کمینه‌سازی ارزش خالص فعلی هزینه‌ها در تعیین اندازهٔ دستهٔ هماهنگ در یک مدل کنترل موجودی دو رده‌ای

یاسر ملکیان[۱]، سیدحمید میرمحمدی[۲]*

۱. کارشناس ارشد دانشکدهٔ مهندسی صنایع و سیستم‌ها، دانشگاه صنعتی اصفهان

۲. دانشیار دانشکدهٔ مهندسی صنایع و سیستم‌ها، دانشگاه صنعتی اصفهان

(تاریخ دریافت: ۹۵/۰۲/۱۸، تاریخ دریافت روایت اصلاح‌شده: ۹۵/۱۰/۰۵، تاریخ تصویب: ۹۵/۱۲/۲۶)

چکیده

در این مقاله، یک سیستم دو رده‌ای (دوسطحی) زنجیرهٔ تأمین «یک تأمین‌کننده- یک تولیدکننده» به‌وسیلهٔ رویکرد ارزش خالص فعلی بررسی شده است. نرخ تولید، در هردو رده محدود است. همچنین فرض شده است که بین ارسال دسته از ردهٔ اول تا رسیدن آن به ردهٔ دوم تأخیر وجود دارد. این امکان نیز درنظر گرفته شده است که اندازهٔ دستهٔ تولیدی تولیدکننده (ردهٔ دوم) چند برابر اندازه دستهٔ تولیدی تأمین‌کننده (ردهٔ اول) باشد و تولیدکننده بتواند در هر سیکل تولیدی، چند بار (در چند محموله) از تأمین‌کننده، کالا (مواد اولیه) دریافت کند و کمبود نیز مجاز نیست. به همین منظور در مفروضات مسئله، نرخ تولید تأمین‌کننده، بیشتر از نرخ تولید تولیدکننده درنظر گرفته شده است. هدف، تعیین اندازهٔ سفارش اقتصادی در هر رده به‌گونه‌ای است که ارزش خالص فعلی هزینهٔ کل سیستم کمینه شود. پس از تقریب خطی تابع ارزش خالص فعلی هزینه به‌وسیلهٔ بسط مک‌لورن در حالات زمان تدارک صفر و غیرصفر، یک الگوریتم دقیق برای یافتن جواب بهینه ارائه شده است. با توجه به نتایج، در مسئلهٔ مطرح‌شده در این پژوهش، دو رویکرد هزینهٔ متوسط و ارزش خالص فعلی، به یک نتیجه منجر نمی‌شود و ناهم‌ارزی اتفاق می‌افتد.

واژه‌های کلیدی: ارزش زمانی پول، اندازهٔ دستهٔ مشترک، رویکرد هزینهٔ متوسط، سیستم دورده‌ای، زمان تدارک.

مقدمه

از مسئولیت‌های مهم و اساسی در واحدهای صنعتی، برنامه‌ریزی تولید و کنترل موجودی‌هاست. تهیهٔ مواد و برنامه‌ریزی برای تولید کالا با کیفیت و مقدار مطلوب و در زمان و قیمت مناسب، یکی از دغدغه‌های اصلی مدیران است. مدل‌های تعیین مقدار سفارش اقتصادی یا اندازهٔ انباشته، برای نیل به این هدف طراحی شده‌اند. ارزش زمانی پول، یکی از عوامل تأثیرگذار بر تعیین سیاست سفارش‌دهی (تولید) در سیستم‌های تولید و زنجیرهٔ تأمین است. روش سنتی، برای لحاظ‌کردن ارزش زمانی پول در مسائل تعیین اندازهٔ دسته، رویکرد هزینهٔ متوسط[۱] است. رویکرد دیگر، رویکرد ارزش خالص فعلی[۲] است که در آن، ارزش زمانی پول به‌صورت مستقیم در محاسبات لحاظ می‌شود. امروزه در محیط کسب‌وکار رقابتی، اغلب شرکت‌ها فرایندهای نامرتبط با حیطهٔ اصلی تولیدی خود را که ارزش افزودهٔ چندانی ندارد و شرکت‌های تخصصی به بهای کمتری تولید می‌کنند، برون‌سپاری می‌کنند و فعالیت‌های خود را بر حیطهٔ تخصصی خود متمرکز می‌سازند. در اغلب صنایع، حدود ۶۰ درصد فعالیت‌ها برون‌سپاری می‌شود [۱]. این امر، میزان اهمیت تعامل با تأمین‌کننده را نشان می‌دهد. تعامل و برنامه‌ریزی یک برنامهٔ موجودی و تولید مشترک در میان اجزای یک زنجیرهٔ تأمین، سبب افزایش سطح خدمات و افزایش رضایت مشتری و به‌تبع آن افزایش سود اجزا در بلندمدت می‌شود. در اغلب مسائل دنیای واقعی- که در حوزهٔ برنامه‌ریزی تولید و زنجیرهٔ تأمین، تلاش‌هایی برای حل آن‌ها صورت می‌گیرد- ماشین‌آلات نرخ تولید محدودی دارند. در سیستم‌های تولیدی یا سیستم‌های زنجیرهٔ تأمین، اگر نرخ تولید یک رده[۳]، از نرخ تولید ردهٔ ماقبلش کمتر باشد، این امکان وجود دارد که ردهٔ مذکور، چند برابر سفارش خود از ردهٔ ماقبل خود را تولید کند. همچنین زمانی که موجودی مواد اولیهٔ آن به اتمام می‌رسد، سفارش مواد اولیه‌اش از ردهٔ قبلی به دستش برسد

* نویسندهٔ مسئول: تلفن: ۰۳۱۳۳۹۱۵۵۲۹، فکس: ۰۳۱۳۳۹۱۵۵۲۶ Email: h_mirmohammadi@cc.iut.ac.ir

و بدون آنکه ضرورتی به توقف و تحمیل هزینهٔ آماده‌سازی باشد، به تولید خود ادامه دهد.

در مسائل مربوط به تولید در دنیای واقعی، نمونه‌های زیادی وجود دارد که در آن‌ها، کالای نهایی طی چند مرحله تولید می‌شود. گاهی ماهیت عملیات در این مراحل یا نحوهٔ چیدمان کارخانه به‌گونه‌ای است که امکان نزدیکی دپارتمان‌ها یا ماشین‌آلات و به‌تبع آن امکان استفاده از نقاله برای انتقال کالاهای نیمه‌ساخته وجود ندارد. در این موارد، محصولات نیمه‌ساخته بعد از تولید در یک رده، در دسته‌هایی با وسایل حمل‌ونقل به ردهٔ بعدی حمل می‌شوند. سؤال اساسی این است که اندازهٔ اقتصادی تولید (سفارش) هریک از رده‌ها به چه میزان باشد. در ادبیات موضوع در مسائل زنجیرهٔ تأمین، مدل‌هایی بررسی شده‌اند که در آن‌ها، یک رده این امکان را دارد که به میزان چند برابر تولید ردهٔ بعدی خود تولید کند و در هر سیکل تولیدی، چند بار به ردهٔ بعدی کالا ارسال کند. در مسئله‌ای که در این پژوهش بررسی می‌شود، این امکان درنظر گرفته شده است که اندازهٔ دستهٔ تولیدی تولیدکننده، چند برابر اندازهٔ دستهٔ تولیدی تأمین‌کننده باشد. به بیان دیگر، در این مسئله، تولیدکننده در هر سیکل تولیدی چند بار (در چند محموله) از تأمین‌کنندهٔ کالا (مواد اولیه) دریافت می‌کند. همچنین کمبود مجاز نیست. به همین منظور، در مفروضات مسئله، نرخ تولید تأمین‌کننده بیشتر از نرخ تولید تولیدکننده درنظر گرفته شده است.

