

مدل کنترل موجودی تصادفی چندمحصولی با در نظر گرفتن ضایعات تحت سیاست پرداخت معوقه

عطاالله طالعی زاده^{۱*} و محمد حسنی^۲

۱. استادیار دانشکده مهندسی صنایع دانشگاه تهران

۲. دانشجوی کارشناسی ارشد دانشکده مهندسی صنایع دانشگاه آزاد اسلامی، واحد تهران جنوب

(تاریخ دریافت ۹۳/۰۸/۰۷ - تاریخ دریافت روایت اصلاح شده ۹۳/۱۲/۱۹ - تاریخ تصویب ۹۳/۱۲/۲۷)

چکیده

مدل مقدار تولید اقتصادی، یکی از مدل‌های کلاسیک کنترل موجودی است که به‌طور گسترده به کار می‌رود. این مدل فرضیه‌های متفاوتی دارد که استفاده از آن را در شرایط واقعی محدود می‌کند. در اغلب پژوهش‌ها فرض بر این است که کیفیت تمامی قطعات تولیدی، کامل و مناسب است، اما در عمل ممکن است در نتیجه عوامل مختلف مانند کیفیت پایین تولید، مواد اولیه معیوب و...، قطعاتی نامرغوب تولید شوند. از سوی دیگر، در سیستم‌های کنترل موجودی کلاسیک، همواره فرض بر این است که تولیدکننده به محض دریافت کالا هزینه آن را پرداخت می‌کند؛ در حالی که ممکن است تأمین‌کننده به‌عنوان یک سیاست تشویقی برای جذب مشتریان بیشتر، برای بازپرداخت بدهی، مهلت معینی به تولیدکننده بدهد. در این مقاله، یک مدل مقدار تولید اقتصادی چندکالایی، با در نظر گرفتن تولید کالای معیوب، دوباره کاری و سیاست پرداخت معوقه در شرایط ظرفیت محدود تولید، توسعه داده می‌شود. در این پژوهش با استفاده از روشی جبری به حل مدل پرداخته می‌شود. هدف اصلی تعیین حجم تولید بهینه، حجم کمبود بهینه و طول سیکل بهینه است؛ به نحوی که هزینه تولیدکننده مینیمم شود.

واژه‌های کلیدی: اقلام معیوب، پرداخت معوقه، دوباره کاری، کنترل موجودی.

مقدمه

دلیل فرایند دوباره کاری^۱ در تعیین میزان بهینه انباشته، بررسی و مقدار بهینه از طریق کمینه کردن هزینه‌های کل سیستم ارائه می‌شود. از سوی دیگر، یکی از فرضیه‌های اصلی در سیستم‌های کنترل موجودی کلاسیک، همواره این بوده است که تولیدکننده به محض دریافت کالا، پرداخت هزینه خرید کالا را پرداخت کند؛ در حالی که در واقعیت ممکن است تأمین‌کننده، برای پرداخت هزینه، به تولیدکننده مهلت معینی بدهد. این شیوه که به معامله اعتباری^۲ معروف است - به‌عنوان سیاست تشویقی برای جذب مشتریان بیشتر، از سوی تأمین‌کنندگان اعمال می‌شود. نکته شایان توجه این است که تولیدکننده می‌تواند در هر زمان از دوره اعتباری تخصیص یافته‌اش، بدهی خود را بازپرداخت کند و هیچ‌گونه بهره اضافه نپردازد. به عبارت دیگر، در سیستم کنترل موجودی در خرید اعتباری،

یکی از مدل‌های پرکاربرد کنترل موجودی، مدل مقدار تولید اقتصادی است. فرض‌هایی که در این مدل به کار رفته است، کاربرد آن‌ها را برای شرایط کنونی سیستم‌های تولیدی محدود می‌کند. پس این روش‌ها باید تا حد امکان کنار گذاشته شوند. در اغلب پژوهش‌ها فرض بر این است که کیفیت تمامی قطعات تولیدی، کامل و مناسب است، اما در عمل ممکن است در نتیجه عوامل مختلف مانند کیفیت پایین تولید، مواد اولیه معیوب و...، قطعات نامرغوبی تولید شوند. در سال‌های اخیر، مسئله میزان تولید اقتصادی با در نظر گرفتن دوباره کاری قطعات معیوب، از سوی پژوهشگران بررسی شده است. در مطالعه حاضر فرض شده است که تمامی قطعات، پس از دوباره کاری به قطعه سالم تبدیل شده‌اند و هیچ‌گونه ضایعاتی تولید نمی‌شود. همچنین تأثیر تولید کالای معیوب و هزینه ایجاد شده به-

مدل‌هایشان فرض مجازبودن کمبود را بررسی کردند و بدین ترتیب، مدل اولیه هریس (۱۹۱۵) را بهبود بخشیدند. دارویچ [۳] مدل‌های کلاسیک مقدار تولید اقتصادی را با مجازدانستن کمبود موجودی و هزینه آماده‌سازی متغیر ارائه کرد و سپس به کمک مشتق‌گیری از تابع هدف، مقادیر بهینه را به دست آورد. فرد پیشگام در زمینه تلفیق مسائل کنترل کیفیت و کنترل موجودی پرتوس [۴] است. در نظر گرفتن کیفیت محصول در مسائل کنترل موجودی، با ارائه این مقاله مورد توجه پژوهشگران واقع شد. گروستران و وانگ [۵] مدلی احتمالی برای سیستم موجودی چندمحصولی و چندمرحله‌ای با محدودیت ظرفیت تولید را با به کارگیری ارزش زمانی پول ارائه دادند و هدف مدل را حداقل کردن مجموع هزینه‌ها بیان کردند. آن‌ها برای حل مدل، از برنامه‌ریزی پویا و به‌عنوان ابزار ساخت مدل، از تبدیل لاپلاس و تجزیه و تحلیل ورودی-خروجی استفاده کردند. روزنلات و لی [۶] با بررسی مدل تولید و محصول‌های معیوب به این نتیجه رسیدند که در نظر گرفتن محصول‌های معیوب سبب کاهش اندازه دسته تولید می‌شود. آن‌ها همچنین در مقاله دیگری، با این فرض که قطعات ممکن است به وضعیت خارج از کنترل وارد شوند، مقوله بازرسی قطعات را مطرح ساختند. طالعی‌زاده و همکاران [۷] به توسعه مدل مقدار تولید اقتصادی پرداختند. آن‌ها تولید ضایعات را در مدل خود در نظر گرفتند؛ بدین صورت که پس از پایان فرایند دوباره‌کاری، همچنان ضایعات وجود دارد و سبب افزایش هزینه‌ها می‌شود. چان و همکاران [۸] مدل مقدار تولید اقتصادی را با در نظر گرفتن فروش بخشی از قطعات معیوب با قیمت کمتر، بخشی به صورت دوباره‌کاری و بخشی به صورت ضایعات گسترش دادند. آن‌ها برای فروش قطعات معیوب با قیمت کمتر، سه حالت «فروش به محض شناسایی توسط عملیات بازرسی»، «در پایان زمان تولید به صورت یک دسته» و «در پایان زمان سیکل به صورت یکجا» را در نظر گرفتند. پژوهش سلامه و جابر [۹] اولین مدلی بود که مدل مقدار سفارش اقتصادی را برای خریدار دریافت‌کننده کالای

