر پرداخته شده است. با مقایسه ارقام، می‌توان بیان نمود روش ابداعی ارائه شده در غیاب لزجت فیزیکی نه تنها پایدار، بلکه دارای دقت بالایی نیز می‌باشد.



شکل ۴- شرایط مرزی شبیه ارائه شده.

### جریان دایمی لزج درون حفره‌ی مربع شکل

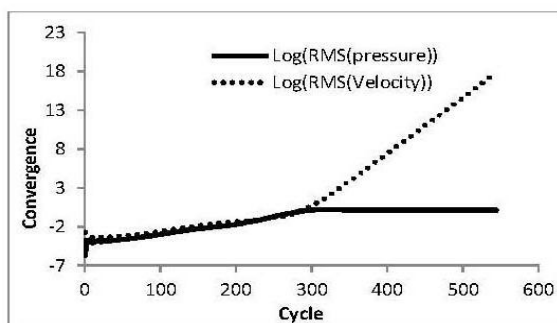
جریان داخل حفره یکی از آزمون‌های رایج برای صحت‌سنجی جریان دایمی غیرتراکم‌پذیر است. شبیه‌سازی‌های عددی نشان‌دهنده آن می‌باشد که چنین جریانی در اعداد رینولدز متوسط، لایه‌ای اما غیردایمی است. این جریان در اعداد رینولدز در حدود ۶۰۰۰ تا ۸۰۰۰ و بالاتر از آن آشفتگی می‌گردد (خوزف و استریت، ۱۹۸۴ab)، لیاوو ژاوو (۱۹۹۶)، دایسترو همکاران، ۲۰۰۴). در این آزمون جهت بررسی کارایی شبیه‌سازی اعداد رینولدز انتخابی برابر با ۱۰۰، ۴۰۰ و ۱۰۰۰ به صورت جریان لایه‌ای انتخاب شده است.

مشخصات هندسی حفره‌ی یک مربع ساده با بعد واحد و مرز دیواره زبر در ۴ طرف می‌باشد. کل دیواره‌ها به‌جز دیواره‌ی بالایی ثابت بوده، و دیواره‌ی بالایی با یک سرعت ثابت حرکت می‌کند؛ لذا، جریان در مجاور این دیواره نیز با همین سرعت دیواره جابه‌جا می‌گردد. در محدوده، حل شرایط مرزی زیر اعمال شده است (شکل ۱۲):

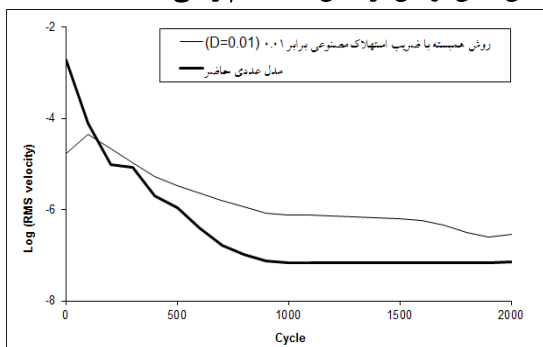
الف- مرز دیواره‌های مربع بغیر از مرز بالایی: مرز

غیرلغزان

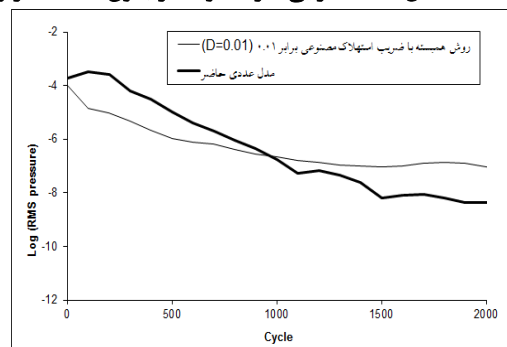
ب- مرز بالایی مربع: سرعت مرزی اعمال شده است.



شکل ۵- همگرایی سرعت و فشار بدون استفاده از روشهای سامان دادن نوسان براساس تعداد گام زمانی (Cycle).

