

## توسعه مدل قیمت‌گذاری کالاهای زوال‌پذیر با نرخ زوال ثابت با در نظر گرفتن جایگزینی کالاهای فاسدشده

ابراهیم تیموری<sup>۱</sup> و سید محمدمهدی کاظمی<sup>۲\*</sup>

۱. دانشیار دانشکده مهندسی صنایع دانشگاه علم و صنعت ایران

۲. دانشجوی دکتری دانشکده مهندسی صنایع دانشگاه علم و صنعت ایران

(تاریخ دریافت ۹۲/۱۰/۲۱ - تاریخ دریافت روایت اصلاح‌شده ۹۳/۲/۱۹ - تاریخ تصویب ۹۳/۱۰/۲۸)

### چکیده

تعیین سیاست کنترل موجودی مناسب و قیمت فروش بهینه کالاهای مختلف، از موضوعات اصلی تحقیقات علمی و صنعتی است. از طرف دیگر، امروزه بسیاری از کالاهایی که در بازار وجود دارند در زمره اقلام زوال‌پذیرند. بنابراین، تعیین قیمت بهینه و سیاست‌های موجودی بهینه برای این نوع کالاها اهمیت بالایی دارد. در این پژوهش یک زنجیره تأمین سه‌سطحی، شامل یک تولیدکننده، یک توزیع‌کننده و یک خرده‌فروش، در نظر گرفته شد که در آن فقط یک نوع کالای زوال (فساد)‌پذیر با نرخ زوال (خرابی) ثابت عرضه می‌شود. تقاضا در این زنجیره قطعی و بازپس‌سازی در آن لحظه‌ای بود. هدف مطالعه سیستم موجودی توزیع‌کننده این زنجیره تأمین بود؛ طوری که سود کل سیستم بیشینه شود. دستاورد کلیدی این مطالعه نیز توسعه مدل جدید و ارائه الگوریتمی بود که مقادیر بهینه قیمت فروش محصول و طول دوره سفارش توزیع‌کننده را، که متناظر با سود بیشینه است، تعیین کند. بخشی از موجودی اولیه انبار در اثر زوال (خرابی) و فساد از بین می‌رود؛ در نتیجه توزیع‌کننده میزان کالای خراب‌شده را اسقاط و به همان اندازه در انبار خود کالای سالم جایگزین می‌کند. جایگزینی کالا در انبار توزیع‌کننده نیز لحظه‌ای در نظر گرفته شد. در انتها مثال عددی برای تشریح مدل ارائه می‌شود و تحلیل حساسیت روی مقادیر برخی پارامترها صورت می‌گیرد.

**کلیدواژه‌ها:** جایگزینی، زنجیره تأمین، قیمت‌گذاری، کالای فسادپذیر.

### مقدمه

بازاریابی را به طور هم‌زمان توسعه دادند برای تعیین متغیرهای تصمیم بهینه‌ای که سود را ماکزیمم می‌کنند. مدل توسعه‌داده‌شده بر پایه سود کل توزیع‌کننده و خریدار است و سیاست‌های بهینه سفارش‌دهی، حمل‌ونقل، و قیمت‌گذاری را مشخص می‌کند. هوانگ و همکاران [۴] درباره هماهنگی تصمیم‌های سرمایه‌گذاری از قبیل انتخاب تأمین‌کنندگان و اجزا و قیمت‌گذاری و موجودی در یک زنجیره تأمین چندسطحی متشکل از چندین تأمین‌کننده، یک تولیدکننده، و چندین خرده‌فروش تحقیق کردند. آن‌ها مسئله را به عنوان یک بازی پویای سه‌سطحی و غیر همکاری مدل کردند.

از طرف دیگر، از آنجا که امروزه بیشتر کالاها در معرض زوال (خرابی) قرار دارند، مطالعه کنترل موجودی کالاهای فسادپذیر جایگاهی ویژه دارد. بهاری‌کاشانی [۵] یک مدل هیورستیک برای تعیین برنامه سفارش‌دهی برای کالاهای فسادپذیر ارائه کرد که در آن تقاضا در طول زمان به طور خطی تغییر می‌کند. در این مدل هیورستیک،

در سال‌های اخیر، در بازارهای واقعی، به دلیل افزایش هزینه‌ها، روند جهانی شدن، رو به پایان رفتن منابع، و کوتاهی طول عمر کالاها به یکپارچگی زنجیره تأمین بسیار توجه شده است. همان‌طور که می‌دانیم، قیمت‌گذاری عاملی مهم در افزایش سودآوری زنجیره تأمین است و یکی از استراتژی‌های رایج در ایجاد همکاری در زنجیره تأمین به شمار می‌رود. پولاتوگلو [۱] بر تصمیم‌های هم‌زمان قیمت‌گذاری و خرید برای یک مدل موجودی تک‌دوره‌ای با تقاضای قطعی و احتمالی تمرکز کرده است. چن و همکاران [۲] مسئله کنترل موجودی و قیمت‌گذاری تحت بررسی دوره‌ای را برای یک خرده‌فروش، که با تقاضای تصادفی وابسته به قیمت مواجه می‌شود، مطالعه کردند. در این تحقیق، هر تقاضای پاسخ‌داده‌نشده از دست می‌رود و هر موجودی باقی‌مانده در انتهای دوره محدود فروش ارزش بازیافتی دارد. سجادیه و همکاران [۳] روی یک زنجیره تأمین دوسطحی، شامل یک توزیع‌کننده و خریدار، تمرکز کردند و یک مدل تولید-موجودی-

ترفعی خرده‌فروشان مطالعه کردند. هدف آن‌ها تعیین قیمت خرده‌فروشی بهینه بود. هوانگ [۱۵] مدل موجودی یکپارچه را برای تعیین سیاست بهینه با شرایط کاهش هزینه پردازش سفارش و تأخیر مجاز در پرداخت‌ها توسعه داد. دای [۱۶] یک مدل مقدار سفارش اقتصادی قطعی، تقاضای کلی، زوال (خرابی)، و تابع هزینه خرید واحد را با دو سطح سیاست اعتبار تجاری در نظر گرفت. هدف او یافتن مقادیر بهینه قیمت فروش، تعداد بازسازی، و طرح بازسازی بود. میهمی و نخعی [۱۷] یک مدل کنترل موجودی و قیمت‌گذاری هم‌زمان برای کالاهای فسادپذیر غیر آبی با تأخیر مجاز در پرداخت‌ها ارائه کردند. هدف اصلی تعیین قیمت فروش بهینه، برنامه بازسازی بهینه، و مقدار سفارش بهینه به طور هم‌زمان بود؛ طوری که سود کل را ماکزیمم کند.