مروری بر ادبیات موضوع

کلارک [۲] در سال ۱۹۵۸ برای اولین بار مدل چندرده‌ای نظریهٔ کنترل موجودی را ارائه داد و به‌وسیلهٔ برنامه‌ریزی پویا به حل آن اقدام کرد. کلارک و اسکارف [۳] در سال ۱۹۶۰ مدل کلارک را گسترش دادند. کلارک رده را چنین تعریف می‌کند:

تعریف ۱ (رده): رده یک سیستم است که موجودی‌اش برابر است با موجودی خود سیستم به‌علاوهٔ موجودی رده‌های فرودست [۲].

گویال [۴] در سال ۱۹۷۶ یک مدل «یک خریدار- یک فروشنده» را به‌وسیلهٔ رویکرد هزینهٔ متوسط مطالعه کرد که در آن، خریدار طبق سیاست EOQ[۴] اندازهٔ دستهٔ خود را تعیین می‌کند. وی سیستم را از دیدگاه هریک از اجزا به‌صورت مجزا بررسی کرد. همچنین نرخ تولید را نامحدود درنظر گرفت. بانرجی [۵] در سال ۱۹۸۶ با محدود فرض‌کردن نرخ تولید و فرض سیاست دسته برای دسته[۵] (L4L) برای فروشنده، مدل گویال را بررسی کرد. گویال [۶] در سال ۱۹۸۸ با آزادکردن فرض سیاست L4L بارنجی، مدل جامع‌تری ارائه داد. موناهان [۷] در سال ۱۹۸۴ مدل «یک تأمین‌کننده- یک خرده‌فروش» را معرفی کرد که در آن، تأمین‌کننده با سیاست L4L، تقاضای خرده‌فروش را تأمین می‌کند. وی نشان داد که تأمین‌کننده می‌تواند با پیشنهاد تخفیف کلی (با یک سطح شکست قیمتی) و ترغیب خرده‌فروش برای بالابردن اندازه دستهٔ سفارشی‌اش، سود خود را افزایش دهد. وی شرایطی را نیز بررسی کرد که در آن، تأمین‌کننده متعهد است که هزینهٔ حمل‌ونقل بستهٔ کالای ارسالی به خرده‌فروش را بپردازد و سپس به ازای بسته‌های بزرگ‌تر ارسال‌شده به خرده‌فروش، در هزینهٔ حمل‌ونقل واحد کالا تخفیف می‌گیرد. نرخ تولید در این مدل، بی‌نهایت فرض شده است. موناهان مقادیر بهینهٔ متغیرهای تصمیم را به‌صورت مجزا از دید خرده‌فروش و تأمین‌کننده بررسی کرد، نه از دید یک سیستم یکپارچهٔ زنجیرهٔ تأمین. لی و روزنبلات [۸] در سال ۱۹۸۶ نشان دادند که در مدل موناهان سیاست L4L در اغلب موارد جواب نزدیک‌به‌بهینه[۶] به دست می‌دهد. هوانگ و کیم [۹] در سال ۱۹۸۶ و کیم و هوانگ [۱۰] در ۱۹۸۹ مدل موناهان را با فرض وجود چند خریدار بررسی کردند. جوگلکار [۱۱] در سال ۱۹۸۸ نرخ تولید تأمین‌کننده را محدود فرض کرد و مدل موناهان را گسترش داد. بیولنز و جانسن [۱۲] در سال ۲۰۱۴ با رویکرد ارزش خالص فعلی مدل موناهان (گسترش‌داده‌شده به‌وسیلهٔ جوگلکار) را بررسی کردند. سیلور و همکاران [۱۳] در سال ۱۹۹۸ و هیلر و لیبرمن [۱۴] در سال ۲۰۰۵ با تغییراتی در مدل کلارک، مدلی را با نام مدل چندرده‌ای زنجیره‌ای[۷] معرفی کردند. بیولنز [۱۵] در سال ۲۰۱۴ این مدل را با رویکردهای هزینهٔ متوسط و ارزش خالص فعلی بررسی کرد. لو [۱۶] در سال ۱۹۹۵ یک سیستم «یک فروشنده- چند خریدار» را مطالعه کرد که در آن، هزینهٔ کل فروشنده با درنظرگرفتن محدودیت حداکثر هزینه برای هریک از

خریداران کمینه می‌شود. وی اندازهٔ محموله‌ها را در یک سیکل، برابر فرض کرد و الگوریتمی ابتکاری برای یافتن مقدار بهینهٔ اندازهٔ دسته‌ها ارائه داد. گویال [۱۷] در سال ۱۹۹۵ در مدل لو چنین فرض کرد که اندازهٔ محموله‌ها در یک سیکل متوالی با نسبت «نرخ تولید فروشنده به نرخ تقاضای خریدار» افزایش پیدا می‌کند و هدف، یافتن اندازهٔ اولین محموله است. هیل [۱۸] در سال ۱۹۹۹ با ترکیب سیاست محموله‌های برابر (لو [۱۶]) و افزایش متوالی اندازهٔ محموله‌ها (گویال [۱۷]) یک الگوریتم برای یافتن جواب بهینه ارائه کرد. در تمامی این پژوهش‌ها، هزینهٔ نگهداری واحد کالا برای خریدار، بیشتر از هزینهٔ نگهداری واحد کالا برای فروشنده درنظر گرفته شده است. هیل و عمر [۱۹] در سال ۲۰۰۶ با این فرض که هزینهٔ نگهداری فروشنده بیشتر است، مدل هیل را مطالعه کردند. مانسن و روزنبلات [۲۰] در سال ۲۰۰۱ یک زنجیرهٔ تأمین سه‌رده‌ای (تأمین‌کننده، تولیدکننده و خرده‌فروش) را به‌وسیلهٔ رویکرد هزینهٔ متوسط بررسی کردند. مانسن و روزنبالت از دیدگاه سیستم یکپارچهٔ زنجیرهٔ تأمین، مدل را بررسی و مقدار سود کل سیستم را به‌وسیلهٔ رویکرد هزینهٔ متوسط بیشینه کردند. لان و تیونتر [۲۱] در سال ۲۰۰۲ نتایج رویکردهای هزینهٔ متوسط و ارزش خالص فعلی را روی یک مدل دو رده‌ای با نرخ تولید نامحدود بررسی کردند. بیولنز و جانسن [۲۲] در سال ۲۰۱۱ مفهومی با نام نقطهٔ لنگری[8] معرفی کردند که سبب بهبود رویکرد ارزش خالص فعلی شد.