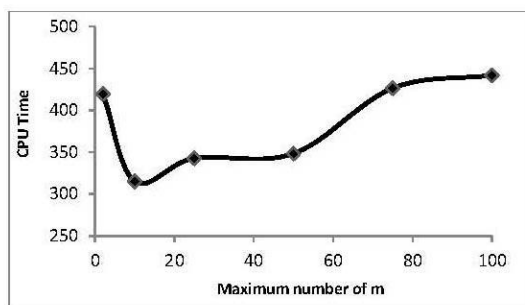


(ب) همگرایی سرعت

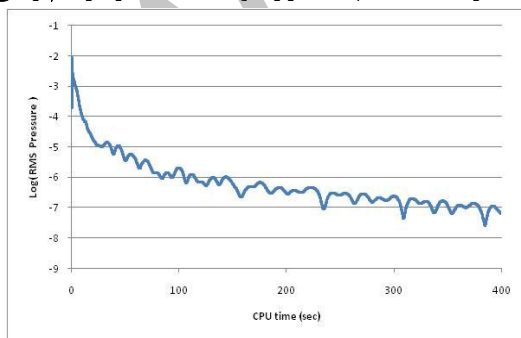


(الف) همگرایی فشار

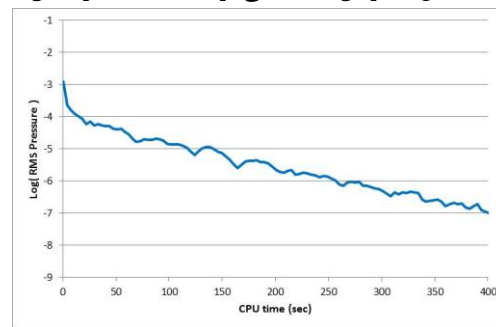
شکل ۶- همگرایی سرعت و فشار حاصل از شبیه عددی حاضر و شبیه همبسته با پایداری سازی با کاربرد روش استهلاک مصنوعی براساس شمار گامهای زمانی (Cycle).



شکل ۷- زمان محاسباتی برحسب ثانیه تا رسیدن به همگرایی مناسب برای تعداد گامهای تکرار شونده مختلف در هر گام زمانی.

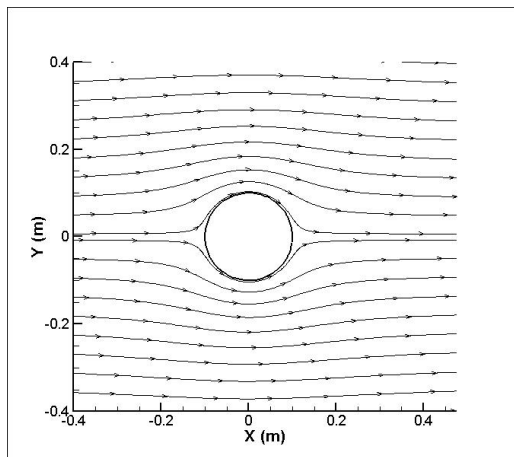


ب- شبیه عددی همبسته با پایداری سازی به روش استهلاک مصنوعی

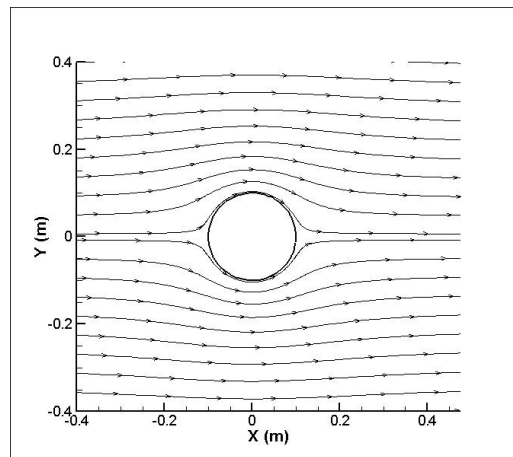


الف- شبیه عددی حاضر

شکل ۸- مقایسه‌ی زمان محاسباتی در مقابل همگرایی فشار در شبیه عددی حاضر به ازای تعداد حداکثر گام تکرار شونده برابر با ۱۰ (m=10) در هر گام زمانی مجازی و شبیه عددی همبسته با پایداری سازی به روش استهلاک مصنوعی.