هنگامی که کالا فسادپذیر (شکست‌پذیر) باشد، می‌توان از سیاست‌های جایگزینی نیز برای کالاهای فاسدشده استفاده کرد. در ادامه چند نمونه می‌آید. نودم و همکاران [۱۸] روشی را برای یافتن سیاست‌های تولید، تعمیر- جایگزینی، و تعمیر- نگهداری بازدارنده بهینه برای یک سیستم تولیدی ارائه کردند. در این سیستم، شکست (زوال) تصادفی ماشین و همچنین تعمیرات وجود دارد. وقتی یک زوال (خرابی) در سیستم اتفاق می‌افتد ماشین یا تعمیر می‌شود یا جایگزین. عمل جایگزینی ماشین را نو می‌کند؛ در حالی که عمل تعمیر کیفیت ماشین را پایین می‌آورد (هیچ‌گاه عملکرد ماشین نو با ماشین تعمیری یکی نیست). تعمیر- نگهداری بازدارنده نیز به منظور بهبود قابلیت اطمینان ماشین در نظر گرفته می‌شود. متغیرهای تصمیم در این مدل نرخ تولید، نرخ تعمیر- نگهداری بازدارنده، و سیاست تعمیر- جایگزینی است. مدل آن‌ها بر پایه فرایند تصمیم شبه‌مارکوف است و هدف این مطالعه یافتن متغیرهای تصمیمی است که هزینه‌های کلی سیستم را مینیمم کند. سیوازیان و دنوساپوترا [۱۹] دخول مسئله کنترل موجودی اجزای شکست‌پذیر (فسادپذیر) به یک مسئله جایگزینی کلاسیک را در نظر گرفتند و مقایسه‌ای بین ترکیب جایگزینی فردی و سیاست موجودی با ترکیب جایگزینی گروهی و سیاست موجودی انجام دادند. تابع هدف آن‌ها مینیمم کردن هزینه میانگین در هر واحد زمان بود. چنگ [۲۰] مسئله تعمیر- نگهداری بازدارنده را در تئوری قابلیت اطمینان از نظر اقتصادی بررسی کرد. به طور کلی، هنگام وقوع شکست در یک

اندازه سفارش و طول چرخه بازسازی، هر دو، متغیر است. چانگ و لین [۶] روش جریان نقدی تخفیف‌یافته را برای بررسی مسئله بازسازی موجودی برای کالاهای فسادپذیر، با در نظر گرفتن ارزش زمانی پول، در طول یک افق برنامه‌ریزی ثابت دنبال کردند. آن‌ها مدل‌ها و جواب‌های بهینه با پس‌افت و بدون پس‌افت را توسعه دادند. راو و همکاران [۷] در زمینه توسعه مدل موجودی برای کالاهای فسادپذیر با وقوع کمبود برای تأمین‌کننده کار کردند. نتایج بررسی‌های آن‌ها نشان داد تصمیم‌های یکپارچه در مقایسه با تصمیم‌های مستقل تأمین‌کننده، تولیدکننده، و خریدار از لحاظ هزینه به‌صرفه‌تر است. هو [۸] یک مدل موجودی برای کالاهای فسادپذیر با نرخ زوال (خرابی) وابسته به موجودی و کمبود با شرایط تورم و تخفیف زمانی در طول یک افق برنامه‌ریزی محدود به دست آورد. لی و چانگ [۹] شیوه تفکر سیستم دینامیک را برای طرح یک سیستم جدید سفارش‌دهی و شبیه‌سازی سیستماتیک به کار بردند. نتیجه کار آن‌ها نشان داد شیوه شبیه‌سازی سیستم دینامیک مناسب است و کمترین هزینه زنجیره را به دست می‌دهد. چانگ [۱۰] یک مدل موجودی تک‌مرحله‌ای را در نظر گرفت که در آن فرسایش موجودی فقط با نرخ ثابت انجام می‌شود. سپس اثر تقاضای وابسته به موجودی و همچنین رابطه بین سیاست گارانتی کالاهای معیوب را بررسی کرد و یک مدل موجودی- تولید یکپارچه دومرحله‌ای برای کالاهای فسادپذیر با سیاست بازسازی و برنامه نظارتی توسعه داد.

هنگامی که کالا فسادپذیر باشد، مسئله قیمت‌گذاری اهمیتی دوچندان می‌یابد. بنابراین، مدل‌های قیمت‌گذاری کالاهای فسادپذیر به دلیل نزدیک شدن به شرایط واقعی کسب‌وکار بسیار مهم‌اند. وی [۱۱] توسعه مدل موجودی قطعی با تخفیف مقداری، قیمت‌گذاری، و سفارش معوق جزئی را بررسی کرد. یانگ [۱۲] یک سیاست سفارش‌دهی و قیمت‌گذاری بهینه را برای کالاهای فسادپذیر با نرخ تقاضای حساس به قیمت توسعه داد. از آنجا که در هماهنگی و اتحاد بین خریدار و توزیع‌کننده توزیع‌کننده بیشتر از خریدار سود می‌برد، استفاده از یک استراتژی قیمت‌گذاری و تخفیف مقداری برای وادار کردن خریدار به پذیرش اتحاد لازم است. دای و همکاران [۱۳] یک سیستم تک‌محصولی با افق نامحدود و مقدار سفارش اقتصادی را در نظر گرفتند. تی سائو و شین [۱۴] مسئله قیمت‌گذاری پویا، ترفیع، و بازسازی را برای یک کالای فسادپذیر با اعتبار تجاری تأمین‌کنندگان و تلاش‌های