زمانی که سفارش صورت می‌گیرد، تأمین‌کننده به اعتبار تولیدکننده به وی اجازه می‌دهد که هزینه خرید را با تأخیر پرداخت کند. معامله اعتباری، هزینه‌های سیستم موجودی را تغییر می‌دهد و روابط کلاسیک، دیگر در این سیستم‌ها صادق نیست؛ بنابراین، هزینه‌های هر سیستم موجودی و سیاست بهینه آن‌ها باید دوباره محاسبه شوند. پس تعدادی از فرض‌های ساده‌کننده سیستم‌های کنترل موجودی کلاسیک کنار گذاشته می‌شوند؛ بدین شکل که برای درآمد ناشی از فروش محصول‌هایی که هنوز پول خرید آن‌ها پرداخت نشده است و در بانک نگهداری می‌شود، سود در نظر گرفته می‌شود. همچنین لزومی ندارد که زمان پرداخت هزینه معوقه، پیش از پایان همان سیکل باشد. از سوی دیگر، در شرایطی که هزینه خرید، پرداخت نشده است، نباید برای کالاهای داخل انبار، هزینه‌های سرمایه را لحاظ کرد. ضمن آنکه نرخ هزینه سرمایه، بیش از نرخ بهره دریافتی حاصل از فروش کالاهایی است که هنوز پول خرید آن‌ها پرداخت نشده است. بدین ترتیب، اهداف پژوهش حاضر عبارت‌اند از: ۱. ارائه مدل ریاضی برای یک سیستم کنترل موجودی چندکالایی با فرایند دوباره‌کاری در سیاست خرید اعتباری، به نحوی که هزینه تولیدکننده حداقل شود؛ ۲. تعیین حجم تولید بهینه؛ ۳. تعیین حجم کمبود بهینه و ۴. تعیین طول دوره بهینه. مدل‌های کلاسیک مقدار سفارش اقتصادی و مقدار تولید اقتصادی، به‌طور گسترده در زمینه‌های مختلف برای کنترل موجودی به کار می‌روند. از سویی این مدل‌ها شرایط و فرضیه‌هایی دارند که در شرایط واقعی کمتر مورد قبول‌اند و به همین دلیل برای کاربردهای متفاوت، باید از جنبه‌های مختلفی توسعه داده شوند. یکی از مهم‌ترین تعمیم‌ها در مدل‌های کنترل موجودی، افزودن مباحث کنترل کیفیت^۳ به آن‌هاست. مدل‌های کلاسیک موجودی را ابتدا هریس [۱] در سال ۱۹۱۵ مطرح کرد. در این مدل‌ها، سفارش‌ها به صورت آنی دریافت می‌شدند، کمبود موجودی مطرح نبود و همه پارامترها قطعی در نظر گرفته شده بودند. هادلی و ویتن [۲] چندین مدل قطعی را گسترش دادند. آن‌ها در

ارتباط است و تأمین کننده این اختیار را به تولیدکننده می دهد تا هزینه های محصول های سفارش داده شده را با تأخیر پرداخت کند. از لحاظ موقعیت زمانی نیز زمان پرداخت معوقه (M) شامل دو حالت است: ۱. زمان پرداخت معوقه در بازه ای از زمان قرار بگیرد که کمبود وجود دارد؛ ۲. زمان پرداخت معوقه در بازه ای از زمان قرار بگیرد که کمبود وجود ندارد.

در این مقاله، برای نخستین بار مدل کنترل موجودی مقدار تولید اقتصادی چندمحصولی و تک ماشینه- که در آن، پس از تولید کالاهای معیوب، روی این کالاها دوباره کاری صورت می گیرد و همه کالاهای در نهایت به کالاهای با کیفیت تبدیل می شوند- با سیاست پرداخت معوقه توسعه داده می شود. از نکات دیگر حائز اهمیت، در نظر گرفتن محدودیت ظرفیت در مدل مدنظر است که از در دست بودن تنها یک ماشین سرچشمه می گیرد. شایان ذکر است که می توان تمامی سیستم های تولیدی را که در آن ها چند محصول از طریق یک ماشین تولید می شود، از طریق مدل توسعه داده شده در این مقاله بهینه ساخت. محدودیت ظرفیت در تمامی سیستم های تولید- که نشئت گرفته از تعداد ماشین آلات در دسترس است- نیاز به تولید بهینه برای هر محصول و زمان بندی سیکل های موجودی را بر اساس مدل توسعه داده شده بیش از پیش ضروری می سازد.

در ادامه، پس از تعریف مسئله و مدل سازی آن، روش حل مربوط به هر حالت ارائه می شود. در بخش بعدی، مثال عددی و در بخش آخر نیز جمع بندی و نتیجه گیری ارائه می شود.

مدل سازی ریاضی

نمادگذاری:

پارامترها

P_i : نرخ تولید i امین کالا برای هر دوره

d_i : نرخ تقاضا برای i امین کالا برای هر دوره

K_i : هزینه راه اندازی برای تولید i امین کالا

معیوب ارائه داد. طالعی زاده و همکاران [۱۰] به توسعه یک مدل کنترل موجودی با وقفه در تولید پرداختند. آن ها یک مدل مقدار تولید اقتصادی، با وقفه در تولید، ضایعات و دوباره کاری را در نظر گرفتند. سارکر و همکاران [۱۱] مدلی را با در نظر گرفتن دوباره کاری در یک سیستم تولید تک مرحله ای و کمبود برنامه ریزی شده توسعه دادند و با در نظر گرفتن میزان ضایعات تصادفی، به توسعه یک مدل کنترل موجودی پرداختند. خرید اعتباری، برای نخستین بار از سوی هالی و هیگنز [۱۲] توسعه داده شد. بعد از آنان چپمن و همکاران [۱۳] سیاست بازپرسازی بهینه ای را در شرایط متفاوتی مانند مدل کلاسیک مقدار سفارش اقتصادی، پرداخت هزینه زمانی که کالاها در دوره اعتباری به فروش می روند و پرداخت بعضی از کالاها بعد از یک دوره مشخص، به دست آوردند. آباد و جاگی [۱۴] با فرض برابری بهره دریافتی و پرداختی، مدل فروشنده- خریدار را در شرایط شراکت داشتن یا نداشتن فروشنده و خریدار توسعه دادند و سیاستی بهینه ای را برای خریدار و فروشنده به دست آوردند. از سوی دیگر، در زمینه برابری هزینه های خرید و فروش، چانگ و هانگ [۱۵] مدل گویال (۱۹۸۵) را در شرایطی توسعه دادند که خریدار مقداری از کل هزینه خرید را در انتهای دوره اعتباری به فروشنده می دهد و مابقی هزینه را از طریق وام بانکی به فروشنده پرداخت می کند. چانگ و هانگ [۱۶] مدل گویال (۱۹۸۵) را در شرایطی برای مدل مقدار سفارش اقتصادی توسعه دادند که درصدی از کالاها معیوب باشند. همچنین در شرایطی که دوره اعتباری وابسته به دو دوره باشد و بهره پرداختی پیشنهادی بانک، تصاعدی باشد. مطالعه خوجی و مهرز [۱۷] را می توان اولین پژوهشی در نظر گرفت که امکان پرداخت معوقه را وابسته به سطح سفارش کرده است. در این مقاله، تأمین کننده تنها در صورتی به خریدار امکان پرداخت معوقه را می دهد که سطح سفارش از میزان معینی بالاتر باشد. چارچوب اصلی مسئله مورد بررسی در این تحقیق بدین شرح است که تولیدکننده برای سفارش یک دسته از محصول های خود با یک تأمین کننده در

۶. تابع هدف از نوع هزینه است و برای تولیدکننده در نظر گرفته می‌شود.