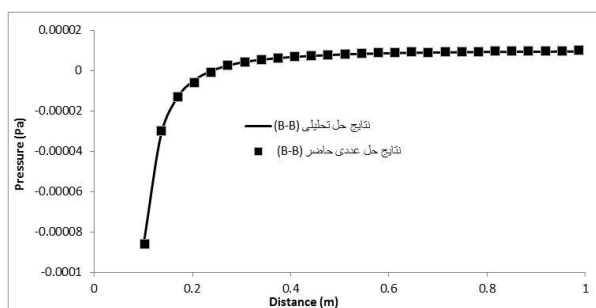


ب- حل عددی

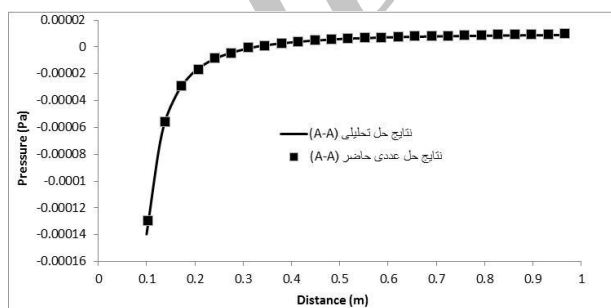


الف- حل تحلیلی

شکل ۹- خطوط جریان اطراف استوانه حاصل از حل تحلیلی و حل عددی حاضر.

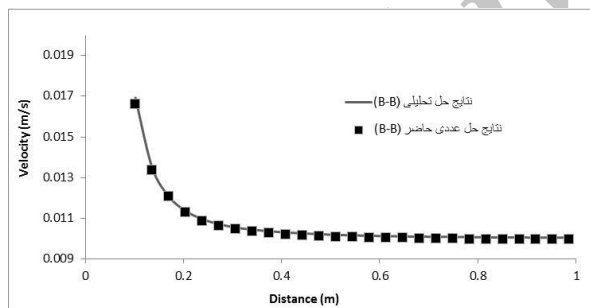


ب- مقطع B-B

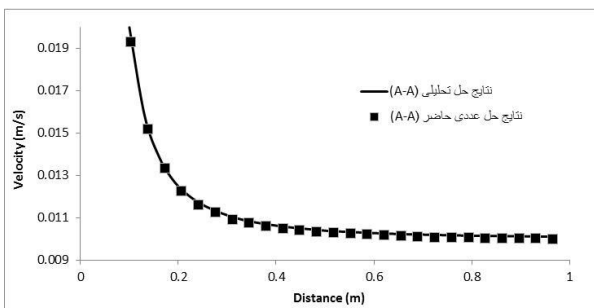


الف- مقطع A-A

شکل ۱۰- مقایسه‌ی نتایج فشار حاصل از حل عددی حاضر و حل تحلیلی.

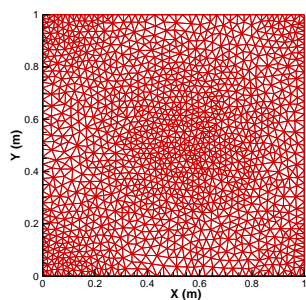


ب- مقطع B-B

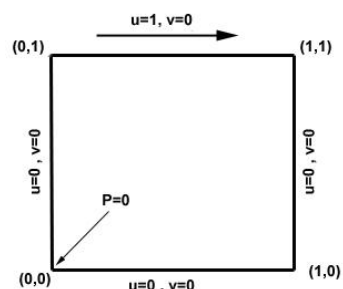


الف- مقطع A-A

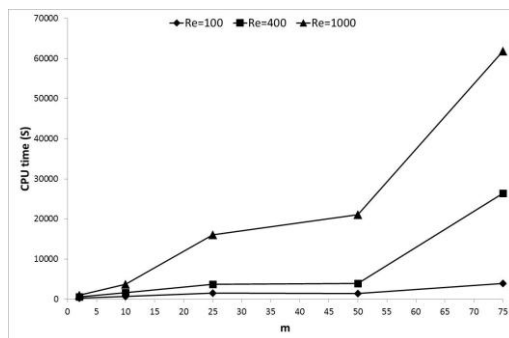
شکل ۱۱ - مقایسه‌ی نتایج مؤلفه‌ی سرعت راستای X حاصل از حل عددی حاضر و حل تحلیلی.



