

## بررسی حساسیت روش های زمانی نسبت به نویز در موقعیت یابی زمینی با توزیع طبیعی و غیرطبیعی

امیرمهدی سازدار<sup>۱</sup>، محمدصادق علیجانی<sup>۲</sup>، اسفندیار مهرشاهی<sup>۳\*</sup>

۱- مربی دانشگاه علوم و فنون هوایی شهید ستاری، ۲- کارشناس ارشد، ۳- دانشیار، دانشگاه شهید بهشتی

(دریافت: ۹۷/۰۷/۱۳، پذیرش: ۹۷/۱۲/۰۶)

### چکیده

روش های موقعیت یابی بر مبنای فرکانس رادیویی مانند روش زمان ورود سیگنال (TOA)، اختلاف زمان ورود سیگنال (TDOA)، زاویه ورود سیگنال (AOA)، سطح قدرت سیگنال دریافت شده (RSSI) و ترکیب آن ها امروزه مورد توجه پژوهشگران قرار دارد. در شبکه های حسگری مانند شبکه ایستگاه های پایه تلفن همراه، از روش های زمانی به منظور موقعیت یابی استفاده می گردد. امروزه برای مقاصد امنیتی، استانداردهایی به منظور بالا بردن دقت موقعیت یابی در شبکه های تلفن همراه نوشته شده است. یکی از کمیت های تأثیرگذار بر دقت موقعیت یابی، چینش گیرنده های موقعیت یاب است. در این مقاله با مقایسه دو روش اصلی بر مبنای زمان یعنی زمان ورود سیگنال و اختلاف زمان ورود سیگنال، و تفکیک کمیت نویز به دو بخش طبیعی و غیرطبیعی، راه کاری در جهت بهبود دقت موقعیت یابی پیشنهاد شده است. در حقیقت با بررسی بخش غیرطبیعی نویز و محاسبه این مقدار در سطح مورد نظر به منظور موقعیت یابی، روش مناسب جهت موقعیت یابی در زیر بخش های مورد نظر مشخص شده و موقعیت یابی انجام گرفته است.

**کلیدواژه ها:** موقعیت یابی، حساسیت، زمان ورود سیگنال، اختلاف زمان ورود سیگنال، چینش

## Investigation of the Sensitivity of Time Based Methods to Noise in Terrestrial Localization with Normal and Abnormal Distribution

A. M. Sazdar, M. S. Alijani, E. Mehrshahi\*

Shahid Beheshti University

(Received: 05/10/2018; Accepted: 25/02/2019)

### Abstract

Today, the researchers are interested to radio frequency based localization methods such as Time Of Arrival (TOA), Time Difference Of Arrival (TDOA), Angle Of Arrival (AOA), Received Signal Strength Indication (RSSI) and their combinations. In sensor networks such as the base station cellular network, time-based methods for positioning are used. For security purposes, standards have been written in order to improve the accuracy of positioning in mobile networks. One of the factors influencing positioning accuracy is the placement of the localizer receivers. In this paper, a solution to improve the accuracy of the positioning is suggested by comparing the two principal methods based on time, i.e., the time of arrival of the signal and the time difference of the signal arrival, and the separation of the noise quantity into two normal and abnormal parts. In fact, by examining the abnormal noise and calculating this amount at the desired area for positioning, the appropriate method for positioning in the sub-sections is determined and the positioning is achieved.

**Keywords:** Localization, Sensitivity, Time of Arrival (TOA), Time Difference of Arrival (TDOA), Placement

## ۱. مقدمه

سخت‌افزار اضافی برای بهبود خطای موقعیت‌یابی است. به‌عنوان مثال به‌منظور بهبود خطای موقعیت‌یابی بر مبنای زمان ورود سیگنال اگر زاویه ورود سیگنال برای بهبود خطا به سیستم اضافه شود نیازمند پردازش آرایه‌ای یا چرخش آنتن به‌منظور یافتن زاویه اهداف است. با این کار علاوه بر پیچیده شدن محاسبات، هزینه زیادی نیز بر سیستم تحمیل می‌شود. روش ترکیبی TOA/TDOA نیز در پاره‌ای از شرایط به‌دلیل عدم تحمیل زیرساخت اضافی بر سیستم به‌منظور کمک به بهبود دقت موقعیت‌یابی بسیار مناسب خواهد بود. روش ترکیبی TOA/TDOA زمانی قابل پیاده‌سازی است که هر دو نیازمندی اساسی TOA و TDOA یعنی "امکان هم‌زمان‌سازی بین گیرنده‌های موقعیت‌یاب و هدف" و "همچنین اتصال مخابراتی با سرعت بالا" قابل پیاده‌سازی باشند [۵-۲]. در این مقاله هدف بهبود دقت موقعیت‌یابی با استفاده از ترکیب روش‌های زمانی TOA و TDOA است. اصلی‌ترین نکته مطرح‌شده در این مقاله محاسبه بخش عملی در محاسبات آماری موقعیت‌یابی است. بنابراین، ابتدا خطای موقعیت‌یابی در این روش‌های زمانی را به‌طور مجزا بررسی نموده و سپس راه‌کاری برای ترکیب این دو روش ارائه خواهیم داد.

## ۲. روش تحقیق

در ابتدا برای بهبود دقت موقعیت‌یابی در روش‌های TOA و TDOA باید منابع خطا در این دو روش مطالعه شود. در برخی گزارش‌ها، عنوان شده که منابع خطا در این دو روش یکسان هستند [۶]. این منابع شامل خطای اندازه‌گیری، خطای هم‌زمان‌سازی، نویز و شرایط محیطی و عواملی دیگر هستند. اما برخی ادعا می‌کنند حد پایین کرامر رانو<sup>۲</sup> برای روش‌های TOA و TDOA یکسان نیست [۷] و این مسئله به این معنی است که عواملی وجود دارند که دقت موقعیت‌یابی را در این دو روش متفاوت می‌سازند. عامل مهمی که سبب تفاوت دقت موقعیت‌یابی در این دو روش می‌شود چینی‌ش گیرنده‌های موقعیت‌یاب است. در عمل مقدار SNR در گیرنده‌های موقعیت‌یاب بسته به موقعیت استقرار متفاوت خواهد بود، به‌علاوه به سبب تفاوت در هندسه مسئله در روش‌های TOA و TDOA مکان قرارگیری گیرنده‌ها بر دقت موقعیت‌یابی مجموعه بسیار اثرگذار است. روش ترکیبی TOA/TDOA با در نظر گرفتن ملاحظات عملی معرفی شده و بدون در نظر گرفتن الزامات عملی و فرض اولیه بیان‌شده در مقدمه، با روش‌های دیگر مقایسه شده و مقدار خطای روش ترکیبی، مقدار میانگین خطای روش TOA و TDOA اعلام شده است [۷]. محاسبات آماری مربوط به مکان‌یابی با فرضیات عملی

موقعیت‌یابی زمینی در رادار، سونار، مخابرات بی‌سیم، سامانه‌های ناوبری کاربرد دارد. همچنین یکی از ملزومات مهم در مخابرات سلولی توانایی موقعیت‌یابی زمینی با دقت زیاد است. برای موقعیت‌یابی چهار روش اساسی TOA، TDOA، AOA و RSSI به‌صورت عام مورد استفاده قرار می‌گیرد. روش TOA زمانی استفاده می‌گردد که امکان هم‌زمان‌سازی بین هدف و تمامی گیرنده‌های موقعیت‌یاب وجود داشته باشد. منظور از هم‌زمان‌سازی، یکسان نمودن ساعت بین هدف‌ها و گیرنده‌های موقعیت‌یاب است. در مقابل در روش TDOA نیازی به هم‌زمان‌سازی بین گیرنده‌های موقعیت‌یاب و هدف‌ها وجود ندارد و صرفاً هم‌زمان‌سازی بین گیرنده‌های موقعیت‌یاب کافی است. لازم به ذکر است در محلی که از TDOA استفاده می‌شود، تمامی گیرنده‌های موقعیت‌یاب نیازمند یک اتصال مخابراتی به مرکز محاسبات برای ارسال نمونه‌های خروجی مبدل آنالوگ به دیجیتال سیگنال هدف، هستند. روش TDOA با عنوان روش غیرفعال<sup>۱</sup> نیز شناخته می‌شود. به‌دلیل آنکه در این روش از سمت سامانه موقعیت‌یاب هیچ سیگنالی ارسال نمی‌شود و صرفاً با شنود سیگنال‌های ارسالی یا بازتاب‌شده از هدف موقعیت‌یابی صورت می‌گیرد. این سامانه، همچنین دارای مصارف امنیتی بسیار مهمی است [۱]. در محیط‌های شهری امروزه تعداد آنتن‌های ارسال و دریافت تلفن همراه به تعداد زیاد قرار داده شده است. از این آنتن‌ها می‌توان برای پیاده‌سازی الگوریتم‌های مدرن موقعیت‌یابی به جهت ارتقاء دقت مکان مشترکین استفاده کرد [۱]. در شبکه‌های تلفن همراه تاریخچه موقعیت کاربر ذخیره می‌شود و با دسترسی به این تاریخچه امکان مشاهده سابقه مکان‌های حضور کاربر مورد نظر قابل دسترسی است. امروزه با گسترش حملات تروریستی به داخل جوامع شهری با جمعیت بالا نیاز به دقت موقعیت‌یابی بالایی جهت دنبال نمودن کاربرهای تلفن همراه هستیم. در محیط‌های شهری به‌دلیل حضور سازه‌های فلزی از قبیل برج‌ها و پل‌ها، امواج الکترومغناطیسی دچار افت شدید و شکست می‌شوند که بر دقت موقعیت‌یابی زمانی بسیار تأثیرگذار هستند. با توجه به ساکن بودن گیرنده‌های موقعیت‌یابی از قبیل آنتن‌های شبکه تلفن همراه و حضور موانع شهری از قبیل سازه‌های ساختمانی با اسکلت فلزی و اطلاع از موقعیت این سازه‌ها می‌توان روش‌های موقعیت‌یابی را در نواحی شهری بهینه‌سازی نمود. روش‌های ترکیبی نیز امروزه مورد توجه پژوهشگران قرار گرفته و با توجه به مزایا و معایبی که برای روش‌های ترکیبی می‌توان بیان کرد، نیازمند ملاحظات عملی و تئوری هستند. نکته قابل توجه در روش‌های ترکیبی عدم تحمیل