۱. هزینه‌های مشترک سیستم موجودی

سیستم تولید موجودی، از الگوی شکل ۱ پیروی می‌کند. طول سیکل برابر مجموع زمان تولید، دوباره‌کاری، دوره‌ای که تولید صورت نمی‌گیرد، ولی موجودی مثبت است و دوره کمبود است؛ پس:

$$T = \sum_{k=1}^5 t_i^k \quad (1)$$

از آنجاکه تمام محصول‌ها با یک دستگاه و ظرفیت محدود تولید می‌شوند، طول دوره همه محصول‌ها با هم برابر است.

براساس شکل ۱ داریم:

$$t_i^1 = \frac{\beta_i}{P_i - d_i - \lambda_i}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (2)$$

$$t_i^2 = \frac{I_i}{P_i - d_i - \lambda_i} \quad (3)$$

$$t_i^3 = \frac{X_i Q_i}{P_i^1} = \frac{d_i Q_i}{P_i^1 P_i} \quad (4)$$

$$t_i^4 = \frac{I_i^{\max}}{\lambda_i} \quad (5)$$

$$t_i^5 = \frac{B_i}{\lambda_i} \quad (6)$$

$$I_i = (P_i - d_i - \lambda_i) \frac{Q_i}{P_i} - B_i \quad (7)$$

$$I_i^{\max} = I_i + (P_i^1 - \lambda_i) t_i^3 = Q_i \left(1 - \frac{\lambda_i}{P_i} - \frac{d_i \lambda_i}{P_i^1 P_i} \right) - B_i \quad (8)$$

و درنهایت:

$$T = t_i^1 + t_i^2 + t_i^3 + t_i^4 + t_i^5 = \frac{Q_i}{\lambda_i} \quad (9)$$

همچنین خواهیم داشت:

$$t_a^i \equiv t_i^1 \quad (10)$$

$$t_b^i \equiv t_i^1 + t_i^2 = \frac{Q_i}{P_i} \quad (11)$$

$$t_c^i \equiv t_i^1 + t_i^2 + t_i^3 = \frac{Q_i}{P_i} + \frac{X_i Q_i}{P_i^1} \quad (12)$$

$$t_d^i \equiv t_i^1 + t_i^2 + t_i^3 + t_i^4 = \frac{Q_i - B_i}{\lambda_i} \quad (13)$$

C_i : هزینه خرید هر واحد کالای خام i ام

v_i : هزینه تولید برای هر واحد از i امین کالا شامل

هزینه خرید و هزینه بازرسی ($C_i > v_i$)

S_i : قیمت فروش هر واحد از کالای i ام

M : زمان پرداخت معوقه که خریدار اعلام می‌کند

b_i : هزینه نگهداری هر واحد از کالای i ام به‌استثنای

بهره دریافتی

X_i : درصد تولید i امین کالای معیوب تولیدشده

d_i : نرخ تولید i امین کالای معیوب تولیدشده در

سیستم تولید: $d_i = P_i X_i$

P_i^1 : نرخ دوباره‌کاری برای i امین کالای معیوب

C_i^R : هزینه دوباره‌کاری برای i امین کالای معیوب

Q_i : میزان بسته تولید برای i امین کالا در هر دوره

T : طول دوره تولید

I_i : بالاترین سطح موجودی در دست، زمانی که فرایند

تولید تمام می‌شود

I_i^{\max} : بالاترین سطح موجودی در دست، زمانی که

فرایند دوباره‌کاری تمام می‌شود

I_e : نرخ بهره دریافتی در یک سیکل

I_c : نرخ بهره پرداختی در یک سیکل

SE_i : زمان لازم برای راه‌اندازی ماشین برای کالای i ام

N : تعداد دوره‌ها در یک سال

$TC_j(T, B)$: هزینه کل موجودی برای یک دوره در سال

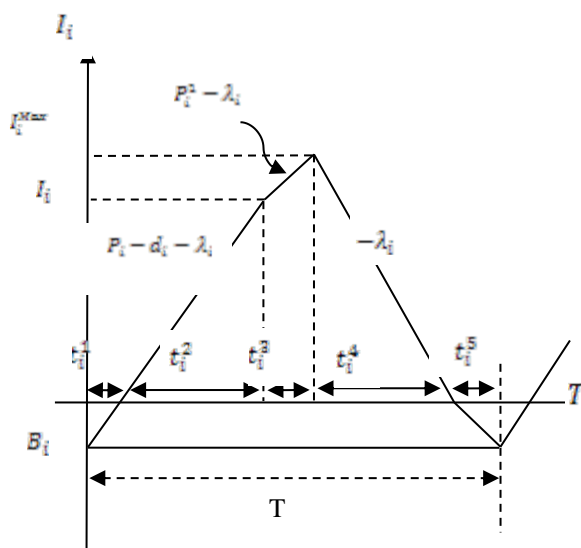
برای حالت j ام ($j=1, 2, 3$)

$TCU_j(T, B)$: هزینه سالیانه کل موجودی برای حالت j

ام ($j=1, 2, 3$)

مفروضات

۱. نرخ تولید کالای باکیفیت، بزرگ‌تر از نرخ تقاضاست.
۲. همه کالاهای معیوب، پس از فرایند دوباره‌کاری به کالای باکیفیت تبدیل می‌شوند.
۳. طول دوره سیکل برای همه کالاها یکسان است.
۴. کل کمبود، پس‌افت می‌شود.
۵. سیاست تشویقی لحاظ‌شده در این مدل، خرید اعتباری است.



شکل ۱. نمایش سیستم موجودی با در نظر گرفتن دوباره کاری

۱. $M < t_i^a$: در این حالت، تولیدکننده درآمدی از لحظه ۰ تا M به دست می آورد و بهره I_e را در این مدت به ازای هر دلار در سال دریافت می کند؛ بنابراین، بهره دریافتی در هر دوره برابر است با:

$$s_i I_e \left[\frac{\lambda_i (M_i)^2}{2} + \frac{(P_i - d_i - \lambda_i) M_i^2}{2} \right] = s_i I_e \frac{(P_i - d_i) M_i^2}{2} \quad (19)$$

از سوی دیگر، تولیدکننده در زمان M درآمد حاصل از همه واحدهای فروخته شده را می پردازد، سود آن را نگه می دارد و پرداخت بهره بابت آیت‌های فروخته شده را بعد از زمان M آغاز می کند.

بنابراین، بهره پرداختی در هر دوره برابر است با:

$$v_i I_e \left[\frac{(P_i - d_i - \lambda_i)(t_i^a - M_i)^2}{2} + \frac{\lambda_i (t_i^a - M_i)^2}{2} \right] = v_i I_e \left[\frac{(P_i - d_i) B_i^2}{2\lambda_i} + \frac{(Q_i)^2}{2\lambda_i} - \frac{Q_i B_i}{\lambda_i} - Q_i M_i + \frac{(P_i - d_i) M_i^2}{2} \right] \quad (20)$$

۲. $t_i^a \leq M < t_i^d$: در این حالت، بهره دریافتی در هر

دوره عبارت است از:

$$s_i I_e \left[\frac{\lambda_i (M_i)^2}{2} + \frac{[(M_i - t_i^a) + M_i] B_i}{2} \right] = s_i I_e \left[\frac{\lambda_i (M_i)^2}{2} + M_i B_i - \frac{(B_i)^2}{2(P_i - d_i - \lambda_i)} \right] \quad (21)$$

مؤلفه های مشترک هزینه های سیستم موجودی در هر دوره عبارت‌اند از:

