

## تدوین یک مدل شبیه‌سازی-بهینه‌سازی فازی به منظور تخمین بهینه‌ی فراسنجهای آبخوان محصور

عاطفه دل ناز<sup>۱</sup>، غلامرضا رخشنده‌رو<sup>۲\*</sup>، محمدرضا نیکو<sup>۳</sup>

### چکیده

برای مدیریت صحیح آب زیرزمینی به عنوان یکی از منابع اصلی، تخمین دقیقی از فراسنجهای آبخوان لازم است. روش‌های موجود مدیریت آبهای زیرزمینی، به منظور سادگی، به منظور سادگی، عدم قطعیت‌های فراسنجهای آزمایش آبکشی را نادیده می‌گیرند. در این تحقیق، یک مدل شبیه‌سازی-بهینه‌سازی فازی به منظور در نظر گرفتن عدم قطعیت‌ها در تعیین فراسنجهای آبخوان تدوین شده‌است. مدل شبیه‌سازی-بهینه‌سازی فازی مذکور قادر است با توجه به حداقل‌سازی اختلاف بین افت مشاهداتی و افت محاسباتی، فراسنجهای آبخوان محصور را به خوبی تخمین زند. روش پیشنهادی برای داده‌های یک آزمایش آبکشی واقعی در آبخوان محصور آزمایش و نتایج آن با حل ترسیمی روش تاپس مقایسه شده‌است. با قیاس چندین شاخص خطای آماری بر مبنای نتایج مدل شبیه‌سازی پیشنهادی و حل ترسیمی روش تاپس، عملکرد دو روش مذکور، بررسی گردیده است. به عنوان مثال، میانگین قدر مطلق خطای نسبی مدل شبیه‌سازی پیشنهادی و حل ترسیمی روش تاپس، به ترتیب ۰/۶۹ و ۱/۱۳ درصد بود که نشان‌دهنده‌ی دقت مناسب مدل شبیه‌سازی پیشنهادی نسبت به حل ترسیمی روش تاپس است؛ لذا می‌تواند به عنوان جایگزین حل ترسیمی روش تاپس منظور گردد. در بخش دوم، با انتخاب بده به عنوان فراسنج غیرقطعی، مدل شبیه‌سازی-بهینه‌سازی فازی بر مبنای روش تبدیل فازی، توسعه داده شده است. بر مبنای نتایج روش فازی مذکور، میزان تأثیر این عدم قطعیت در تخمین بهینه‌ی فراسنجهای آبخوان محصور بررسی شده و بازه‌ی تغییرات فراسنجهای آبخوان در برش‌های فازی مختلف، تعیین گردیده است. بررسی نتایج روش فازی توسعه داده شده نشان می‌دهد که تأثیر عدم قطعیت بده، در تخمین فراسنج  $T$  آبخوان محصور زیادتر از  $S$  است.

**کلمات کلیدی:** آزمایش آبکشی، آبخوان محصور، تخمین فراسنجهای آبخوان، تابع چاه، روش تبدیل فازی

<sup>۱</sup> دانشجوی کارشناسی ارشد سازه‌های هیدرولیکی، بخش مهندسی راه، ساختمان و محیط‌زیست، دانشکده مهندسی، دانشگاه شیراز.

<sup>۲</sup> استاد تمام بخش مهندسی راه، ساختمان و محیط‌زیست، دانشکده مهندسی، دانشگاه شیراز.

فکس: ۰۷۱۳۶۴۷۳۱۶۱، تلفن: ۰۹۱۷۱۱۱۴۱۸۷. Email: rakhsan@shirazu.ac.ir

<sup>۳</sup> دانشیار بخش مهندسی راه، ساختمان و محیط‌زیست، دانشکده مهندسی، دانشگاه شیراز

## مقدمه

به تخمین بهینه‌ی فراسنجهای آب زمین‌شناسی آبخوان-های مختلف بر مبنای روش‌های تائیس<sup>۵</sup>، تائیس اصلاح شده<sup>۶</sup> و هانتوش<sup>۷</sup> نمودند. ایشان همچنین نتایج به دست آمده را با نتایج نرم‌افزار آزمایش آبخوان مقایسه کردند. نتایج حاصله نشان‌دهنده‌ی خطای کمتر روش بهینه‌سازی ژنتیک نسبت به روش حل ترسیمی از منظر شاخص خطای آماری مجموع مربعات خطا بوده است. پژوهش فوق بیانگر این نکته بود که روش الگوریتم ژنتیک روشی آسان، کارآمد و قابل اطمینان است که زمان محاسباتی کمی داشته و از خطاهای فردی مصون است. جها و همکاران (۲۰۰۶) کارایی الگوریتم ژنتیک را در تخمین فراسنجهای آبخوان بررسی نمودند. ایشان نشان دادند که الگوریتم ژنتیک روشی موثر و با دوام است که از خطاهای فردی مصون بوده و مشکلات روش‌های قدیمی بهینه‌سازی را ندارد. عبدالجواد و الهادی (۲۰۰۹) کارایی مدل شبیه‌سازی-بهینه‌سازی الگوریتم ژنتیک را برای تخمین فراسنجهای هیدرولیکی آبخوان‌های مختلف تحت شرایط ماندگار و غیرماندگار بررسی کردند. ایشان به این نتیجه رسیدند که از آنجا که روش بهینه‌سازی الگوریتم ژنتیک، به ازاء چاه‌های مشاهده‌ای مختلف برای یک چاه آبکشی، یک جواب واحد برای فراسنجهای آبخوان می‌دهد، این روش در بهینه‌ی محلی<sup>۸</sup> گیر نمی‌افتد و به جواب بهینه‌ی عمومی<sup>۹</sup> می‌رسد. ایشان به این نتیجه رسیدند که روش بهینه‌سازی الگوریتم ژنتیک در مقایسه با روش ترسیمی، جواب‌های دقیق‌تری را می‌دهد. راجش و همکاران (۲۰۱۰) با روش تحلیلی بولتن به ازاء سه تابع هدف مختلف با استفاده از روش بهینه‌سازی ژنتیک، فراسنجهای آبخوان آزاد را تخمین زدند. آن‌ها برای بررسی عملکرد مدل شبیه‌سازی مذکور، روش خود را با روش ترسیمی تطابق منحنی

آب‌های زیرزمینی یکی از منابع مهم و حیاتی هستند که نقش بسزایی در تأمین آب بخش‌های کشاورزی، شرب و صنعت دارند. قابلیت ذخیره و حرکت آب در سفره‌های آب زیرزمینی، به وسیله‌ی فراسنجهای مربوط به آنها نظیر ضریب ذخیره<sup>۱</sup> و ضریب انتقال<sup>۲</sup>، کنترل می‌گردند. لذا تخمین بهینه‌ی فراسنجهای سفره‌های آب زیرزمینی، به منظور مدیریت بهینه‌ی برداشت از آن‌ها امری اساسی و مهم است. تعیین فراسنجهای آبخوان، با استفاده از روش‌های معکوس، امری مرسوم است. یکی از این روش‌ها، استفاده از نتایج آزمایش آبکشی و تخمین فراسنجها با روش‌های ترسیمی بر مبنای مدل‌های شبیه‌سازی تحلیلی است، که چندان دقیق نبوده و همراه با خطاهای انسانی است. باید توجه شود که در روش‌های مذکور، که معمولاً بر مبنای تطابق منحنی به صورت چشمی صورت می‌پذیرد، اگر داده‌های افت-زمان مشاهداتی با منحنی‌های تیپ<sup>۳</sup> تطابق نیابند، نتایج حاصل از تخمین فراسنجهای آبخوان قابل اعتماد نیستند؛ به همین دلیل، امروزه از روش‌های جدید و الگوریتم‌های بهینه‌سازی نظیر الگوریتم ژنتیک (GA)<sup>۴</sup> برای تخمین بهینه‌ی فراسنجهای آبخوان استفاده می‌شود. هدف از به‌کارگیری این الگوریتم‌ها، به حداقل رساندن اختلاف بین افت‌های محاسباتی و مشاهداتی است. روش‌های بهینه‌سازی تکاملی از جمله روش‌هایی هستند که در مسائل تخمین بهینه‌ی فراسنجهای آبخوان به طور نسبتاً محدود به کار گرفته شده‌اند. لینگردی (۱۹۹۸) روش الگوریتم ژنتیک و شبکه‌ی عصبی را برای به‌دست آوردن فراسنجهای آبخوان ادغام نمود. ساموئل و جها (۲۰۰۳) با استفاده از روش بهینه‌سازی ژنتیک اقدام