سیاستی که بتواند از این کالاهای فاسدشده استفاده کند و به کاهش هزینه سیستم بینجامد بسیار مطلوب خواهد بود. در نتیجه، در ادامه این تحقیق بر این موضوع، یعنی «توسعه مدل قیمت‌گذاری برای کالاهای فسادپذیر با در نظر گرفتن سیاست جایگزینی کالاهای فاسدشده»، تمرکز می‌شود. سؤال‌های اصلی این تحقیق نیز عبارت‌اند از اینکه اولاً در این سیستم کدام کالاهای فسادپذیر را در چه فواصل زمانی سفارش دهیم و ثانیاً محصول را به چه قیمتی بفروشیم تا سود کل سیستم بیشینه شود. در بخش دوم مسئله بیان و تعریف می‌شود. در قسمت سوم، پس از تعریف نمادها و پارامترها، به مدل‌سازی ریاضی پرداخته می‌شود. سپس برای حل آن‌ها در بخش چهارم روش‌های ریاضی بیان می‌شود. در قسمت پنجم مثال عددی برای نشان دادن کاربردی بودن مدل ارائه می‌شود. در قسمت ششم به تحلیل حساسیت پرداخته می‌شود. و نهایتاً در قسمت هفتم جمع‌بندی ارائه می‌شود.

### شرح و بیان مسئله

زنجیره تأمین را، شامل یک تولیدکننده و یک توزیع‌کننده و یک خرده‌فروش، در نظر بگیرید که فقط یک نوع کالای فسادپذیر با نرخ زوال (خرابی) ثابت تولید می‌کند و می‌فروشد. هدف اصلی مطالعه سیستم موجودی توزیع‌کننده این زنجیره تأمین و توسعه مدلی برای تعیین هم‌زمان مقادیر بهینه قیمت فروش محصول  $p$  و طول دوره سفارش  $T$  توزیع‌کننده به منظور ماکزیم کردن سود کل است. در این تحقیق توزیع‌کننده در ابتدای دوره سفارش به میزان تقاضای آن دوره کالا سفارش می‌دهد. اما، از آنجا که کالاها فسادپذیرند، در طول دوره سفارش بخشی از کالاهای موجود در انبار خراب می‌شوند و در نتیجه توزیع‌کننده مجبور است برای تأمین تقاضای مشتریان خود به میزان کالاهای خراب‌شده جنس سالم جایگزین کند. در حقیقت، او ابتدا کالاهای خراب‌شده را اسقاط (باز یافت) می‌کند و سپس به همان اندازه (اندازه کالاهای خراب‌شده) کالای سالم می‌خرد. در این تحقیق فرض بر این است که جایگزینی لحظه‌ای است و هزینه خرید مجدد کالاها با هزینه خرید اولیه آن برابر است. به علاوه، به منظور تعیین قیمت فروش بهینه، فرض کردیم تقاضای مشتری تابعی خطی از قیمت محصول است،  $D(p) = (a - bp)$ ، که در آن  $a, b$  مقادیری ثابت و مثبت‌اند. کمبود مجاز نیست و همه تقاضاها باید پاسخ داده شوند. همچنین در این زنجیره بازسازی لحظه‌ای و تقاضا قطعی است.

سیستم دو حالت اتفاق می‌افتد. در حالت اول، شکست (زوال) قابل تعمیر است و با کمترین تعمیر درست می‌شود. در حالت دوم، شکست تعمیرشدنی نیست. در این حالت، جایگزینی اصلاحی اتفاق می‌افتد. وی برای هر سیاست به طور تحلیلی برنامه بهینه‌ای برای جایگزینی بازدارنده، که میانگین هزینه را مینیمم می‌کند، ارائه داد. گومز و همکاران [۲۱] به طور هم‌زمان مسئله برنامه‌ریزی تولید و کنترل کیفیت را برای یک سیستم تولید تک‌ماشینه و غیر قابل اطمینان، که فقط به تقاضای یک محصول پاسخ می‌دهد، بررسی کردند. در این مدل، ماشین در معرض زوال (خرابی) بود و اثر آن عمدتاً روی نرخ کالاهای معیوب تولیدشده در طول زمان مشاهده می‌شد. هدف اصلی این مطالعه تعیین هم‌زمان برنامه تولید بهینه و تعمیرات اساسی برای سیستم تولید بود؛ طوری که هزینه کل مینیمم شود. گوین و همکاران [۲۲] اثر موجودی قطعات یدکی را روی تصمیم‌های تعمیر-نگهداری ابزار یا جایگزینی آن‌ها بررسی کردند. در مدل آن‌ها تغییرات تکنولوژیکی هم در نظر گرفته شد. در نتیجه، تصمیم جایگزینی بسیار پیچیده است. زیرا تصمیم‌گیرنده باید درباره اینکه دارایی خود را با کدام تکنولوژی جایگزین کند نیز تصمیم بگیرد. آن‌ها همچنین از طریق فرایند تصمیم مارکوف به فرمول‌سازی پرداختند. جین و گوپتا [۲۳] یک سیستم موجودی با کالاهای فسادپذیر غیر آنی را در نظر گرفتند که در آن نرخ تقاضا تابعی از تبلیغات کالا و قیمت فروش بود. آن‌ها با تعیین پارامترهای بهینه موجودی و بازاریابی سود کل خرده‌فروش را ماکزیم کردند. چنگ و لی [۲۴] یک سیستم ساده قابل تعمیر فسادپذیر با دو نوع حالت شکست را مطالعه کردند. آن‌ها فرض کردند سیستم بعد از تعمیر به خوبی یک سیستم جدید نیست و زوال (خرابی) تصادفی است. با این فرضیات، آن‌ها یک مدل پردازش هماهنگ برای سیستم فاسدکننده معرفی کردند.