تعریف ۲ (نقطهٔ لنگری): نقطهٔ لنگری در یک مسئلهٔ تصمیم ارزش خالص فعلی، یک نقطهٔ دلخواه در آینده است که بر شروع یا پایان فعالیتی (سفارش، ارسال، تحویل، انبارش و...) منطبق است و با تغییر مقدار متغیرهای تصمیم (اندازهٔ دسته، زمان سیکل، اندازهٔ کمبود و...) مقدار آن تغییر نمی‌کند [۲۲].

بن‌دایا و الناصر [۲۳] در سال ۲۰۰۸ یک سیستم زنجیرهٔ تأمین سه‌رده‌ای «تأمین‌کننده- تولیدکننده- خرده‌فروش» را بررسی کردند و یک الگوریتم حل درجهت کمینه‌کردن هزینه‌های کل زنجیره ارائه دادند. گری و باردهان [۲۴] در سال ۲۰۱۱ یک مدل دوره‌ای زنجیرهٔ تأمین تأمین‌کننده– تولیدکننده با نرخ تولید نامحدود را با درنظرگرفتن ارزش زمانی پول و نرخ تورم به‌وسیلهٔ رویکرد ارزش خالص فعلی بررسی کردند. گلاک و کیم [۲۵] در سال ۲۰۱۴ یک سیستم زنجیرهٔ تأمین «یک خریدار- چند فروشنده» را به‌وسیلهٔ رویکرد هزینهٔ متوسط مطالعه کردند. در این سیستم تک‌کالایی، خریدار تقاضای با نرخ ثابت را بدون کمبود تأمین می‌کند و تأمین کالای مورد نیاز را از چند فروشنده انجام می‌دهد، اما این امکان وجود دارد که فروشنده‌ها در گروه‌هایی دسته‌بندی شوند و دستهٔ ارسالی هر گروه، هم‌زمان به دست خریدار می‌رسد. سجادی و همکاران [۲۶] در سال ۲۰۱۴ یک سیستم زنجیرهٔ تأمین «یک خریدار- یک فروشنده» را با درنظرگرفتن نرخ تولید محدود برای فروشنده، و محدودیت بودجه، به‌وسیلهٔ رویکرد هزینهٔ متوسط مطالعه کردند. ملکیان و میرمحمدی [۲۷] در سال ۲۰۱۵ یک سیستم دوره‌ای «یک تأمین‌کننده- یک تولیدکننده» را به‌وسیلهٔ رویکرد هزینهٔ متوسط بررسی کردند. آن‌ها نرخ تولید را در هردو رده محدود فرض کردند و زمان تدارک[9] را نیز درنظر گرفتند. برای مرور بیشتر ادبیات موضوع در زمینهٔ تعیین اندازهٔ دستهٔ هماهنگ[10] در مدل‌های چندرده‌ای زنجیرهٔ تأمین، مقالهٔ مروری گلاک [۲۸] توصیه می‌شود.

شرح و بیان مسئله

ملکیان و میرمحمدی [۲۷] در سال ۲۰۱۵ یک سیستم دوره‌ای زنجیرهٔ تأمین تأمین‌کننده- تولیدکننده را با نرخ تولید محدود در هردو رده، به‌وسیلهٔ رویکرد هزینهٔ متوسط بررسی کردند. در این پژوهش، این مدل با رویکرد ارزش خالص فعلی مطالعه می‌شود. ردهٔ اول را تأمین‌کننده و ردهٔ دوم را تولیدکننده می‌نامیم. مفروضات مسئله به قرار زیر است:

- تولیدکننده، مادهٔ اولیه را از تأمین‌کننده دریافت و کالای نهایی را تولید می‌کند. ضریب‌مصرف برابر با واحد فرض شده است.
- تولیدکننده، از زمانی که اولین محموله را از تأمین‌کننده دریافت می‌کند، تقاضای با نرخ ثابت را بدون کمبود تأمین می‌کند.
- افق برنامه‌ریزی نامحدود است.
- تنزیل، پیوسته است.
- نرخ تولید تأمین‌کننده، بیشتر از نرخ تولید

تولیدکننده است.

- نرخ تولید تولیدکننده، بیشتر از نرخ تقاضاست.
- تأمین‌کننده می‌تواند دستهٔ سفارش‌شده از طرف تولیدکننده را در چند محموله به تولیدکننده ارسال کند. اگر در زمانی که موجودی مواد اولیه در ردهٔ دوم (تولیدکننده) به اتمام می‌رسد، محمولهٔ جدید از تأمین‌کننده وصول شود، ماشین ردهٔ دوم بدون توقف و تحمیل هزینهٔ آماده‌سازی به تولید خود ادامه می‌دهد.
- اندازهٔ محموله‌ها با هم برابر است.
- هزینهٔ حمل‌ونقل هر محموله، مستقل از اندازهٔ محموله و ثابت درنظر گرفته شده است.

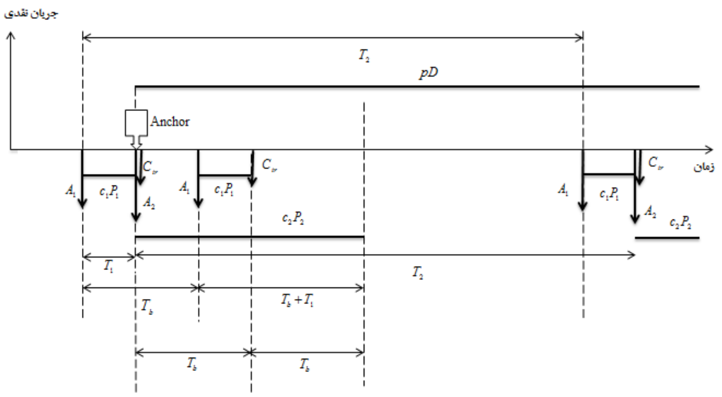
نمادهای مورد استفاده در این پژوهش به قرار زیر است:

نماد	تعریف
D	نرخ سالیانهٔ تقاضا؛
P_1	نرخ تولید ماشین ردهٔ اول؛
P_2	نرخ تولید ماشین ردهٔ دوم؛
T_1	زمان سیکل ماشین ردهٔ اول؛
T_b	زمان سیکل انبار مواد اولیهٔ ردهٔ دوم؛
A_1	هزینهٔ آماده‌سازی ماشین ردهٔ اول؛
A_2	هزینهٔ آماده‌سازی ماشین ردهٔ دوم؛
C_{tr}	هزینهٔ حمل‌ونقل هر محموله؛
h_1	هزینهٔ نگهداری کالای نیمه‌ساخته در ردهٔ اول؛
h_b	هزینهٔ نگهداری کالای نیمه‌ساخته در انبار مواد اولیهٔ ردهٔ دوم؛
h_2	هزینهٔ نگهداری کالای نهایی در ردهٔ دوم؛
L	زمان تدارک؛
i	نرخ تنزیل؛
Q_1	اندازهٔ دستهٔ تولیدی در ردهٔ اول؛
Q_2	اندازهٔ دستهٔ تولیدی در ردهٔ دوم؛
m	تعداد محموله‌هایی که در سیکل سیستم، از ردهٔ اول به ردهٔ دوم فرستاده می‌شود؛
c_1	هزینهٔ متغیر تولید در ردهٔ اول؛
c_2	هزینهٔ متغیر تولید در ردهٔ دوم؛
p	قیمت فروش واحد کالای نهایی.

