

## تحلیل عملکرد روش MDL در تشخیص تعداد آنتن های فرستنده در سیستم های MIMO با همبستگی فضایی

محسن فرهنگ<sup>۱</sup>، حسین خالقی بیزکی<sup>۲\*</sup>

۱- دانشجوی دکتری، ۲- دانشیار، دانشگاه صنعتی مالک اشتر

(دریافت: ۹۵/۱۰/۲۰، پذیرش: ۹۶/۰۷/۰۶)

### چکیده

در طراحی گیرنده هوشمند برای شنود سیستم های مخابراتی MIMO، الگوریتم تشخیص تعداد آنتن های فرستنده نقش مهمی ایفا می کند، زیرا برای دریافت سیگنال های ارسال شده توسط چند آنتن، قبل از هر چیز باید از تعداد فرستنده ها آگاهی داشت. روش MDL یک راه حل رایج برای این مساله است و به همین جهت تحلیل آن از اهمیت بالایی در پیش بینی عملکرد سامانه شنود سیستم های مخابراتی MIMO برخوردار است. در تحلیل های پیشین این روش، مقادیر ویژه ماتریس همبستگی سیگنال دریافتی دانسته فرض شده اند و تاثیر شرایط کانال بر این مقادیر ویژه و در نتیجه بر عملکرد MDL بررسی نشده است. در این مقاله، مقادیر ویژه ماتریس همبستگی سیگنال، مجهول فرض شده اند و از تخمین این مقادیر ویژه بر اساس مدل کانال با همبستگی فضایی برای تحلیل عملکرد روش MDL استفاده شده است. نتایج شبیه سازی ها نشان دهنده دقت قابل قبول این تحلیل در پیش بینی عملکرد MDL در شرایط مختلف است.

**کلیدواژه ها:** سیستم های مخابراتی MIMO، تشخیص تعداد آنتن ها، طول توصیف مینیمم (MDL)، همبستگی فضایی، تخمین مقادیر ویژه.

## Performance Analysis of MDL in Detection of the Number of Transmitting Antennas for Spatially Correlated MIMO Systems

M. Farhang, H. Khaleghi Bizaki\*

Malek Ashtar University of Technology

(Received: 09/01/2017; Accepted: 28/09/2017)

### Abstract

The algorithm for Detection of number of transmitting antennas plays an important role in design of intelligent receiver for interception of MIMO communications systems, because foremost it is necessary to know the number of transmitters. Since MDL is a standard solution for this problem, its performance analysis an important task. Previous works provide analysis in which the eigenvalues of covariance matrix of received signal are assumed to be known. Thus the impact of channel impairments on these eigenvalues and consequently the MDL performance is not studied. In this paper, the eigenvalues of covariance matrix of received signal are assumed to be unknown and the error probability of MDL is given based on the spatially correlated MIMO channel model using an estimation of channel eigenvalues. The accuracy of derived equations is evaluated using several simulations which show that the proposed analysis provides an acceptable prediction of MDL performance in different conditions.

**Keywords:** MIMO, Detection of Number of Antennas, Minimum Descriptive Length (MDL), Spatial Correlation, Eigenvalue Estimation

## ۱. مقدمه

می‌شود [۵]. اخیراً برای تخمین تعداد سیگنال‌های رادیویی باند وسیع روشی مبتنی بر زیرفضای سیگنال چرخشی (RSS) و زیرفضای سیگنال ناهمدوس (ISM) پیشنهاد شده است [۶]. همچنین به تازگی روشی مبتنی بر آزمون احتمال تعمیم‌یافته (GLRT) پیشنهاد شده است که علاوه بر تشخیص تعداد منابع سیگنال، زاویه ورود (DOA) را نیز تخمین می‌زند [۷].

روش MDL پس از سال ۱۹۸۵ که برای تخمین تعداد منابع باند باریک برخوردارکننده به آرایه‌ای از سنسورها پیشنهاد شد، در عمل به ابزاری استاندارد برای تشخیص تعداد آنتن‌های فرستنده تبدیل گردید. روش MDL یک معیار تئوری اطلاعات با پیچیدگی پایین است که نیازی به تنظیم هیچ‌گونه حدآستانه‌ی رایج در معیارهای تئوری تشخیص ندارد. ویژگی‌های آماری دیگر، به ویژه ثبات مجانبی<sup>۶</sup>، روش MDL را به انتخاب محبوبی برای تشخیص تعداد آنتن‌های فرستنده تبدیل می‌کند [۸ و ۵].

عملکرد روش MDL در تشخیص تعداد آنتن‌های فرستنده، پیش از این به صورت گسترده با تقریب‌های مختلف تحلیل شده است. اما متأسفانه تعداد کمی از این تحلیل‌ها بر روی عملکرد MDL با فرض تعداد محدود نمونه دریافتی صورت گرفته‌اند [۵ و ۹-۱۲] و تا جایی که نویسندگان این مقاله اطلاع دارند، در هیچ یک از آنها تأثیر همبستگی فضایی<sup>۷</sup> بر عملکرد آن به صورت تحلیلی ارزیابی نشده است. از آنجا که بسیاری از محیط‌های انتقال منبج به کانال همبسته فضایی می‌شوند [۸]، تحلیل اثر همبستگی فضایی بر عملکرد روش‌های تشخیص تعداد آنتن‌های فرستنده ضروری به نظر می‌رسد. بدین جهت در این مقاله به تحلیل عملکرد روش MDL در کانال با همبستگی فضایی پرداخته می‌شود.

در میان تحلیل‌های موجود برای عملکرد MDL، نتایج [۱۲] بهترین انطباق را بر نتایج شبیه‌سازی‌ها ارائه می‌دهند و به همین جهت مبنای محاسبه احتمال خطا در مقاله حاضر قرار گرفته است. مزیت اصلی تحلیل ارائه شده در این مقاله آن است که برخلاف [۱۲] که در آن مقادیر ویژه ماتریس همبستگی دانسته فرض شده‌اند، در این مقاله از یک روش مناسب برای تخمین این مقادیر ویژه بر اساس مدل کانال MIMO با همبستگی فضایی استفاده شده است و تحلیل عملکرد روش MDL با استفاده از این مقادیر ویژه تخمینی ارائه شده است.

ساختار ادامه مقاله بدین ترتیب سازماندهی شده است: در بخش ۲ مدل کانال MIMO با همبستگی فضایی ارائه شده است.