<sup>۲</sup> Cramer Rao Lower Bound<sup>۱</sup> Passive

توجه به شرایط محیطی و وضعیت شیء مورد نظر دقت موقعیت‌یابی به‌طور دائم دارای نوسان خواهد بود. نوسانات سطح مقطع راداری بررسی شده و تأثیر این نوسانات بر دقت اندازه‌گیری رادار نشان داده شده است [۱۰]. این نوسانات سطح مقطع راداری به‌صورت یک انحراف از مقدار واقعی اندازه‌گیری‌شده در رادار خود را نشان می‌دهد و در مدل‌های متفاوت رفتار یکسانی ندارند. با فرض ایستادن رادار اگر هدف دارای حرکت باشد یا دارای مانورهای ناگهانی با سرعت بالا باشد مقدار موج بازتاب نسبت به زمان دارای نوسانات بسیار بالایی خواهد بود که به‌صورت مستقیم بر دقت مکان تأثیر زیادی می‌گذارد.

نوآوری این مقاله در دو بخش اصلی در ادامه ارائه خواهد شد. بخش اول شامل اثبات هندسه نشان داده‌شده در شکل (۱) با استفاده از روابط حاکم بر موقعیت‌یابی زمانی است. با روابط معرفی‌شده در بخش ۳ و نتایج شبیه‌سازی مرتبط، ناحیه بیضی مورد نظر که کمترین خطا را شامل می‌گردد به‌روشنی در شکل (۵) قابل مشاهده است. به‌علاوه با ترکیب روش‌های TDOA و TOA، روش متناسب با موقعیت احتمالی هدف نیز پیشنهاد می‌گردد. سپس با استفاده از نتایج تحقیقات توری [۱۳] و بردار گرادیان در روابط مورد استفاده توسط ایشان، اثبات می‌گردد که حساسیت روش‌های موقعیت‌یابی زمانی به‌دست‌آمده در بخش ۳، دارای رفتاری مشابه با کمیت غیرطبیعی نویز مؤثر در روابط موقعیت‌یابی هستند. بخش دوم نوآوری شامل استفاده از مقادیر میانگین حساسیت خطای نرمالیزه به‌عنوان وزن‌های مسئله تخمین کمترین مربعات خطای وزن‌دار مقاوم (RWLS) و استفاده از روش شبه نیوتن<sup>۲</sup> در حل این مسئله است.

در این مقاله ابتدا حل معادلات ریاضی حاکم بر مسئله موقعیت‌یابی به‌وسیله الگوریتم‌های TDOA و TOA ارائه می‌شود و سپس به بررسی تفاوت رفتار این دو روش پرداخته خواهد شد. یک حل دقیق برای معادلات TDOA برای ناحیه‌ای مشخص از سطح به‌دست آمده است [۱۱]. در این مقاله نیز ابتدا معادلات TOA و TDOA را نوشته و سپس با ساده‌سازی این معادلات یک معادله مرتبه دوم حاصل می‌شود. سپس مانند آقای شین [۱۰] تأثیر نوسانات خطا بر اندازه‌گیری زمان ورود سیگنال و اختلاف زمانی ورود سیگنال بین یک گیرنده مشخص و گیرنده مرجع محاسبه می‌شود. این کار به‌وسیله دیفرانسیل‌گیری از معادلات مرتبه دوم به‌دست‌آمده نسبت به منابع خطا انجام می‌گردد. مقدار نوسانات خطا در کنار کمیت نویز طبیعی مورد بررسی قرار گرفته است [۱۳]. کمیت خطای مستقل از نویز

نشان داده شده است [۱۳]. کمیت مؤثر در خطای موقعیت‌یابی به عامل نویز طبیعی و عامل نویز غیرطبیعی (چینش سایت موقعیت‌یابی و خطا در موقعیت گیرنده‌ها) تقسیم‌بندی شده است [۱۳]. در محاسبات آماری عامل نویز طبیعی با میانگین صفر در نظر گرفته می‌شود تا تخمین‌گر کمترین مربعات<sup>۱</sup>، تخمین‌گر بدون بایاس با کمترین واریانس گردد [۱۳ و ۱۸]. در این مقاله سناریویی در نظر گرفته می‌شود که میانگین توزیع عامل غیرطبیعی برابر با صفر نمی‌شود و در واقع خطای موقعیت‌یابی دارای توزیع طبیعی نیست. در ادامه با پیشنهاد راه‌کار عملی در جهت کاهش تأثیر عامل غیرطبیعی خطای موقعیت‌یابی بهبود داده می‌شود. همان‌طور که در مقدمه ذکر شد، تفاوت ساختاری میان روش TDOA و TOA لزوم وجود لینک مخابراتی با نرخ تبادل اطلاعات بالا با یک مرکز محاسبات موقعیت‌یابی در روش TDOA است. در استاندارد منتشرشده توسط ITU [۸] بیان شده است: در صورتی که در روش TDOA، هر گیرنده موقعیت‌یاب مقدار زمان ورود سیگنال را محاسبه کرده و به‌جای ارسال تمام اطلاعات نمونه‌برداری‌شده از سیگنال هدف، تنها مقدار زمان تأخیر انتشار بین گیرنده و هدف را به مرکز محاسبات ارسال کند، لزوم وجود لینک مخابراتی با سرعت بالا از بین می‌رود و با روش‌های کم‌هزینه‌تر و ساده‌تر امکان به‌کارگیری الگوریتم‌های TDOA و همچنین روش ترکیبی TDOA/TOA فراهم می‌شود. با اعمال این روش خطای روش ترکیبی در نواحی مورد نظر از خطای جداگانه روش‌های TOA و TDOA کمتر است [۸]. در نتیجه روش ترکیبی TOA/TDOA در زمانی که هم‌زمان سازی بین هدف و گیرنده‌ها امکان‌پذیر باشد قابل استفاده است. روش ترکیبی دیگری که در موقعیت‌یابی استفاده می‌شود روش ترکیب زمان و قدرت سیگنال دریافتی است. روش ترکیبی مانند TOA/RSS و TDOA/RSS نیز بررسی شده است [۵]. این دو روش ترکیبی نیازی به ساختار اضافه‌ای علاوه بر ساختار اندازه‌گیری زمان ورود سیگنال ندارند زیرا در خروجی فیلتر تطبیقی برای تعیین میزان آستانه تشخیص زمان ورود سیگنال قدرت سیگنال اندازه‌گیری می‌شود. در مقابل در روش‌های ترکیبی TOA/AOA و TDOA/AOA که با روش‌های دیگر مقایسه شده‌اند، نیازمند پردازش آرایه‌ای یا آنتن گردان برای پیدا کردن زاویه ورود سیگنال هستند [۸ و ۹].