• هزینه تولید محصول

$$C_i Q_i \quad (14)$$

• هزینه تعمیر کالاهای معیوب

$$C_i^R X_i Q_i \quad (15)$$

• هزینه ثابت راه اندازی

$$K_i \quad (16)$$

• هزینه نگهداری کالاها، اعم از سالم و معیوب

$$\frac{h_i}{2\lambda_i} \left(\frac{1 - X_i}{1 - X_i - \frac{\lambda_i}{P_i}} \right) (B_i)^2 - \frac{h_i}{\lambda_i} Q_i B_i + \frac{h_i}{2\lambda_i} \left(1 - \frac{\lambda_i}{P_i} \right) (Q_i)^2 \quad (17)$$

• هزینه کمبود پس‌افت

$$\frac{b_i (B_i)^2}{2} \left(\frac{1}{P_i(1 - X_i) - \lambda_i} + \frac{1}{\lambda_i} \right) \quad (18)$$

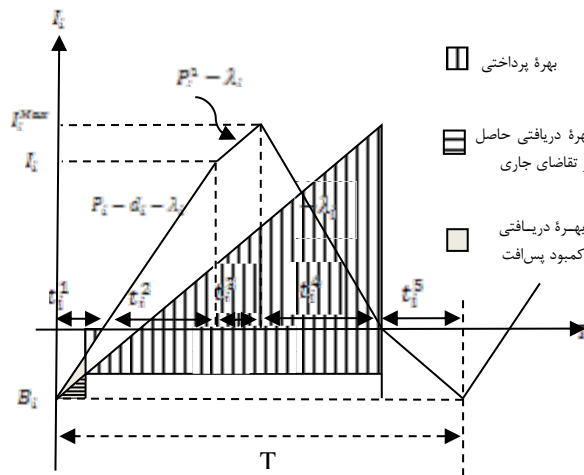
۲. بهره دریافتی و بهره پرداختی

بر اساس ارزش M ، t_i^a و t_i^d دو حالت کلی را می توان در نظر گرفت:

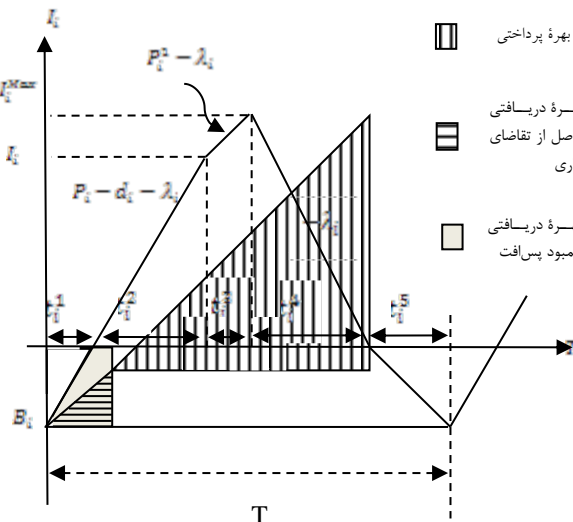
۱. $M < t_i^a$

۲. $t_i^a \leq M < t_i^d$

این دو حالت، در شکل های ۲ و ۳ نشان داده شده‌اند.



شکل ۲. نمودار بهره دریافتی و بهره پرداختی خریدار در حالت $M < t_a$



شکل ۳. نمودار بهره دریافتی و پرداختی خریدار در حالت $t_d \leq M < t_a$

۱. $M < t_i^a$: در این حالت، تأمین کننده به تولیدکننده این اجازه را می‌دهد که هزینه خرید مواد اولیه را در دوره کمبود پرداخت کند. با توجه به $Q_i = T \lambda_i$ و $N = \frac{1}{T}$

هزینه سالیانه تولیدکننده به صورت زیر به دست می‌آید:

$$TCU_1(T, B_i) = \frac{TC_1(T, B_i)}{T} = \lambda_i (C_i + C_i^R X_i - v_i I_c M_j) Q_i + \frac{K_i}{T} + (v_i I_c - s_i I_e) \frac{(P_i - d_i)(M_j)^2}{2T} - (h_i + v_i I_c) B_i \quad (23)$$

از سوی دیگر، بهره پرداختی در این حالت برابر است با:

$$v_i I_c \left[\frac{\lambda_i (t_i^d - M_i)^2}{2} \right] \quad (22)$$

$$= v_i I_c \left[\frac{Q_i^2}{2\lambda_i} + \frac{(B_i)^2}{2\lambda_i} + \frac{\lambda_i (M_i)^2}{2} - \frac{Q_i B_i}{\lambda_i} - M_i Q_i + M_i B_i \right]$$

با توجه به استدلال بالا، می‌توان هزینه کل موجودی در هر دوره را شامل هزینه‌های تولید، دوباره کاری، آماده سازی، نگهداری، کمبود، بهره دریافتی و بهره پرداختی تعریف کرد. با توجه به مفروضات، تابع هزینه تولیدکننده را برای هر سه حالت، جداگانه به دست می‌آوریم.

$$U_i^2 = \left[\left(\frac{1-X_i}{1-X_i-\frac{\lambda_i}{P_i}} \right) (b_i+h_i) + \left(v_i I_C + \frac{\lambda_i s_i I}{P_i \left(1-X_i-\frac{\lambda_i}{P_i} \right)} \right) \right] > 0 \quad (32)$$

$$R_i^2 = h_i \left(1 - \frac{\lambda_i}{P_i} \right) + v_i I_C > 0 \quad (33)$$

در نهایت، تابع هدف هزینه تولیدکننده برای حالت دوم به شکل زیر ارائه می شود:

$$TCU_2(T, B_i) = \sum_{i=1}^n \left[\lambda_i G_i + \frac{W_i^2 (v_i I_C - s_i I_e) \lambda_i M_j}{U_i^2} \right] + \sum_{i=1}^n \frac{U_i^2}{2\lambda_i T} \left[\left(B_i - \frac{W_i^2 \lambda_i T}{U_i^2} \right) + \frac{(v_i I_C - s_i I_e) \lambda_i M_j}{U_i^2} \right]^2 + \sum_{i=1}^n \frac{2K_i + (v_i I_C - s_i I_e) \lambda_i (M_j)^2 \left(1 - \frac{v_i I_C - s_i I_e}{U_i^2} \right)}{2T} + \sum_{i=1}^n \frac{(R_i^2 U_i^2 - (W_i^2)^2) \lambda_i T}{2U_i^2} \quad (34)$$

۳. محدودیت ظرفیت تولید

به دلیل تولید چندین کالا توسط یک دستگاه، قطعاً با محدودیت ظرفیت تولید مواجه می شویم. برای اینکه تولید صورت گیرد، باید مجموع زمان هایی که طی آن دستگاه در حال تولید کالا است، زمان بازسازی و زمان راه اندازی دستگاه برای همه کالاها کمتر از طول دوره مشترک باشد. به عبارت دیگر:

$$\sum_{i=1}^n t_i^1 + t_i^2 + t_i^3 + \sum_{i=1}^n SE_i \leq T \quad (35)$$

با قراردادن معادله های ۲ تا ۴ در معادله ۳۵ داریم:

$$\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i (P_i^1 + X_i P_i)}{P_i P_i^1} T + \sum_{i=1}^n SE_i \leq T \quad (36)$$

و در نهایت، خواهیم داشت:

$$T \geq \frac{\sum_{i=1}^n SE_i}{\left[1 - \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i (P_i^1 + X_i P_i)}{P_i P_i^1} \right]} = T_{Min} \quad (37)$$

$$+ \frac{(B_i)^2}{2T\lambda_i} \left(\frac{1-X_i}{1-X_i-\frac{\lambda_i}{P_i}} \right) (b_i+h_i+v_i I_C) + \left[h_i \left(1 - \frac{\lambda_i}{P_i} \right) + v_i I_C \right] \frac{T\lambda_i}{2}$$