سیستم‌های مخابرات دیجیتال به منظور پاسخ دادن به انتظارات جدید کاربران، در قالب نرخ داده بالاتر و قابلیت اعتماد بیشتر، پیوسته در حال تکامل هستند. با توجه به توسعه سریع استانداردهای مخابراتی جدید، سازگاری با تمام استانداردهای فعلی و آتی برای کاربران و تولیدکنندگان تجهیزات مخابراتی بسیار مشکل است. ایده‌ی گیرنده هوشمند که قادر به تخمین کور پارامترهای فرستنده و وفق دادن خود با یک قالب انتقال مشخص باشد، یک راه حل امیدبخش برای آینده است. این امر باعث شده است که توسعه الگوریتم‌های تشخیص کور پارامترهای سیگنال دریافتی برای پیاده‌سازی گیرنده هوشمند اهمیت زیادی پیدا کند [۱ و ۲]. همچنین از منظر مخابرات نظامی نیز شناسایی پارامترهای فرستنده نقش مهمی در عملکرد سامانه‌های شنود سیگنال دشمن ایفا می‌کنند.

امروزه، فناوری چند ورودی چند خروجی<sup>۱</sup> (MIMO) به عنوان یکی از تکنیک‌های اصلی در لایه فیزیکی سیستم‌های مخابراتی بی‌سیم مدرن به شمار می‌رود. با قرار گرفتن سیستم مخابراتی MIMO در قالب رادیو شناختگر و به تبع آن گیرنده هوشمند، الگوریتم‌ها و تکنیک‌های کور برای تشخیص پارامترهای سیستم‌های MIMO مورد توجه بیشتری واقع شده‌اند [۱]. یکی از اطلاعات اولیه مورد نیاز برای دریافت داده ارسالی توسط گیرنده هوشمند در سیستم‌های مخابراتی MIMO، تعداد آنتن‌های فرستنده است. این اطلاعات می‌توانند توسط بسیاری از الگوریتم‌های دیگر گیرنده هوشمند نظیر الگوریتم‌های همسان‌سازی<sup>۲</sup> کور، تشخیص نوع مدولاسیون و کدینگ، و جداسازی کور منابع<sup>۳</sup> بکار گرفته شوند [۳]. همچنین به تازگی برای کشف حمله جعل پایلوت، که برای شنود مخابرات بی‌سیم بکار می‌رود، استفاده از الگوریتم‌های تشخیص تعداد آنتن‌ها پیشنهاد شده است [۴].

از طرف دیگر، تشخیص تعداد منابع سیگنال‌های مخابراتی یک مساله اساسی در پردازش آماری سیگنال است که در دو دهه اخیر توجه زیادی را به خود جلب کرده است. رایج‌ترین رویکرد برای حل این مساله، بکار بردن معیارهای تئوری اطلاعات مانند طول توصیف مینیمم<sup>۴</sup> (MDL) یا معیار اطلاعات<sup>۵</sup> Akaike (AIC) است. تعداد منابع با محاسبه هر یک از این معیارها برای تمام مدل‌های کاندیدا و انتخاب مدل با کوچکترین توصیفات تعیین

<sup>1</sup> Multiple-Input Multiple-Output

<sup>2</sup> Equalization

<sup>3</sup> Blind Source Separation

<sup>4</sup> Minimum Descriptive Length (MDL)

<sup>5</sup> Akaike Information Criteria (AIC)

<sup>6</sup> Asymptotic Consistency

<sup>7</sup> Spatial Correlation

پراکنش در مسیر انتشار، کانال‌ها به درجات مختلف به یکدیگر وابسته هستند. این نوع از همبستگی کانال را همبستگی فضایی می‌نامند [۱۶-۱۴]. همبستگی کانال‌ها تاثیر شدیدی بر عملکرد سیستم مخابراتی MIMO و الگوریتم‌های آن دارد، بنابر این تحلیل اثر آن بر عملکرد روش‌های تشخیص تعداد آنتن‌های فرستنده ضروری به نظر می‌رسد [۸ و ۱۴]. برای کانال‌های MIMO با همبستگی فضایی، مدل‌های تحلیلی متعددی در متون علمی وجود دارند، که از آن جمله می‌توان به مدل‌های Kronecker [۱۷] و Weichselberger [۱۸] اشاره کرد. در تحلیل‌های این مقاله از مدل Kronecker استفاده می‌شود که در آن همبستگی‌های سمت گیرنده و فرستنده، قابل جداسازی فرض می‌شوند. می‌توان نشان داد که تحت این فرض، مدل Kronecker به صورت زیر داده می‌شود:

$$H = R_r^{1/2} H_w R_t^{1/2} \quad (2)$$

که در آن،  $R_r$  و  $R_t$  به ترتیب ماتریس‌های همبستگی گیرنده و فرستنده هستند.  $H_w$  یک ماتریس بهره مرتبه کامل<sup>۷</sup> است که درایه‌های آن iid بوده و دارای توزیع گاوسی مختلط با تقارن دایروی با متوسط صفر و واریانس واحد هستند. در اینجا از مدل همبستگی نمایی<sup>۸</sup> استفاده می‌شود که در آن درایه‌های ماتریس همبستگی  $R$  را به صورت زیر توصیف می‌شوند [۱۹ و ۲۰]:

$$R_{ij} = \begin{cases} \rho^{j-i}, & i \leq j \\ R_{ji}^*, & i > j \end{cases}, |\rho| < 1 \quad (3)$$

که در آن،  $\rho$  ضریب همبستگی مختلط آنتن‌های همسایه (گیرنده یا فرستنده) است این مدل ممکن است برای برخی سناریوهای واقعی دقیق نباشد اما به ما این امکان را می‌دهد که تاثیر همبستگی فضایی را به شیوه‌ای صریح و روشن مطالعه کنیم. ضمناً این مدل از لحاظ فیزیکی معقول است، به این مفهوم که با افزایش فاصله بین آنتن‌ها، همبستگی کاهش می‌یابد. ضرایب  $\rho_t$  و  $\rho_r$  به ترتیب ضرایب همبستگی فرستنده و گیرنده هستند که  $R_t$  و  $R_r$  را توصیف می‌کنند [۸ و ۲۱].

ماتریس‌های  $R$  توصیف شده توسط رابطه (۳) در متون علمی به نام ماتریس Kac-Murdock-Szego یا به اختصار KMS شناخته می‌شود و مشخصات آن به تفصیل بررسی شده‌اند [۲۲]. ویژگی‌های مقادیر ویژه این ماتریس مورد توجه این مقاله است و در بخش ۵ از آنها برای تحلیل عملکرد MDL در کانال MIMO با همبستگی فضایی استفاده می‌شود.

بخش ۳ به مرور روش‌های تشخیص تعداد آنتن‌های فرستنده در سیستم مخابراتی MIMO می‌پردازد. عملکرد روش MDL با استفاده از مقادیر ویژه معلوم و تخمینی به ترتیب در بخش‌های ۴ و ۵ تحلیل شده و نتایج آن در بخش ۶ با شبیه‌سازی مقایسه و ارزیابی شده است. در بخش ۷ نیز به جمع‌بندی یافته‌های این مقاله پرداخته شده است.