در روش‌هایی که بین هدف و گیرنده‌های موقعیت‌یاب هم‌زمان‌سازی وجود ندارد عامل سطح مقطع و میزان بازگشت موج تابیده‌شده به هدف بر دقت مکان اثرگذار خواهد بود. در عمل مقدار خطای موقعیت‌یابی همواره ثابت نخواهد بود و با

<sup>۲</sup> Quasi Newton<sup>۱</sup> Least Squares Estimator

تشکیل می‌شود و مختصات کانون‌های این هذلولی‌ها مختصات گیرنده‌های موقعیت‌یاب است. با قطع دادن این هذلولی‌های تشکیل‌شده مکان هدف استخراج می‌شود. در معادلات موقعیت‌یابی TOA و TDOA، هدف به‌دست آوردن مختصات  $(x, y)$  هدف است، بنابراین برای به‌دست آوردن این مختصات دو معادله کافی است. اما به‌دلیل این‌که معادلات موقعیت‌یابی مرتبه دوم و غیرخطی هستند، یک معادله دیگر برای رفع ابهام نیاز داریم. به‌این ترتیب در روش TOA به سه معادله به معنی سه گیرنده موقعیت‌یاب نیاز است. در روش TDOA به‌دلیل آنکه هر دو گیرنده موقعیت‌یاب یک هذلولی تشکیل می‌دهند با چهار گیرنده موقعیت‌یاب می‌توان سه معادله با انتخاب‌های متفاوت از چهار گیرنده موقعیت‌یاب تشکیل داد. در این مقاله بدون از بین رفتن کلیت مسئله و به‌منظور فاصله گرفتن از مجانب‌های احتمالی در بررسی تغییرات، دو گیرنده موقعیت‌یاب در مختصات  $s_1 = [100, 100]$  و  $s_2 = [1400, 1400]$  قرار داده شده است. در حالت کلی در صورت یکسان بودن عرض از مبدأ یا طول از مبدأ مختصات گیرنده‌ها در نواحی نزدیک به مکان گیرنده‌ها نیاز به استفاده از روش‌های عددی خواهیم داشت. معادلات TOA به‌صورت کلی به‌صورت رابطه (۱) است [۲]:

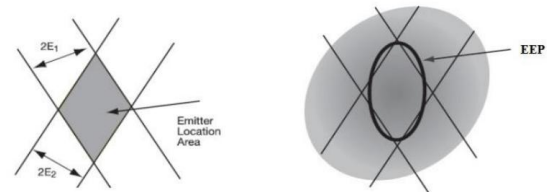
$$\sqrt{(x_i - x_T)^2 + (y_i - y_T)^2} = c\tau_i \quad (1)$$

که در آن  $x_T$  و  $y_T$  مختصات هدف هستند،  $x_i$  و  $y_i$  مختصات محل گیرنده موقعیت‌یاب  $i$  ام است و  $c$  سرعت انتشار سیگنال ارسالی است. در رابطه (۱) به ازای  $i = 1, 2$  یک دستگاه معادلات غیرخطی مرتبه دوم حاصل می‌شود. جواب این دستگاه معادلات در نهایت یک معادله مرتبه دوم خواهد شد. این معادله مرتبه دوم اطلاعات مکان هدف را با ابهام بین دو نقطه می‌دهد. در اینجا فرض بر این است که اطلاعات اولیه‌ای از مختصات هدف می‌تواند ابهام مرتبه دوم را حل نماید. بنابراین، با حل دستگاه معادلات مرتبه دوم غیرخطی مختصات دقیق هدف حاصل می‌شود. حل دستگاه معادلات در ادامه نشان داده خواهد شد. در روش TDOA مانند روش TOA ابتدا گیرنده موقعیت‌یاب مرجع در مختصات  $s_1 = [700, 700]$  و گیرنده‌های موقعیت‌یاب موردنیاز برای تشکیل ۲ معادله TDOA در مختصات  $s_2 = [100, 100]$  و  $s_3 = [1400, 1400]$  قرار داده شده است. معادلات متناسب با اختلاف‌زمان دریافت سیگنال  $\tau_{ij}$  که  $i = 1, 2$  و  $j = 3, 2$  به‌صورت رابطه (۲) است [۲]:

$$\sqrt{(x_i - x_T)^2 + (y_i - y_T)^2} - \sqrt{(x_j - x_T)^2 + (y_j - y_T)^2} = c\tau_{ij} \quad (2)$$

که در این معادله  $x_T$  و  $y_T$  و  $c$  مانند رابطه (۱) هستند و  $\tau_{ij}$  به معنای  $\tau_i - \tau_j$  است. بعد از تشکیل دستگاه معادلات مرتبه

طبیعی به‌طور جداگانه به‌صورت بردار گرادینان معادلات موقعیت‌یابی نسبت به کمیت خطا نشان داده شده است. در این مقاله با محاسبه دیفرانسیل مکان هدف نسبت به منابع خطا مقدار بردار گرادینان در محاسبات به‌دست می‌آید. این منابع خطا شامل خطای اندازه‌گیری، خطای هم‌زمان‌سازی و نوسانات در نسبت سیگنال به نویز (SNR) می‌شود که تشکیل‌دهنده نویز غیرطبیعی هستند. ناحیه بیضی خطا<sup>۱</sup> (EEP) متناسب با معکوس دترمینان ماتریس فیشر یا حد پایین کرامر رانو است [۱۲]. در حقیقت وضعیت نسبی دوایر و هذلولی‌های متناظر با معادلات موقعیت‌یابی TOA و TDOA، مساحت بیضی خطا را تغییر می‌دهد. در شکل (۱) مثالی از تأثیر وضعیت هندسه مسئله بر روی مساحت بیضی خطا نشان داده شده است. در نقاطی که دوایر یا هذلولی‌ها بر یکدیگر عمود باشند مساحت ناحیه بیضی خطا کمینه می‌شود و در نقاطی که مماس باشند مساحت بیضی خطا بیشینه خواهد شد که با معیار کرامر رانو تطابق دارد [۷].



شکل ۱. ناحیه بیضی خطا [۲]

در نهایت با ترکیب روش TOA و TDOA با فرض امکان پیاده‌سازی عملی این دو روش به‌صورت هم‌زمان، روش مناسب برای موقعیت‌یابی را با توجه به چینش گیرنده‌ها پیشنهاد می‌دهیم.

### ۳. معادلات حاکم

در این مقاله دو روش اصلی مبنای محاسبات قرار داده شده است، روش اول TOA و روش دوم TDOA. برای موقعیت‌یابی دوبعدی در روش TOA به سه گیرنده موقعیت‌یاب برای اندازه‌گیری زمان ورود سیگنال نیاز است تا با جایگذاری زمان‌های ورود سیگنال به‌دست‌آمده از هر گیرنده در معادلات، مکان هدف به‌دست آید. اما در روش TDOA به‌دلیل اینکه باهدف ارتباط هم‌زمان‌سازی وجود ندارد، یک گیرنده موقعیت‌یاب علاوه بر دیگر گیرنده‌ها به‌عنوان گیرنده موقعیت‌یاب مرجع برای تشکیل هذلولی‌های متناسب با معادلات زمانی TDOA الزامی است. گیرنده موقعیت‌یاب مرجع در واقع برای یکسان کردن مرجع زمانی بین گیرنده‌های موقعیت‌یاب دیگر استفاده می‌شود. این هذلولی‌ها بین سه گیرنده موقعیت‌یاب اصلی و یک گیرنده موقعیت‌یاب مرجع

<sup>۱</sup> Elliptical Error Probable

معادله  $f(x)$  یک معادله برداری غیرخطی است. برای مشخص کردن یک تخمین‌گر مناسب،  $f(x)$  را به وسیله بسط تیلور حول بردار  $x_0$  با محاسبه دو جمله از سری بسط می‌دهیم:

$$f(x) \approx f(x_0) + G(x - x_0) \quad (۸)$$

در معادله (۸)،  $x$  و  $x_0$  بردار ستونی  $1 \times n$  و  $G$  ماتریس هسیان در نقطه  $x_0$  است.

$$G = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \Big|_{x=x_0} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \Big|_{x=x_0} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial f_N}{\partial x_1} \Big|_{x=x_0} & \dots & \frac{\partial f_N}{\partial x_n} \Big|_{x=x_0} \end{bmatrix} \quad (۹)$$

هرکدام از سطرهاى ماتریس (۹) بردار گرادیان یکی از بخش‌های  $f(x)$  است. بردار  $x_0$  تخمینی از  $x$  است که یا از تکرار قبلی به دست آمده است یا با اطلاعات اولیه راجع به هدف، از ترکیب (۷) و (۸) داریم [۱۳]:

$$Q(x) = (r_1 - Gx)^T N^{-1} (r_1 - Gx) \quad (۱۰)$$

که

$$r_1 = r - f(x_0) + Gx_0 \quad (۱۱)$$

برای مشخص کردن شرایط تخمین‌گر  $\hat{x}$  که  $Q(x)$  را کمینه می‌نماید گرادیان  $Q(x)$  را به دست می‌آوریم:

$$\nabla_x Q(x) = \left[ \frac{\partial Q}{\partial x_1} \quad \frac{\partial Q}{\partial x_2} \quad \dots \quad \frac{\partial Q}{\partial x_n} \right]^T \quad (۱۲)$$

حال  $x$ هایی را می‌یابیم که  $\nabla_x Q(x) = 0$  باشد. با توجه به تعریف،  $N$  ماتریس متقارن است در نتیجه ماتریس معکوسش نیز متقارن است. در نتیجه:

$$\nabla_x Q(x) \Big|_{x=\hat{x}} = 2G^T N^{-1} G\hat{x} - 2G^T N^{-1} r_1 = 0 \quad (۱۳)$$

با فرض غیرتکین بودن  $G^T N^{-1} G$  جواب (۱۳) به صورت زیر است:

$$\hat{x} = (G^T N^{-1} G)^{-1} G^T N^{-1} r_1 \quad (۱۴)$$

$$= x_0 + (G^T N^{-1} G)^{-1} G^T N^{-1} [r - f(x_0)]$$

با داشتن (۱۴)، (۸) را می‌توان به فرم زیر نوشت [۱۳]:

$$Q(x) = [x - \hat{x}]^T G^T N^{-1} G [x - \hat{x}] - r_1^T N^{-1} G (G^T N^{-1} G)^{-1} G^T N^{-1} r_1 + r_1^T N^{-1} r_1 \quad (۱۵)$$

به دلیل آن که  $N$  معین مثبت است، معکوس  $N$  نیز معین مثبت خواهد بود. در نتیجه  $x = \hat{x}$ ،  $Q(x)$  را کمینه می‌کند. بنابراین تخمین‌گر (۱۰) تخمین‌گر کمترین مربعات خطی‌سازی شده نامیده می‌شود.