برای ساده کردن عبارات، از تغییر متغیرهای زیر استفاده

می کنیم:

$$G_i^1 = C_i + C_i^R X_i - v_i I_C M_j \quad (24)$$

$$W_i^1 = h_i + v_i I_C > 0 \quad (25)$$

$$U_i^1 = \left(\frac{1-X_i}{1-X_i-\frac{\lambda_i}{P_i}} \right) (b_i+h_i+v_i I_C) > 0 \quad (26)$$

$$R_i^1 = h_i \left(1 - \frac{\lambda_i}{P_i} \right) + v_i I_C > 0 \quad (27)$$

با در نظر گرفتن چندکالایی بودن تولید، تابع نهایی هزینه

تولیدکننده برای حالت اول - که $M < t_i^a$ است - به شکل زیر محاسبه می شود:

$$TCU_1(T, B_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i G_i + \sum_{i=1}^n \frac{U_i^1}{2\lambda_i T} \left(B_i - \frac{W_i^1 \lambda_i T}{U_i^1} \right)^2 + \sum_{i=1}^n \frac{2K_i + (v_i I_C - s_i I_e) (P_i - d_i) (M_j)^2}{2T} + \sum_{i=1}^n \frac{(R_i^1 U_i^1 - (W_i^1)^2) \lambda_i T}{2U_i^1} \quad (28)$$

۲. $t_i^a \leq M < t_i^d$: مانند حالت ۱ با جایگذاری

$$Q_i = T \lambda_i \text{ و } N = \frac{1}{T}$$

$$TCU_2(T, B_i) = \frac{TC_2(T, B_i)}{T} = \lambda_i (C_i + C_i^R X_i - v_i I_C M_j) Q_i + \frac{K_i}{T} + (v_i I_C - s_i I_e) \frac{\lambda_i (M_j)^2}{2T} - (h_i + v_i I_C) B_i + \frac{(B_i)^2}{2T\lambda_i} \left[\left(\frac{1-X_i}{1-X_i-\frac{\lambda_i}{P_i}} \right) (b_i+h_i) + \left(v_i I_C + \frac{\lambda_i s_i I}{P_i \left(1-X_i-\frac{\lambda_i}{P_i} \right)} \right) \right] + (v_i I_C - s_i I_e) \frac{M_j B_i}{T} + \left[h_i \left(1 - \frac{\lambda_i}{P_i} \right) + v_i I_C \right] \frac{T\lambda_i}{2} \quad (29)$$

همچنین می توان برای ساده سازی فرض کرد:

$$G_i^2 = C_i + C_i^R X_i - v_i I_C M_j \quad (30)$$

$$W_i^2 = h_i + v_i I_C > 0 \quad (31)$$

روش حل

در این قسمت، برای پیدا کردن طول سیکل، میزان کمبود و در نهایت، حجم تولید بهینه، از عملیات‌های ساده جبری و نامعادله میانگین هندسی - حسابی^۴ استفاده می‌کنیم. این نامساوی نشان می‌دهد که اگر $a > 0$ و $b > 0$ ، آن‌گاه $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ تساوی در این نابرابری، زمانی اتفاق می‌افتد که $a = b$ باشد.

۱. $M < t_i^a$ برای مینیمم کردن $TCU_1(T, B_i)$ در

معادله ۲۹ اجازه می‌دهیم:

$$\left(B_i - \frac{W_i^1 \lambda_i T}{U_i^1} \right)^2 = 0 \quad (۴۲)$$

بنابراین،

$$B_i = \frac{W_i^1 \lambda_i T}{U_i^1} \quad (۴۳)$$

با جایگذاری معادله ۳۹ در معادله ۲۸ تابع هزینه

به صورت زیر درمی‌آید:

$$TCU_1(T, B_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i G_i + \sum_{i=1}^n \frac{2K_i + (v_i I_c - s_i I_e)(P_i - d_i)(M_j)^2}{2T} + \sum_{i=1}^n \frac{(R_i^1 U_i^1 - (W_i^1)^2) \lambda_i T}{2U_i^1} \quad (۴۰)$$

لم ۱. تابع $R_i^1 U_i^1 - (W_i^1)^2$ مثبت است.

اثبات: اثبات لم ۱ در پیوست آمده است.

با توجه به لم ۱، هنگامی که

$2K_i + (v_i I_c - s_i I_e)(P_i - d_i)(M_j)^2$ مثبت است، سه شرط بارون در سال ۲۰۱۰ تأیید می‌شود؛ بنابراین، می‌توان از نامعادله میانگین حسابی - هندسی، به عنوان یک روش بهینه‌سازی برای به حداقل رساندن هزینه کل موجودی استفاده کرد.

$$TCU_1(T, B_i) \geq \sum_{i=1}^n \lambda_i G_i \quad (۴۱)$$

$$+ \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n \frac{2K_i + (v_i I_c - s_i I_e)(P_i - d_i)(M_j)^2}{2T} \right) \left(\sum_{i=1}^n \frac{(R_i^1 U_i^1 - (W_i^1)^2) \lambda_i T}{2U_i^1} \right)}$$

برای مینیمم کردن تابع هزینه، این نابرابری باید به صورت تساوی برقرار شود و این تساوی زمانی اتفاق می‌افتد که:

$$\sum_{i=1}^n \frac{2K_i + (v_i I_c - s_i I_e)(P_i - d_i)(M_j)^2}{2T} = \sum_{i=1}^n \frac{(R_i^1 U_i^1 - (W_i^1)^2) \lambda_i T}{2U_i^1} \quad (۴۲)$$

در نتیجه داریم:

$$T = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n 2K_i + (v_i I_c - s_i I_e)(P_i - d_i)(M_j)^2}{\sum_{i=1}^n \frac{(R_i^1 U_i^1 - (W_i^1)^2) \lambda_i}{U_i^1}}} \quad (۴۳)$$

برای اطمینان از اینکه $M < t_i^a$ است، با استفاده از $t_a \cong t_1$ معادله ۲، $d = PX$ و $B_i = \frac{W_i^1 \lambda_i T}{U_i^1}$ خواهیم

داشت $T > \frac{M_i U_i^1 (P_i - d_i - \lambda_i)}{W_i^1 \lambda_i}$ و با جایگذاری معادله ۴۳

در این نامعادله به این نتیجه می‌رسیم که اگر و تنها اگر $\sum_{i=1}^n 2K_i > \Delta_i^1$ باشد، $M < t_i^a$ است؛ به نحوی که Δ_i^1

به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\Delta_i^1 = \left(\frac{M_i U_i^1}{W_i^1 \lambda_i} \right)^2 (P_i - d_i - \lambda_i)^2 \left[\sum_{i=1}^n \frac{(R_i^1 U_i^1 - (W_i^1)^2) \lambda_i}{U_i^1} \right] - \sum_{i=1}^n (v_i I_c - s_i I_e)(P_i - d_i)(M_j)^2 \quad (۴۴)$$

از این رو، T از معادله ۴۳ و B_i از معادله ۳۹ به دست می‌آیند. در نتیجه، مینیمم هزینه تولیدکننده، از معادله زیر محاسبه می‌شود:

$$TCU_1(T, B_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i G_i \quad (۴۵)$$

$$+ \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n 2K_i + (v_i I_c - s_i I_e)(P_i - d_i)(M_j)^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n \frac{(R_i^1 U_i^1 - (W_i^1)^2) \lambda_i}{U_i^1} \right)}$$