به طور کلی، با توجه به بررسی‌ها و مطالعات انجام‌شده، می‌توان گفت گرچه پژوهش‌هایی که به موضوع قیمت‌گذاری و کنترل موجودی کالاهای فسادپذیر پرداخته‌اند نسبتاً متعددند، مقاله یا مطالعه‌ای که به این سه موضوع، یعنی قیمت‌گذاری و کنترل موجودی کالاهای فسادپذیر با در نظر گرفتن سیاست جایگزینی کالاهای فاسدشده به طور هم‌زمان پرداخته باشد، دیده نمی‌شود. از آنجا که کالاهای فسادپذیر در طول زمان فاسد می‌شوند و هزینه‌ای را به سیستم تحمیل می‌کنند، استفاده از

## مدل سازی

برای مدل کردن، پارامترها و متغیرهای تصمیم به صورت زیر تعریف می‌شوند:

## پارامترها

$I(t)$ : سطح موجودی در زمان  $t$

$\theta$ : نرخ زوال (خرابی) ثابت

$D(p)$ : نرخ تقاضای وابسته به قیمت

$F_D$ : هزینه ثابت ارسال

$F_p$ : هزینه ثابت سفارش دهی (خرید)

$C_D$ : هزینه ارسال هر واحد کالا

$C_p$ : هزینه سفارش دهی (خرید) هر واحد کالا

$C_H$ : هزینه بازیافتی هر واحد کالا (ارزش اسقاطی)

$h$ : هزینه نگهداری هر واحد کالا در هر واحد زمان

$Q_p$ : مقدار کالاهای فاسدشده

## متغیرهای تصمیم

$p$ : قیمت فروش هر واحد کالا

$T$ : طول دوره سفارش

رابطه دیفرانسیل ۱ وضعیت موجودی توزیع کننده را در هر لحظه از زمان نشان می‌دهد:

$$\frac{dI(t)}{dt} = -\theta I(t) - D(p) \quad ; \quad t \in [0, T] \quad (1)$$

با حل رابطه ۱، با استفاده از شرط مرزی  $I(T) = 0$ ، رابطه موجودی توزیع کننده به صورت رابطه ۲ به دست می‌آید:

$$I(t) = \frac{D(p)}{\theta} (e^{\theta(T-t)} - 1) \quad (2)$$

به منظور تعیین مقادیر بهینه متغیرهای تصمیم، ابتدا باید تابع سود مدل شود و از آنجا که میزان سود از تفاضل بین درآمد و هزینه به دست می‌آید، ابتدا برای به دست آوردن درآمد به صورت زیر عمل می‌کنیم:

**درآمد:** در این تحقیق  $T$  طول دوره سفارش در نظر گرفته شده و تقاضا در طول این دوره  $D(p)$  است. در نتیجه، درآمد در کل دوره سفارش بر اساس رابطه ۳ چنین خواهد بود:

$$D(p)Tp = (a - bp)Tp \quad (3)$$

**مؤلفه‌های هزینه توزیع کننده:** در این تحقیق فرض می‌شود تابع هزینه شامل هزینه‌های سفارش دهی، ارسال، نگهداری، و جایگزینی خواهد بود؛ که هر یک به تفصیل در زیر بیان و محاسبه می‌شود:

هزینه سفارش دهی: در این مدل ابتدا به میزان تقاضای دوره سفارش می‌دهیم و از آنجا که سفارش دهی شامل دو بخش هزینه ثابت و هزینه متغیر است، هزینه سفارش دهی بر اساس رابطه ۴ چنین خواهد بود:

$$F_p + C_p D(p)T = F_p + C_p(a - bp)T \quad (4)$$

هزینه ارسال: چون مقدار ارسال در هر چرخه به میزان تقاضا در آن چرخه، یعنی  $D(p)$  است، با داشتن  $F_D$  به منزله هزینه ثابت ارسال و  $C_D$  به منزله هزینه ارسال هر واحد کالا میزان هزینه ارسال در کل چرخه سفارش دهی با رابطه ۵ به دست می‌آید:

$$F_D + C_D D(p)T = F_D + C_D(a - bp)T \quad (5)$$

هزینه نگهداری: طبق رابطه ۲، سطح موجودی در لحظه  $t$  برابر با  $I(t) = \frac{D(p)}{\theta} (-1 + e^{\theta(T-t)}) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$  است. پس، با استفاده از بسط سری تیلور تا سه جمله برای عبارت نمایی  $e^{\theta T}$  به صورت  $e^{\theta T} = 1 + \theta T + \frac{\theta^2 T^2}{2}$  جایگذاری  $D(p) = (a - bp)$  برای سادگی، هزینه نگهداری موجودی در هر چرخه بازسازی بر اساس رابطه ۶ چنین خواهد بود:

$$h \int_0^T I(t) dt = h \int_0^T \left( \frac{D(p)}{\theta} (-1 + e^{\theta(T-t)}) \right) dt \quad (6)$$

$$= \frac{hD(p)T^3}{2} = \frac{h(a - bp)T^3}{2}$$

هزینه جایگزینی: هزینه جایگزینی عبارت است از تفاضل هزینه خرید کالا به اندازه کالاهای خراب و ارزش اسقاطی (هزینه بازیافت) کالاهای خراب. از طرفی می‌دانیم که اگر از موجودی ابتدای دوره مقدار تقاضا و موجودی انتهای دوره کم شود، مقدار زوال (خرابی) به دست خواهد آمد (رابطه ۷):

$$Q_p = I(0) - I(T) - D(p)T \quad (7)$$

از آنجا که میزان موجودی در ابتدای دوره سفارش با

$$Z = a - 2bp - \left\{ \begin{array}{l} -bC_p - \frac{3bhT^2}{2} - \\ b(C_p - C_H)(2T - 1 + \frac{3\theta T^2}{2}) - bC_D \end{array} \right\} \quad (12)$$