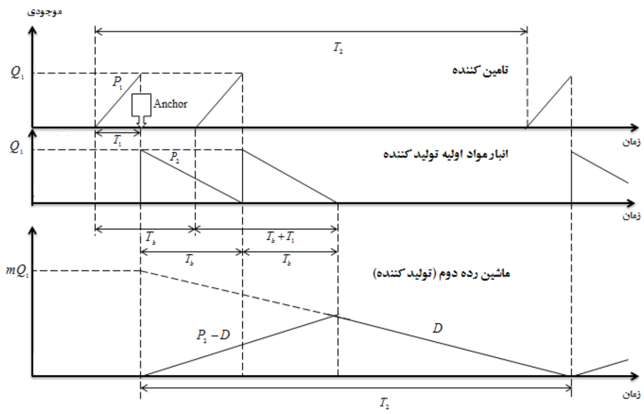
$$TC_{AC}(Q_2,m)=\frac{\left(m(A_1+C_{tr})+A_2\right)D}{Q_2}+h_1LD+\frac{Q_2}{2m}\left(h_1\frac{D}{P_1}+h_b\frac{D}{P_2}\right)+h_2\frac{Q_2}{2}\left(1-\frac{D}{P_2}\right) \quad (1)$$

بررسی مسئله با زمان تدارک صفر

نمودار جریان نقدی سیستم در حالت زمان تدارک صفر در شکل ۱ مشاهده می‌شود. نمودار موجودی متناظر با شکل ۱، در شکل ۲ نشان داده شده است. نقطهٔ لنگری، زمان شروع به کار ماشین ردهٔ دوم در اولین سیکل است و زمانی در آینده است که از آن زمان به بعد سیستم متعهد است تقاضای بیرونی را بدون کمبود تأمین کند.



شکل ۱. نمودار جریان نقدی سیستم با زمان تدارک صفر (تعداد محموله‌ها ۲ فرض شده است)



شکل ۲. نمودار موجودی سیستم با زمان تدارک صفر (تعداد محموله‌ها ۲ فرض شده است)

در مسئله، روابط زیر برقرار است:

$$T_1=\frac{Q_1}{P_1} \tag{۲}$$

$$T_b=\frac{Q_1}{P_2} \tag{۳}$$

$$T_2=\frac{Q_2}{D} \tag{۴}$$

$$Q_1=\frac{Q_2}{m} \tag{۵}$$

گروبوستروم [۲۹] در سال ۱۹۶۷ نشان داد که اگر تنزیل پیوسته باشد (مرکب‌شدن اصل و بهرهٔ پول، پیوسته باشد)، می‌توان ارزش خالص فعلی را با تبدیل لاپلاس[11] روی تابع جریان نقدی به‌دست آورد. براین‌اساس، اگر $\alpha(t)$ جریان نقدی سیستم در زمان t باشد، ارزش خالص فعلی سیستم به‌صورت رابطهٔ ۶ محاسبه می‌شود.

$$NPV=\int_0^{\infty}\alpha(t)e^{-it}dt \tag{۶}$$

همچنین جریان یکنواخت پیوستهٔ معادل با ارزش خالص فعلی نیز به‌صورت رابطهٔ ۷ به‌دست می‌آید:

$$AS=i.NPV \tag{۷}$$

با توجه به روابط ۶ و ۷، جریان یکنواخت پیوستهٔ معادل ارزش خالص فعلی هزینهٔ متغیر تولید نسبت به نقطهٔ لنگری در رده‌های اول و دوم، به‌ترتیب به‌صورت روابط ۸ و ۹ به‌دست می‌آید.

$$\begin{aligned}AS_{c_1}=\Big(&\int_{-T_1}^{0}c_1P_1e^{-it}dt+\int_{T_b-T_1}^{T_b}c_1P_1e^{-it}dt\\&+\int_{2T_b-T_1}^{2T_b}c_1P_1e^{-it}dt+\ldots+\\&+\int_{(m-1)T_b-T_1}^{(m-1)T_b}c_1P_1e^{-it}dt\Big)\sum_{n=0}^{\infty}ie^{-inT_2}\end{aligned} \tag{۸}$$

$$AS_{c_2}=\left(\int_0^{mT_b}c_2P_2e^{-it}dt\right)\sum_{n=0}^{\infty}ie^{-inT_2} \tag{۹}$$

در روابط فوق، ابتدا در هر سیکل، ارزش خالص فعلی جریانات نقدی، در زمان شروع به کار ماشین ردهٔ دوم محاسبه شده است و سپس همه به نقطهٔ لنگری (واقع در سیکل اول) منتقل شده‌اند. سپس با توجه به رابطهٔ $AS=i.NPV$، جریان یکنواخت پیوستهٔ معادل ارزش خالص در نقطهٔ لنگری محاسبه شده است.

نحوهٔ به‌دست‌آمدن رابطهٔ ۱ را شرح می‌دهیم. بقیهٔ روابط مربوط به جریان‌های پیوستهٔ نقدی نیز به همین ترتیب به‌دست آمده‌اند. سیکل مفروض nام را درنظر بگیرید. ارزش خالص فعلی هزینهٔ متغیر تولید j امین محموله در ردهٔ اول، نسبت به نقطهٔ شروع‌به‌کار ماشین ردهٔ دوم در سیکل مذکور، با عبارت $\int_{(j-1)T_b-T_1}^{(j-1)T_b}c_1P_1e^{-it}dt$ قابل‌محاسبه است؛ بنابراین، $\sum_{j=1}^{m}\int_{(j-1)T_b-T_1}^{(j-1)T_b}c_1P_1e^{-it}dt$، ارزش خالص فعلی هزینهٔ متغیر تولید ردهٔ اول، نسبت به نقطهٔ شروع به کار ماشین ردهٔ دوم را نشان می‌دهد. نقطهٔ شروع به کار ماشین ردهٔ دوم، در سیکل nام، به اندازهٔ nT_2 واحد زمانی، از نقطهٔ لنگری- که در سیکل اول واقع شده است- فاصله دارد؛ بنابراین، ارزش خالص فعلی هزینهٔ متغیر تولید ردهٔ اول در سیکل nام نسبت به نقطهٔ لنگری، برابر است با $\left(\sum_{j=1}^{m}\int_{(j-1)T_b-T_1}^{(j-1)T_b}c_1P_1e^{-it}dt\right)e^{-inT_2}$. درنتیجه، جریان یکنواخت پیوستهٔ معادل با ارزش خالص فعلی مذکور، به‌صورت

$\left(\sum_{j=1}^{m}\int_{(j-1)T_b-T_1}^{(j-1)T_b} c_1P_1e^{-it}dt\right)ie^{-inT_2}$ به دست می‌آید؛ بنابراین، جریان یکنواخت پیوستهٔ هزینهٔ متغیر تولید در ردهٔ اول، با تجمیع جریان‌های یکنواخت پیوستهٔ هزینهٔ متغیر تولید ردهٔ اول در تمامی سیکل‌ها، به‌صورت $\left(\sum_{j=1}^{m}\int_{(j-1)T_b-T_1}^{(j-1)T_b} c_1P_1e^{-it}dt\right)\sum_{n=0}^{\infty} ie^{-inT_2}$، قابل‌محاسبه است.