درمقابل، اگر $\sum_{i=1}^n 2K_i \leq \Delta_i^1$ باشد، برای هر

$$T_1 > T_2 > \frac{M_i U_i^1 (P_i - d_i - \lambda_i)}{W_i^1 \lambda_i} > 0$$

$$TCU_1(T_2) - TCU_1(T_1) \geq 0$$

بنابراین، تابع هزینه در این حالت، یک تابع اکیداً صعودی در بازه $\left(\frac{M_i U_i^1 (P_i - d_i - \lambda_i)}{W_i^1 \lambda_i}, \infty \right)$ است و مینیمم

ندارد.

$$TCU_2(T, B_i) \geq \quad (49)$$

$$\sum_{i=1}^n \left[\lambda_i G_i + \frac{W_i^2 (v_i I_c - s_i I_e) \lambda_i M_j}{U_i^2} \right] + \left(\frac{\sum_{i=1}^n \frac{2K_i + (v_i I_c - s_i I_e) \lambda_i (M_j)^2 \left(1 - \frac{v_i I_c - s_i I_e}{U_i^2}\right)}{T}}{\sum_{i=1}^n \frac{(R_i^2 U_i^2 - (W_i^2)^2) \lambda_i T}{U_i^2}} \right)$$

و تساوی زمانی رخ می دهد که:

$$\sum_{i=1}^n \frac{2K_i + (v_i I_c - s_i I_e) \lambda_i (M_j)^2 \left(1 - \frac{v_i I_c - s_i I_e}{U_i^2}\right)}{T} = \sum_{i=1}^n \frac{(R_i^2 U_i^2 - (W_i^2)^2) \lambda_i T}{U_i^2} \quad (50)$$

در نتیجه داریم:

$$(51)$$

$$T = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \frac{2K_i + (v_i I_c - s_i I_e) \lambda_i (M_j)^2 \left(1 - \frac{v_i I_c - s_i I_e}{U_i^2}\right)}{\sum_{i=1}^n \frac{(R_i^2 U_i^2 - (W_i^2)^2) \lambda_i}{U_i^2}}}$$

برای اطمینان از اینکه $t_i^a \leq M < t_i^d$ است، با استفاده

از $t_d \equiv t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = \frac{T_2 \lambda_i - B_i}{\lambda_i}$ ، $t_a \equiv t_1$ معادله ۲،

خواهیم $B_i = \frac{W_i^2 \lambda_i T}{U_i^2} - \frac{(v_i I_c - s_i I_e) \lambda_i M_j}{U_i^2}$ و $d = PX$

داشت:

$$\frac{\lambda_i M_j [U_i^2 - (v_i I_c - s_i I_e)]}{\lambda_i (U_i^2 - W_i^2)} < T \quad (52)$$

$$\leq \frac{(P_i - d_i - \lambda_i) M_i U_i^2 + (v_i I_c - s_i I_e) \lambda_i M_i}{W_i^2 \lambda_i}$$

و با جایگذاری معادله ۵۱ در نامعادله ۵۲ به این نتیجه

می رسیم که اگر و تنها اگر $\Delta_i^2 < \sum_{i=1}^n 2K_i \leq \Delta_i^3$ باشد،

وقتی $t_i^a \leq M < t_i^d$ است که Δ_i^2 و Δ_i^3 به صورت زیر

بیان شوند:

لم ۲.۱. اگر $\sum_{i=1}^n 2K_i > \Delta_i^1$ باشد، مقدار

به دست آمده T از معادله ۴۳، مقدار بهینه دوره سیکل است که تابع هزینه را مینیمم می کند.

۲. اگر $\sum_{i=1}^n 2K_i \leq \Delta_i^1$ باشد، مقدار بهینه ای برای T

وجود ندارد که تابع هزینه را مینیمم کند.

۲. $t_i^a \leq M < t_i^d$: مانند حالت اول برای مینیمم-

کردن $TCU_2(T, B_i)$ در معادله ۳۴ فرض کنید:

$$\left[\left(B_i - \frac{W_i^2 \lambda_i T}{U_i^2} \right) + \frac{(v_i I_c - s_i I_e) \lambda_i M_j}{U_i^2} \right]^2 = 0 \quad (46)$$

در نتیجه:

$$B_i = \frac{W_i^2 \lambda_i T}{U_i^2} - \frac{(v_i I_c - s_i I_e) \lambda_i M_j}{U_i^2} \quad (47)$$

حال با جایگذاری معادله ۴۶ در معادله ۳۴ تابع هزینه

به صورت زیر حاصل می شود:

$$TCU_2(T, B_i) = \sum_{i=1}^n \left[\lambda_i G_i + \frac{W_i^2 (v_i I_c - s_i I_e) \lambda_i M_j}{U_i^2} \right] + \sum_{i=1}^n \frac{2K_i + (v_i I_c - s_i I_e) \lambda_i (M_j)^2 \left(1 - \frac{v_i I_c - s_i I_e}{U_i^2}\right)}{2T} + \sum_{i=1}^n \frac{(R_i^2 U_i^2 - (W_i^2)^2) \lambda_i T}{2U_i^2} \quad (48)$$

لم ۳. تابع $R_i^2 U_i^2 - (W_i^2)^2$ مثبت است.

اثبات: مانند لم ۱، اثبات می شود. زمانی که برای هر i

$2K_i + (v_i I_c - s_i I_e) \lambda_i (M_j)^2 \left(1 - \frac{v_i I_c - s_i I_e}{U_i^2}\right)$ مثبت

است، مشابه استدلالی که برای حالت اول آوردیم، نامعادله

میانگین حسابی - هندسی را می توان به عنوان روش

بهینه سازی برای به حداقل رساندن هزینه کل موجودی به کار

برد.

لم ۴.۱. اگر $\Delta_i^2 < \sum_{i=1}^n 2K_i \leq \Delta_i^3$ باشد، مقدار T از معادله ۵۱، مقدار بهینه دوره سیکل است که تابع هزینه را مینیمم می کند.

۲. اگر $\sum_{i=1}^n 2K_i > \Delta_i^3$ باشد، مقدار بهینه $T_2 = \frac{(P_i - d_i - \lambda_i)M_i U_i^2 + (v_i I_C - s_i I_e)\lambda_i M_i}{W_i^2 \lambda_i}$ وجود دارد که تابع هزینه را مینیمم می کند.

۳. اگر $\sum_{i=1}^n 2K_i \leq \Delta_i^2$ باشد، مقدار بهینه ای برای T وجود ندارد که تابع هزینه را مینیمم کند.

الگوریتم حل

- مرحله ۱: اگر $\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i (P_i + X_i P_i)}{P_i P_i^1} < 1$ باشد، به مرحله ۲ می رویم. در غیر این صورت، مسئله جوابی شذنی ندارد.
- مرحله ۲: $\Delta_i^3, \Delta_i^2, \Delta_i^1$ را محاسبه می کنیم.
- مرحله ۳: تابع هزینه را برای حالت اول محاسبه می کنیم.
- اگر $\sum_{i=1}^n 2K_i > \Delta_i^1$ باشد، T_1 و B_i بهینه از طریق معادله های ۴۳ و ۳۹ به دست می آیند و مینیمم هزینه سالانه، با معادله ۴۵ محاسبه می شود. در غیر این صورت، $TCU_1(T, B_i) = \infty$ است.
- مرحله ۴: تابع هزینه را برای حالت دوم محاسبه می کنیم.

اگر $\Delta_i^2 < \sum_{i=1}^n 2K_i \leq \Delta_i^3$ باشد، مقدار T_2 و B_i بهینه از معادله های ۵۱ و ۴۷ به دست می آیند. مینیمم هزینه سالانه را با استفاده از معادله ۵۴ محاسبه می کنیم.