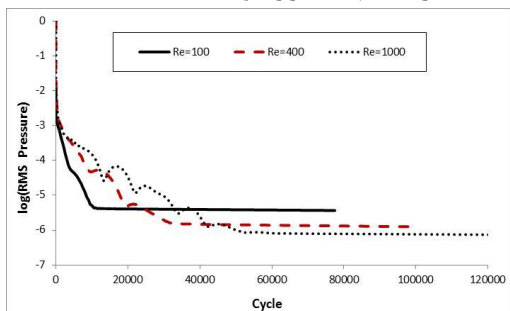
شکل ۱۳- شبکه بندی بی ساختار دو بعدی حفره‌ی مربعی.



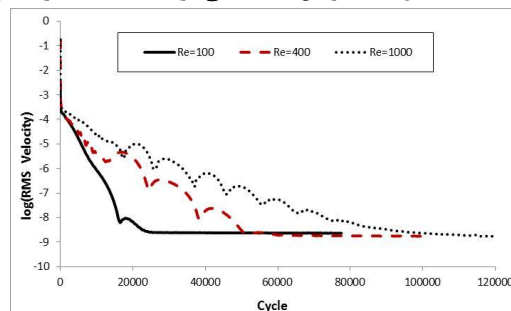
شکل ۱۲- هندسه و شرایط مرزی اعمال شده بر حفره‌ی مربعی.



شکل ۱۴- زمان محاسباتی برحسب ثانیه تا رسیدن به همگرایی مناسب برای گامهای تکرار شونده‌ی مختلف.

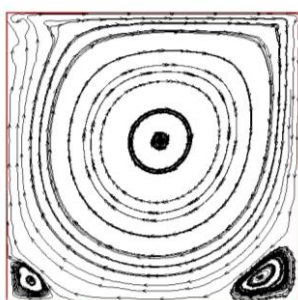


ب- همگرایی فشار

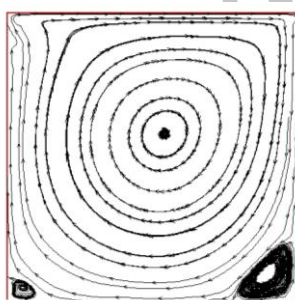


الف- همگرایی سرعت

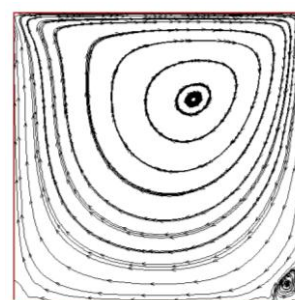
شکل ۱۵- همگرایی سرعت و فشار در مقادیر مختلف رینولدز (Re=100, 400, 1000) براساس تعداد گامهای زمانی (Cycle).



ج- Re = 1000

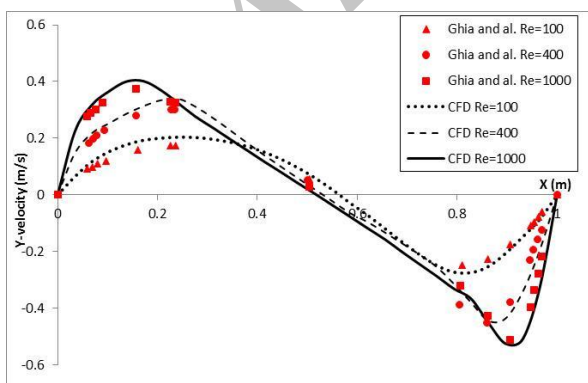


ب- Re = 400

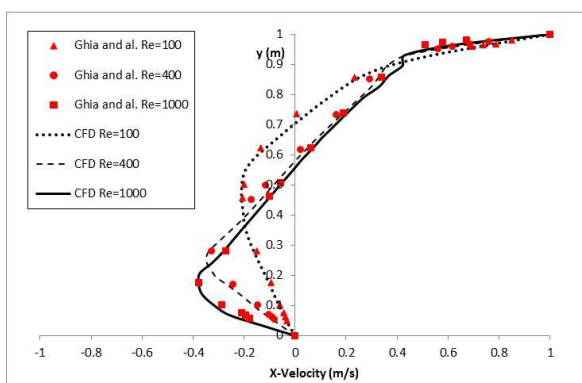


الف- Re = 100

شکل ۱۶- خطوط جریان در مقادیر مختلف رینولدز (Re=100, 400, 1000).