<sup>6</sup> corrected Theis model

<sup>7</sup> Hantush model

<sup>8</sup> local optimum

<sup>9</sup> global optimum

<sup>1</sup> storage coefficient (S)

<sup>2</sup> transmissivity (T)

<sup>3</sup> type curves

<sup>4</sup> genetic algorithm

<sup>5</sup> Theis model

تخمین زده شود. نتایج حاصله از این تحقیق نشان دهنده ی آن است که ضرایب به دست آمده از روش ایشان مناسب هستند.

در تعیین بده آبکشی، که در محل انجام آزمایش صورت می پذیرد، خطاها و عدم صراحت هایی وجود دارد که بایستی اثرات آن در تخمین فراسنجهای آب زمین شناسی آبخوان منظور گردند. یکی از رویکردهای مناسب برای این منظور، استفاده از فرضیه مجموعه های فازی است. این امر، به ویژه در شرایطی که تابع توزیع احتمالاتی متغیر غیر قطعی در دسترس نیست، بسیار پرکاربرد است. مفهوم مجموعه های فازی برای اولین بار به وسیله ی لطفی-زاده (۱۹۶۵) برای نشان دادن عدم قطعیت در فراسنجهای غیردقیق یا به عبارتی غیرقطعی ارائه گردیده است. فرضیه ی مجموعه های فازی، تعمیم یافته فرضیه ی مجموعه ی کلاسیک بوده و یک مجموعه ی فازی، مجموعه ای است که اعضای آن با یک درجه ی عضویت بین ۰ تا ۱ متعلق به آن هستند. برای دست یافتن به جواب های قابل اطمینان در مسائل عددی واقعی؛ باید مقادیر دقیق فراسنجهای مدل شبیه سازی وجود داشته باشند، اما در عمل، معمولاً این مقادیر دقیق وجود ندارند و مدل های شبیه سازی دارای درجه ای از عدم قطعیت هستند. این عدم قطعیت ها ممکن است به علت کمبود یا نبود یک گروه از اطلاعات، خطاهای اندازه گیری و یا ساده سازی مسائل پیچیده به وجود آیند. در هر صورت، این عدم قطعیت ها باعث به وجود آمدن مدل های شبیه سازی غیرقطعی یا شرایط مرزی و اولیه ی غیرقطعی می شوند. استفاده از ریاضیات معمول فازی در مسائل بهینه سازی غیرخطی، به علت وجود چندین نقطه ی ماکزیمم و مینیمم در برش های آلفای مختلف به ازاء ورودی های فازی، مشکل ساز است. زیرا باعث تغییر شکل تابع عضویت فازی خروجی شده و کارایی آن را در عمل از بین می برد (هنس، ۲۰۰۲). با به کار بردن روش های مبتنی

و روش حداقل سازی غیرمقید پی در پی<sup>۱</sup> (SUMT) مقایسه کردند. با مقایسه ی مجموع مربعات خطای سه روش، نتایج نشان از عملکرد بهتر و مناسب تر روش بهینه سازی ژنتیک نسبت به روش ترسیمی و روش SUMT داشتند. لو و همکاران (۲۰۱۱) از روش بهینه سازی ژنتیک برای تخمین ضرایب هدایت هیدرولیکی افقی و قائم، ضریب ذخیره، ذخیره ی مخصوص، شاخص تأخیر و ضخامت آبخوان آزاد کارستی استفاده کردند. نتایج حاکی از این نکته هستند که ضرایب هدایت هیدرولیکی افقی و قائم و نیز نسبت انیزوتروپی ( $\frac{K_r}{K_z}$ )، به شدت تحت تأثیر ضخامت آبخوان هستند. ایشان همچنین نتیجه گرفتند که روش بهینه سازی الگوریتم ژنتیک، راه خوبی برای تخمین فراسنجهای آبخوان با ضخامت نامشخص است. باطنی و همکاران (۲۰۱۵) برای تخمین فراسنجهای آبخوان های مختلف با روش تاپس، هانتوش و تاپس اصلاح شده، روش بهینه سازی الگوریتم ژنتیک و الگوریتم مورچگان<sup>۲</sup> (ACO) را پیاده کرده و نتایج را با روش برنامه ریزی غیرخطی<sup>۳</sup> (NLP) و روش ترسیمی مقایسه کردند. ایشان به این نتیجه رسیدند که با وجود ارجحیت روش NLP نسبت به روش ترسیمی، مشکلی که وجود دارد این است که جواب ها به سمت بهینه ی محلی می رود. نتایج نشان دهنده ی کارایی و عملکرد مناسب روش GA و ACO در تخمین فراسنجها و اجتناب از جواب بهینه ی محلی در این روش ها هستند. ژوانگ و همکاران (۲۰۱۵) یک روش منحنی تپ را بر مبنای روش خطی قطعه ای<sup>۴</sup> (PLS) برای محاسبه ی فراسنجهای یک آبخوان نشتی چندلایه ارائه کردند. برای به دست آوردن ضرایب آبخوان در این روش باید داده های سطح آب در طولانی مدت، هم در آبخوان اصلی و هم در آبخوان نشتی ثبت گردند. روش کار به این صورت است که ابتدا باید نقطه ی شروع افت در آبخوان های مجاور تعیین گردد، سپس تاریخچه ی افت آن ها با کاربرد روش PLS

<sup>3</sup> nonlinear programming

<sup>4</sup> piecewise Linear Segments

<sup>1</sup> sequential unconstrained minimization technique

<sup>2</sup> ant colony optimization

اندازه‌گیری در مقدار ضرایب آب زمین‌شناسی آبخوان محصور بوده است.

### مواد و روش‌ها

نمودار گردشی روش‌شناسی پیشنهادی برای تدوین مدل شبیه‌سازی-بهینه‌سازی فازی تخمین فراسنجهای آبخوان محصور برمبنای روش تبدیل فازی در شکل ۱ ارائه شده است. روش توسعه داده‌شده برمبنای اتصال مدل شبیه‌سازی بهینه‌سازی الگوریتم ژنتیک با حل عددی تابع چاه با کاربرد روش تاپس و در نهایت، فازی کردن مدل شبیه‌سازی-بهینه‌سازی مذکور برمبنای روش تبدیل فازی است. همان‌طور که در شکل ۱ مشاهده می‌گردد، روش-شناسی پیشنهادی، شامل ۴ مرحله‌ی اصلی است. در مرحله‌ی اول، داده‌های افت-زمان آزمایش آبکشی جمع-آوری و بده آبکشی نیز تعیین می‌شود. همچنین، با بررسی داده‌های جمع‌آوری شده، فراسنج(های) غیرقطعی تعیین می‌گردند. سپس تابع عضویت مثلثی فازی برای فراسنج(های) غیرقطعی (برای نمونه، بده آبکشی، در این تحقیق) در بازه‌ی تغییرات ممکن آن‌ها (حد بالا و پایین ممکن برای فراسنج غیر قطعی) به منظور در نظر گرفتن خطاها در اندازه‌گیری، تخمین زده می‌شوند.