## ۲. مدل کانال MIMO با همبستگی فضایی

یک سیستم MIMO با  $N_t$  آنتن فرستنده و  $N_r$  آنتن گیرنده را به صورتی در نظر بگیرید که  $N_r \geq N_t$  باشد. با فرض یک کانال MIMO تغییرناپذیر با زمان<sup>۱</sup> و تخت<sup>۲</sup>، بردار سمبل دریافتی باندپایه در لحظه  $k$  ام به صورت زیر توصیف می‌شود:

$$y(k) = Hx(k) + n(k), \quad k = 1, \dots, N \quad (1)$$

که در آن،  $y(k) = [y_1(k), \dots, y_{N_r}(k)]^T$  بردار سیگنال دریافتی ( $N_r \times 1$ ) بُعدی بدون بیش‌نمونه‌برداری<sup>۳</sup> و با زمان‌بندی بهینه سمبل است،  $N$  تعداد سمبل‌های دریافتی و  $x(k) = [x_1(k), \dots, x_{N_t}(k)]^T$  بردار ( $N_t \times 1$ ) بُعدی نمایان‌گر سیگنال‌های منبع ارسالی است.

برداری نویز  $n(k) = [n_1(k), \dots, n_{N_r}(k)]^T$  یک بردار ( $N_r \times 1$ ) بُعدی است که متناظر با نویز گاوسی مختلط متقارن دایروی<sup>۴</sup> سفید جمع‌شونده با متوسط صفر و واریانس  $\sigma_n^2$  است. بدین معنی که  $n(k) \sim \mathcal{CN}(0, \sigma_n^2 I_{N_r})$  که در آن  $I_{N_r}$  ماتریس واحد ( $N_r \times N_r$ ) بُعدی است.  $H$  نشان‌دهنده ماتریس مختلط ( $N_r \times N_t$ ) بُعدی کانال MIMO با همبستگی فضایی است. سمبل‌های  $x$  با توزیع مستقل و یکسان<sup>۵</sup> (iid) در نظر گرفته می‌شوند. فرض شده است که سمبل‌ها به شمای مدولاسیون مشترکی تعلق دارند. بدون از دست دادن عمومیت، فرض می‌کنیم منظومه سیگنال  $x$  به متوسط صفر و انرژی واحد نرمالیزه شده باشد [۵].

رایج‌ترین مدل کانال MIMO، کانال محوشونده تخت با توزیع مستقل و یکسان فضایی است که متناظر با سناریوی پراکندگی غنی<sup>۶</sup> باند باریک است [۱۳]. اما اندازه‌گیری‌های مختلف در محیط‌های مخابراتی بی‌سیم چند مسیره عملی، نشان می‌دهند که کانال‌های بی‌سیم از یکدیگر مستقل نیستند، بلکه به دلیل

<sup>1</sup> Time Invariant

<sup>2</sup> Frequency Flat

<sup>3</sup> Oversampling

<sup>4</sup> Circularly Symmetric

<sup>5</sup> Independent Identically Distributed

<sup>6</sup> Rich Scattering

<sup>7</sup> Full Rank

<sup>8</sup> Exponential Correlation

و ماتریس کوواریانس نمونه نویز برابر

$$\hat{R}_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{n}(k)\mathbf{n}(k)^H \quad (10)$$

و  $N$  تعداد نمونه‌های در نظر گرفته شده است. مقادیر ویژه  $\hat{R}_y$  تخمینی عبارتند از  $\hat{\lambda}_1, \dots, \hat{\lambda}_{N_r}$  به نحوی که  $\hat{\lambda}_1 > \dots > \hat{\lambda}_{N_r}$ .

یک رویکرد برای تعیین تعداد آنتن‌های فرستنده که نیازی به تعیین حد آستانه نداشته باشد توسط Wax و Kailath در [۲۳] پیشنهاد شده است. این رویکرد بر پایه استفاده از معیار تئوری اطلاعات است که توسط Akaike و Schwartz and Rissanen [۱۱] معرفی شده است. در این رویکرد دو معیار شناخته شده MDL و AIC وجود دارند که به طور وسیع استفاده می‌شوند [8]. هر دو این معیارها را می‌توان به فرم زیر نوشت:

$$J(k) = L(k) + p(k); \quad k = 0, 1, \dots, N_r - 1 \quad (11)$$

که در آن،  $L(k)$  تابع احتمال لگاریتمی<sup>۴</sup> است و به صورت زیر داده می‌شود:

$$L(k) = N(N_r - k) \log \left( \frac{a_k}{g_k} \right) \quad (12)$$

که در آن،  $a_k$  و  $g_k$  به ترتیب میانگین‌های حسابی و هندسی  $(N_r - k)$  مقدار ویژه کوچک ماتریس کوواریانس نمونه بوده و به صورت زیر بیان می‌شوند [۱۲]:

$$a_k \triangleq \frac{1}{N_r - k} \sum_{i=k+1}^{N_r} \hat{\lambda}_i \quad (13)$$

$$g_d \triangleq \prod_{i=k+1}^{N_r} \hat{\lambda}_i^{1/N_r - k} \quad (14)$$

تابع جریمه<sup>۵</sup>  $p(k)$  در رابطه (۱۱) به صورت زیر داده می‌شود:

$$p(k) = \alpha(N)[k(2N_r - k)] \quad (15)$$

که در آن، ضریب جریمه  $\alpha(N)$  یک تابع ثابت از تعداد مشاهدات است. انتخاب  $\alpha(N)$  به معیار مورد استفاده بستگی دارد. برای معیار AIC داریم  $\alpha(N) = 1$  و برای معیار MDL داریم  $\alpha(N) = \frac{1}{2} \ln N$ . تعداد فرستنده‌ها  $\hat{N}_r$ ، به صورتی تخمین زده می‌شود که به ازای آن  $J(k)$  مینیمم شود [۱۱]:

$$\hat{N}_r = \arg \min_{k=0, \dots, N_r-1} J(k) \quad (16)$$

این نکته قابل توجه است که تخمین تعداد سیگنال‌های منبع با استفاده از AIC و MDL به اطلاعات بسیار کمی درباره سیگنال‌های مخابراتی نیاز دارد. به طور مشخص، این روش‌ها نیازی به دانستن اطلاعات حالت کانال<sup>۶</sup>، همزمان‌سازی، طراحی پایلوت و شمای مدولاسیون ندارند. علاوه بر این، نیازی به تخمین توان نویز نیز وجود ندارد [۸].