روابط ۸ و ۹ را بعد از ساده‌سازی، به‌ترتیب به‌صورت روابط ۱۰ و ۱۱ می‌نویسیم:

$$AS_{c_1}=c_1P_1\frac{\left(e^{iT_1}-1\right)\left(1-e^{-mT_b}\right)}{\left(1-e^{-iT_2}\right)\left(1-e^{-iT_b}\right)} \qquad (۱۰)$$

$$AS_{c_2}=c_2P_2\frac{1-e^{-mT_b}}{1-e^{-iT_2}} \qquad (۱۱)$$

جریان یکنواخت پیوستهٔ معادل با ارزش خالص فعلی هزینهٔ آماده‌سازی، هزینهٔ حمل‌ونقل ردهٔ اول و هزینهٔ آماده‌سازی ردهٔ دوم، پس از ساده‌سازی، به‌ترتیب به‌صورت روابط ۱۲ تا ۱۴ به‌دست می‌آیند:

$$AS_{A_1}=A_1\frac{ie^{iT_1}\left(1-e^{-mT_b}\right)}{\left(1-e^{-iT_2}\right)\left(1-e^{-iT_b}\right)} \qquad (۱۲)$$

$$AS_{Tr}=C_{tr}\frac{i\left(1-e^{-mT_b}\right)}{\left(1-e^{-iT_2}\right)\left(1-e^{-iT_b}\right)} \qquad (۱۳)$$

$$AS_{A_2}=A_2\frac{i}{1-e^{-iT_2}} \qquad (۱۴)$$

جریان یکنواخت پیوستهٔ درآمد حاصل از فروش به‌صورت رابطهٔ ۱۵ قابل‌محاسبه است:

$$AS_{NPV}^{in}=pD \qquad (۱۵)$$

با توجه به روابط ۱۰ تا ۱۵، جریان یکنواخت پیوستهٔ سیستم به‌صورت رابطهٔ ۱۶ به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned}AS=pD&-A_1\frac{ie^{iT_1}\left(1-e^{-imT_b}\right)}{\left(1-e^{-iT_2}\right)\left(1-e^{-iT_b}\right)}\\&-C_{tr}\frac{i\left(1-e^{-imT_b}\right)}{\left(1-e^{-iT_2}\right)\left(1-e^{-iT_b}\right)}\\&-c_1P_1\frac{\left(e^{iT_1}-1\right)\left(1-e^{-imT_b}\right)}{\left(1-e^{-iT_2}\right)\left(1-e^{-iT_b}\right)}\\&-c_2P_2\frac{1-e^{-imT_b}}{1-e^{-iT_2}}-A_2\frac{i}{1-e^{-iT_2}}\end{aligned} \qquad (۱۶)$$

رابطهٔ ۱۶ را با استفاده از بسط مک‌لورن، تقریب خطی می‌زنیم و سپس با توجه به روابط ۲ تا ۵، برحسب Q_2 و m رابطهٔ ۱۷ را می‌نویسیم.

$$\begin{aligned}\overline{AS}(Q_2,m)=&-\frac{\left(m\left(A_1+C_{tr}\right)+A_2\right)D}{Q_2}\\&+D\left(p-c_1-c_2\right)-ic_1\frac{Q_2D}{2m}\left(\frac{1}{P_1}+\frac{1}{P_2}\right)\\&-im\frac{A_1+C_{tr}}{2}\left(1-\frac{D}{P_2}\right)\\&-i\left(c_1+c_2\right)\frac{Q_2}{2}\left(1-\frac{D}{P_2}\right)\\&-i\frac{A_1+C_{tr}}{2}\frac{D}{P_2}-iA_1\frac{D}{P_1}-i\frac{A_2}{2}\end{aligned} \qquad (۱۷)$$

قرینهٔ مجموع عباراتی را که در رابطهٔ ۱۷ با علامت منفی ظاهر شده‌اند و نیز به متغیرهای تصمیم m و Q_2 بستگی دارند، به‌عنوان هزینهٔ پیوستهٔ یکنواخت در رویکرد ارزش خالص فعلی تقریب‌شده درنظر می‌گیریم.

$$\begin{aligned}\overline{TC}_{NPV}(Q_2,m)=&\frac{\left(m\left(A_1+C_{tr}\right)+A_2\right)D}{Q_2}\\&+ic_1\frac{Q_2D}{2m}\left(\frac{1}{P_1}+\frac{1}{P_2}\right)\\&+i\left(c_1+c_2\right)\frac{Q_2}{2}\left(1-\frac{D}{P_2}\right)\\&+im\frac{A_1+C_{tr}}{2}\left(1-\frac{D}{P_2}\right)\end{aligned} \qquad (۱۸)$$

با مقایسهٔ روابط ۱۸ و ۱ می‌توان به این نتیجه رسید که نگاشت‌های زیر برای هم‌ارزی رویکردهای هزینهٔ متوسط و ارزش خالص فعلی کافی نیست:

$$h_1\rightarrow ic_1 \qquad (۱۹)$$

$$h_b\rightarrow ic_1 \qquad (۲۰)$$

$$h_2\rightarrow i\left(c_1+c_2\right) \qquad (۲۱)$$

با اعمال نگاشت‌های ۱۹ تا ۲۱، عبارت‌های اول، دوم و سوم رابطهٔ ۱۸ معادل با بخش متناظر در رابطهٔ ۱ خواهد بود، اما همچنان عبارت آخر در رابطهٔ ۱۸ سبب ناهم‌ارزی می‌شود؛ بنابراین، در مسئلهٔ با زمان تدارک صفر، به ناهم‌ارزی می‌رسیم.