ب- مؤلفه‌ی سرعت در راستای y در مختصات  $y = 0.5$



الف- مؤلفه‌ی سرعت در راستای x در مختصات  $x = 0.5$

شکل ۱۷- مقایسه مؤلفه‌های سرعت در مختصات  $x=0.5$  و  $y=0.5$  شبیه عددی حاضر با نتایج Ghia et al. در رینولدزهای مختلف (Re=100, 400, 1000).

است، ضمن آن‌که با بهره‌گیری از شبکه‌بندی مثلثی بی‌ساختار نیز امکان ریز کردن شبکه در مناطق موردنظر و پستی و بلندیهای ناهموار و پیچیده امکان‌پذیر می‌باشد. لازم به ذکر است که طبق صحت‌سنجی انجام شده روش ابداعی حاضر دارای عملکرد مناسب بوده، که می‌توانند برای جریانهای آشفته نیز صحت‌سنجی لازم صورت پذیرد. همچنین، روش به‌کار رفته را می‌توان به حالت سه بعدی، و همچنین برای جریانهای غیردایمی نیز تعمیم داد و نتیجه مطلوب را به‌دست آورد.

### منابع

1. Adams, N.A., and Shariff, K. 1996. A high resolution hybrid compact ENO scheme for shock-turbulence interaction problems. *J. Comput. Phys* 127: 27-51.
2. Chorin, A.J. 1997. A numerical method for solving incompressible viscous flow problems. *J. Comput. Phys* 135: 118-125.
3. Chung, T.J. 2002. *Computational fluid dynamics*. DOI:10.1017/9780511606205: 106-119.
4. Cox, R.A., and Nishikawa, T. 1991. A new total variation diminishing scheme for the solution of convective dominate solute transport. *Water Resour. Res.* 27: 2645-2654.
5. Deister, F., Tremel, U., Hassan, O. and Weatherill, N.P. 2004. Fully automatic and fast mesh size specification for unstructured mesh generation. *Engineering with computers* 20: 237-248.
6. Dreyer, J. (1990). Finite volume solution to the steady incompressible Euler Equation on Unstructured Triangular Meshes. M.Sc. Thesis, MAE Dept., Princeton University.
7. Dumona, A., C. Allery, and A. Ammarb. 2011. Proper general decomposition (PGD) for the resolution of Navier–Stokes equations. *J. Comput. Phys.* 230: 1387-1407.
8. Ghia, U., Ghia, K.N. and Shin, C.T. 1982. High-Re solutions for incomp-

با توجه به نتایج ارائه شده می‌توان گفت، در این آزمون نیز روش ابداعی به‌کار رفته ضمن دارا بودن پایداری و همگرایی، از دقت حل بالایی برخوردار می‌باشد.

### نتیجه‌گیری

در این مقاله به حل عددی صریح جریان تراکم‌ناپذیر در حالت دایمی با کاربرد روش احجام محدود بر روی شبکه مثلثی بی‌ساختار با روش پایدارسازی ابداعی پرداخته شده است. در روند حل عددی، با بهره‌گیری از متغیرهای میانی (حاصل از میانگین‌گیری متغیرهای محاسبه شده گام زمانی قبل و گام تکرارشونده زمان بعدی)، و همچنین استفاده از گامهای تکرارشونده در هر گام زمانی مجازی به یک راه حل پایدار رسیده که نوسانهای را بطور قابل توجهی سامان می‌دهد.

به منظور صحت‌سنجی نتایج نیز از دو نوع آزمون استفاده شده است. در آزمون اول، جریان غیرلزج پیرامون یک استوانه دایروی در غیاب استهلاك و لزجت فیزیکی، و در آزمون دوم جریان لزج داخل حفره‌ی مربعی شبیه‌سازی و سپس نتایج حاصل از روش حاضر به ترتیب با نتایج تحلیلی و عددی موجود مقایسه و مورد ارزیابی قرار گرفته‌اند. نتایج آزمون‌ها حاکی از سامان دادن نوسانهای حل و پایداری حل صریح بوده، ضمن آن‌که نتایج نیز دارای دقت مناسب می‌باشند.