### ۳. روش‌های تشخیص تعداد آنتن‌های فرستنده در

#### سیستم مخابراتی MIMO

روش‌های ارائه شده در این مقاله بر اساس آمارگان مرتبه دوم و به طور مشخص ماتریس کوواریانس می‌باشند. در ابتدا با توجه به رابطه (۱) محاسبه ماتریس کوواریانس سیگنال دریافتی  $R_y = E\{y y^H\}$  به صورت زیر به دست می‌آید:

$$R_y = H R_x H^H + \sigma_n^2 I_{N_r} \quad (4)$$

که در آن،  $R_x$  ماتریس کوواریانس سیگنال‌های ارسالی و  $(\cdot)^H$  ترانپوز هرمتیتی را نشان می‌دهد. با فرض ارسال دنباله‌های مستقل و با توان یکسان در آنتن‌های فرستنده، داریم:

$$R_x = E\{x x^H\} = \sigma_x^2 I_{N_t} \quad (5)$$

و در نتیجه:

$$R_y = \sigma_x^2 H H^H + \sigma_n^2 I_{N_r} \quad (6)$$

با اعمال تجزیه مقادیر ویژه<sup>۱</sup> بر روی  $R_y$  می‌توان آن را به صورت زیر بیان کرد:

$$R_y = U \Lambda U^H \quad (7)$$

که در آن،  $\Lambda = \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_{N_r}\}$  یک ماتریس قطری  $(N_r \times N_r)$  بُعدی است، به نحوی که  $\lambda_1 > \dots > \lambda_{N_r}$  مقادیر ویژه ماتریس  $R_y$  و  $U$  یک ماتریس یکانی<sup>۲</sup>  $(N_r \times N_r)$  بُعدی است یعنی  $U U^H = I_{N_r}$ . آنگاه قضیه زیر را خواهیم داشت [۸]:

قضیه: با فرض یک ماتریس  $H$  مرتبه کامل با ابعاد  $(N_r \times N_t)$  و با شرط  $N_r > N_t$ ، کوچکترین مقدار ویژه  $R_y$  برابر  $\sigma_n^2$  بوده و مرتبه چندگانگی<sup>۳</sup> آن برابر  $N_r - N_t$  است. یعنی  $\lambda_{N_t+1} = \dots = \lambda_{N_r} = \sigma_n^2$

بنابراین، با دانستن  $N_r$  و مرتبه چندگانگی کوچکترین مقدار ویژه ماتریس  $R_y$ ، می‌توان تعداد آنتن‌های فرستنده را استنباط کرد. این روش نیازمند دانستن مقادیر ویژه ماتریس  $R_y$  است که معمولاً مجهول هستند. برای غلبه بر این مشکل، یک تقریب از ماتریس کوواریانس آماری با متوسط‌گیری از ضرب خارجی نمونه‌های سیگنال دریافتی به دست می‌آید:

$$\hat{R}_y = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{y}(k)\mathbf{y}(k)^H = H \hat{R}_x H^H + \hat{R}_n \quad (8)$$

که در آن، ماتریس کوواریانس نمونه سیگنال ارسالی برابر

$$\hat{R}_x = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{x}(k)\mathbf{x}(k)^H \quad (9)$$

<sup>4</sup> log-likelihood function

<sup>5</sup> Penalty Function

<sup>6</sup> Channel State Information

<sup>1</sup> Eigenvalue Decomposition (EVD)

<sup>2</sup> Unitary

<sup>3</sup> Multiplicity

فرض کنید  $H_2$  نشانگر فرضیه‌ای باشد که در آن ۲ منبع حاضر باشند. با توجه به رابطه (۱۷) می‌توان نوشت:

$$P_{M2} \approx P(J(1) < J(2)|H_2) \quad (21)$$

$$P_{M2} = 1 - Q\left(\frac{T_{2x} - \mu_{x_2}}{\sigma_{x_2}}\right) \quad (22)$$

که در آن

$$Q(t) = \int_t^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du \quad (23)$$

مقدار  $T_{2x}$  که تابعی از  $N_r$  و  $N$  است، از حل معادله زیر بدست می‌آید:

$$\log Q_{M2}(T_{2x}) = T_2 \quad (24)$$

که در آن:

$$Q_{M2}(x) \triangleq \frac{1}{x} \left(1 + \frac{x-1}{N_r-1}\right)^{N_r-1} \quad (25)$$

$$T_2 = \frac{1}{2N} (2N_r - 3) \log N \quad (26)$$

متاسفانه رابطه (۲۴) حل تحلیلی ندارد و به صورت عددی به طریق زیر قابل محاسبه است [۱۲]:

$$T_{2x}^{(1)} = 1 + \sqrt{e^{2T_2} - 1} \quad (27)$$

$$T_{2x}^{(i+1)} = T_{2x}^{(i)} + (T_2 - T_{2x}^{(i)}) \frac{T_{2x}^{(i)}(N_r - 2 + T_{2x}^{(i)})}{(N_r - 2)(T_{2x}^{(i)} - 1)} \quad (28)$$

که در آن  $T_2^{(i)}$  مطابق رابطه (۲۸) به  $T_{2x}^{(i)}$  مرتبط می‌شود. اعمال معادله بازگشتی فوق برای چند بار، یک تخمین بسیار دقیق از حد آستانه  $T_{2x}$  ارائه می‌دهد.

همچنین  $\mu_{x_2}$  و  $\sigma_{x_2}^2$  در رابطه (۲۲) به ترتیب متوسط و واریانس متغیر تصادفی  $x_2 \triangleq \frac{\lambda_2}{a_2}$  می‌باشند که به کمک روابط زیر بدست می‌آیند:

$$\lambda_2 \sim \mathcal{N}\left(\lambda_2 + \frac{(N_r-2)\lambda_2\sigma_n^2}{N(\lambda_2-\sigma_n^2)} - \frac{\lambda_1\lambda_2}{N(\lambda_1-\lambda_2)}, \frac{\lambda_2^2}{N}\right) \quad (29)$$

$$a_2 \approx \sigma_n^2 - \frac{\lambda_1\sigma_n^2}{N(\lambda_1-\sigma_n^2)} - \frac{\lambda_2\sigma_n^2}{N(\lambda_2-\sigma_n^2)} \quad (30)$$

که در آنها  $\lambda_1$  و  $\lambda_2$  مقادیر ویژه ماتریس همبستگی سیگنال دریافتی  $\mathbf{R}_y = E\{\mathbf{y}\mathbf{y}^H\}$  بوده و دانسته فرض می‌شوند. در بخش بعد با فرض مجهول بودن این مقادیر ویژه، از مقدار تخمینی آنها برای تحلیل عملکرد MDL استفاده خواهیم کرد.