نشان می‌دهیم که رابطهٔ ۱۸ تنها یک نقطهٔ کمینه دارد و سپس یک الگوریتم دقیق برای یافتن نقطهٔ بهینه ارائه می‌دهیم. مشتق دوم رابطهٔ ۱۸ نسبت به Q_2 همواره مثبت است.

$$\frac{\partial^2\overline{TC}_{NPV}(Q_2,m)}{\partial Q_2^2}=\frac{2D\left(m\left(A_1+C_{tr}\right)+A_2\right)}{Q_2^3}>0 \qquad (۲۲)$$

با توجه به تحدب رابطهٔ ۱۸ نسبت به Q_2، اندازهٔ اقتصادی سفارش تولیدکننده به ازای یک m مشخص به‌صورت رابطهٔ ۲۳ به‌دست می‌آید:

$$\frac{\partial \overline{TC}_{NPV}(Q_2,m)}{\partial Q_2}=0\Rightarrow$$
$$Q_2^*(m)=\sqrt{\frac{2D\left(m\left(A_1+C_{tr}\right)+A_2\right)}{\frac{ic_1}{m}\left(\frac{D}{P_1}+\frac{D}{P_2}\right)+i\left(c_1+c_2\right)\left(1-\frac{D}{P_2}\right)}} \quad (۲۳)$$

با جاگذاری رابطهٔ ۲۳ در رابطهٔ ۱۸ خواهیم داشت:

$$\overline{TC}^*_{NPV}(m)=+im\frac{A_1+C_{tr}}{2}\left(1-\frac{D}{P_2}\right)$$
$$+\sqrt{2D\left(m\left(A_1+C_{tr}\right)+A_2\right)\left(\frac{ic_1}{m}\left(\frac{D}{P_1}+\frac{D}{P_2}\right)+i\left(c_1+c_2\right)\left(1-\frac{D}{P_2}\right)\right)} \quad (۲۴)$$

یافتن نقاطی که در آن‌ها مشتق رابطهٔ ۲۴ صفر می‌شود، به‌صورت پارامتری امکان‌پذیر نیست. رابطهٔ ۲۴ را به‌صورت رابطهٔ ۲۵ می‌نویسیم:

$$\overline{TC}^*_{NPV}(m)=\sqrt{2D}\sqrt{F+mU+\frac{V}{m}}+mH \quad (۲۵)$$

در رابطهٔ ۲۰، F، U و V به‌ترتیب به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$F=\left(A_1+C_{tr}\right)ic_1\left(\frac{D}{P_1}+\frac{D}{P_2}\right)+A_2i\left(c_1+c_2\right)\left(1-\frac{D}{P_2}\right) \quad (۲۶)$$

$$U=\left(A_1+C_{tr}\right)i\left(c_1+c_2\right)\left(1-\frac{D}{P_2}\right) \quad (۲۷)$$

$$V=A_2ic_1\left(\frac{D}{P_1}+\frac{D}{P_2}\right) \quad (۲۸)$$

$$H=im\frac{A_1+C_{tr}}{2}\left(1-\frac{D}{P_2}\right) \quad (۲۹)$$

مشتق اول و دوم رابطهٔ ۲۵، به‌ترتیب به‌صورت روابط ۳۰ و ۳۱ است:

$$\frac{d\overline{TC}^*_{NPV}(m)}{dm}=\sqrt{2D}\,\frac{U-\frac{V}{m^2}}{2\sqrt{F+mU+\frac{V}{m}}}+H \quad (۳۰)$$

$$\frac{d^2\overline{TC}^*_{NPV}(m)}{dm^2}=\frac{V}{m^3\sqrt{F+mU+\frac{V}{m}}}-\frac{\left(U-\frac{V}{m^2}\right)^2}{4\sqrt{\left(F+mU+\frac{V}{m}\right)^3}} \quad (۳۱)$$

رابطهٔ ۳۱ را می‌توان به‌صورت رابطهٔ ۳۲ نوشت:

$$\frac{d^2\overline{TC}^*_{NPV}(m)}{dm^2}=\frac{2V\left(2F+3mU\right)+3m^3\left(\left(\frac{V}{m^2}\right)^2-U^2\right)}{4m^3\sqrt{\left(F+mU+\frac{V}{m}\right)^3}} \quad (۳۲)$$

فرض می‌کنیم:

$$m'=\sqrt{\frac{V}{U}} \quad (۳۳)$$

با توجه به رابطهٔ ۳۳ مشخص است که رابطهٔ ۳۰ به ازای $m>m'$ مثبت است و درنتیجه، رابطهٔ ۲۵ در این بازهٔ صعودی اکید است. همچنین با توجه به رابطهٔ ۳۲، مشتق دوم رابطهٔ ۲۵ در بازهٔ $[1,m']$ مثبت است و درنتیجه، رابطهٔ ۲۵ در این بازه محدب است. بدین‌ترتیب، نقطهٔ بهینهٔ در این بازه قرار دارد.

با توجه به این واقعیت که نقطهٔ بهینهٔ رابطهٔ ۲۴ در بازهٔ $[1,m']$ قرار دارد و رابطهٔ مذکور در این بازه، محدب است، یک الگوریتم دقیق برای پیداکردن سیاست بهینهٔ مسئلهٔ با زمان تدارک صفر، به‌وسیلهٔ رویکرد ارزش خالص فعلی ارائه می‌دهیم. در این الگوریتم، از $k=\lceil m'\rceil$ شروع می‌کنیم و متوالیاً k را آن‌قدر کاهش می‌دهیم که رابطهٔ ۲۴ افزایش پیدا کند. با توجه به تحدب رابطهٔ ۲۴ در بازهٔ مورد جست‌وجو، مقدار k قبل از افزایش، نقطهٔ بهینهٔ رابطهٔ ۲۴ خواهد بود.

الگوریتم ۱

گام ۱: m' را از رابطهٔ ۳۳ محاسبه می‌کنیم و گردبه‌بالای آن را برابر با m'' درنظر می‌گیریم. اگر $m''=1$ است، سیاست بهینه را یافته‌ایم. تعداد محمولهٔ بهینه $m^*=1$ است. Q_2^* را از رابطهٔ ۲۳ محاسبه می‌کنیم و متوقف می‌شویم. در غیر این صورت، قرار می‌دهیم $k=m''$ و به گام بعدی می‌رویم.

گام ۲: از رابطهٔ ۲۴ مقدار $\overline{TC}^*_{NPV}(k)$ را محاسبه می‌کنیم و قرار می‌دهیم $TC_{\min}=\overline{TC}^*_{NPV}(k)$ و $k_{\min}=k$.

گام ۳: اگر $k=1$ است، سیاست بهینه را یافته‌ایم. تعداد محمولهٔ بهینه $m^*=k_{\min}$ است. Q_2^* را از

رابطهٔ ۲۳ محاسبه می‌کنیم و متوقف می‌شویم. در غیر این صورت، قرار می‌دهیم $k=k-1$ و به گام بعدی می‌رویم.

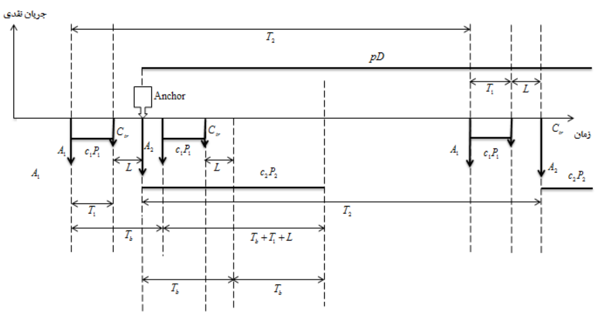
گام ۴: مقدار $\overline{TC}^*_{NPV}(k)$ را از رابطهٔ ۲۴ محاسبه می‌کنیم. اگر $\overline{TC}^*_{NPV}(k)<TC_{\min}$، قرار می‌دهیم $TC_{\min}=\overline{TC}^*_{NPV}(k)$ و $k_{\min}=k$ و به گام ۳ می‌رویم. در غیر این صورت، به سیاست بهینه رسیده‌ایم. $Q_2^*(k_{\min})$ را از رابطهٔ ۲۳ محاسبه می‌کنیم. $m^*=k_{\min}$ و $Q_2^*=Q_2^*(k_{\min})$

پس از یافتن تعداد بهینهٔ محموله‌ها و اندازهٔ بهینهٔ دسته در ردهٔ دوم، اندازهٔ بهینهٔ دسته در ردهٔ اول (اندازهٔ هر محموله) به‌وسیلهٔ رابطهٔ ۵ تعیین می‌شود.