دوم روش‌های موقعیت‌یابی TOA و TDOA، مفهوم حساسیت به تغییرات خطا به وسیله محاسبه دیفرانسیل مختصات هدف نسبت به تغییرات زمان بیان می‌شود.

معادلات (۱) و (۲) به عنوان معادلات اصلی موقعیت‌یابی استفاده می‌شوند. رابطه (۳) بیانگر دستگاه معادلات موقعیت‌یابی با استفاده از معادلات (۱) یا (۲) و با در نظر گرفتن خطای تحمیلی به سیستم است [۱۳].

$$r_i = f_i(x) + n_i \quad (۳)$$

$$i = 1, 2, \dots, N$$

در رابطه (۳)،  $f_i(x)$  معادلات موقعیت‌یابی روش‌های TOA و TDOA است.  $n_i$  نیز کمیت خطا شامل نویز (نویز محیط و حرارتی)، خطای موقعیت‌گیرنده‌های موقعیت‌یاب و خطای اندازه‌گیری شامل خطای ناشی از هندسه و چینش نسبی گیرنده‌های موقعیت‌یاب است [۱۳]. تعداد  $N$  معادله (۳) را می‌توان به صورت یک معادله  $N$  بعدی با بردارهای ستونی نوشت:

$$r = f(x) + n \quad (۴)$$

در (۴) فرض بر آن است که خطای اندازه‌گیری شده بردار تصادفی چند متغیره با ماتریس کوواریانس  $N \times N$  معین مثبت است.

$$N = E[(n - E[n])(n - E[n])^T] \quad (۵)$$

$E$ ] بیانگر امید ریاضی و  $T$  بیانگر ترانپوز ماتریس است.

تابع چگالی شرطی  $r$  به شرط  $x$ ، با فرض آنکه  $x$  برداری غیر تصادفی ولی نامعلوم و  $n$  دارای توزیع طبیعی با میانگین صفر باشد داریم:

$$p(r|x) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2} |N|^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2} [r - f(x)]^T N^{-1} [r - f(x)]\right\} \quad (۶)$$

در (۶)  $|N|$  بیانگر دترمینان  $N$  و توان  $-1$  بیانگر معکوس ماتریس است. به دلیل تقارن و معین مثبت بودن  $N$  معکوسش وجود دارد. تخمین‌گر با بیشترین احتمال<sup>۱</sup> برابر مقداری از  $x$  است که (۶) را بیشینه نماید. بنابراین تخمین‌گر با بیشترین احتمال فرم مرتبه دوم  $Q(x)$  را کمینه می‌کند.

$$Q(x) = [r - f(x)]^T N^{-1} [r - f(x)] \quad (۷)$$

کمینه کردن  $Q(x)$  برای مشخص کردن تخمین‌گر حتی در شرایطی که خطا غیرطبیعی باشد معیار بسیار مناسبی است. در اینجا، تخمین‌گر مورد نظر، تخمین‌گر کمترین مربعات و  $N^{-1}$  ماتریس ضرایب وزن‌دهی است.

<sup>۱</sup> Maximum Likelihood Estimator

رابطه نهایی مربوط به تخمین مکان هدف به صورت زیر خواهد بود [۱۳]:

$$\begin{aligned} f(x) &= f_1(x, q_0) \\ n &= G_1(q - q_0) + n_1 \end{aligned} \quad (21)$$

در رابطه بالا کمیت نویز با توزیع طبیعی از کمیت خطا با توزیع غیرطبیعی تفکیک شده است. در محاسبات موقعیت‌یابی به منظور تسهیل محاسبات کمیت خطا با فرض دارا بودن توزیع طبیعی بر سیستم اضافه می‌شود. در روند معرفی شده نشان داده شد که کمیتی به‌عنوان نویز با توزیع طبیعی در عمل بر سیستم تحمیل می‌گردد که سبب برهم خوردن پیشقدر تخمین‌گر می‌شود و کران پایین کران‌رأو که برابر کمترین واریانس تخمین‌گر بدون بایاس است، غیرقابل محاسبه می‌شود. به این منظور در این مقاله مقدار غیرطبیعی خطا مستقل از نویز طبیعی محاسبه شده و به‌عنوان کمیت حساسیت در برابر خطا معرفی شده است. در واقع هر مقدار کمیت حساسیت به تغییرات خطا کمتر باشد، مقدار انحراف از مقدار کران‌پایین کران‌رأو کمتر خواهد شد و در نتیجه در نقاطی که کمیت حساسیت به تغییرات خطا کمتر باشد روش استفاده‌شده مقاوم‌تر خواهد بود. در ادامه، محاسبه این کمیت در دو روش TOA و TDOA ارائه می‌گردد.

### ۳-۱. روش TOA

در رابطه (۱) مکان هندسی هر معادله مرتبه دوم متناظر با تأخیر انتشار  $\tau_i$ ، یک دایره است. حل دستگاه معادلات مرتبه دوم غیرخطی تشکیل شده با معادلات (۱) به معنی استخراج نقطه تقاطع دوایر متناظر با معادلات است. حل دو معادله TOA به معنی قطع دو دایره است که حداکثر در دو نقطه احتمال حضور هدف وجود دارد و با اطلاعات اولیه می‌توان آن را به‌درستی استخراج کرد [۶]. در دستگاه مرتبه دو رابطه (۱) با جایگذاری  $y_T$  از معادله اول ( $i = 1$ ) در معادله دوم ( $i = 2$ ) رابطه (۲۲) حاصل می‌شود [۱۱]:

$$(x_{2T})^2 + \left( y_{21} + \sqrt{(c\tau_1)^2 - (x_{1T})^2} \right)^2 = (c\tau_1)^2 \quad (22)$$

که در رابطه (۲۲)  $x_T$ ،  $y_T$  و  $c$  مانند رابطه (۱) هستند. در ادامه با باز کردن رابطه (۲۲) داریم: در رابطه (۲۲) تنها  $x_T$  متغیر است. شرایط محیطی، نویز و تغییرات خطای اندازه‌گیری اثر خود را در تغییرات مقدار زمان ورود سیگنال نشان می‌دهند. این تغییرات به‌وجودآمده در مقدار زمان ورود سیگنال را تغییرات خطا نام‌گذاری می‌کنیم. با دیفرانسیل‌گیری از مختصات هدف نسبت به این تغییرات خطا رابطه (۲۴) و (۲۵) به‌دست می‌آید.

با جایگذاری (۲) در (۱۲) و مرتب‌سازی،  $\hat{x}$  به فرم زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned} \hat{x} &= x + (G^T N^{-1} G)^{-1} G^T N^{-1} \\ &\{f(x) - f(x_0) - G(x - x_0) + E[n]\} \end{aligned} \quad (16)$$

رابطه (۱۶) تأثیر خطای‌سازی و نویز را بر روی خطا نمایش می‌دهد. پیشقدر یک تخمین‌گر با رابطه  $b = E[\hat{x}] - x$  تعیین می‌شود. با استفاده از (۱۶) داریم:

$$\begin{aligned} b &= (G^T N^{-1} G)^{-1} G^T N^{-1} \\ &\{f(x) - f(x_0) - G(x - x_0) + E[n]\} \end{aligned} \quad (17)$$

اگر  $f(X)$  همانند (۶) خطی باشد و امید ریاضی خطا برابر صفر باشد، تخمین‌گر کمترین مربعات بدون پیشقدر خواهد بود. در صورت وجود خطای سیستمی در اندازه‌گیری، امید ریاضی برابر صفر نخواهد بود. برای برطرف کردن پیشقدر ایجادشده توسط خطای سیستمی می‌بایست به‌وسیله کالیبراسیون اندازه تمامی نمونه‌های  $E[n_i]$  کمینه گردد. اگر تعدادی از  $E[n_i]$  ها دارای تابعی معین از کمیت‌های متفاوت باشند، به‌وسیله بردار  $x$  یا نمونه‌هایی از آن قابل تخمین خواهند بود. پیشقدر به‌وجودآمده به‌وسیله غیرخطی بودن تابع  $f(x)$  با دو جمله از بسط سری تیلور حول نقطه  $x_0$  قابل تخمین است.