اگر $\sum_{i=1}^n 2K_i > \Delta_i^3$ باشد، مقدار بهینه $T_2 = \frac{(P_i - d_i - \lambda_i)M_i U_i^2 + (v_i I_C - s_i I_e)\lambda_i M_i}{W_i^2 \lambda_i}$

است که در آن، تابع هزینه مینیمم می شود. با جایگذاری T_2 در معادله ۴۷، B_i را به دست آورید و تابع هزینه را نیز از معادله ۴۸ به دست آورید.

$$\Delta_i^2 = \left[\frac{(\lambda_i M_i)^2 [U_i^2 - (v_i I_C - s_i I_e)]^2}{[\lambda_i (U_i^2 - W_i^2)]^2} \right] \sum_{i=1}^n \frac{(R_i^2 U_i^2 - (W_i^2)^2) \lambda_i}{U_i^2} - \sum_{i=1}^n (v_i I_C - s_i I_e) \lambda_i (M_i)^2 \left(1 - \frac{v_i I_C - s_i I_e}{U_i^2} \right) \quad (53)$$

$$\Delta_i^3 = \left[\frac{(P_i - d_i - \lambda_i) M_i U_i^2 + (v_i I_C - s_i I_e) \lambda_i M_i}{W_i^2 \lambda_i} \right] \sum_{i=1}^n \frac{(R_i^2 U_i^2 - (W_i^2)^2) \lambda_i}{U_i^2} - \sum_{i=1}^n (v_i I_C - s_i I_e) \lambda_i (M_i)^2 \left(1 - \frac{v_i I_C - s_i I_e}{U_i^2} \right) \quad (54)$$

بنابراین، هنگامی که $\Delta_i^2 < \sum_{i=1}^n 2K_i \leq \Delta_i^3$ است، T از معادله ۵۱ و B_i از معادله ۴۷ به دست می آید. در نتیجه، مینیمم هزینه تولیدکننده، از معادله زیر محاسبه می شود:

$$TCU_2(T, B_i) = \sum_{i=1}^n \left[\lambda_i G_i + \frac{W_i^2 (v_i I_C - s_i I_e) \lambda_i M_i}{U_i^2} \right] + \sqrt{\left[\sum_{i=1}^n 2K_i + (v_i I_C - s_i I_e) \lambda_i (M_i)^2 \left(1 - \frac{v_i I_C - s_i I_e}{U_i^2} \right) \right] \left[\sum_{i=1}^n \frac{(R_i^2 U_i^2 - (W_i^2)^2) \lambda_i}{U_i^2} \right]} \quad (55)$$

در مقابل، اگر $\sum_{i=1}^n 2K_i > \Delta_i^3$ باشد، شبیه حالت اول می توانیم نشان دهیم برای هر:

$$\frac{\lambda_i M_i [U_i^2 - (v_i I_C - s_i I_e)]}{\lambda_i (U_i^2 - W_i^2)} < T_2^1 < T_2^2 \leq \frac{(P_i - d_i - \lambda_i) M_i U_i^2 + (v_i I_C - s_i I_e) \lambda_i M_i}{W_i^2 \lambda_i} \quad (56)$$

در نتیجه، $TCU_2(T_2^2) - TCU_2(T_2^1) < 0$ پس تابع در بازه $\left[\frac{\lambda_i M_i [U_i^2 - (v_i I_C - s_i I_e)]}{\lambda_i (U_i^2 - W_i^2)}, \frac{(P_i - d_i - \lambda_i) M_i U_i^2 + (v_i I_C - s_i I_e) \lambda_i M_i}{W_i^2 \lambda_i} \right]$ اکیداً نزولی است و به ازای:

تابع هزینه $T_2 = \frac{(P_i - d_i - \lambda_i) M_i U_i^2 + (v_i I_C - s_i I_e) \lambda_i M_i}{W_i^2 \lambda_i}$

مینیمم می شود. همچنین اگر $\sum_{i=1}^n 2K_i \leq \Delta_i^2$ باشد، برای هر $T_1 < T_2$ متعلق به بازه فوق، تابع هزینه اکیداً صعودی است و T بهینه ای وجود ندارد که تابع هزینه را مینیمم کند.

$$TCU(T^*) = \text{Min} \{TCU_1(T_1^*), TCU_2(T_2^*)\} \quad \text{اما اگر } \sum_{i=1}^n 2K_i \leq \Delta_i^2 \text{ باشد، } TCU_2(T, B_i) = \infty$$

است.

مثال عددی

در این قسمت، برای مدل کنترل موجودی، سه نوع محصول را در نظر می‌گیریم و آن‌ها را حل می‌کنیم و پس از اتمام مثال عددی مدل، به تحلیل و بررسی آن می‌پردازیم. از آنجاکه مدل ارائه شده، دو حالت دارد، مثال عددی را برای دو حالت زیر در نظر می‌گیریم:

$$M < t_i^a \text{ (الف)}$$

$$t_i^a \leq M < t_i^d \text{ (ب)}$$

مقادیر در نظر گرفته شده برای پارامترها در جدول‌های ۱ و ۳ مشاهده می‌شود.

- مرحله ۵: برای حالت اول، از بین T_1^i های به دست آمده، بزرگ‌ترین آن‌ها را انتخاب می‌کنیم و آن را T_1 می‌نامیم. T_1 را با T_{Min} مقایسه می‌کنیم. اگر $T_1 > T_{Min}$ باشد، $T_1 = T^*$ و در غیر این صورت $T^* = T_{Min}$ است. سپس هزینه متناظر با T^* را به دست می‌آوریم. همین مراحل را برای حالت دوم انجام می‌دهیم.
- مرحله ۶: هزینه بهینه سیستم، مینیمم هزینه‌های حالت‌های مختلف است و T^* متناظر با T بهترین هزینه خواهد بود. با استفاده از T به دست آمده، $Q_i^* = \lambda_i T^*$ است.

جدول ۱. مقادیر در نظر گرفته شده برای پارامترها

P	P_i	P_i^1	λ_i	K_i	C_i	C_R^i	b_i	h_i
۱	۱۰۰۰۰	۶۰۰	۲۰۰۰	۷۵۰	۲	۰/۵	۰/۲۵	۰/۲
۲	۱۰۵۰۰	۶۵۰	۱۵۰۰	۷۰۰	۱/۵	۰/۶	۰/۵	۰/۱۵
۳	۱۱۰۰۰	۷۵۰	۱۰۰۰	۶۵۰	۱	۰/۷	۰/۷۵	۰/۱

جدول ۲. مقادیر در نظر گرفته شده برای پارامترها

P	M_j	I_c	I_e	S_i	v_i	SE_i	X_i
۱	۰/۰۴	۰/۰۹	۰/۰۵	۴	۱/۵	۰/۰۰۳	۰/۰۵
۲	۰/۰۴	۰/۰۹	۰/۰۵	۳	۱	۰/۰۰۴	۰/۰۷۵
۳	۰/۰۴	۰/۰۹	۰/۰۵	۲	۰/۵	۰/۰۰۵	۰/۱

با توجه به الگوریتم ارائه شده در بخش ۳ و پارامترها، با حل مدل به جواب زیر می‌رسیم:

جدول ۳. نتایج حاصل از حل مدل

P	T_{min}	T	$T^* = T_1$	Q_i	B_i	Z
۱				۵۱۵۷	۲۳۳۱	
۲	۰/۱۲۸۸	۲/۵۷۶	۲/۵۷۶	۳۶۳۸	۱۰۶۰	۹۰۴۶,۹۳
۳				۲۵۷۹	۳۷۵	

زمینه‌های مربوط به موضوع این مقاله، می‌توان گفت اگر چه مقاله‌هایی که در زمینه موضوع کنترل موجودی و تولید کالای معیوب، خرید اعتباری و تولید چندمحصول با یک ماشین بسیار متعدددند، مقاله یا مطالعه‌ای دیده نمی‌شود که هم‌زمان به مدل مقدار سفارش اقتصادی و وجود نوعی

در نتیجه، جواب بهینه سیستم موجودی در حالت اول رخ می‌دهد که $M < t_i^a$ است.