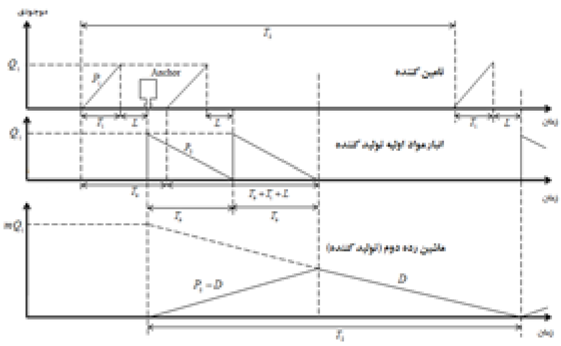
بررسی مسئله با زمان تدارک غیر صفر

نمودار جریان نقدی سیستم و نمودار موجودی آن، در حالت زمان تدارک غیر صفر، به‌ترتیب در شکل‌های ۳ و ۴ قابل‌مشاهده است. نقطهٔ لنگری زمان شروع به کار ماشین ردهٔ دوم در اولین سیکل است.

شبیه همان روندی که در مسئلهٔ با زمان تدارک صفر انجام شد، جریان یکنواخت پیوستهٔ سیستم در حالت زمان تدارک غیر صفر را به‌دست می‌آوریم:



شکل ۳. نمودار جریان نقدی سیستم با زمان تدارک غیرصفر (تعداد محموله‌ها ۲ فرض شده است)



شکل ۴. نمودار موجودی سیستم با زمان تدارک غیر صفر (تعداد محموله‌ها ۲ فرض شده است)

$$\begin{aligned}AS_{NPV} &= pD - A_1\frac{ie^{i(T_1+L)}\left(1-e^{-imT_b}\right)}{\left(1-e^{-iT_2}\right)\left(1-e^{-iT_b}\right)}\\ &-C_{tr}\frac{ie^{iL}\left(1-e^{-imT_b}\right)}{\left(1-e^{-iT_2}\right)\left(1-e^{-iT_b}\right)}-A_2\frac{i}{1-e^{-iT_2}}\\ &-c_1P_1\frac{e^{iL}\left(e^{iT_1}-1\right)\left(1-e^{-imT_b}\right)}{\left(1-e^{-iT_2}\right)\left(1-e^{-iT_b}\right)}-c_2P_2\frac{1-e^{-imT_b}}{1-e^{-iT_2}}\end{aligned} \quad (۳۴)$$

با استفاده از روابط ۲ تا ۵، تقریب جریان یکنواخت پیوستهٔ سیستم نسبت به نقطهٔ لنگری را برحسب Q_2 و m به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}\overline{AS}_{NPV}(Q_2,m)=&-\frac{m(A_1+C_{tr})(1+iL)+A_2}{Q_2}D\\&-ic_1\frac{Q_2D}{2m}\left(\frac{1}{P_1}+\frac{1}{P_2}\right)-i(c_1+c_2)\frac{Q_2}{2}\left(1-\frac{D}{P_2}\right)\\&+D(p-c_1-c_2)-ic_1LD-iA_1\frac{D}{P_1}-i\frac{A_2}{2}\\&-im\frac{A_1+C_{tr}}{2}\left(1-\frac{D}{P_2}\right)-i\frac{A_1+C_{tr}}{2}\frac{D}{P_2}\end{aligned} \quad (۳۵)$$

قرینهٔ مجموع عبارت‌هایی را که در رابطهٔ ۳۵ با علامت منفی ظاهر شده‌اند و به متغیرهای تصمیم m و Q_2 بستگی دارند، به‌عنوان هزینهٔ یکنواخت پیوسته، در رویکرد ارزش خالص فعلی تقریب‌شده درنظر می‌گیریم.

$$\begin{aligned}\overline{TC}_{NPV}(Q_2,m)=&\frac{m(A_1+C_{tr})(1+iL)+A_2}{Q_2}D\\&+ic_1\frac{Q_2D}{2m}\left(\frac{1}{P_1}+\frac{1}{P_2}\right)+i(c_1+c_2)\frac{Q_2}{2}\left(1-\frac{D}{P_2}\right)\\&+im\frac{A_1+C_{tr}}{2}\left(1-\frac{D}{P_2}\right)+ic_1LD\end{aligned} \quad (۳۶)$$

با مقایسهٔ روابط ۳۶ و ۱ می‌توان به این نتیجه رسید که نگاشت‌های زیر برای معادل‌کردن هزینهٔ آماده‌سازی ردهٔ اول و هزینهٔ حمل‌ونقل لازم است:

$$A_1\rightarrow A_1(1+iL) \quad (۳۷)$$

$$C_{tr}\rightarrow C_{tr}(1+iL) \quad (۳۸)$$

با اعمال نگاشت‌های ۱۹ تا ۲۱، ۳۷ و ۳۸ عبارت‌های $\frac{m(A_1+C_{tr})(1+iL)+A_2}{Q_2}D$، $ic_1\frac{Q_2D}{2m}\left(\frac{1}{P_1}+\frac{1}{P_2}\right)$، $i(c_1+c_2)\frac{Q_2}{2}\left(1-\frac{D}{P_2}\right)$ و ic_1LD، در رابطهٔ ۳۶، به‌ترتیب معادل با عبارت‌های $\frac{(m(A_1+C_{tr})+A_2)D}{Q_2}$، $\frac{Q_2}{2m}\left(h_1\frac{D}{P_1}+h_b\frac{D}{P_2}\right)$، $h_2\frac{Q_2}{2}\left(1-\frac{D}{P_2}\right)$ و h_1LD، در رابطهٔ ۱ خواهند بود، اما همچنان عبارت $im\frac{A_1+C_{tr}}{2}\left(1-\frac{D}{P_2}\right)$، در رابطهٔ ۳۶ سبب ناهم‌ارزی می‌شود؛ بنابراین، در مسئلهٔ با زمان تدارک غیر صفر، با مقایسهٔ نتایج دو رویکرد هزینهٔ متوسط و ارزش خالص فعلی تقریب‌شده، به ناهم‌ارزی می‌رسیم.