فرض می‌شود  $P$  ماتریس کوواریانس  $\hat{x}$  باشد. با استفاده از رابطه (۱۶) داریم:

$$\begin{aligned} p &= E[(\hat{x} - E[\hat{x}])(\hat{x} - E[\hat{x}])^T] \\ &= (G^T N^{-1} G)^{-1} \end{aligned} \quad (18)$$

عناصر قطری  $p$ ، واریانس بخش‌های تخمین‌زده‌شده  $x$  را نشان می‌دهند. به‌دلیل اینکه  $p$  بخشی از تخمین‌گر (۱۴) است، به یک‌باره کوواریانس و تخمین محاسبه می‌گردد. اگر  $n$  دارای توزیع طبیعی با میانگین صفر باشد، تخمین‌گر کمترین مربعات با کران پایین کران‌رأو برابر خواهد شد [۱۴].

کمیت استفاده‌شده با عنوان  $n$  شامل تمامی عوامل خطا از قبیل عدم دقت در سامانه یا کمیت‌های فیزیکی مانند مختصات گیرنده‌ها، چینش گیرنده‌ها یا سرعت انتشار است. اگر  $q$  برداری از این کمیت‌ها باشد عموماً به‌صورت زیر دارای دو بخش نویز با توزیع طبیعی و بخش نویز با توزیع غیرطبیعی بیان می‌شود.

$$r = f_1(x, q) + n_1 \quad (19)$$

( ) تابع برداری و  $n_1$  خطای تصادفی غیر مربوط به عدم دقت موجود در  $q$  است. فرض می‌شود  $q_0$  یک تخمین مناسب و به‌اندازه کافی نزدیک به  $q$  است. بسط سری تیلور به‌صورت زیر است:

$$f_1(x, q) \approx f_1(x, q_0) + G_1(q - q_0) \quad (20)$$

در (۲۰)  $G_1$  ماتریس مشتقات نسبت به  $q$  در نقطه  $q_0$  است.

۲-۲. روش TDOA

مکان هندسی نقاطی که در رابطه (۲) صدق می‌کنند هذلولوی هستند. با حل دستگاه معادلات مرتبه دوم رابطه (۲) نقطه تقاطع بین هذلولی‌ها استخراج می‌شود. با جایگذاری مقادیر اختلاف زمانی دریافت سیگنال و مختصات گیرنده‌های موقعیت‌یاب در رابطه (۲) مکان هدف استخراج خواهد شد. در این قسمت همانند روش TOA بعد از حل دستگاه معادلات غیرخطی مرتبه دو TDOA، رابطه حساسیت به خطای موقعیت‌یابی در روش TDOA به‌دست آورده می‌شود. با به توان دو رساندن دو طرف رابطه (۲) و ساده‌سازی داریم:

$$\sqrt{(x_{iT})^2 + (y_{iT})^2} = \frac{(c\tau_{ij})^2 + x_i^2 - x_j^2 + y_i^2 - y_j^2 + 2x_{ji}x + 2y_{ji}y}{2c\tau_{ij}} \quad (29)$$

که در رابطه (۳۰)  $A_{ab} = A_a - A_b$  است. با جایگذاری مختصات گیرنده مرجع و دیگر گیرنده‌های موقعیت‌یاب در رابطه (۳۰) داریم:

$$\sqrt{(x_{iT})^2 + (y_{iT})^2} = \frac{(c\tau_{12})^2 + x_1^2 - x_2^2 + y_1^2 - y_2^2 + 2x_{21}x + 2y_{21}y}{2c\tau_{12}} \quad (30)$$

$$\sqrt{(x_{iT})^2 + (y_{iT})^2} = \frac{(c\tau_{13})^2 + x_1^2 - x_3^2 + y_1^2 - y_3^2 + 2x_{31}x + 2y_{31}y}{2c\tau_{13}}$$

با مساوی قرار دادن سمت راست معادلات (۳۱) به یک معادله صفحه به فرم  $Ax_T + By_T + C = 0$  می‌رسیم که داریم:

$$A = 4(R_{12}x_{31} - R_{13}x_{21}) \quad (31)$$

$$B = 4(R_{12}y_{31} - R_{13}y_{21}) \quad (32)$$

$$C = 2c\tau_{12}(c^2\tau_{13}^2 + x_1^2 - x_3^2 + y_3^2) + 2c\tau_{13}(c^2\tau_{12}^2 + x_1^2 - x_2^2 + y_2^2) \quad (33)$$

که  $c$  سرعت انتشار سیگنال در محیط است. با به‌دست آوردن  $x$  یا  $y$  از معادله صفحه به‌دست‌آمده و جایگذاری در رابطه (۲) با  $i = 1$  و  $j = 2$  به رابطه (۳۵) می‌رسیم:

$$y_T = \alpha = \frac{-C - Ax_T}{B} \quad (34)$$

$$\sqrt{(x_i - x_T)^2 + \left(y_i - \frac{-C - Ax_T}{B}\right)^2} - \sqrt{(x_j - x_T)^2 + \left(y_j - \frac{-C - Ax_T}{B}\right)^2} = c\tau_{ij} \quad (35)$$

$$\frac{dy_T}{d\tau_1} = \frac{2(x_{21} + \sqrt{(c\tau_1)^2 + (y_{1T})^2}) \left(\frac{2c^2\tau_1}{2\sqrt{(c\tau_1)^2 - (y_{1T})^2}}\right)}{-2(y_{2T}) - 2(x_{21} + \sqrt{(c\tau_1)^2 + (y_{1T})^2}) \left(\frac{2y_{1T}}{2\sqrt{(c\tau_1)^2 - (y_{1T})^2}}\right)} \quad (23)$$

$$\frac{dx_T}{d\tau_1} = \frac{2c^2\tau_2}{-2(x_{2T}) - 2(y_{21} + \sqrt{(c\tau_1)^2 + (x_{1T})^2}) \left(\frac{2x_{1T}}{2\sqrt{(c\tau_1)^2 - (x_{1T})^2}}\right)} \quad (24)$$

در رابطه (۲۴) و (۲۵) تغییرات مختصات هدف  $(x_T, y_T)$  به مکان خود هدف و چینش گیرنده‌های موقعیت‌یاب به‌صورت غیرخطی بستگی دارد. روابط (۲۴) و (۲۵) حساسیت مختصات هدف به تغییرات خطا را نشان می‌دهد. همان‌طور که بیان شد تغییرات خطا ناشی از تغییر آب‌وهوا، نویز اضافه‌شده به محیط یا نوسانات سطح مقطع هدف و خطای ناشی از عدم دقت در مختصات گیرنده‌ها و ... اثر خود را در  $\tau_i$  نشان می‌دهد. در این قسمت تمامی خطاها به استثنا نویز با توزیع طبیعی مورد بررسی قرار گرفته است. با جایگذاری نقاط مختلف سطح مورد نظر، می‌توان در تمامی نقاط صفحه، مقدار حساسیت روش TOA را به تغییرات خطا مشاهده کرد که در ادامه نشان داده خواهد شد. در ادامه با محاسبه حساسیت مختصات هدف به تغییرات خطا در گیرنده موقعیت‌یاب دوم داریم:

$$\frac{dx_T}{d\tau_2} = \frac{2(y_{21} + \sqrt{(c\tau_1)^2 + (x_{1T})^2}) \left(\frac{2c^2\tau_1}{2\sqrt{(c\tau_1)^2 - (x_{1T})^2}}\right)}{-2(x_{2T}) - 2(y_{21} + \sqrt{(c\tau_1)^2 + (x_{1T})^2}) \left(\frac{2x_{1T}}{2\sqrt{(c\tau_1)^2 - (x_{1T})^2}}\right)} \quad (25)$$

$$\frac{dy_T}{d\tau_2} = \frac{2c^2\tau_2}{-2(y_{2T}) - 2(x_{21} + \sqrt{(c\tau_1)^2 + (y_{1T})^2}) \left(\frac{2y_{1T}}{2\sqrt{(c\tau_1)^2 - (y_{1T})^2}}\right)} \quad (26)$$

در روابط (۲۶) و (۲۷) به‌دلیل آن‌که مختصات هدف نمی‌تواند هم‌زمان در دونقطه مختصات گیرنده‌ها قرار بگیرد، مخرج کسرها هیچ‌گاه صفر نخواهد شد و در نتیجه ابهامی وجود ندارد. برای مشاهده هم‌زمان اثرات تغییرات خطا در هر دو گیرنده موقعیت‌یاب بر روی مختصات هدف، مقادیر به‌دست‌آمده از معادلات (۲۴) تا (۲۷) را به‌صورت زیر ترکیب می‌کنیم:

$$dx_T = \frac{dx_1}{d\tau_1} dt + \frac{dx_2}{d\tau_2} dt \quad (27)$$

$$dy_T = \frac{dy_1}{d\tau_1} dt + \frac{dy_2}{d\tau_2} dt \quad (28)$$

با جایگذاری مختصات نقاط مورد نظر برای موقعیت‌یابی در معادلات بالا و به‌دست آوردن مقادیر خروجی روابط (۲۷) و (۲۸) می‌توان حساسیت روش موقعیت‌یابی TOA در نقاط مختلف صفحه به تغییرات خطا را مشاهده کرد. این نتایج در شکل (۴) در بخش نتایج شبیه‌سازی نشان داده شده است.