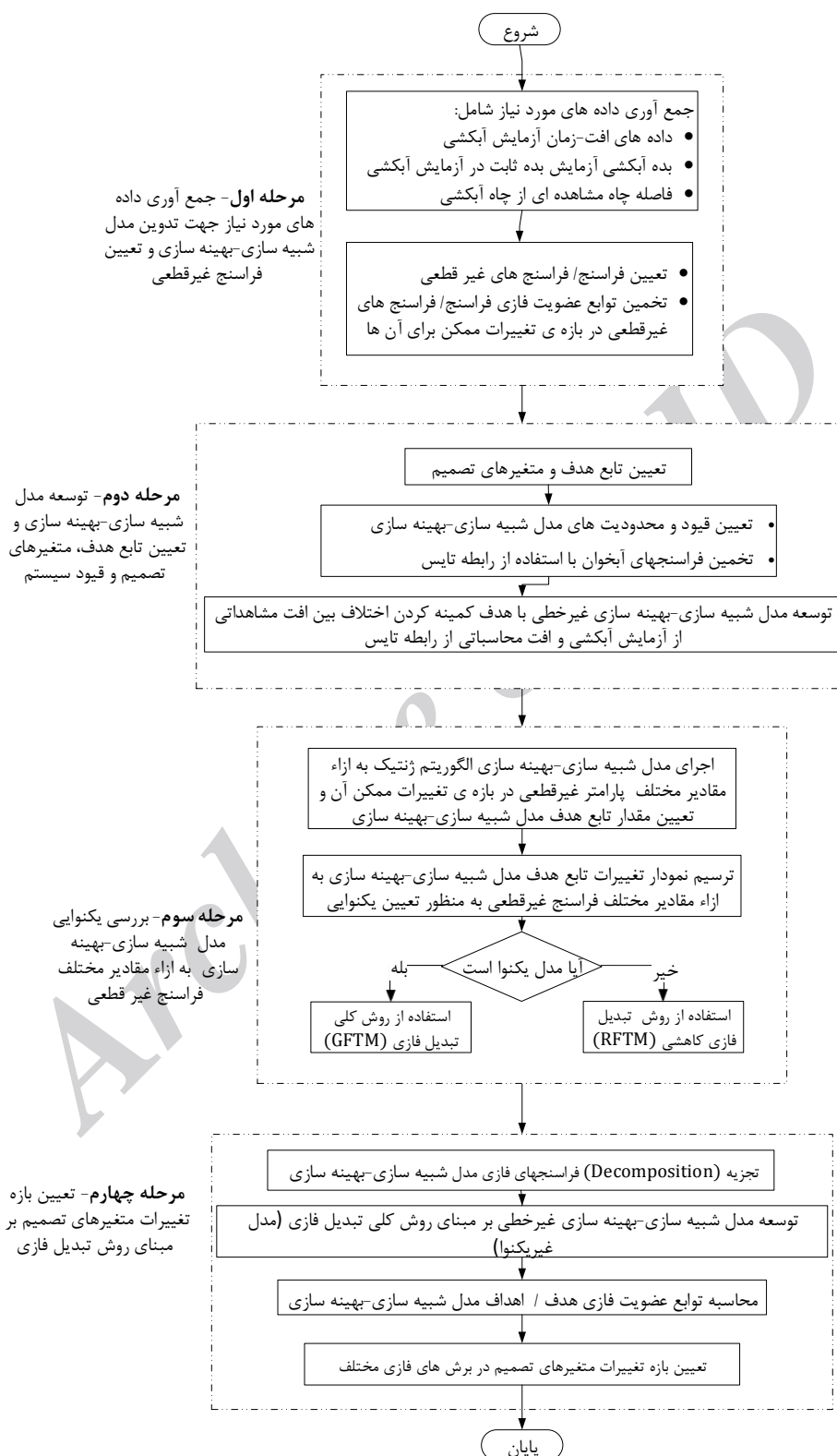
در مرحله‌ی دوم، مدل شبیه‌سازی-بهینه‌سازی لازم برای تخمین فراسنجهای آبخوان محصور برمبنای مدل الگوریتم ژنتیک، تدوین می‌گردد. بدین منظور باید متغیرهای تصمیم، محدودیت‌ها و تابع هدف مدل شبیه‌سازی-بهینه‌سازی، تعیین گردند. در ادامه، یک روش انتگرال‌گیری عددی بر مبنای حل معادلات تاپس با قابلیت اتصال به مدل شبیه‌سازی-بهینه‌سازی الگوریتم ژنتیک، تدوین می‌گردد. مدل شبیه‌سازی-بهینه‌سازی مذکور قادر است با توجه به حداقل‌سازی اختلاف بین افت مشاهداتی و افت محاسباتی، فراسنجهای آبخوان محصور را تخمین زند. در مرحله‌ی سوم، به منظور بررسی یکنوایی مدل شبیه‌سازی-بهینه‌سازی، اجرای آن به ازاء مقادیر محتمل برای فراسنج غیر قطعی بده آبکشی صورت پذیرفته و تابع

بر ریاضیات پیشرفته فازی نظیر روش تبدیل فازی، تمام اطلاعات مربوط به عدم قطعیت‌ها در مدل شبیه‌سازی لحاظ می‌شوند و می‌توان تأثیر این عدم قطعیت‌ها را بر روند محاسبات در مدل شبیه‌سازی نشان داد. روش تبدیل فازی فاقد اشکالات احتمالی موجود در ریاضیات فازی معمول است (هنس و ویلنر، ۲۰۰۰؛ هنس، ۲۰۰۲). روش تبدیل فازی در زمینه‌های مختلف منابع آب نظیر مدل‌های تخصیص آب و بار آلودگی (آرامکی و ماتسو، ۱۹۹۸؛ صادق و همکاران، ۲۰۱۰؛ صادق و کراچیان، ۲۰۱۱؛ نیکو و همکاران، ۲۰۱۳)، مدیریت آب‌های زیرزمینی و رفع مناقشه‌ها با استفاده از روش‌های چانه‌زنی فازی (کراچیان و همکاران، ۲۰۱۰) و مدیریت و کنترل کیفیت آب رودخانه (نصیری و همکاران، ۲۰۰۷؛ سینگ و همکاران، ۲۰۰۷) به کار رفتند. دل‌ناز و همکاران (۲۰۱۷، ۲۰۱۹) فراسنجهای آبخوان آزاد را در ترکیب با منطق فازی تخمین زدند. ایشان همچنین با استفاده از چند مدل شبیه‌سازی هوش مصنوعی (GRNN، ANN و RBF) فراسنجهای آبخوان محصور را تعیین کردند.