#### ۵. تحلیل عملکرد MDL با تخمین مقادیر ویژه $\mathbf{R}_y$

در بخش قبل رابطه‌ای برای احتمال خطای روش MDL در تشخیص تعداد آنتن‌های فرستنده تشریح شد که در آن از مقادیر ویژه ماتریس همبستگی سیگنال دریافتی یعنی  $\mathbf{R}_y$  استفاده می‌شود که غالباً مجهول بوده و باید تخمین زده شوند. در این

#### ۴. تحلیل عملکرد MDL با آگاهی از مقادیر ویژه $\mathbf{R}_y$

در اینجا به منظور تحلیل عملکرد روش MDL، به محاسبه احتمال خطا در تشخیص تعداد آنتن‌ها به عنوان معیاری برای عملکرد MDL پرداخته می‌شود. تحلیل ارائه شده در این بخش نیازمند آگاهی دقیق از مقادیر ویژه ماتریس همبستگی سیگنال دریافتی است. به طور کلی در روش‌های تشخیص تعداد آنتن‌ها، در دو حالت خطا پدید می‌آید [۱۱]:

حالت (۱) وقتی تعداد آنتن‌ها کمتر از تعداد واقعی آنها تخمین زده شود. این نوع خطا را عدم کشف<sup>۱</sup> یا برآورد کمتر<sup>۲</sup> می‌نامند.

حالت (۲) وقتی تعداد آنتن‌ها بیش از تعداد واقعی آنها تخمین زده شود. این نوع خطا را هشدار غلط<sup>۳</sup> یا برآورد بیشتر<sup>۴</sup> می‌نامند.

فرض کنید  $H_i$  نشان‌دهنده این فرضیه<sup>۵</sup> باشد که تعداد صحیح آنتن‌ها  $i$  است. آنگاه احتمالات عدم کشف  $P_M$  و هشدار غلط  $P_{FA}$  به شرط  $H_i$  به ترتیب به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$P_M = P(\hat{i} < i | H_i) \quad (17)$$

$$P_{FA} = P(\hat{i} > i | H_i) \quad (18)$$

که احتمال خطا، مجموع احتمال خطای ناشی از عدم کشف و هشدار غلط است [۱۱]:

$$P_e = P_M + P_{FA} \quad (19)$$

برای سادگی ریاضیات، فرض زیر را لحاظ می‌کنیم:

$$P(\hat{i} \leq i - 2 | H_i) \ll P(\hat{i} = i - 1 | H_i) \quad (20)$$

این رابطه به طور ساده بیان می‌کند که احتمال عدم کشف تنها یکی از آنتن‌های فرستنده بسیار بیشتر از احتمال عدم کشف دو یا چند تا از آنها است. این فرض به طور وسیعی در متون علمی بکار رفته و توجیه شده است [۱۲].

در روش MDL مقدار  $P_{FA}$  برای مقادیر مناسب  $N_r$  و  $N$  بسیار کوچک و قابل صرف نظر است. برای مثال برای  $N_r = 3$  و  $N = 30$ ،  $P_{FA} \approx 0.003$  است که با افزایش  $N$  و  $N_r$  به شدت کاهش می‌یابد [۱۲]. بنابراین از  $P_{FA}$  صرف نظر شده و به محاسبه  $P_M$  پرداخته می‌شود. در این مقاله به عنوان نمونه روی  $P_{M2} \triangleq P_M (N_t = 2)$  تمرکز شده است، اگرچه از این روش می‌توان برای سناریوی کلی نیز استفاده کرد.

<sup>1</sup> Misdetction

<sup>2</sup> Underestimation

<sup>3</sup> False Alarm

<sup>4</sup> Overestimation

<sup>5</sup> Hypothesis

باشند، داریم  $\mathbf{R}_x = \mathbf{I}_{N_t}$  و در نتیجه رابطه فوق را می‌توان به شکل زیر بازنویسی کرد:

$$\bar{\mathbf{y}} = \boldsymbol{\lambda}^t \sum_{i=1}^{N_r} \lambda_i^r \quad (35)$$

فرض کنید  $\boldsymbol{\gamma} = [\gamma_1 \dots \gamma_{N_r}]^T, \gamma_1 > \dots > \gamma_{N_r}$  مقادیر ویژه  $\mathbf{H}\mathbf{R}_x\mathbf{H}^H$  باشند. توزیع حدی ( $N_t \gg 1$ ) بردار  $\boldsymbol{\gamma}$  پیش از این محاسبه شده است [۲۴]. ما در این مقاله به دنبال متوسط  $\boldsymbol{\gamma}$  در حالت  $N_r \gg 1$  هستیم که با استفاده از نتایج [۲۴] بدین صورت بدست می‌آید:

می‌آید:

$$E\{\boldsymbol{\gamma}\} = \bar{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\lambda}^t \sum_{i=1}^{N_r} \lambda_i^r = \boldsymbol{\lambda}^t \cdot N_r \quad (36)$$

با استفاده از شبیه‌سازی نشان داده شده است که در حالت  $N_t \gg 1$  این تخمین دقیق می‌باشد [۲۴]. با توجه به این نکته که مقادیر ویژه غیرصفر ماتریس  $\mathbf{H}\mathbf{H}^H$  و  $\mathbf{H}^H\mathbf{H}$  برابر هستند، می‌توان دقیق بودن این تخمین را برای حالت  $N_r \gg 1$  نتیجه گرفت. اکنون می‌توان از متوسط آماری  $E\{\boldsymbol{\gamma}\}$  به عنوان تخمینی از مقادیر ویژه  $\boldsymbol{\gamma}$  در روابط مربوط به تحلیل عملکرد روش MDL بخش ۴ استفاده کرد.

همانطور که گفته شد  $\mathbf{R}_t$  یک ماتریس KMS است. برای ماتریس KMS با ابعاد مشخص، می‌توان مقادیر ویژه را بر حسب  $\rho$  تعیین کرد. برای مثال فرض کنید بردار  $\boldsymbol{\lambda}^t = [\lambda_1^t \dots \lambda_{N_t}^t]^T, \lambda_1^t > \dots > \lambda_{N_t}^t$  حاوی مقادیر ویژه ماتریس  $\mathbf{R}_t$  باشد آنگاه با فرض  $N_t = 2$ ، با محاسبه مقادیر ویژه  $\mathbf{R}_t$  خواهیم داشت:

$$\boldsymbol{\lambda}^t = \begin{bmatrix} \lambda_1^t \\ \lambda_2^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \rho_t \\ 1 - \rho_t \end{bmatrix} \quad (37)$$

با استفاده از روابط (۳۱)، (۳۶) و (۳۷)، تخمین مقادیر ویژه  $\mathbf{R}_y$  به شکل زیر به دست می‌آید:

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} N_r(1 + \rho_t) + \sigma_n^2 \\ N_r(1 - \rho_t) + \sigma_n^2 \end{bmatrix} \quad (38)$$

رابطه (۳۹) تاثیر همبستگی فضایی بر مقادیر ویژه  $\lambda_1$  و  $\lambda_2$  را نشان می‌دهند. با استفاده از مقادیر ویژه تخمینی فوق در تحلیل بخش ۴ و به طور مشخص در روابط (۲۹) و (۳۰)، می‌توان به احتمال خطای روش MDL در تشخیص تعداد آنتن‌های فرستنده دست یافت. از نتیجه به دست آمده می‌توان برای تخمین حداقل سطح انرژی یک منبع برای قابل کشف بودن توسط سیستم استفاده کرد. همچنین از آن می‌توان برای تعیین توانایی سیستم در جداسازی منابع بسیار نزدیک استفاده کرد. در بخش بعد

بخش به تحلیل عملکرد MDL با استفاده از یک روش مناسب برای تخمین این مقادیر ویژه پرداخته می‌شود.