نتیجه گیری

به‌طور کلی، با توجه به پژوهش‌های پیشین و بررسی‌ها در

قدردانی

از حمایت مالی دانشگاه تهران از این پژوهش در قالب طرح پژوهشی با شماره ۳۰۱۵-۱-۰۲ قدردانی می‌شود.

پیوست

$$U_i^1 = \left(\frac{1-X_i}{1-X_i - \frac{\lambda_i}{P_i}} \right) (b_i + h_i + v_i I_C) > 0 \quad \text{می‌دانیم}$$

$$W_i^1 = h_i + v_i I_C \quad \text{و} \quad R_i^1 = h_i \left(1 - \frac{\lambda_i}{P_i} \right) + v_i I_C > 0$$

بنابراین، خواهیم داشت:

$$U_i^1 R_i^1 = \left[b_i \left(\frac{1-X_i}{1-X_i - \frac{\lambda_i}{P_i}} \right) + (h_i + v_i I_C) \left(\frac{1-X_i}{1-X_i - \frac{\lambda_i}{P_i}} \right) \right]$$

$$\times \left[h_i \left(1 - \frac{\lambda_i}{P_i} \right) + v_i I_C \right]$$

$$\geq (h_i + v_i I_C) \left(\frac{1-X_i}{1-X_i - \frac{\lambda_i}{P_i}} \right) \left(h_i + v_i I_C - h_i \frac{\lambda_i}{P_i} \right)$$

$$\geq (h_i + v_i I_C)^2 \left(\frac{(1-X_i)(P_i - \lambda_i)}{(1-X_i)P_i - \lambda_i} \right) \geq (h_i + v_i I_C)^2 = (W_i^1)^2$$

سیاست تشویقی مانند خرید اعتباری و تولید کالای معیوب و چندمحصولی بودن پرداخته باشد. در پژوهش حاضر، در یکی از مدل‌های کنترل موجودی، یعنی مدل مقدار تولید اقتصادی در شرایط پرداخت معوقه، در طول فرایند تولید، کالاهای معیوب و بدون کیفیت با نرخ ثابتی تولید می‌شوند. پس از فرایند دوباره‌کاری این کالاها به کالای باکیفیت تبدیل می‌شوند و همین امر هزینه‌های تولیدکننده را تغییر می‌دهد. در مدل‌سازی صورت گرفته، پس از به‌دست آوردن هزینه‌های اساسی در سیستم کنترل موجودی و محاسبه تابع هزینه، با استفاده از نامعادله میانگین حسابی-هندسی، طول سیکل بهینه، میزان تولید و میزان کمبود بهینه به‌دست آمد. در انتها با ذکر یک مثال عددی، حل بهینه مدل ارائه شده میسر شد. همان‌طور که در مثال عددی مشاهده شد، با افزایش نرخ بهره دریافتی، هزینه حاصل نیز کاهش می‌یابد. شایان ذکر است می‌توان تمامی سیستم‌های تولیدی را- که در آن‌ها چند محصول از طریق یک ماشین تولید می‌شود- از طریق مدل این مقاله بهینه ساخت. به‌طور طبیعی، وجود محدودیت ظرفیت در تمامی سیستم‌های تولید- که نشئت گرفته از تعداد ماشین‌آلات در دسترس است- تولید بهینه برای هر محصول و زمان‌بندی سیکل‌های موجودی را براساس مدل توسعه- داده شده بیش از پیش ضروری می‌سازد. توسعه مدل با سیاست‌های پیش‌پرداخت و همچنین در نظر گرفتن سایر سیاست‌های انگیزشی نظیر حراج و افزایش قیمت در زمان مشخص را می‌توان در پژوهش‌های آتی مطالعه کرد.

مراجع

- Harris, F. (1915). "Operations and cost (factory management series)", Chicago: A. W. Show Co.
- Hadley, G. and Whiten, T. M. (1963). "Analysis of inventory systems", Cliffs, NJ: Prentice- Hall.
- Darwish, M. A. (2008). "EPQ models with varying setup cost." *International Journal of Production Economics*, Vol. 113, No. 1, PP. 297-306.
- Porteus, E.L. (1986). "Optimal lot sizing, process quality improvement and setup cost reduction." *Operations Research*, Vol. 34, No. 5, PP. 137-44.
- Grubbstrom, R.W. and Wang, Z. (2003). "A stochastic model of multi-level/multi-stage capacity constrained production-inventory systems." *International Journal of Production Economics*, Vol. 81, No. 1, PP. 483-494.
- Rosenblatt, M.J. and Lee, H.L. (1986). "Economic production cycles with imperfect production processes." *IIE Transactions*, Vol. 18, No. 1, PP. 48-55.
- Taleizadeh, A.A., Najafi, A.A. and Niaki, S.T.A. (2010a). "Economic production quantity model with scraped items and limited production capacity." *Scientia Iranica*, Vol. 17, No. 1, PP. 58-69.

8. Chan, W.M., Ibrahim, R.N. and Lochert, P.B. (2003). "A new EPQ model: Integrating lower pricing, rework and reject situation.s" *Production Planning and Control*, Vol. 14, No. 7, PP. 588–595.
9. Salameh, M.K. and Jaber M.Y. (2000). "Economic order quantity model for items with imperfect quality." *International Journal of Production Economics*, Vol. No. 1-3, PP. 59–64.
10. Taleizadeh, A.A., Cárdenas-Barrón, L.E. and Mohammadi, B., (2014). "A deterministic multi product single machine EPQ model with backordering, scraped products, rework and interruption in manufacturing process." *International Journal of Production Economics*. Vol. 3, No. 2, PP. 9–27.
11. Sarkar, B., Cárdenas-Barrón, L.E, Sarkar., M. and Singgih., M.L. (2014). An economic production quantity model with random defective rate, rework process and backorders for a single stage production system. *Journal of Manufacturing Systems*, Vol. 33, No. 3, PP. 423-435.
12. Haley C.W. and Higgins, R.C. (1973). "Inventory policy and trade credit financing." *Management Science*, Vol. 20, No. 4, PP. 464–471.
13. Chapman, C.B., Ward, S.C., Cooper, D.F., and Page, M. J. (1984). "Credit policy and inventory control." *Journal of the Operational Research Society*, Vol. 35, No. 12, PP. 1055–1065.
14. Abada, P.L. and Jaggi, C.K. (2003). "A joint approach for setting unit price and the length of the credit period for a seller when end demand is price sensitive." *International Journal of Production Economics*, Vol. 83, No. 2, PP. 115–122.
15. Chung K. and Huang, Y. (2003). "The optimal cycle time for EPQ inventory model under permissible delay in payments." *International Journal of Production Economics*, Vol. 84, No. 3, PP. 307–318.
16. Chung K. and Huang, Y. (2006). "Retailer's optimal cycle times in the EOQ model with imperfect quality and a permissible credit period." *Quality and Quantity*, Vol. 40, No. 1, PP. 59–77.
17. Khouja, M. and Mehrez, A. (1996). "Optimal inventory policy under different supplier credit policies." *Journal of Manufacturing Systems*, Vol. 15, No. 5, PP. 334-339.

واژه‌های انگلیسی به ترتیب استفاده در متن

1. Rework
2. Trade credit
3. Quality Control
4. Arithmetic – geometric mean inequality