مقایسه‌ی مقالات موجود اخیر حاکی از این است که در زمینه‌ی تخمین بهینه‌ی فراسنجهای آبخوان محصور، عدم قطعیت‌ها بر مبنای منطق فازی به کار گرفته نشده است. در این تحقیق یک روش‌شناسی جدید شبیه‌سازی-بهینه‌سازی فازی برمبنای مدل شبیه‌سازی ریاضیات فازی پیشرفته تبدیل فازی و اتصال مدل شبیه‌سازی-بهینه‌سازی الگوریتم ژنتیک با حل عددی تابع چاه به روش تاپس برای آبخوان محصور توسعه داده شده است. با در نظر گرفتن بده به عنوان یک فراسنج غیرقطعی فازی، تخمین فراسنجهای آبخوان محصور در شرایط عدم قطعیت صورت پذیرفته است. نتایج حاصله از مدل شبیه‌سازی پیشنهادی و نیز حل ترسیمی روش تاپس، در آبخوان محصور که جزئیات آن در تاد (۲۰۰۵) آورده شده است، نشان‌دهنده‌ی عملکرد مناسب‌تر روش‌شناسی پیشنهادی و توانایی مناسب آن در تعیین اثرات عدم قطعیت‌ها یا خطاهای

مقدار تابع هدف در مقابل مقادیر مختلف بده ترسیم گشته و یکنوایی مدل شبیه سازی-بهینه سازی بررسی می شود.

هدف مدل شبیه سازی-بهینه سازی متناظر با هر یک از حالات مذکور به دست می آیند. سپس، نمودار تغییرات



شکل ۱. نمودار گردش روش شناسی فازی پیشنهادی برای تدوین مدل فازی تخمین فراسنجهای آبخوان با استفاده از مدل شبیه سازی-بهینه سازی غیرخطی توسعه داده شده بر مبنای روش تبدیل فازی.

Subject to :

$$T_{\min} \leq T \leq T_{\max} \quad (۸)$$

$$S_{\min} \leq S \leq S_{\max} \quad (۹)$$

که در آنها  $s_o(t)$  افت مشاهداتی در چاه مشاهده‌ای در زمان  $t$  برحسب متر،  $s_c(t)$  افت نظیر محاسباتی با استفاده از رابطه تاپس،  $n$  تعداد کل افت‌های مشاهداتی،  $Q$  بده آبکشی بر حسب متر مکعب بر روز،  $t$  زمان از شروع آبکشی بر حسب روز،  $T$  ضریب انتقال بر حسب متر مربع بر روز،  $r$  فاصله چاه‌های مشاهداتی از چاه آبکشی بر حسب متر،  $S$  ضریب ذخیره، مطابق معادلات بالا بوده و  $T$  و  $S$  به عنوان متغیرهای تصمیم در مدل شبیه‌سازی-بهینه‌سازی انتخاب شده‌اند.

### روش فازی

شاید بتوان گفت یکی از مهمترین فراسنجهای غیرقطعی در آزمایش‌های آبکشی که به منظور تخمین فراسنجهای آبخوان انجام می‌شود، بده آبکشی است. این عدم قطعیت به ویژه در شرایطی بیشتر نمود پیدا می‌کند که اندازه‌گیری بده آبکشی به صورت دقیق صورت نپذیرفته باشد. در این تحقیق به منظور لحاظ عدم قطعیت مقدار بده آبکشی در مدل شبیه‌سازی-بهینه‌سازی تدوین شده، از رویکرد روش تبدیل فازی (FTM)<sup>۶</sup> استفاده شده است. روش تبدیل فازی یک روش آنالیز عدم قطعیت مدل‌های غیرقطعی است که به منظور تخمین بهینه‌ی فراسنجهای آبخوان محصور در این بخش به طور کامل شرح داده خواهد شد. در روش فازی پیشنهادی، روش FTM به عنوان یک مدل شبیه‌ساز رفتار فازی مدل‌های غیرخطی پیچیده، به منظور تدوین مدل شبیه‌سازی فازی تخمین فراسنجهای آبخوان، در یک چارچوب بهینه‌سازی مناسب، به کار برده شده است.

در صورتی که روند تغییرات تابع هدف در مقابل بده، یکنوا<sup>۱</sup> باشد از روش تبدیل فازی کاهش<sup>۲</sup> استفاده می‌گردد و در غیر این صورت، از روش تبدیل فازی کلی<sup>۳</sup> بهره برده می‌شود. در مرحله‌ی آخر، با توجه به رفتار یکنوایی یا عدم یکنوایی مدل شبیه‌سازی-بهینه‌سازی، فراسنج / فراسنجهای فازی مدل شبیه‌سازی-بهینه‌سازی، با روش تبدیل فازی مناسب (کاهش یا کلی) تجزیه<sup>۴</sup> می‌شوند و مدل شبیه‌سازی-بهینه‌سازی با روش تبدیل فازی اجرا می‌گردد.

سپس تبدیل مجدد<sup>۵</sup> بازه‌های فازی خروجی تابع هدف مدل شبیه‌سازی-بهینه‌سازی صورت پذیرفته و تابع عضویت فازی هدف و نوار تغییرات متغیرهای تصمیم در برش‌های فازی مختلف به دست می‌آیند. در زیربخش‌های بعدی، مهمترین بخش‌های روش شناسی پیشنهادی شامل تنظیم مدل شبیه‌سازی-بهینه‌سازی، و روش تبدیل فازی، به تفصیل شرح داده شده‌اند.

### تنظیم مدل شبیه‌سازی-بهینه‌سازی

هدف اصلی در این تحقیق تخمین بهینه‌ی فراسنجهای آبخوان محصور در شرایط عدم قطعیت با استفاده از الگوریتم ژنتیک است. تابع هدف کمینه کردن اختلاف بین افت مشاهداتی ناشی از آبکشی و افت محاسباتی تعیین شده به وسیله‌ی روش تاپس است. تابع هدف در این تحقیق به صورت زیر است:

$$\text{Min } Z = \left( \sum_{t=1}^n \frac{|s_o^t - s_c^t|}{s_o^t} \right) \quad (۱)$$

$$s_c = \frac{Q}{4\pi T} \int_u^{\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx \quad (۲)$$

$$u = \frac{r^2 S}{4Tt} \quad (۳)$$

<sup>۴</sup> decomposition

<sup>۵</sup> retransformation

<sup>۶</sup> fuzzy transformation model (FTM)

<sup>۱</sup> monotonic model

<sup>۲</sup> reduced fuzzy transformation method (RFTM)

<sup>۳</sup> general fuzzy transformation method (GFTM)

## روش تبدیل فازی

روش تبدیل فازی از جمله ابزارهای کاربردی و سودمند برای شبیه‌سازی سامانه‌هایی است که دارای فراسنجهای غیر قطعی هستند. این روش به دو شکل کلی و خلاصه‌شده می‌تواند استفاده شود. روش کلی، برای شبیه‌سازی و تحلیل مسائل با معادلات غیر یکنوا و روش

خلاصه‌شده را می‌توان برای مسائل با معادلات یکنوا به کار برد.