با در نظر گرفتن  $\mathbf{R}_y$  در رابطه (۴)، فرض کنید مقادیر ویژه  $\mathbf{R}_y$  و  $\mathbf{H}\mathbf{R}_x\mathbf{H}^H$  به ترتیب  $\lambda_{N_r} > \dots > \lambda_1$  و  $\gamma_{N_r} > \dots > \gamma_1$  باشند. در این صورت (با توجه به تعریف مقادیر ویژه) واضح است که:

$$\lambda_n = \gamma_n + \sigma_n^2, \quad n = 1, \dots, N_r \quad (31)$$

در ادامه به محاسبه مقادیر ویژه  $\mathbf{H}\mathbf{R}_x\mathbf{H}^H$  با در نظر گرفتن همبستگی فضایی پرداخته می‌شود. متأسفانه محاسبه این مقادیر ویژه کار آسانی نیست. معادلاتی برای مواردی که همه المان‌های کانال ناهمبسته هستند وجود دارد که در اغلب موارد برای استفاده عملی بسیار پیچیده هستند. برای تحلیل‌های کارآمدتر و همچنین مطالعه سناریوهای پیچیده‌تر، استفاده از تقریب ضروری است. یکی از راه‌های بدست آوردن تقریب مقادیر ویژه کانال، مطالعه توزیع مقادیر ویژه در حالتی است که تعداد آنتن‌های فرستنده و گیرنده سیستم هردو بزرگ باشند [۲۵-۲۷]. در این مقاله، توزیع آماری حدی مقادیر ویژه کانال در حالتی به دست می‌آید که تعداد آنتن‌های یکی از دو سمت فرستنده یا گیرنده سیستم مخابراتی بزرگ باشد.

در حالتی که تعداد آنتن‌های فرستنده بزرگ باشد، داریم [۲۴]:

$$E\{\mathbf{H}\mathbf{R}_x\mathbf{H}^H\} = \text{Tr}\{\mathbf{R}_x\mathbf{R}_t\}\mathbf{R}_r \quad (32)$$

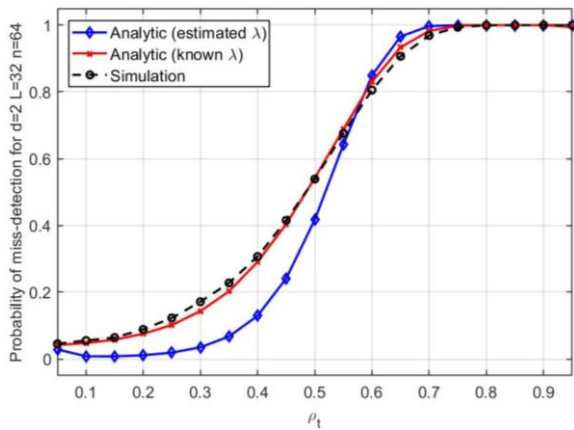
فرض کنید  $\bar{\boldsymbol{\gamma}} = [\bar{\gamma}_1 \dots \bar{\gamma}_{N_r}]^T, \bar{\gamma}_1 > \dots > \bar{\gamma}_{N_r}$  مقادیر ویژه  $E\{\mathbf{H}\mathbf{R}_x\mathbf{H}^H\}$  باشد و بردار  $\boldsymbol{\lambda}^r = [\lambda_1^r \dots \lambda_{N_r}^r]^T, \lambda_1^r > \dots > \lambda_{N_r}^r$  مقادیر ویژه ماتریس  $\mathbf{R}_r$  و بردار  $\boldsymbol{\lambda}^t = [\lambda_1^t \dots \lambda_{N_t}^t]^T, \lambda_1^t > \dots > \lambda_{N_t}^t$  مقادیر ویژه ماتریس  $\mathbf{R}_t$  باشد. آنگاه خواهیم داشت:

$$\bar{\boldsymbol{\gamma}} = \text{Tr}\{\mathbf{R}_x\mathbf{R}_t\}\boldsymbol{\lambda}^r \quad (33)$$

معادلات به دست آمده برای حالتی است که تعداد آنتن‌های فرستنده بزرگ باشد [۲۴]. اما در مساله تشخیص تعداد آنتن‌های فرستنده، غالباً فرض بر این است که تعداد آنتن‌های گیرنده بیشتر از آنتن‌های فرستنده باشد. به همین جهت در این مقاله معادلات فوق برای حالتی که تعداد آنتن‌های گیرنده بزرگ باشد تغییر داده شده‌اند. توجه داشته باشید که مقادیر ویژه غیرصفر ماتریس ماتریس  $\mathbf{H}\mathbf{H}^H$  و  $\mathbf{H}^H\mathbf{H}$  برابر هستند، بنابراین به همین ترتیب می‌توان برای حالتی که تعداد آنتن‌های گیرنده بزرگ باشد نیز روابط مشابهی به صورت زیر به دست آورد:

$$\bar{\boldsymbol{\gamma}} = \text{Tr}\{\mathbf{R}_x\mathbf{R}_r\}\boldsymbol{\lambda}^t \quad (34)$$

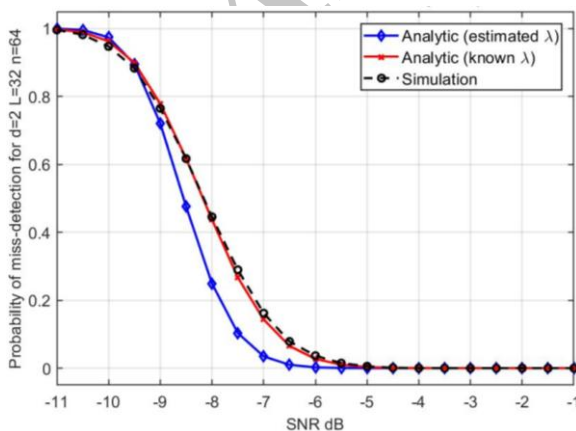
در رابطه فوق،  $\bar{\boldsymbol{\gamma}}$  بیانگر بردار مقادیر ویژه غیر صفر  $E\{\mathbf{H}\mathbf{R}_x\mathbf{H}^H\}$  است. در حالتی که سمبل‌های ارسالی مستقل از هم با توان واحد



شکل ۲.  $P_{M2}$  وقتی  $\rho_r = 0$  و  $SNR = -7dB$ ،  $N = 64$ ،  $N_r = 32$

در شکل‌های (۳) و (۴) عملکرد روش MDL و همچنین نتیجه تحلیل‌های ارائه شده بر اساس نسبت سیگنال به نویز، در دو ضریب همبستگی مختلف نشان داده شده‌اند. در شکل (۳) مشاهده می‌شود که در  $\rho_t = 0.3$  برای  $SNR > -5dB$  احتمال خطای روش MDL برابر صفر می‌شود. از شکل (۴) نیز می‌توان دریافت که در  $\rho_t = 0.7$  برای  $SNR < -4dB$  عملکرد روش MDL به شدت تضعیف می‌شود.