پس از عملیات بالا، عبارت  $X \times H \times X^T$  به صورت رابطه ای درجه دو به شکل رابطه ۱۳ به دست می آید:

$$X \times H \times X^T = \alpha T^2 + \beta T + \gamma \quad (13)$$

و برای اثبات تقعر باید نشان داده شود (رابطه ۱۴):

$$X \times H \times X^T = \alpha T^2 + \beta T + \gamma \leq 0 \quad (14)$$

یعنی مشتق دوم این رابطه درجه دو منفی و همچنین  $\alpha \leq 0$  است. پس، تابع سود  $TP(P, T)$  مقعر است اگر و تنها اگر  $a \geq 2bp$  و این بدین معنی است که در رابطه خطی تقاضا، که تابعی از قیمت محصول است، باید ضریب ثابت همواره بزرگتر از دو برابر ضریب قیمت محصول باشد. به عبارت دیگر، همواره قیمت محصول باید از مقداری مثبت کمتر باشد و یک حد بالا داشته باشد و قیمت از حد معینی بالاتر نرود و اثبات کامل می شود.

### حل مدل

برای حل مدل از رابطه ۱۰ نسبت به  $p$  مشتق می گیریم (رابطه ۱۵):

$$\frac{\partial TP(p, T)}{\partial p} = aT - 2bpT - \left\{ \begin{array}{l} -bTC_p - \frac{bhT^3}{2} - b(C_p - C_H) \\ (T^2 - T + \frac{\theta T^3}{2}) - bTC_D \end{array} \right\} \quad (15)$$

از طرف دیگر، مشتق رابطه ۱۰ نسبت به  $T$  بر اساس رابطه ۱۶ چنین است:

$$\frac{\partial TP(p, T)}{\partial T} = (a - bp)p - \left\{ \begin{array}{l} C_p(a - bp) + \frac{3hT^2}{2}(a - bp) + \\ (a - bp)C_D(a - bp)(C_p - C_H) \\ (2T - 1 + \frac{3\theta T^2}{2}) \end{array} \right\} \quad (16)$$

با ۰ قراردادن رابطه ۱۵ رابطه ۱۷ را خواهیم داشت:

جایگذاری  $t=0$  در رابطه ۲ برابر با  $I(0) = \frac{D(p)}{\theta}(e^{\theta T} - 1)$  است و در انتهای دوره سطح موجودی به ۰ می رسد،  $I(T) = 0$ ، و تقاضا در طول چرخه سفارش  $D(p)T$  است. در نتیجه مقدار زوال (خرابی) بر اساس رابطه ۸ چنین خواهد بود:

$$Q_p = I(0) - I(T) - D(p)T = \frac{(a - bp)}{\theta}(e^{\theta T} - 1) - (a - bp)T \quad (8)$$

در نتیجه استفاده از بسط سری تیلور تا سه جمله برای عبارت نمایی  $e^{\theta T}$  به صورت  $e^{\theta T} = 1 + \theta T + \frac{\theta^2 T^2}{2}$  هزینه جایگزینی بر اساس رابطه ۹ چنین خواهد بود:

$$C_p(Q_p) - C_H(Q_p) = (C_p - C_H)Q_p \quad (9)$$

$C_p$  هزینه خرید کالا به اندازه کالاهای خراب است که با قیمت خرید اولیه کالا یکسان در نظر گرفته شده و  $C_H$  ارزش اسقاطی است.

حال که تک تک پارامترهای هزینه در یک سیستم به طور جداگانه محاسبه شدند، با داشتن تابع درآمد در رابطه ۳ و استفاده از رابطه های ۴، ۵، ۶، ۹ تابع سود کل بر اساس رابطه ۱۰ چنین خواهد بود:

$$TP(p, T) = D(p)Tp - \left\{ \begin{array}{l} F_p + C_p D(p)T + \frac{hD(p)T^3}{2} + \\ F_D + C_D D(p)T + \\ (C_p - C_H) \left( \frac{D(p)T^2 - D(p)T}{2} + \frac{D(p)\theta T^3}{2} \right) \end{array} \right\} \quad (10)$$

**قضیه:**  $TP(P, T)$  مقعر است اگر و تنها اگر  $a \geq 2bp$

**برهان:**  $TP(P, T)$  مقعر است اگر و تنها اگر

$$X \cdot H \cdot X^T = [P \ T] \times H \times [P \ T]^T \leq 0$$

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 TP}{\partial p^2} & \frac{\partial^2 TP}{\partial p \partial T} \\ \frac{\partial^2 TP}{\partial T \partial p} & \frac{\partial^2 TP}{\partial T^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2bT & Z \\ Z & -3hTD(p) - D(p)(2 + 3\theta T)(C_p - C_H) \end{bmatrix} \quad (11)$$

به نحوی که:

$TP^* = 59.5141$  به دست می‌آید که متناظر با قیمت بهینهٔ محصول  $P^* = 212.0936$  و طول چرخهٔ سفارش بهینه  $T^* = 0.0592$  است.

#### تحلیل حساسیت

در این قسمت چندین آزمایش عددی برای بررسی حساسیت جواب‌های بهینه به تغییرات مقادیر برخی پارامترها انجام شد. نتایج به طور کامل در جدول ۱ می‌آید. همچنین، علاوه بر جدول تحلیل حساسیت، نمودارهای مرتبط با هر یک نیز برای نشان دادن تغییرات پارامترها به تفصیل ارائه می‌شود. گفتنی است در جدول تحلیل حساسیت درصد تغییرات متغیرهای تصمیم به ازای تغییرات پارامترها در جدول آمده است؛ اما نمودارها با اطلاعات نقطه‌به‌نقطه رسم شده‌اند. در این بخش تحلیل حساسیت روی پارامترهای  $h$ ،  $F_p$ ،  $C_p$ ،  $C_H$  و  $\theta$  انجام شده است. این پارامترها، از آن جهت که نقشی مهم‌تر و تعیین‌کننده بر رفتار تابع هدف و در نتیجه تصمیم‌گیری‌ها و راهکارهای مدیریتی دارند، برای تحلیل حساسیت انتخاب شدند. همان‌طور که در جدول ۱ و شکل‌ها مشخص است، با افزایش نرخ زوال (خرابی) قیمت فروش محصول افزایش و طول دورهٔ سفارش کاهش می‌یابد. پس، در مواقعی که نرخ زوال (خرابی) محصول بالاست، بهتر است از همان ابتدا محصول بیشتری را خریداری و در انبار ذخیره کنیم. از آنجا که تغییرات نرخ زوال (خرابی) و هزینهٔ نگهداری تأثیری مشابه بر رفتار تابع و متغیرهای تصمیم می‌گذارد، به آوردن نمودار یکی از آن‌ها بسنده کردیم. با افزایش هزینهٔ بازیافت (ارزش اسقاطی)، قیمت فروش محصول و طول دورهٔ سفارش افزایش می‌یابد. با افزایش هزینهٔ خرید محصول، قیمت فروش محصول افزایش و طول دورهٔ سفارش کاهش می‌یابد.