## روش کلی و خلاصه‌شده تبدیل فازی

در یک مسئله، چنانچه فراسنجهای غیر قطعی را به شکل فازی  $\tilde{p}_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) در نظر بگیریم هر فراسنج فازی را می‌توان به مجموعه  $P_i$  که متشکل از  $m+1$  بازه  $X_i^{(j)}$  ( $j = 0, 1, \dots, m$ ) است، تجزیه نمود (هنس، ۲۰۰۲):

$$P_i = \{X_i^{(0)}, X_i^{(1)}, \dots, X_i^{(m)}\} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (12)$$

$$X_i^{(j)} = [a_i^{(j)}, b_i^{(j)}], \quad a_i^{(j)} \leq b_i^{(j)} \quad j = 0, 1, \dots, m \quad (13)$$

می‌شوند. این آرایه‌ها که از تبدیل بازه‌های  $X_i^{(j)}$  به دست می‌آیند، در روش کلی تبدیل فازی، در قالب معادلات ۱۴ تا ۱۷ ارائه شده‌اند (هنس، ۲۰۰۲):

$$X_i^{(j)} = [a_i^{(j)}, b_i^{(j)}], \quad a_i^{(j)} \leq b_i^{(j)} \quad j = 0, 1, \dots, m \quad (14)$$

$$\hat{X}_i^{(j)} = \overbrace{(\gamma_{1,i}^{(j)}, \gamma_{2,i}^{(j)}, \dots, \gamma_{(m+1-j),i}^{(j)}, \gamma_{1,i}^{(j)}, \gamma_{2,i}^{(j)}, \dots, \gamma_{(m+1-j),i}^{(j)})}^{(m+1-j)^{i-1} (m+1-j)\text{-tuples}} \quad (15)$$

$$\gamma_{l,i}^{(j)} = \underbrace{(c_{l,i}^{(j)}, \dots, c_{l,i}^{(j)})}_{(m+1-j)^{n-i} \text{ elements}} \quad (16)$$

$$c_{l,i}^{(j)} = \begin{cases} a_i^{(j)} & \text{for } l = 1; \quad j = 0, 1, \dots, m. \\ \frac{1}{2}(c_{l-1,i}^{(j+1)} + c_{l,i}^{(j+1)}) & \text{for } l = 2, 3, \dots, m-j; \quad j = 0, 1, \dots, m-2 \\ b_i^{(j)} & \text{for } l = m-j+1; \quad j = 0, 1, \dots, m. \end{cases} \quad (17)$$

$$\beta_i^{(j)} = \left( \underbrace{b_i^{(j)}, \dots, b_i^{(j)}}_{2^{n-i} \text{ elements}} \right) \quad (20)$$

در معادلات بالا،  $a_i^{(j)}$  و  $b_i^{(j)}$  به ترتیب، حد پایین و بالای بازه‌ی نظیر درجه‌ی عضویت فازی  $\mu_j$  از فراسنج غیر قطعی  $i$ ام هستند.

تابع هدف مدل شبیه‌سازی-بهینه‌سازی، در چنین شرایطی تابعی از  $\tilde{p}_i$  بوده و به صورت

در ادامه در معادلات ۱۸ تا ۲۰، روابط لازم برای ایجاد آرایه‌ها در روش خلاصه‌شده تبدیل فازی، ارائه گردیده:

$$\hat{X}_i^{(j)} = \left( \overbrace{\alpha_i^{(j)}, \beta_i^{(j)}, \alpha_i^{(j)}, \beta_i^{(j)}, \dots, \alpha_i^{(j)}, \beta_i^{(j)}}^{2^{i-1} \text{ pairs}} \right) \quad (18)$$

$$\alpha_i^{(j)} = \left( \underbrace{a_i^{(j)}, \dots, a_i^{(j)}}_{2^{n-i} \text{ elements}} \right) \quad (19)$$

$${}^k \hat{z}^{(j)} = F({}^k \hat{x}_1^{(j)}, {}^k \hat{x}_2^{(j)}, \dots, {}^k \hat{x}_n^{(j)}) \quad (21)$$

که در آن،  ${}^k \hat{x}_i^{(j)}$ ،  $k$  امین عضو ماتریس  $\hat{X}_i^{(j)}$  است. در نهایت، شکل تجزیه‌شده<sup>۱</sup> مقدار فازی  $\tilde{q}$  را می‌توان با استفاده از روابط زیر تعیین نمود

$$Z^{(j)} = [a_1^{(j)}, b_1^{(j)}], \quad j = 0, 1, \dots, m. \quad (22)$$

$$\begin{cases} a^{(j)} = \min_k (a^{(j+1)}, {}^k \hat{z}^{(j)}) \\ b^{(j)} = \max_k (b^{(j+1)}, {}^k \hat{z}^{(j)}) \end{cases} \quad j = 0, 1, \dots, m-1 \quad (23)$$

$$a^{(m)} = \min_k ({}^k \hat{z}^{(m)}) = \max_k ({}^k \hat{z}^{(m)}) = b^{(m)} \quad (24)$$

ادامه، مقادیر افت محاسباتی تعیین‌شده به وسیله‌ی مدل شبیه‌سازی-بهینه‌سازی با مقادیر افت مشاهداتی، و نیز نتایج حل ترسیمی روش تیس، مقایسه گردید. برای سنجش کارایی روش شناسی پیشنهادی، چندین معیار خطای آماری مختلف شامل میانگین قدرمطلق خطای نسبی<sup>۳</sup> (MARE)، جذر میانگین مربعات خطا<sup>۴</sup> (RMSE)، میانگین قدرمطلق خطای مطلق<sup>۵</sup> (MAE) و ضریب همبستگی<sup>۶</sup> ( $R^2$ )، محاسبه شدند (جدول ۱).

$$MARE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left| \frac{S_o - S_c}{S_o} \right| \times 100 \quad (25)$$

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (S_o - S_c)^2} \quad (26)$$

$$MAE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |S_o - S_c| \quad (27)$$

$\tilde{q} = OF(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \dots, \tilde{p}_n)$  نمایش داده می‌شود. در مدل شبیه‌سازی تبدیل فازی، بهینه‌سازی به ازاء مقادیر مختلف آرایه‌های ورودی، به صورت مجزا انجام می‌گیرد. در نهایت، شکل تبدیل‌یافته‌ی خروجی  $\tilde{q}$  را می‌توان با ماتریس  $Z^{(j)}$  ( $j = 0, 1, \dots, m-1$ ) نشان داد. در معادله‌ی زیر،  $k$  امین عضو این ماتریس را که با  ${}^k \hat{z}^{(j)}$  می‌توان نمایش داد، ارائه شده است:

روش تبدیل فازی، تمامی ترکیبات ممکن از بازه‌های پایین و بالای مرزها<sup>۲</sup> و مقادیر اضافی بین آن‌ها را برای تمامی فراسنجهای غیر قطعی در نظر می‌گیرد. لذا این روش، با عملکرد بسیار مناسبی می‌تواند برای مسائل بهینه‌سازی و شبیه‌سازی غیر خطی و پیچیده به کار برده شود (هنس، ۲۰۰۲؛ هنس، ۲۰۰۳).

## نتایج

مدل شبیه‌سازی-بهینه‌سازی الگوریتم ژنتیک بر مبنای حل عددی تابع چاه در نرم‌افزار متلب تهیه شد. برای ارزیابی مدل شبیه‌سازی پیشنهادی، از اطلاعات آزمایش آبکشی صورت پذیرفته در آبخوان محصور که جزئیات آن در تاد (۲۰۰۵) ارائه شده است، استفاده گردید. سپس مدل شبیه‌سازی-بهینه‌سازی توسعه داده‌شده برای این اطلاعات به اجرا درآمد و افت‌های محاسباتی تعیین گردیدند. در

<sup>4</sup> root mean square error (RMSE)

<sup>5</sup> mean absolute error (MAE)

<sup>6</sup> correlation coefficient

<sup>1</sup> decomposed form

<sup>2</sup> lower and upper interval bounds

<sup>3</sup> mean absolute relative error (MARE)



در معادلات بالا،  $S_c$  افت محاسباتی، و  $S_o$  افت مشاهداتی هستند. شاخص MARE به علت اینکه نسبت بین خطای مطلق تخمین سطح آب را به مقدار واقعی آن نشان می دهد (خطا را به صورت نسبی حساب می کند)، حائز اهمیت است.

$$R^2 = \frac{\sum_{i=1}^n S_o S_c}{\sqrt{\sum_{i=1}^n S_o^2 \sum_{i=1}^n S_c^2}} \quad (28)$$

جدول ۱- محاسبه شاخص های مختلف خطای آماری مدل شبیه سازی پیشنهادی در قیاس با روش ترسیمی تاپس.