با استفاده از این روش نوآورانه در حل عددی جریان، بدون نیاز به استفاده از روشهای سامان‌دهی نوسانهای مانند روش TVD و استهلاك مصنوعی، به حل پایدار جریان پرداخته شده است. پیاده‌سازی با این روش ابداعی برخلاف روش TVD بر روی شبکه‌بندی مثلثی بی‌ساختار به راحتی قابل پیاده‌سازی بوده، و دارای هزینه‌ی محاسبات کمتری می‌باشد. همچنین، روش ابداعی حاضر برای پایدارسازی در مقایسه با روش استهلاك مصنوعی نیز، با توجه به عدم نیاز به سعی و خطا برای تنظیم فراسنجهای استهلاك مصنوعی، دارای هزینه‌ی محاسبات کمتری بوده، ضمن آن‌که براساس مقایسه صورت گرفته همگرایی روش ابداعی حاضر دارای پایداری مناسب است، و در حل نیز لزجتهای ناخواسته ایجاد نمی‌گردد.

این عدم نیاز به روشهای مکمل برای ایجاد پایداری در حل صریح، قابل توجه‌ترین دستاورد روش ارائه شده

18. Spencer, P. 2010. Finite difference methods and solving the level set equations numerically. Contents-1.Domainsite:<http://impact.byu.edu/Image Processing Seminar/ Finite Difference Notes.pdf>
19. Sabbagh-Yazdi S. R., N. E. Mastorakis, F. Meysami, and F. Namazi-Saleh. .2008. 2D Galerkin finite volume solution of steady inviscid / viscous / turbulent artificial compressible flow on triangular meshes. *Inter. J. Computers. 2:* 39-46.
20. Schlichting, H. 1979. Boundary-Layer theory (7th edition). New York: McGraw Hill.
21. Tannehill, J.C., Anderson, D.A. and Pletcher, R.H. 1997. *Computational fluid mechanics and heat transfer*. Second edition. Taylor & Francis Group. ISBN; 978-1-56032-046-3: 649-677.
22. Wood, I.R. 1991. Air entrainment in free-surface flows. *Hydraulic structures design manual: No.4*. Hydraulic design considerations. A. A. Balkema. Rotterdam. The Netherlands.
23. Zhaong, X. 1998. High order finite difference schemes for numerical simulation of hypersonic boundary layer transition. *J. Comput. Phys.* 144: 622-709.
9. Harten, A. 1983. A High resolution scheme for the computation of weak solutions of hyperbolic conservation laws. *J. Computational Physics* 49.
10. Jameson, A., Schmidt, W., and Turkel, E.. 1981. Numerical solutions of the Euler equations by finite volume methods using Runge-Kutta time stepping schemes. *AIAA paper Series: 1981-1259*.
11. Koseff, J.R., and Street, R.L. 1984. On end wall effects in a lid driven cavity flow. *Journal of fluids engineering* 106: 385–389.
12. Koseff, J.R., and Street, R.L. 1984. Visualization studies of a shear driven three- dimensional recirculating flow. *ASME J. Fluids Eng.* 106: 21– 29.
13. Leveque, R.J. 1992. Numerical methods for conservation laws. Lectures in mathematics. Birkhauser publisher, 2<sup>nd</sup> edition. ISBN 3764327235, ISBN 0817627235.
14. Liao, S.J., and Zhu, J.M. 1996. A Short note on higher-order streamfunction- vorticity formulation of 2-D steady state Navier-Stokes equations. *Inter. J. Numerical Methods in Fluids* 22: 1–9.
15. Li, C.W., and Zhu, B. 2002. A sigma coordinate 3D  $k-\varepsilon$  model for turbulent free surface flow over a submerged structure. *Applied mathematical modeling.* 26: 1139-1150.
16. Manouzi, H. 2005. Numerical simulations of the Navier-Stokes problem with hyper dissipation. *Excerpt from the Proceedings of the COMSOL Multiphysics User's Conference*.
17. Mavriplis, D., Jameson, A. 1990. Multigrid solution of the Navier-Stokes equations on triangular meshes. *AIAA Journal.* Vol. 28(8).