#### بینش‌های مدیریتی

- اگر هزینهٔ نگهداری هر واحد کالا بالا باشد، موجودی کمتری در انبار نگاه داشته می‌شود.
- اگر نرخ خرابی بالا باشد، موجودی کمتری در انبار نگاه داشته می‌شود تا هزینهٔ فساد کاهش یابد.
- اگر هزینهٔ ثابت ارسال بالا باشد، محصولات بیشتری توزیع می‌شود.
- اگر هزینهٔ ثابت بازپس‌سازی بالا باشد، محصولات بیشتری سفارش داده می‌شود.
- اگر هزینهٔ جایگزینی در مقایسه با هزینهٔ نگهداری بالا باشد، محصولات بیشتری سفارش داده می‌شود و در انبار نگه داشته می‌شود.

$$p^* = \frac{a}{2b} + \frac{hT^2}{4} + \frac{T}{2}(C_p - C_H) + \frac{1}{2}(C_H + C_D) + \frac{\theta T^2}{4}(C_p - C_H) \quad (17)$$

با جایگذاری رابطهٔ ۱۷ در رابطهٔ ۱۸ و قراردادن آن رابطه، رابطهٔ ۱۶ به رابطهٔ ۱۸ تبدیل می‌شود:

$$AT^4 + BT^3 + CT^2 + DT + E = 0 \quad (18)$$

که یک چندجمله‌ای درجهٔ چهار بر حسب  $T$  است که در آن:

$$A = \frac{5b}{16}(\theta(C_p - C_H) + h)^2 \quad (19)$$

$$B = b(C_p - C_H)(\theta(C_p - C_H) + h) \quad (20)$$

$$C = (-a + bC_D + bC_H) + \left(\frac{3\theta}{4}(C_p - C_H) + \frac{3h}{4}\right) + \frac{3b}{4}(C_p - C_H)^2 \quad (21)$$

$$D = (-a + bC_D + bC_H)(C_p - C_H) \quad (22)$$

$$E = \left(\frac{\sqrt{b}}{2}(C_D + C_H) + \frac{a}{2\sqrt{b}}\right)^2 \quad (23)$$

در ادامه، روش حل برای ساده‌سازی فرایند حل ارائه می‌شود.

**گام اول:** ضرایب چندجمله‌ای رابطهٔ ۱۸ محاسبه می‌شود (رابطه‌های ۱۹ تا ۲۳).

**گام دوم:** برای هر گروه از ضرایب محاسبه‌شدهٔ چندجمله‌ای، همهٔ ریشه‌های حقیقی و مثبت رابطهٔ ۱۸، با استفاده از نرم‌افزار MATLAB، تعیین می‌شود.

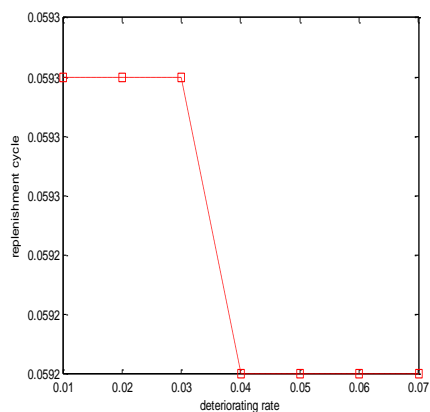
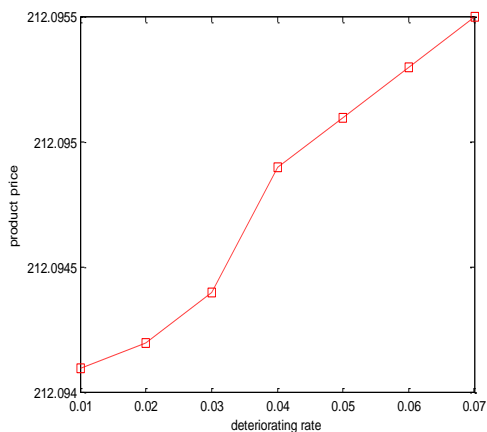
**گام سوم:** قیمت فروش محصول،  $P$ ، برای همهٔ مقادیر شدنی طول دوره،  $T$ ، محاسبه می‌شود.

**گام چهارم:** برای همهٔ ترکیب‌های  $(T, p)$  تابع سود کل با رابطهٔ ۱۰ حساب می‌شود. همچنین شرط مقربودن در قضیهٔ ۱ نیز بررسی می‌شود.