شاخص های خطای آماری				رویکرد حل
$R^2$	MAE (m)	RMSE (m)	MARE (%)	
۰/۹۹۹۹۴	۰/۰۰۶۵	۰/۰۰۸۵	۱/۱۳	روش ترسیمی تاپس
۰/۹۹۹۹۷	۰/۰۰۳۵	۰/۰۰۵۵	۰/۶۹	مدل شبیه سازی-بهینه سازی پیشنهادی

کمتر است. در آبخوان بررسی شده در این تحقیق مقدار  $R^2$  بسیار به یک نزدیک بوده و مقدار آن بیشتر از روش ترسیمی تاپس است. در مجموع می توان گفت، عملکرد مدل شبیه سازی-بهینه سازی پیشنهادی، بهتر از روش حل ترسیمی تاپس است. در ادامه، در جدول ۲ نتایج حاصله از تخمین فراسنجها با کاربرد روش بهینه سازی پیشنهادی و حل ترسیمی تاپس، و همچنین خطای نسبی روش تاپس نسبت به روش بهینه سازی پیشنهادی (بر حسب درصد)، ارائه شده اند. همان طور که در این جدول مشاهده می گردد، خطای روش ترسیمی تاپس در تخمین فراسنج  $S$  بیشتر از فراسنج  $T$  است.

در مطالعه حاضر شاخص خطای MARE کمتر از ۱۰ درصد قابل قبول است و طبق نتایج ارائه شده در جدول ۱، مشاهده می گردد که این شاخص برای مدل شبیه سازی-بهینه سازی پیشنهادی کمتر از ۱ درصد است و دقت مطلوبی را دارد. همچنین، مقدار آن از مقدار خطای روش ترسیمی تاپس نیز کمتر است. شاخص های RMSE و MAE هرچه به صفر نزدیک تر باشند، نشان از دقت بیشتر است. همان طور که از نتایج جدول ۱ مشخص است، مقادیر این خطاها نیز برای مدل شبیه سازی-بهینه سازی پیشنهادی کمتر از روش ترسیمی تاپس هستند. در مورد شاخص  $R^2$  نیز، هرچه مقدار آن به یک نزدیک تر باشد، خطای روش

جدول ۲- محاسبه فراسنجهای آبخوان محصور به وسیله ی مدل شبیه سازی پیشنهادی و مقایسه با روش ترسیمی تاپس.

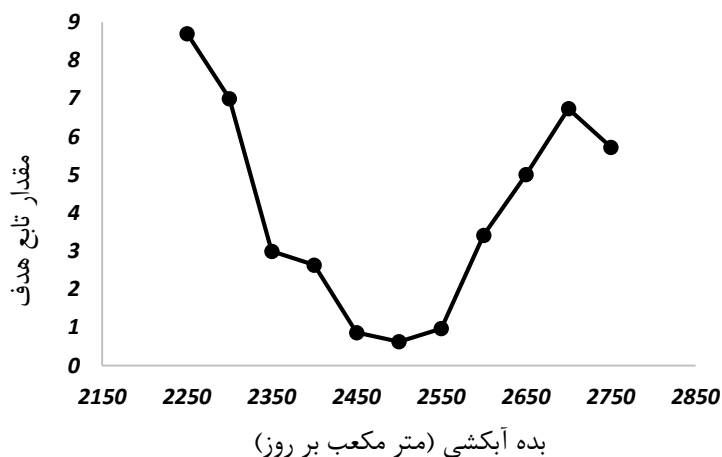
خطای نسبی روش تاپس نسبت به روش بهینه سازی پیشنهادی (%)	رویکرد حل		فراسنجهای
	روش بهینه سازی پیشنهادی	روش ترسیمی تاپس	
۳/۱۱	۱۱۴۵/۶۸	۱۱۱۰	$T (m^2/day)$
۹/۵۷	۰/۰۰۰۱۸۸	۰/۰۰۰۲۰۶	$S$

صورت دقیق اندازه گیری نشده باشد، بیشتر نمود پیدا می کند. پس از تعیین بده به عنوان یک فراسنج غیر قطعی، یکنوایی مدل شبیه سازی-بهینه سازی بررسی شده است، به این صورت که برای مقادیر مختلف ممکن بده به ازا، تغییرات محتمل ناشی از خطای اندازه گیری، مدل شبیه

پس از سنجش کارایی روش بهینه سازی پیشنهادی بر مبنای الگوریتم ژنتیک، فراسنج غیرقطعی اصلی تأثیرگذار بر مدل شبیه سازی تعیین گردید. در این تحقیق به نظر می رسد بده آبکشی از جمله فراسنجهای غیرقطعی مهم محسوب می گردد. این امر، به ویژه در شرایطی که بده به

شده ترسیم گردیده است (شکل ۲). از نمودار مذکور، به منظور سنجش یکنوایی یا عدم یکنوایی مدل شبیه‌سازی-بهینه‌سازی می‌توان استفاده کرد.

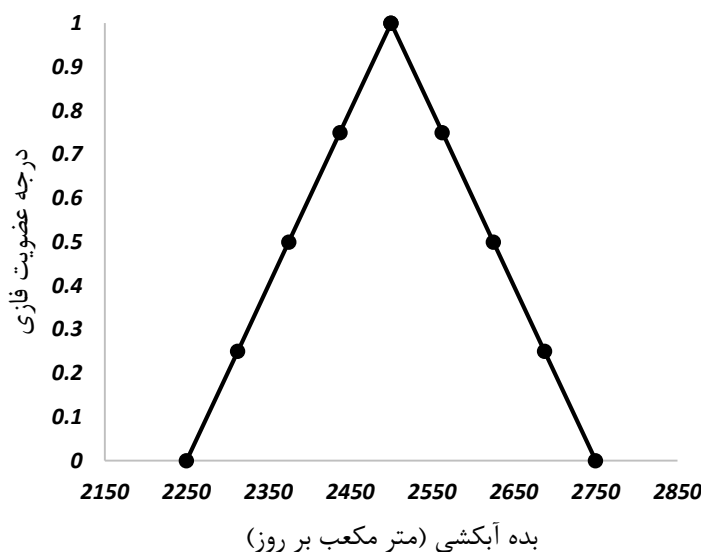
سازی-بهینه‌سازی اجرا گردیده و تابع هدف مدل شبیه‌سازی-بهینه‌سازی تعیین گردیده است. بر مبنای نتایج حاصله، نمودار تغییرات تابع هدف مدل شبیه‌سازی-بهینه‌سازی نسبت به تغییرات محتمل در مقدار بده اندازه‌گیری



شکل ۲- نمودار تغییرات تابع هدف مدل شبیه‌سازی-بهینه‌سازی به ازاء مقادیر مختلف فراسنج غیرقطعی بده.