در این نمودارها مشاهده می‌شود که همبستگی فضایی تاثیر بسیار مخربی بر عملکرد روش MDL در تشخیص تعداد آنتن‌های فرستنده دارد. همچنین مشاهده می‌شود که با دانستن مقادیر ویژه ماتریس کوواریانس سیگنال دریافتی می‌توان به پیش‌بینی دقیقی از عملکرد روش MDL دست یافت. همچنین این نمودارها نشان می‌دهند که تنها با دانستن ضرایب همبستگی و با استفاده از تخمین این مقادیر ویژه نیز می‌توان به تقریب نسبتاً دقیقی از عملکرد این روش در تعیین تعداد آنتن‌های فرستنده رسید.



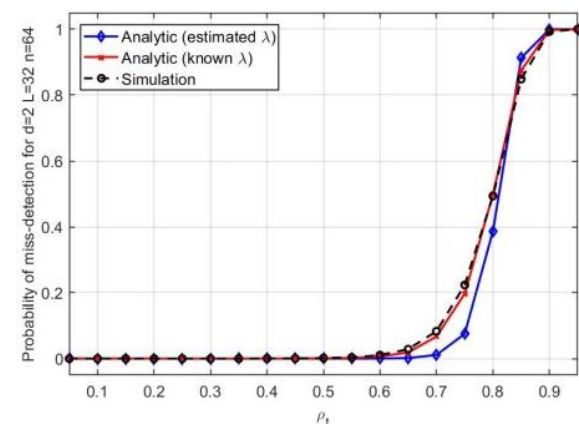
شکل ۳.  $P_{M2}$  وقتی  $\rho_r = 0$  و  $\rho_t = 0.3$ ،  $N = 64$ ،  $N_r = 32$

تحلیل‌های ارائه شده با نتایج شبیه‌سازی مقایسه و ارزیابی خواهند شد.

## ۶. نتایج و بحث

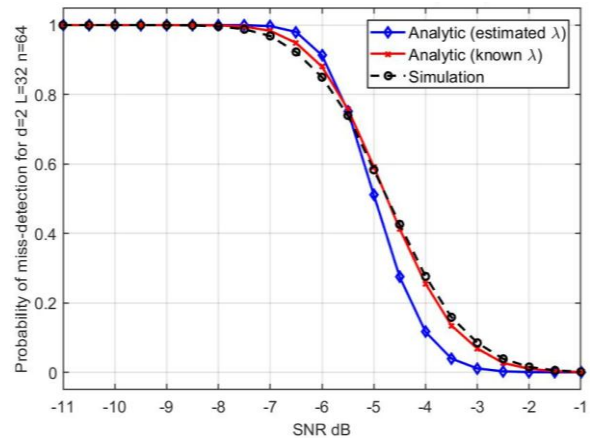
در این بخش به بررسی دقت تحلیل ارائه شده در بخش‌های ۴ و ۵ برای پیش‌بینی عملکرد روش MDL در حالات مختلف پرداخته می‌شود. در تمام این حالات فرض می‌شود کانال مطابق آنچه در بخش ۲ گفته شد، با مدل Kronecker توصیف شود و در سمت گیرنده همبستگی فضایی نداشته باشیم، یعنی  $\rho_r = 0$  باشد. علاوه بر این فرض شده است سیمبل‌های ارسالی مستقل از هم با توان واحد باشند یعنی  $R_x = I_{N_t}$ . معیار عملکرد روش MDL در این شبیه‌سازی‌ها، احتمال عدم کشف برای حالتی که ۲ فرستنده، ۳۲ گیرنده و ۶۴ نمونه سیمبل مشاهده شده داشته باشیم در نظر گرفته شده است. در شکل‌های (۱) و (۲) احتمال عدم کشف  $P_{M2}$  بر اساس تحلیل‌های بخش ۴ و ۵ با نتایج بدست آمده از شبیه‌سازی مقایسه شده‌اند. این نتایج برای ضرایب همبستگی مختلف و در دو SNR مختلف به دست آمده‌اند.

مشاهده می‌شود که با استفاده از مقادیر ویژه معلوم ماتریس کوواریانس سیگنال دریافتی  $R_y = E\{yy^H\}$  یعنی  $\lambda_1 > \dots > \lambda_{N_r}$  رابطه (۲۲) پیش‌بینی بسیار دقیقی از عملکرد MDL ارائه می‌دهد. همچنین می‌توان دید که با تخمین این مقادیر ویژه طبق رابطه (۳۸) نیز می‌توان به تقریب قابل قبولی از عملکرد MDL تنها از روی ضرایب همبستگی و بدون اطلاع از مقادیر واقعی  $\lambda$  دست یافت. همچنین از شکل (۱) می‌توان دید که در  $SNR = -3dB$  برای  $\rho_t > 0.7$  خطای روش MDL در تخمین تعداد آنتن‌های فرستنده به شدت افزایش می‌یابد. از شکل (۲) نیز مشاهده می‌شود که روش MDL در  $SNR = -7dB$  برای  $\rho_t > 0.3$  عملکرد ضعیفی از خود نشان می‌دهد.