## ۳-۳. روش تخمین حداقل مربعات وزن دار مقاوم

در بخش‌های قبل با استفاده از روابط بیان شده مقادیر حساسیت روش‌های TOA و TDOA با فرض وجود نویز غیرطبیعی (غیر گوسی) بررسی گردید. در این بخش با به‌دست آوردن روابط مربوط به تخمین حداقل مربعات وزن دار مقاوم با توجه به مرجع [۱۵] داریم:

$$t_i = (\|x - s_i\| + n_i) / c, i = 1, \dots, L \quad (39)$$

در رابطه (۳۹)،  $\|x - s_i\|$  فاصله واقعی بین گیرنده موقعیت‌یاب نام و هدف را نشان می‌دهد و  $c$  بیانگر سرعت انتشار موج است.  $n_i / c$  نویز اندازه‌گیری شده دارای توزیع طبیعی با میانگین صفر و واریانس  $\sigma_i^2 / c^2$  است. قبل از به‌دست آوردن رابطه فرض زیر را در نظر می‌گیریم:

فرض: مقدار فاصله  $\|x - s_i\|$  از مقدار نویز اندازه‌گیری شده بسیار کوچک‌تر است.

در ادامه مسئله تخمین حداقل مربعات وزن دار مقاوم را بررسی می‌کنیم. با به توان دو رساندن طرفین رابطه (۳۹) و ساده‌سازی داریم:

$$n_i \approx \frac{d_i^2 - \|x - s_i\|^2}{2d_i} \quad (40)$$

با توجه به فرض مسئله، بخش مربوط به مرتبه دوم نویز  $n_i^2$  در نظر گرفته نمی‌شود. بر اساس روابط (۳۹) و (۴۰) رابطه کمترین مربعات وزن دار مقاوم به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\rho = \sum_{i=1}^L \frac{(d_i^2 - \|x - s_i\|^2)^2}{4\sigma_i^2 d_i^2} \quad (41)$$

به‌منظور کمینه‌سازی رابطه (۴۱) از روش بهینه‌سازی شبه نیوتن برگرفته از کتاب آقای فلچر [۱۸] استفاده می‌کنیم. روش نیوتن و روش‌های شبه‌نیوتن به‌دلیل استفاده از بسط تیلور تا مرتبه دوم و محاسبه ماتریس هسین برای بهینه‌سازی مسائل مرتبه دو بسیار مناسب هستند. روش نیوتن با یک تکرار به همگرایی رسیده و روش‌های مشابه نیوتن به‌دلیل حدس ماتریس هسین به‌جای محاسبه دقیق با تعداد محدودی بیشتر از یک تکرار به جواب دست می‌یابند (۳-۴ تکرار). در ادامه روابط مربوط به حل مسئله بهینه‌سازی شبه‌نیوتن را به‌دست می‌آوریم.

موقعیت‌های ابتدایی  $s_i$  در رابطه (۴۱) را به‌صورتی که آقای حمدالله‌زاده و همکاران در [۱۷] نشان داده‌اند به مرکزیت نقطه  $(700, 700)$  با زاویه‌های مساوی در بین بازه‌های  $0 < x < 1400, 0 < y < 1400$  مقداردهی می‌کنیم.

تنها مجهول رابطه (۳۵) با جایگذاری (۳۴) در (۳۰)  $x_T$  است. به‌دلیل اینکه رابطه (۳۵) یک معادله غیرخطی است، با استفاده از اطلاعات اولیه، مختصات هدف بدون هیچ ابهام به‌دست می‌آید. مانند بخش قبل قصد داریم دیفرانسیل مختصات هدف را نسبت به تغییرات خطا در یک ناحیه به وسعت  $1400 \times 1400$  مترمربع به‌دست آوریم. با دیفرانسیل‌گیری از رابطه (۳۵) نسبت به  $\tau_{ij}$  که  $i = 1$  و  $j = 2$  است داریم:

$$\frac{dx_T}{d\tau_{12}} = \frac{-2x_{1T} + 2(y_1 + \frac{c + Ax_T}{B}) \frac{A}{B}}{2\sqrt{(x_{1T})^2 + (y_1 + \frac{c + Ax_T}{B})^2}} - \frac{-2x_{2T} + 2(y_2 + \frac{c + Ax_T}{B}) \frac{A}{B}}{2\sqrt{(x_{2T})^2 + (y_2 + \frac{c + Ax_T}{B})^2}} \quad (36)$$

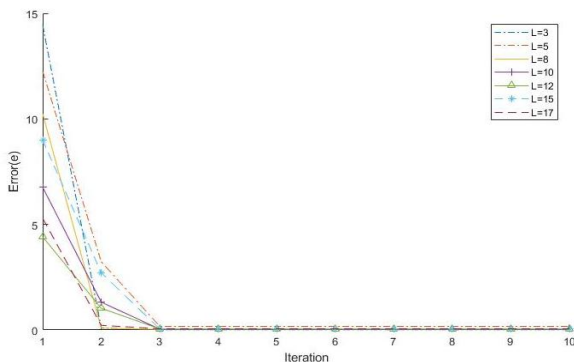
در رابطه (۳۶) مانند رابطه (۲۵) و (۲۶) به‌دلیل آنکه مختصات گیرنده‌های دوم و سوم با مختصات گیرنده مرجع نمی‌توانند یکسان باشند و در ضمن هم‌زمان طول و عرض از مبدأ گیرنده‌های دوم و سوم یکسان نخواهند بود، ابهامی وجود نخواهد داشت. رابطه (۲) نسبت به  $x, y$  تقارن دارد به این دلیل  $\frac{dx}{d\tau_{13}}$  در رابطه (۳۷) با جابه‌جا کردن  $\tau_{12}$  به‌دست می‌آید. برای دیدن تأثیر هر دو اختلاف‌زمان دریافت سیگنال  $\tau_{12}$  و  $\tau_{13}$  به‌صورت زیر مقدار حساسیت به خطا را بیان می‌کنیم:

$$dx_T = \frac{dx_T}{d\tau_{12}} dt + \frac{dx_T}{d\tau_{13}} dt \quad (37)$$

$$dy_T = \frac{dy_T}{d\tau_{12}} dt + \frac{dy_T}{d\tau_{13}} dt \quad (38)$$

رابطه (۳۶) به مختصات هدف و چینش گیرنده‌های موقعیت‌یاب بستگی دارد. در نتیجه حساسیت خطا یعنی رابطه (۳۷) و (۳۸) نیز این‌گونه است. همانند روش TOA، در روابط TDOA نیز نسبت به  $x, y$  تقارن وجود دارد اگر روابط (۳۷) و (۳۸) در تمام نقاط ناحیه مورد نظر محاسبه شوند، می‌توان نشان داد روش TDOA در هر نقطه از سطح چه مقدار به تغییرات خطا مقاوم است. این تغییرات خطا شامل خطای اندازه‌گیری، تغییرات جوی و آب و هوایی، نویزهای پیش‌بینی‌نشده و ... است. روابط (۲۵-۲۸) در روش TOA و روابط (۳۶-۳۸) در روش TDOA نشان می‌دهند که نقاط مختلف سطح با توجه به محل قرارگیری گیرنده‌های موقعیت‌یاب، رفتار یکسانی در مقدار خطای موقعیت‌یابی ندارند. در شکل‌های (۳-۴) به‌طور مجزا مقادیر حساسیت به خطا در صفحه‌ای به ابعاد  $1400 \times 1400$  مترمربع برای روش‌های TOA و TDOA به ترتیب نشان داده شده‌اند.





شکل ۲. همگرایی روش شبه‌نیوتن

با استفاده از وزن‌های به‌دست‌آمده از روابط (۳۷-۳۸) و اعمال در روابط موقعیت‌یابی، تأثیر عوامل غیرطبیعی خطا را در مکان هدف اعمال می‌کنیم. همگرایی بهینه‌سازی شبه‌نیوتن همانند انتظار در مسائل مرتبه دوم بسیار کم است. در بخش بعدی نتایج به‌دست‌آمده از تخمین کمترین مربعات وزن‌دار و تأثیر بخش غیرطبیعی نویز در موقعیت هدف نشان داده خواهد شد.

#### ۴. نتایج شبیه‌سازی

در بخش قبل وابستگی مقدار حساسیت نسبت به تغییرات خطا به چینش گیرنده‌های موقعیت‌یاب نشان داده شد. در ادامه با محاسبه رفتار بخش غیرطبیعی نویز همبستگی این کمیت با حساسیت به تغییرات خطا نشان داده شد. پس از آن با استفاده از مقادیر غیرطبیعی نویز به منظور مقایسه با کارهای مشابه صورت گرفته در مبحث بررسی حساسیت روش‌های موقعیت‌یابی، تخمین کمترین مربعات وزن‌دار موقعیت هدف انجام شد.