برای بده آبکشی را در محدوده  $Q_{min}$  و  $Q_{max}$  نشان می‌دهد که اختلاف مطلق بین  $Q_{max}$  و  $Q_{min}$  مقدار عدم قطعیت در اندازه‌گیری بده را نشان می‌دهد. هرچه قدر که اندازه‌ی  $|Q_{min} - Q_{max}|$  بیشتر باشد مقدار عدم قطعیت در فراسنج اندازه‌گیری شده بیشتر است.

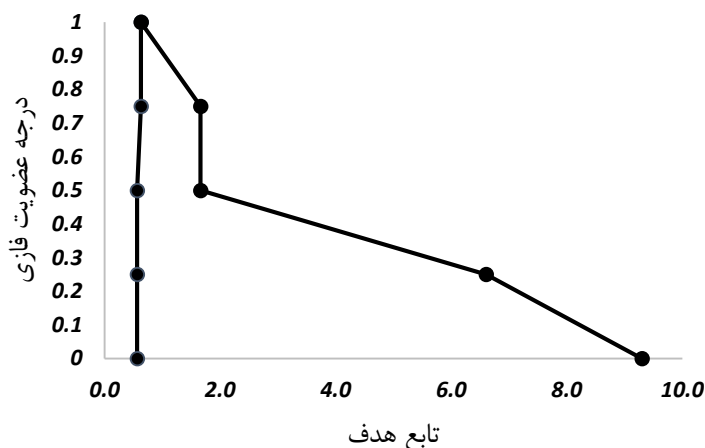
مطابق شکل ۲، غیر یکنوایی رفتار مدل شبیه‌سازی-بهینه‌سازی مشاهده می‌گردد. با توجه به غیریکنوا بودن مدل شبیه‌سازی، فراسنج غیر قطعی مدل شبیه‌سازی(بده آبکشی) بر مبنای روش تبدیل فازی تجزیه گردیده و روش تبدیل فازی کلی برای مدل شبیه‌سازی-بهینه‌سازی پیاده شده است. شکل ۳ تابع عضویت فازی در نظر گرفته‌شده



شکل ۳- تابع عضویت فازی فراسنج غیرقطعی بده آبکشی.

گردیده است (شکل ۴). با افزایش درجه فازی محدوده تغییرات تابع هدف کاهش می‌یابد که این بیانگر تأثیر کمتر عدم قطعیت در برش‌های فازی بیشتر است.

پس از تدوین مدل شبیه‌سازی-بهینه‌سازی فازی و اجرای آن، تابع عضویت فازی مقدار تابع هدف مدل شبیه‌سازی-بهینه‌سازی، با تبدیل مجدد بازه‌های فازی خروجی مدل شبیه‌سازی مذکور، در برش‌های آلفای مختلف تعیین



شکل ۴- تبدیل مجدد بازه‌های فازی خروجی در برش‌های آلفای مختلف.

متغیرهای تصمیم در برش‌های فازی مختلف به دست می‌آیند که نتایج در جدول ۳ ارائه شده اند.

پس از اینکه تبدیل مجدد بازه‌های فازی خروجی در برش‌های آلفای مختلف صورت پذیرفت، محدوده تغییرات

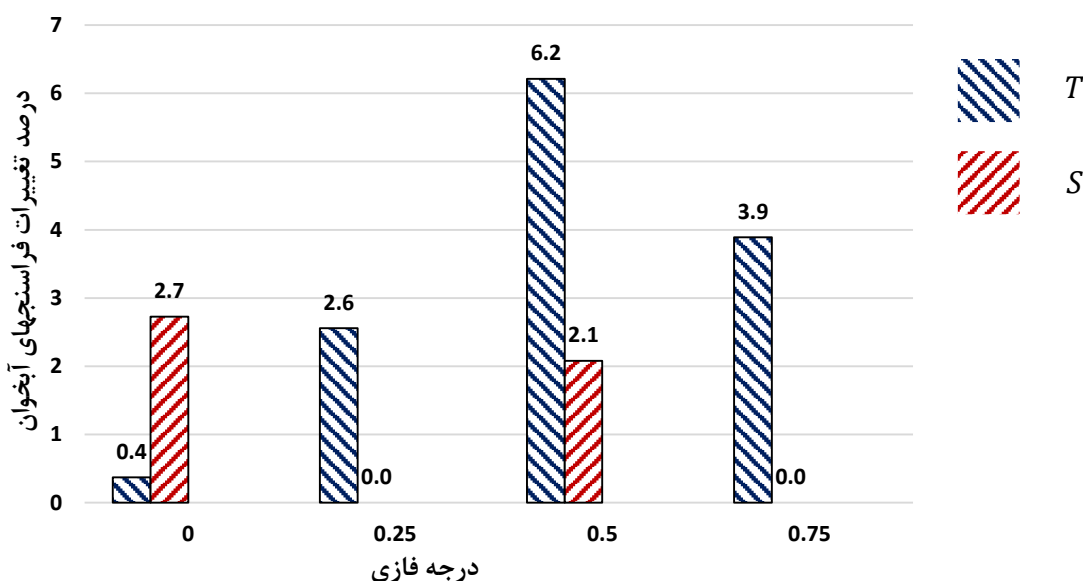
جدول ۳- محدوده تغییرات متغیرهای تصمیم در برش‌های فازی مختلف.

محدوده تغییرات متغیرهای تصمیم			برش فازی
$S$	$T (m^2/day)$		
۰/۰۰۰۱۸۳	۱۱۳۶/۵۴	حد پایین	۰
۰/۰۰۰۱۸۸	۱۱۴۰/۵۵	حد بالا	
۰/۰۰۰۱۸۸	۱۱۲۵/۱۵	حد پایین	۰/۲۵
۰/۰۰۰۱۸۸	۱۱۵۲/۶۲	حد بالا	
۰/۰۰۰۱۸۸	۱۰۷۳/۶۹	حد پایین	۰/۵
۰/۰۰۰۱۹۲	۱۱۴۰/۴۲	حد بالا	
۰/۰۰۰۱۸۸	۱۱۲۳/۹۳	حد پایین	۰/۷۵
۰/۰۰۰۱۸۸	۱۱۶۵/۶۸	حد بالا	
۰/۰۰۰۱۹	۱۱۴۵/۵۸	حد پایین	۱
۰/۰۰۰۱۹	۱۱۴۵/۵۸	حد بالا	

بهینه‌شده‌ی آبخوان، در شکل ۵ درصد تغییرات فراسنج‌های تخمین زده شده برای آبخوان محصور، در برش‌های فازی

بیشترین تغییرات برای فراسنج  $T$  در برش فازی ۰/۵ است. برای درک واضح‌تر محدوده تغییرات فراسنج‌های

مختلف، ارائه شده‌اند.



شکل ۵- درصد تغییرات فراسنجهای آبخوان در برش‌های فازی مختلف.

توسعه داده شده و اجرا گردید. با توجه به رفتار غیریکنوای مدل شبیه‌سازی، روش کلی تبدیل فازی به کار گرفته شد و بازه تغییرات فراسنجهای آبخوان در برش‌های فازی مختلف، تعیین گردید. از آنجا که تغییرات تابع هدف مدل شبیه‌سازی-بهینه‌سازی نسبت به تغییرات محتمل در مقدار بده اندازه‌گیری شده، غیر یکنوا است و با توجه به غیرخطی بودن مدل شبیه‌سازی-بهینه‌سازی، بنابراین درصد تغییرات مربوط به فراسنجهای آبخوان در برش‌های فازی مختلف، یک روند خطی را دنبال نمی‌کنند (به این معنی که با افزایش درجه فازی، درصد تغییرات برای فراسنجهای آبخوان لزوماً به صورت یکنواخت افزایش یا کاهش نمی‌یابند).