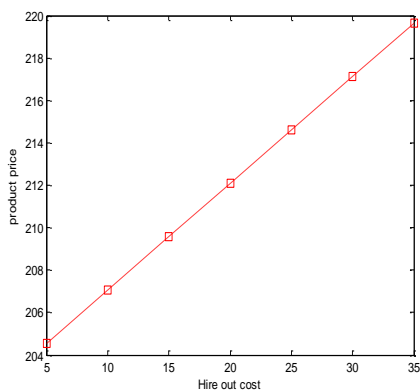
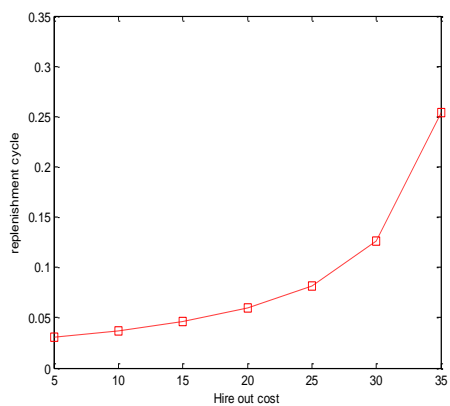
**گام پنجم:** با مقایسهٔ سودهای کلی، که در گام ۴ به دست آمده، بیشترین سود به دست می‌آید که متناظر با قیمت بهینهٔ محصول، طول چرخهٔ سفارش بهینه است.

#### مثال عددی

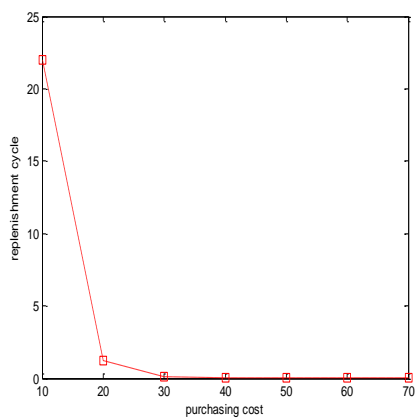
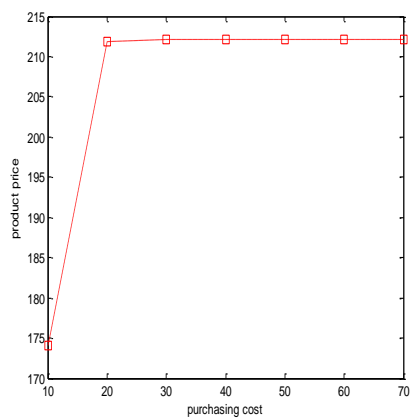
در این مدل، مقادیر در نظر گرفته‌شده برای پارامترها  $b = 0.05$ ،  $a = 20$ ،  $\theta = 0.04$ ،  $F_p = 40$ ،  $F_D = 5$ ،  $h = 1$ ،  $C_p = 40$  و  $C_D = 3$ ،  $C_H = 20$  هستند. برای حل مثال، مطابق فرایند حل بالا، بیشترین سود



شکل ۱. اثر تغییر نرخ زوال (خرابی) بر متغیرهای تصمیم



شکل ۲. اثر تغییر هزینه بازیافت (ارزش اسقاطی) بر مقادیر بهینه متغیرهای تصمیم



شکل ۳. اثر تغییر هزینه خرید بر مقادیر بهینه متغیرهای تصمیم

جدول ۱. تأثیر تغییر در پارامترها بر مقادیر بهینه

درصد تغییرات متغیرهای تصمیم				
	درصد تغییر در مقادیر پارامترها	$T$	$p$	$TP$
$C_H$	+۰,۲۵	+۳۸,۰۰۶	+۱,۱۸۹	+۶۰,۲۳۸
	-۰,۲۵	-۲۲,۸۰۴	-۱,۱۸۸	-۳۶,۳۸۴
	+۰,۵	+۱۱۳,۵۱	+۲,۳۷۸	+۱۷۹,۴۸۳
	-۰,۵	-۳۸,۰۰۶	-۲,۳۷۷	-۶۰,۸۲۳
	+۰,۷۵	+۳۲۹,۲۲۲	+۳,۵۶۴	+۵۱۸,۷۱۵
	-۰,۷۵	-۴۸,۸۱۷	-۳,۵۶۵	-۷۸,۳۴۸
$h$	+۰,۲۵	۰	+۰,۰۰۰۰۹	-۰,۰۰۰۰۳
	-۰,۲۵	+۰,۱۶۸	+۰,۰۰۰۰۳	+۰,۲۹۵
	+۰,۵	۰	+۰,۰۰۰۰۱	-۰,۰۰۰۰۸
	-۰,۵	+۰,۱۶۸	+۰,۰۰۰۰۲	+۰,۲۹۵
	+۰,۷۵	-۰,۱۶۸	-۰,۰۰۰۰۱	-۰,۲۹۵
	-۰,۷۵	+۰,۱۶۸	+۰,۰۰۰۰۱	+۰,۲۹۶
$\theta$	+۰,۲۵	۰	+۰,۰۰۰۰۹	-۰,۰۰۰۰۳
	-۰,۲۵	+۰,۱۶۸	+۰,۰۰۰۰۳	+۰,۲۹۵
	+۰,۵	۰	+۰,۰۰۰۰۱	-۰,۰۰۰۰۶
	-۰,۵	+۰,۱۶۸	+۰,۰۰۰۰۲	+۰,۲۹۵
	+۰,۷۵	۰	+۰,۰۰۰۰۲	-۰,۰۰۰۰۱
	-۰,۷۵	+۰,۱۶۸	+۰,۰۰۰۰۲	+۰,۲۹۵
$F_p$	+۰,۲۵	۰	۰	-۱۶,۸۰۲
	-۰,۲۵	۰	۰	+۱۶,۸۰۲
	+۰,۵	۰	۰	-۳۳,۶۰۵
	-۰,۵	۰	۰	+۳۳,۶۰۵
	+۰,۷۵	۰	۰	-۵۰,۴۰۸
	-۰,۷۵	۰	۰	+۵۰,۴۰۸
$C_p$	+۰,۲۵	-۳۳,۱۰۸	+۰,۰۰۰۰۶	-۵۸,۱۴۳
	-۰,۲۵	+۹۸,۴۷۹	-۰,۰۰۰۰۶	+۱۷۲,۹۴
	+۰,۵	-۴۹,۸۳۱	+۰,۰۰۰۰۴	-۸۷,۵۱
	-۰,۵	+۲۰۲,۶۰۵	-۰,۰۰۰۰۹۳	-۶۳,۳۳
	+۰,۷۵	-۵۹,۷۹۷	+۰,۰۰۰۰۸	-۱۰۵,۰۱
	-۰,۷۵	+۳۷۰,۳	-۱۷,۹۲۶	-۹۰,۵۸

### جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

در این مقاله یک سیستم موجودی تک‌کالایی برای کالاهای فسادپذیر بررسی و یک مدل ریاضی برای تعیین مقادیر بهینه قیمت فروش محصول و طول دوره سفارش ارائه شد. همچنین، از آنجا که در این تحقیق کالاهای فسادپذیرند، هزینه جایگزینی برای کالاهای فسادشده هم

در نظر گرفته شد؛ که در آن کالاهای فسادشده اسقاط می‌شوند و به جای آن‌ها کالای سالم جایگزین می‌شود. سپس، تقعر تابع سود کل اثبات و روش حلی برای به‌دست‌آوردن جواب بهینه ارائه شد. برای نشان‌دادن کاربردی بودن مدل و روش حل ارائه‌شده مثال عددی بیان شد و تحلیل حساسیت انجام گرفت.



## REFERENCES

1. Polatoglu, L. H. (1991). "Optimal order quantity and pricing decisions in single-period inventory systems." *International Journal of Production Economics*, 23, 175-185.
2. Chen, F. Y., Wang, T., and Xu, T. Z. (2005). "Integrated inventory replenishment and temporal shipment consolidation: A comparison of quantity-based and time-based models." *Annals of Operations Research*, 135, 197-210.
3. Sajadieh, M. S. and Jokar, M. R. A. (2009). "Optimizing shipment, ordering and pricing policies in a two-stage supply chain with price-sensitive demand." *Transportation Research-Part E*, 45, 564-571.
4. Huang, Y., Huang, G. Q., and Newman, S. T. (2011). "Coordinating pricing and inventory decisions in a multi-level supply chain: A game theoretic approach." *Transportation Research Part E*, 47, 115-129.
5. Bahari-Kashani, H. (1989). "Replenishment schedule for deteriorating items with time-proportional demand." *Journal of the Operational Research Society*, 40, 75-81.
6. Chung, K. J. and Lin, C. N. (2001). "Optimal inventory replenishment models for deteriorating items taking account of time discounting." *Computer & Operations Research*, 28, 67-83.
7. Rau, H., Wu, M. Y., and Wee, H. M. (2004). "Deteriorating item inventory model with shortage due to supplier in an integrated supply chain." *International Journal of Systems Science*, 35:5, 293-303.
8. Hou, K. L. (2006). "An inventory model for deteriorating items with stock-dependent consumption rate and shortage under inflation and time discounting." *European Journal of Operation Research*, 168, 463-474.
9. Lee, C. F. and Chung, C. P. (2012). "An inventory model for deteriorating items in a supply chain with system dynamics analysis." *Procedia- Social and Behavioral Sciences*, 40, 41-51.
10. Chung, C. J. (2013). "Investigating imperfect process and demand effects on inspection scheduling and supply chain replenishment policy." *Computer & Industrial Engineering*, 64, 31-44.
11. Wee, H. M. (1999). Deteriorating inventory model with quantity discount, pricing and partial backordering." *International Journal of Production Economics*, 59, 511-518.
12. Yang, P. C. (2004). "Pricing strategy for deteriorating items using quantity discount when demand is price sensitive." *European Journal of Operational Research*, 157, 389-397.
13. Dye, C. Y., Ouyang, L.Y., and Hsieh, T. P. (2007). "Inventory and pricing strategies for deteriorating items with shortages: A discounted cash flow approach." *Computer & Industrial Engineering*, 52, 29-40.
14. Tsao, Y. C. and Sheen, G. J. (2008). "Dynamic pricing, promotion and replenishment policies for a deteriorating item under permissible delay in payments." *Computer & Operations Research*, 35, 3562-3580.
15. Huang, C. K. (2010). "An integrated inventory model under conditions of order processing cost reduction and permissible delay in payments." *Applied Mathematical Modeling*, 34, 1352-1359.
16. Dye, C. Y. (2012). "A finite horizon deteriorating inventory model with two-phase pricing and time-varying demand and cost under trade credit financing using particle swarm optimization." *Swarm and Evolutionary Computation*, 5, 37-53.
17. Maihmi, R. and Nakhai, I. (2012). "Joint control of inventory and its pricing for non-instantaneously deteriorating items under permissible delay in payments and partial backlogging." *Mathematical and Computer Modeling*, 55, 1722-1733.
18. DehayemNodem, F. I., Kenne, J. P., and Gharbi, A. (2011). "Simultaneous control of production, repair/replacement and preventive maintenance of deteriorating manufacturing systems." *International Journal of Production Economics*, 134, 271-282.
19. Sivazlian, B. D. and Danusaputro, S. L. (1989). "Economic inventory and replacement management of a system in which components are subject to failure." *Microelectronics Reliability*, 29, 861-881.
20. Chang, C. C. (2014). "Optimum preventive maintenance policies for systems subject to random working times, replacement, and minimal repair." *Computer & Industrial Engineering*, 67, 185-194.
21. Rivera-Gomes, H., Gharbi, A., and Kenne, J. P. (2013). "Joint production and major maintenance planning policy of a manufacturing system with deteriorating quality." *International Journal of Production Economics*, 146, 575-587.
22. Khanh Nguyen, T. P., Yeung, Th. G., and Castanier, B. (2013). "Optimal maintenance and replacement decisions under technological change with consideration of spare parts inventories." *International Journal of Production Economics*, 143, 472-477.
23. Jain, M. and Gupta, R. (2013). "Optimal replacement policy for a repairable system with multiple vacations and imperfect fault coverage." *Computers & Industrial Engineering*, 66, 710-719.
24. Cheng, G. Q. and Li, L. (2014). "An optimal replacement policy for a degenerative system with two-types of failure states." *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 261, 139-145.