شکل ۴.  $P_{M2}$  وقتی  $\rho_r = 0$  و  $SNR = -3dB$ ،  $N = 64$ ،  $N_r = 32$

- [4] Tugnait, J. K. "Detection and Identification of Spoofed Pilots in TDD/SDMA Systems"; IEEE Wirel. Commun. 2017, 4, 550-553.
- [5] Fishler, E.; Grossmann, M.; Messer, H. "Detection of Signals by Information Theoretic Criteria: General Asymptotic Performance Analysis"; IEEE Trans. Signal Process 50, 2002, 1027-1036.
- [6] Jalaei, S.; Moghaddam, S. S. "Estimating the Number of Wideband Radio Sources"; J. Electrical Comput. Eng. Innovations 2016, 4, 25-30.
- [7] Izedi, F.; Karimi, M.; Derakhtian, M. "Joint DOA Estimation and Source Number Detection for Arrays with Arbitrary Geometry"; Signal Process 2017, 36, 1085-1098.
- [8] Hasan, K.; Gautier, R.; Radoi, E.; Berbineau, M.; Dayoub, I. "Blind Detection of the Number of Transmitting Antennas for Spatially-Correlated MIMO Systems"; Proc. Int. Conf. on ITS Telecommunications 2011, 458-462.
- [9] Liavas, A. P.; Regalia, P. A. "On the Behavior of Information Theoretic Criteria for Model Order Selection"; IEEE Trans. Signal Process 2001, 49, 1689-1695.
- [10] Kaveh, M.; Wang, H.; Hung, H. "On the Theoretical Performance of a Class of Estimators of the Number of Narrow-Band Sources"; IEEE Trans. Acoust. Speech 1987, 35, 1350-1352.
- [11] Zhang, Q. T.; Wong, K. M.; Yip, P. C.; Reilly, J. P. "Statistical Analysis of the Performance of Information Theoretic Criteria in the Detection of the Number of Signals in Array Processing"; IEEE Trans. Acoust. Speech 1989, 37, 1557-1567.
- [12] Haddadi, F.; Malek-Mohammadi, M.; Nayebi, M. M.; Aref, M. R. "Statistical Performance of MDL Source Enumeration in Array Processing"; IEEE Trans. Signal Process 2010, 58, 452 - 457.
- [13] Tse, D.; Viswanath, P. "Fundamentals of Wireless Communication"; Cambridge University Press, 2005.
- [14] Hui, H. T. "Advanced Multi-Antenna Communications Course"; Lecture Notes, National University of Singapore, 2014.
- [15] Yu, K.; Bengtsson, M.; Ottersten, B.; McNamara, D.; Karlsson, P.; Beach, M. "Modeling of Wide-Band MIMO Radio Channels Based on NLoS Indoor Measurements"; IEEE Trans. Veh. Technol. 2004, 53, 655-665.
- [16] Kermaol, J. P.; Schumacher, L.; Pedersen, K. I.; Mogensen, P. E.; Frederiksen, F. "A Stochastic MIMO Radio Channel Model With Experimental Validation"; IEEE J. Sel. Area. Comm. 2002, 20, 1211-1226.
- [17] Shiu, D. S.; Foschini, G. J.; Gans, M. J.; Kahn, J. M. "Fading Correlation and its Effect on the Capacity of Multielement Antenna Systems"; IEEE Trans. Commun. 2000, 48, 502-513.
- [18] Weichselberger, W.; Herdin, M.; Ozelik, H.; Bonek, E. "A Stochastic MIMO Channel Model with Joint Correlation of Both Link Ends"; IEEE Trans. Wirel. Commun. 2006, 5, 90-100.
- [19] Loyka, S. "Channel Capacity of MIMO Architecture Using the Exponential Correlation Matrix"; IEEE Commun. Lett. 2001, 5, 369-371.



شکل ۴.  $P_{M2}$  وقتی  $\rho_r = 0$  و  $\rho_t = 0.7$ ،  $N = 64$ ،  $N_r = 32$

## ۷. نتیجه‌گیری

هدف این مقاله تحلیل تاثیر همبستگی فضایی بر عملکرد روش MDL بود که بدین منظور روشی برای محاسبه احتمال خطای این الگوریتم در تشخیص تعداد آنتن‌های فرستنده در کانال‌های MIMO با همبستگی فضایی ارائه شد که در آن بدون نیاز به دانستن مقادیر ویژه ماتریس همبستگی سیگنال دریافتی و تنها از روی ضرایب همبستگی، عملکرد MDL پیش‌بینی می‌شود. مشاهده شد که با دانستن مقادیر ویژه ماتریس همبستگی سیگنال دریافتی می‌توان به پیش‌بینی دقیقی از عملکرد MDL دست یافت. همچنین نشان داده شد که تنها با دانستن ضرایب همبستگی و با استفاده از تخمین این مقادیر ویژه نیز می‌توان به تقریب نسبتاً دقیقی از عملکرد این روش در تعیین تعداد آنتن‌های فرستنده دست یافت. اختلاف بین این دو حالت به علت استفاده از مقادیر تخمینی مقادیر ویژه به جای مقدار دقیق آن است که کاملاً منطقی به نظر می‌رسد. مزیت تحلیل ارائه شده در این مقاله آن است که رابطه‌ای برای احتمال خطای MDL بر اساس همبستگی فضایی کانال MIMO بدست می‌دهد. با استفاده از نتایج این مقاله می‌توان SNR و تعداد گیرنده‌های لازم برای دستیابی به احتمال خطای مشخص را در کانالی با همبستگی فضایی معلوم به‌دست آورد.

## ۸. مراجع

- [1] Somekh, O.; Simeone, O.; Bar-Ness, Y.; Su, W. "Detecting the Number of Transmit Antennas with Unauthorized or Cognitive Receivers in MIMO Systems"; Proc. Military Communications Conference (MILCOM) 2007, 1-5.
- [2] Marazin, M.; Gautier, R.; Burel, G. "Dual Code Method for Blind Identification of Convolutional Encoder for Cognitive Radio Receiver Design"; Proc GLOBECOM 2009, 1-6.
- [3] Hassan, K.; Dayoub, I.; Hamouda, W.; Berbineau, M. "Automatic Modulation Recognition Using Wavelet Transform and Neural Network"; Proc ITST 2009, 234-238.



- [24] Martin, C.; Ottersten, B. "Asymptotic Eigenvalue Distributions and Capacity for MIMO Channels Under Correlated Fading"; IEEE Trans. Wirel. Commun. 2004, 3, 1350-1359.
- [25] Chuah, C. N.; Tse, D. N. C.; Kahn, J. M.; Valenzuela, R. A. "Capacity Scaling in MIMO Wireless Systems Under Correlated Fading"; IEEE Trans. Inform. Theory 2002, 48, 637-650.
- [26] Muller, R. "A Random Matrix Model of Communication via Antenna Arrays"; IEEE Trans. Inform. Theory 2002, 48, 2495-2506.
- [27] Muller, R. "On the Asymptotic Eigenvalue Distribution of Concatenated Vector-Valued Fading Channels"; IEEE Trans. Inform. Theory 2002, 48, 2086-2091.
- [20] Zelst, A. Van; Hammerschmidt, J. "A Single Coefficient Spatial Correlation Model for MIMO Radio Channels"; Proc. 27<sup>th</sup> General Assembly URSI, 2002, 17-24.
- [21] Zimmerman, C.; Paasch, M.; Weikert, O.; Zölzer, U. "On Investigating Spatial Correlations of MIMO Indoor Channels"; Proc. 12<sup>th</sup> Int. OFDM-Workshop 2007, 276-280.
- [22] Trench, W. F. "Properties of Some Generalizations of Kac-Murdock-Szego Matrices"; Contemp. Math. 2001, 281, 233-246.
- [23] Wax, M.; Kailath, T. "Detection of Signals by Information Theoretic Criteria"; IEEE Trans. Acoust. Speech 1985, 33, 387-392.

Archive of SID