همان طور که از جدول ۳ و شکل ۵ پیداست، به ازاء  $\pm 10\%$  درصد تغییر در بده آبکشی،  $T$  بیشترین درصد تغییر را در درجه فازی  $0/5$  و  $S$  نیز بیشترین درصد تغییر را در درجه فازی  $0$  (صفر) دارد. به این معنی که اگر بده از  $2375$  مترمکعب بر روز تا مقدار  $2625$  مترمکعب بر روز تغییر کند، فراسنج ضریب انتقال  $T$  به میزان  $6/2$  درصد تغییر می‌کند. همچنین، به ازاء تغییرات بده در بازه  $[2250-2750]$

### جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

در این تحقیق کارایی مدل شبیه‌سازی-بهینه‌سازی پیشنهادی با قابلیت اتصال به الگوریتم ژنتیک، بر اساس معادلات تاپس و روش تبدیل فازی، به منظور تخمین فراسنجهای آب زمین‌شناسی آبخوان محصور بررسی گردید. تابع هدف مدل شبیه‌سازی-بهینه‌سازی بر مبنای به حداقل رساندن اختلاف بین افت مشاهداتی از داده‌های آزمایش آبکشی و افت نظیر محاسباتی آن‌ها از روش تاپس در نظر گرفته شد. برای بررسی عملکرد مدل شبیه‌سازی-بهینه‌سازی پیشنهادی، این مدل شبیه‌سازی، با روش ترسیمی مقایسه شد. نتایج نشان‌دهنده عملکرد بهتر روش پیشنهادی نسبت به روش ترسیمی است. برای مثال میانگین قدر مطلق خطای نسبی مدل شبیه‌سازی پیشنهادی و حل ترسیمی روش تاپس، به ترتیب  $0/69$  و  $1/13$  درصد بوده است؛ لذا، مدل شبیه‌سازی-بهینه‌سازی پیشنهادی می‌تواند جایگزین مناسبی برای حل ترسیمی روش تاپس باشد. پس از ارزیابی عملکرد مدل شبیه‌سازی پیشنهادی با انتخاب بده به عنوان فراسنج غیر قطعی، مدل شبیه‌سازی-بهینه‌سازی فازی بر مبنای روش تبدیل فازی،

9) Hanss, M. 2003. The extended transformation method for the simulation and analysis of fuzzy-parameterized models. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems* 11:711-727.

10) Jha, M. K., Kumar, A., Nanda, G., and Bhatt, G. 2006. Evaluation of traditional and nontraditional optimization techniques for determining well parameters from step-drawdown test data. *Journal of Hydrologic Engineering* 11: 617-630.

11) Kerachian, R., Fallahnia, M., Bazargan-Lari, M. R., Mansoori, A., and Sedghi, H. 2010. A fuzzy game theoretic approach for groundwater resources management. Application of Rubinstein bargaining theory. *Resources, Conservation and Recycling* 54: 673-68.

12) Lingireddy, S. 1998. Aquifer parameter estimation using genetic algorithms and neural networks. *Civil Engineering Systems* 15: 125-144.

13) Lu, C., Shu, L., Chen, X., and Cheng, C. 2011. Parameter estimation for a karst aquifer with unknown thickness using the genetic algorithm method. *Environmental Earth Sciences* 63(4): 797-807.

14) Nasiri, F., Maqsood, I., Huang, G., and Fuller, N. 2007. Water quality index: A fuzzy river-pollution decision support expert system. *Journal of Water Resources Planning and Management* 133: 95-105.

15) Nikoo, M. R., Kerachian, R., Karimi, A., and Azadnia, A.A. 2013. Optimal water and waste-load allocations in rivers using a fuzzy transformation technique: A case study, *Environmental Monitoring and Assessment* 185: 2483-2502.

16) Rajesh, M., Kashyap, D., and Hari Prasad, K. 2010. Estimation of unconfined aquifer parameters by genetic algorithms, *Hydrological Sciences Journal* 55: 403-413.

17) Sadegh, M. and Kerachian, R. 2011. Water resources allocation using solution concepts of fuzzy cooperative games: Fuzzy least core and fuzzy weak least core. *Water Resources Management* 25:2543-2573.

18) Sadegh, M., Mahjouri, N., and Kerachian, R. 2010. Optimal inter-basin water allocation using crisp and fuzzy Shapley games. *Water Resources Management* 24:2291-2310.

19) Samuel, M. P. and Jha, M. K. 2003. Estimation of aquifer parameters from pumping test data by genetic algorithm optimization

مترمکعب بر روز، فراسنج ضریب ذخیره  $S$  به میزان  $2/7$  درصد تغییر می کند.

نتایج حاصله نشان می دهند که مدل شبیه سازی- بهینه سازی فازی پیشنهادی، کارایی مناسبی را در تعیین اثر تغییر بده آبکشی بر تخمین بهینه فراسنجهای آبخوان محصور دارد و تأثیر عدم قطعیت بده، در تخمین فراسنج  $T$  آبخوان محصور زیادتر از  $S$  است.

## منابع

- 1) Abdel-Gawad, H. A. A. A., and El-Hadi, H. A. 2009. Parameter estimation of pumping test data using genetic algorithm. Thirteenth International Water Technology Conference, IWTC 13.
- 2) Aramaki, T., and Matsuo, T. 1998. Evaluation model of policy scenarios for basin-wide water resources and quality management in the Tone River. *Japan, Water Science and Technology* 38: 59-67.
- 3) Bateni, S., Mortazavi-Naeini, M., Ataie-Ashtiani, B., Jeng, D., and Khanbilvardi, R. 2015. Evaluation of methods for estimating aquifer hydraulic parameters. *Applied Soft Computing* 28: 541-549.
- 4) Delnaz, A., Rakhshandehroo, G. and Nikoo, M.R., 2017. Assessment of GRNN model in comparison to ANN and RBF models for estimating confined aquifer parameters. *Hydrogeology* 2: 102-117.
- 5) Delnaz, A., Rakhshandehroo, G. and Nikoo, M.R., 2019. Confined Aquifer's Hydraulic Parameters Estimation by a Generalized Regression Neural Network. *Iranian Journal of Science and Technology, Transactions of Civil Engineering* 1-11.
- 6) Delnaz, A., Rakhshandehroo, G. and Nikoo, M.R., 2019. Optimal estimation of unconfined aquifer parameters in uncertain environment based on fuzzy transformation method. *Water Supply* 19(2):444-450.
- 7) Hanss, M., and Willner, K. 2000. A fuzzy arithmetical approach to the solution of finite element problems with uncertain parameters. *Mechanics Research Communications* 27: 257-272.
- 8) Hanss, M. 2002. The transformation method for the simulation and analysis of systems with uncertain parameters. *Fuzzy Sets and Systems* 130: 277-289.

technique. Journal of Irrigation and Drainage engineering 129:348-359.

20) Singh, A. P., Ghosh, S., and Sharma, P. 2007. Water quality management of a stretch of river Yamuna: An interactive fuzzy multi-objective approach. Water Resources Management 21: 515-532.

21) Zhuang, C., Zhou, Z., Zhan, H., and Wang, G. 2015. A new type curve method for estimating aquitard hydraulic parameters in a multi-layered aquifer system. Journal of hydrology 527:212-220 .

Archive of SID