در این بخش با قرار دادن گیرنده‌های موقعیت‌یاب در نقاطی که در بخش دوم بیان شد، مقادیر حساسیت نسبت به تغییرات خطا محاسبه می‌شود. در این مقاله مقدار SNR در هر گیرنده موقعیت‌یاب، شرایط جوی و سرعت انتشار سیگنال یکسان در نظر گرفته شده است. به‌علاوه مقدار تغییرات خطا را برای جایگذاری در رابطه (۳۷-۳۸) و (۲۷-۲۸) برابر  $10^{-9}$  ثانیه در نظر گرفته می‌شود. این مقدار تغییرات خطا معادل خطای ۳۰ سانتی‌متر است. این مقدار خطا در ناحیه‌ای به مساحت حدود ۲ کیلومترمربع معادل کمترین مقادیر تغییرات خطا در محیط است. این تغییرات قدرت نویز شامل اختلاف دمایی محیط، گرم شدن سخت‌افزار یا وجود ادوات مخابراتی با توان بالا در اطراف گیرنده‌های موقعیت‌یاب است. مقدار حساسیت نسبت به تغییرات خطا در روش TOA در شکل (۳) نشان داده شده است. ملاحظه می‌شود که مقدار حساسیت به خطا در طول خط واصل بین گیرنده‌های موقعیت‌یاب قرار گرفته در مختصات [۱۴۰۰، ۱۴۰۰]

$$S_i = \{s_1, \dots, s_L\} \quad (42)$$

بردار مربوط به گرادیان به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$g = [g(1), \dots, g(L)] \quad (43)$$

که المان‌های مربوط به بردار گرادیان به‌صورت زیر به‌دست‌آمده‌اند:

$$g^0(i) = \frac{e_i^0 - e^0}{\Delta\varphi} \quad (44)$$

مقدار  $e$  به‌عنوان فاصله نقاط به‌دست‌آمده از نقاط واقعی و بدون خطای فرض شده به‌صورت رابطه (۴۵) در نظر گرفته شده است و  $\tilde{\rho}$  با جایگذاری مقادیر دقیق نوشته شده است.

$$e_i^0 = (\rho_x(x_i^0) - \tilde{\rho})(\rho_x(x_i^0) - \tilde{\rho})^T \quad (45)$$

عامل به‌وجود آمدن بردار گرادیان در روابط بالا تغییرات جزئی در مکان هدف و محاسبه حساسیت به‌صورت زیر است:

$$x_i = [x_1, \dots, (x_i + \Delta\varphi), \dots, x_L] \quad (46)$$

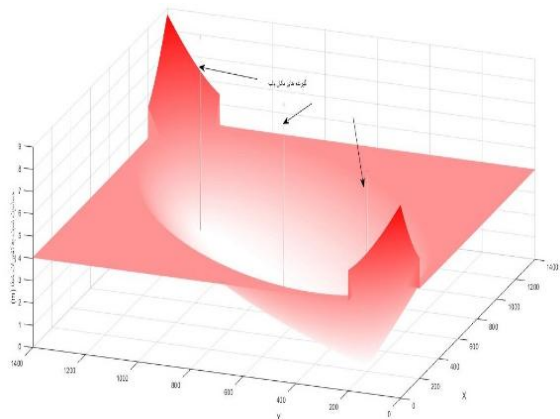
در رابطه (۴۶) در هر مرحله از تکرار بهینه‌سازی با اعمال تغییرات بسیار ناچیز ( $\Delta\varphi$ ) در مکان هدف بردار گرادیان تشکیل می‌گردد.

در نهایت به‌وسیله بردار تصادفی اولیه و تکرار بهینه‌سازی به‌روش شبه نیوتن طبق مراحل زیر رابطه (۴۱) کمینه می‌گردد [۱۸]:

$$\begin{aligned} x^{(n+1)} &= x^{(n)} + g^{(n)} \delta^{(n)} + \frac{1}{2} \delta^{(n)T} H^{(n)} \delta^{(n)} \\ \delta^{(n)} &= \alpha (-H^{(n)} g^{(n)}) \\ H^{(n+1)} &= H^{(n)} + \frac{\delta^{(n)} \delta^{(n)T}}{\delta^{(n)T} \gamma^{(n)}} - \frac{H^{(n)} \gamma^{(n+1)} \gamma^{(n+1)T} H^{(n)}}{\gamma^{(n+1)T} H^{(n)} \gamma^{(n+1)}} \\ \gamma^{(n+1)} &= g^{(n+1)} - g^{(n)} \end{aligned} \quad (47)$$

مقدار اولیه مناسب برای ماتریس هسین ماتریس همانی در نظر گرفته شده است که شرط معین مثبت بودن در الگوریتم شبه نیوتن را برآورده می‌سازد. الگوریتم بهنگام‌سازی ماتریس هسین از کتاب آقای فلچر [۱۸] با نام DFP استفاده شده است. الگوریتم بهینه‌سازی ذکر شده تا زمانی که مقدار خطای در نظر گرفته شده به سمت مقدار بسیار ناچیزی همگرا شود ادامه پیدا می‌کند. نمودار همگرایی بهینه‌سازی شبه‌نیوتن در شکل (۲) نشان داده شده است. نکته حائز اهمیت در بهینه‌سازی فوق استفاده از مقادیر نرمالیزه به‌دست‌آمده از رابطه (۳۷-۳۸) به‌عنوان وزن‌های مناسب ( $\frac{1}{\sigma_i^2}$ ) برای تخمین کمترین مربعات وزن‌دار است.

در شکل (۵) ترکیب روش‌های TOA و TDOA نشان داده شده است. با فرض اینکه قابلیت هم‌زمان‌سازی بین هدف و گیرنده‌های موقعیت‌یاب موجود باشد، اگر در نقاطی که مقدار خطای روش TOA بیشینه است، برای مثال ناحیه خط واصل بین گیرنده‌های موقعیت‌یاب به‌جای استفاده از معادلات TOA از معادلات TDOA استفاده شود، بهبود خطای موقعیت‌یابی را در پی خواهد داشت. به این صورت که مرکز محاسبات ابتدا با مقادیر TOA ارسالی از هر گیرنده موقعیت‌یاب مقادیر TDOA بین گیرنده‌های موقعیت‌یاب را محاسبه کرده و سپس با استفاده از معادلات TDOA مکان هدف را مشخص می‌کند. در نقاط دور از خط واصل که خطای موقعیت‌یابی در روش TDOA بیشینه می‌شود توصیه می‌شود که از روش TOA بهره برده شود.

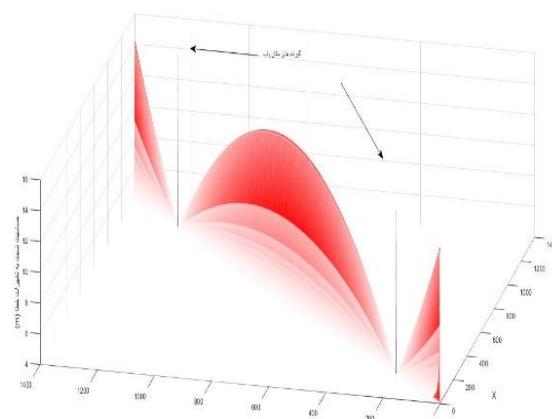


شکل ۵. مقادیر حساسیت به خطا بعد از ترکیب دو روش TOA و TDOA

در ادامه به منظور مقایسه با تحقیق ژانگ و همکاران [۱۵] که بر روی تخمین مقاوم کمترین مربعات خطای وزن‌دار کار کرده‌اند، بهینه‌سازی شبه‌نیوتن بر روی این مسئله اجرا شد و با اعمال مقدار نرمالیزه تغییرات خطای به‌دست‌آمده در بخش ۳، به‌عنوان وزن‌های این مسئله  $(\frac{1}{\sigma_i^2})$ ، بخش غیرطبیعی نویز در مسئله اعمال شد. در این مسئله همانند ژانگ [۱۵] کران پایین کرامر راثو به‌عنوان معیار تخمین‌گر برگزیده شده است. در کتاب پردازش سیگنال آماری عنوان شده که خطای تخمین‌گر با کمترین واریانس بدون پیشقدر همواره با معکوس ماتریس فیشر یا همان کران پایین کرامر راثو برابر است [۱۶]. در شکل (۶) معیار کرامر راثو مشابه تحقیق ژانگ [۱۵] استفاده شده است.

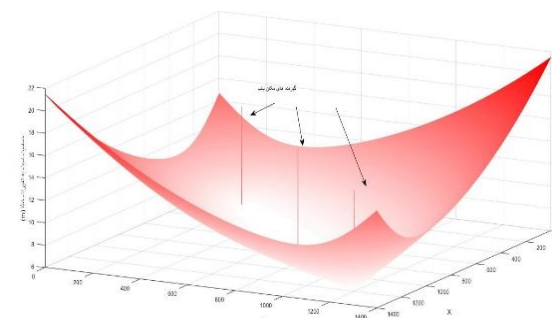
در شکل (۶) روش پیشنهادی با وزن‌های به‌دست‌آمده در این مقاله همان‌طور که در رابطه (۲۱) اثبات شده است، با یک اختلاف ثابت از معیار کرامر راثو به‌دست‌آمده است و با رنگ مشکی در بالای نمودار کران پایین کرامر راثو قابل مشاهده است. در بخش ۳ بیان شد اگر نویز سیستم طبیعی و با میانگین صفر نظر گرفته شود، خطای تخمین‌گر بدون پیشقدر با کمترین

[۱۰۰, ۱۰۰]، بیشینه است. در طول خط واصل بین دو گیرنده موقعیت‌یاب دوایر مربوط به معادلات TOA مماس هستند. در نتیجه ناحیه بیضی خطا که متناسب با دترمینان ماتریس فیشر است، بیشینه می‌گردد. مقدار تغییرات مختصات هدف در طول خط واصل در بیش‌ترین مقدار خود به ۱۴ متر می‌رسد. با دور شدن از خط واصل بین گیرنده‌ها دوایر متناظر با معادلات TOA به سمت عمود شدن پیش می‌روند. در نتیجه با دور شدن از خط واصل بین دو گیرنده، خطا کاهش می‌یابد. این مقادیر با مقادیر به‌دست‌آمده با مقالات آقایان نگوین [۶] و لاریده [۷] همخوانی دارد. در نقاط دور از خط واصل مقدار تغییرات خطا نزدیک ۳ متر می‌شود.



شکل ۳. مقادیر حساسیت به خطا در روش TOA

شکل (۴) مقادیر حساسیت نسبت به تغییرات خطا را برای روش TDOA در صفحه نشان می‌دهد. در روش TDOA گیرنده موقعیت‌یاب مرجع در مختصات  $[700, 700]$  قرار داده شده است. مشاهده می‌شود برخلاف روش TOA در ناحیه خط واصل بین دو گیرنده موقعیت‌یاب، خطا بسیار کم می‌شود. ناحیه کمینه خطا در روش TDOA مکانی است که هذلولی‌های مرتبط با معادلات TDOA برهم عمود هستند. لازم به ذکر است مقدار خطای در نظر گرفته‌شده در این شبیه‌سازی‌ها مقدار نسبی خطا بوده و به نسبت فاصله هدف و گیرنده موقعیت‌یاب مقدار خطای در نظر گرفته‌شده در هر گیرنده موقعیت‌یاب تغییر می‌کند.



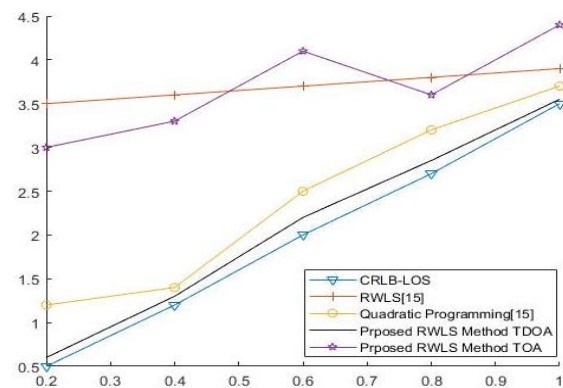
شکل ۴. مقادیر حساسیت به خطا در روش TDOA.

نمایان می‌گردد. استفاده از این روش به دلیل عدم ارسال سیگنال دارای مزایای امنیتی بسیاری است.

## ۶. مراجع‌ها

- [1] Hasanshahi, Z.; Rahmatim, A. R.; Azmi, P. "Passive Mobile Localization Based on the Air Interface Signalling in Cellular Networks"; J. Adv. Defence Sci. & Technol. 2018, 04, 259-306 (In Persian).
- [2] Zekavat, S. "Handbook of Position Location"; Wiley; 2012.
- [3] Iliev, N.; Paprotny, I. "Review and Comparison of Spatial Localization Methods for Low-Power Wireless Sensor Networks"; IEEE Sens. J. 2015, 15, 5971-5987.
- [4] Luo, J.; Zhang, X.; Wang, Z.; Lai, X. "On the Accuracy of Passive Source Localization Using Acoustic Sensor Array Networks"; IEEE Sens. J. 2017, 17, 1795-1809.
- [5] Ji-Yan, H.; Qun, W. "Comments on the Cramer-Rao Bounds of Hybrid TOA/RSS and TDOA/RSS Location Estimation Schemes"; IEEE Commun. Lett. 2007, 22, 848-849.
- [6] Nguyen, N.; Dogancay, K. "Optimal Geometry Analysis for Multistatic TOA Localization"; IEEE Trans. Signal Proc. 2016, 64, 4180-4193.
- [7] Laaraiedh, M.; Amiot, N.; Avrillon, S.; Uguen, B. "Theoretical Performances Assessment of Hybrid Localization Techniques"; IEEE Stat. Signal Proc. Workshop 2011, 185-188.
- [8] ITU "Comparison of Time-Difference-of-Arrival and Angle-of-Arrival Methods of Signal Geolocation"; <https://www.itu.int/pub/R-REP-SM.2211-1-2014/ru>, 2014.
- [9] Patwari, N.; Ash, J.; Kyperountas, S.; Hero, A.; Moses, R.; Correal, N. "Locating the Nodes: Cooperative Localization in Wireless Sensor Networks"; IEEE Signal Proc. Mag. 2005, 22, 54-69.
- [10] Shin, S. "Radar Measurement Accuracy Associated with Target RCS Fluctuation"; Electron. Lett. 2017, 53, 750-752.
- [11] Fang, B. T. "Simple Solutions for a Hyperbolic and Related Position Fixes"; IEEE Trans. Aerosp. Elect. Sys. 1990, 26, 748-753.
- [12] Lee, H.; Kim, H.; Shim, J.; Heo, M. "Analytic Equivalence of Iterated TOA and TDOA Techniques under Structured Measurement Characteristics"; Multidim. Sys. Signal Proc. 2010, 22, 361-377.
- [13] Torrieri, D. "Statistical Theory of Passive Location Systems"; IEEE Trans Aero. Elec. Sys. 1984, 20, 183-198.
- [14] Sage, A.; Melsa, J. "Estimation Theory with Applications to Communications and Control. New York, 1971.
- [15] Zhang, S.; Gao, S.; Wang, G.; Li Y. "Robust NLOS Error Mitigation Method for TOA-Based Localization Via Second-Order Cone Relaxation"; IEEE Commun. Lett. 2015, 19, 2210-2213.
- [16] Kay, S. "Fundamentals of statistical signal processing", Upper Saddle River: Prentice Hall PTR, 2017.
- [17] Hamdollahzadeh, M.; Adelipour, S.; Behnia, F. "Optimal Sensor Configuration for Two Dimensional Source Localization Based on TDOA/FDOA Measurements"; 17<sup>th</sup> Int. Radar Symp. 2016.
- [18] Fletcher, R. "Practical Methods of Optimization"; Chichester, Wiley, 2010

واریانس برابر با کران پایین کرامر راثو می‌گردد. کی و همکاران [۱۶] نیز در کتاب خود این مسئله را اثبات کرده‌اند. همان‌طور که ملاحظه می‌شود در صورتی که نویز غیرطبیعی در نظر گرفته نشود، معیار کران پایین کرامر راثو میزان خطای تخمین‌گر خواهد بود. در مقایسه با روش ژانگ [۱۵]، با اعمال وزن‌های نرمالیزه بهبود قابل‌توجهی در مقدار خطا حاصل شده است.



شکل ۶. مقایسه تغییرات خطا در روش‌های مختلف

## ۵. نتیجه‌گیری

در این مقاله ابتدا یک مرور کوتاه بر دقت در روش‌های موقعیت‌یابی کلاسیک و ترکیبی انجام گرفته است. در ادامه مفهوم کاربردی به نام حساسیت نسبت به تغییرات خطا تعریف و در روابط بررسی شد. در حالتی که گیرنده موقعیت‌یاب یا هدف دارای حرکت باشند معادلات حاکم بر مسئله تغییر می‌کند و اثر داپلر بر دقت موقعیت‌یابی تأثیر زیادی خواهد داشت و می‌تواند در پارامتر حساسیت نسبت به خطا ظاهر شود. در ادامه به وسیله معادلات TOA و TDOA مقادیر حساسیت به خطا در هر دو روش محاسبه شد و برای بهبود دقت مکان در ناحیه مشخص شده برای موقعیت‌یابی، همان‌طور که در بخش نتایج شبیه‌سازی بیان شده، یک مصالحه بین انتخاب روش موقعیت‌یابی بر اساس چینش گیرنده‌های موقعیت‌یاب ارائه شده است. مطالعه حساسیت خطا در روش‌های دیگر موقعیت‌یابی موضوع کارهای آینده است. طراحی شکل موج با مشخصات خودهمبستگی مناسب می‌تواند بر دقت اندازه‌گیری زمان‌های ورود سیگنال تأثیر زیادی بگذارد به علاوه در شبکه‌های حسگر بی‌سیم استفاده از شکل موج با لبه جانبی کمتر در مشخصه تابع خودهمبستگی، کاهش مصرف توان را نتیجه می‌دهد. بهبود دقت موقعیت‌یابی در روش زمانی و ترکیب روش غیرفعال TDOA با روش فعال TOA برای مصارف امنیتی به‌ویژه در مناطق شهری حائز اهمیت است. با مشاهده نتایج شبیه‌سازی و تأثیر استفاده از روش غیرفعال TDOA بر دقت مکان، مزیت‌های به‌کارگیری این روش در موقعیت‌یابی بیش‌ازپیش