با توجه به تحدب رابطهٔ ۳۶ نسبت به Q_2، اندازهٔ دستهٔ اقتصادی تولیدکننده به ازای یک m مشخص به‌صورت رابطهٔ ۳۹ به‌دست می‌آید:

$$\frac{\partial\overline{TC}_{NPV}(Q_2,m)}{\partial Q_2}=0\Rightarrow$$

$$Q_2^*(m)=\sqrt{\frac{2D\left(m(A_1+C_{tr})(1+iL)+A_2\right)}{\frac{ic_1}{m}\left(\frac{D}{P_1}+\frac{D}{P_2}\right)+i(c_1+c_2)\left(1-\frac{D}{P_2}\right)}} \quad (۳۹)$$

با جاگذاری رابطهٔ ۳۹ در رابطهٔ ۳۶ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\overline{TC}^*_{NPV}(m)=&im\frac{A_1+C_{tr}}{2}\left(1-\frac{D}{P_2}\right)+ic_1LD\\&+\sqrt{2D\left(m(A_1+C_{tr})(1+iL)+A_2\right)\left(\frac{ic_1}{m}\left(\frac{D}{P_1}+\frac{D}{P_2}\right)+i(c_1+c_2)\left(1-\frac{D}{P_2}\right)\right)}\end{aligned} \quad (۴۰)$$

رابطهٔ ۴۰ را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\overline{TC}^*_{NPV}(m)=\sqrt{2D}\sqrt{F+mU+\frac{V}{m}}+mH+ic_1LD \quad (۴۱)$$

که در رابطهٔ فوق داریم:

$$F=(A_1+C_{tr})(1+iL)Dic_1\left(\frac{1}{P_1}+\frac{1}{P_2}\right)+A_2i(c_1+c_2)\left(1-\frac{D}{P_2}\right) \quad (۴۲)$$

$$U=(A_1+C_{tr})(1+iL)i(c_1+c_2)\left(1-\frac{D}{P_2}\right) \quad (۴۳)$$

$$V=A_2Dic_1\left(\frac{1}{P_1}+\frac{1}{P_2}\right) \quad (۴۴)$$

همچنین H به‌وسیلهٔ رابطهٔ ۲۹ تعریف می‌شود. عبارت آخر در رابطهٔ ۴۱ به متغیرهای تصمیم بستگی ندارد؛ بنابراین، $\overline{TC}^*_{NPV}(m)$ به‌لحاظ مکان نقطهٔ بهینه، ویژگی رابطهٔ ۲۵ را دارد و نقطهٔ کمینهٔ مطلق رابطهٔ ۴۱ در بازهٔ $[1,m']$ قرار گرفته است. m' با رابطهٔ ۴۵ قابل‌محاسبه است.

$$m'=\sqrt{\frac{V}{U}}=\sqrt{\frac{A_2Dic_1\left(\frac{1}{P_1}+\frac{1}{P_2}\right)}{(A_1+C_{tr})(1+iL)ic_2\left(1-\frac{D}{P_2}\right)}} \quad (۴۵)$$

الگوریتم ۱ را به رابطهٔ ۴۰ تعمیم دهیم.

الگوریتم ۲

گام ۱: m' را از رابطهٔ ۴۵ محاسبه می‌کنیم. گردبه‌بالای آن را m'' درنظر می‌گیریم و از رابطهٔ ۳۹، $Q_2^*(m^*)$ را محاسبه می‌کنیم.

گام ۲: اگر $m''=1$ است، سیاست بهینه را یافته‌ایم.

تعداد محموله‌های بهینه $m^*=1$ است. Q_2^* را از رابطهٔ ۳۹ محاسبه می‌کنیم و متوقف می‌شویم. در غیر این صورت، قرار می‌دهیم $k=m''$ و به گام بعدی می‌رویم.

گام ۳: از رابطهٔ ۴۰ مقدار $\overline{TC}^*_{NPV}(m'')$ را محاسبه می‌کنیم و قرار می‌دهیم $TC_{\min}=\overline{TC}^*_{NPV}(m'')$ و $k_{\min}=m''$.

گام ۴: اگر $k=1$ است، سیاست بهینه را یافته‌ایم. تعداد محموله‌های بهینه $m^*=k_{\min}$ است. Q_2^* را از رابطهٔ ۳۹ محاسبه می‌کنیم و متوقف می‌شویم. در غیر این صورت، قرار می‌دهیم $k=k-1$ و به گام بعدی می‌رویم.

گام ۵: مقدار $\overline{TC}^*_{NPV}(k)$ را از رابطهٔ ۴۰ و $Q_2^*(k)$ را از رابطهٔ ۳۹ محاسبه می‌کنیم. اگر $\overline{TC}^*_{NPV}(k)<TC_{\min}$، قرار می‌دهیم $TC_{\min}=\overline{TC}^*_{NPV}(k)$ و $k_{\min}=k$ و به گام چهارم می‌رویم. در غیر این صورت، به سیاست بهینه رسیده‌ایم: $m^*=k_{\min}$ و $Q_2^*=Q_2^*(k_{\min})$.

نتایج عددی

در این بخش، با تولید ۱۰۰ نمونهٔ تصادفی از مسئله، نتایج رویکرد هزینهٔ متوسط ارائه‌شده در پژوهش [۲۷]، با رویکرد ارزش خالص فعلی تقریب‌شده مقایسه می‌شود و بر زمان تدارک و نرخ تنزیل، تحلیل حساسیت انجام می‌گیرد. الگوریتم‌های ارائه‌شده در این پژوهش، در نرم‌افزار MATLAB R2013a 32 bit کدنویسی شده‌اند و از رایانهٔ Dell INSPIRON core i3,4 G RAM با سیستم‌عامل Windows 7 32 bit استفاده شده است. برای حل مدل بدون‌تقریب رویکرد ارزش خالص فعلی، از حل‌کنندهٔ غیرخطی Baron در نرم‌افزار GAMS Win32 24.1.2 استفاده شده است.

فرض کنید که سیاست به‌دست‌آمده از یکی از دو رویکرد هزینهٔ متوسط یا ارزش خالص فعلی تقریب‌شده، $Q_2=Q_0$ و $m=m_0$ باشد. جواب (Q_0,m_0) تابع هدف، رویکرد مذکور را کمینه می‌کند، اما هزینهٔ واقعی که به سیستم تحمیل می‌شود، برابر است با $TC_{NPV}(Q_0,m_0)$. به‌عبارت دیگر، هزینهٔ واقعی با لحاظ‌کردن مستقیم ارزش زمانی پول در محاسبات (در رابطهٔ تقریب‌نشدهٔ رویکرد ارزش خالص فعلی) به‌دست می‌آید. با توجه به روابط ۱۶ و ۳۴، برای هردو حالت زمان تدارک صفر و غیرصفر می‌توان نوشت:

$$TC_{NPV}=pD-AS_{NPV} \tag{۴۶}$$

بنابراین، خطای رویکرد را به‌صورت رابطهٔ ۴۷ تعریف می‌کنیم که مقدار خطای هزینهٔ واقعی تحمیل‌شده به سیستم، نسبت به هزینهٔ کمینهٔ واقعی را نشان می‌دهد.

$$err\%=\frac{TC_{NPV}(Q_0,m_0)-TC^*_{NPV}}{TC^*_{NPV}}\times 100 \tag{۴۷}$$

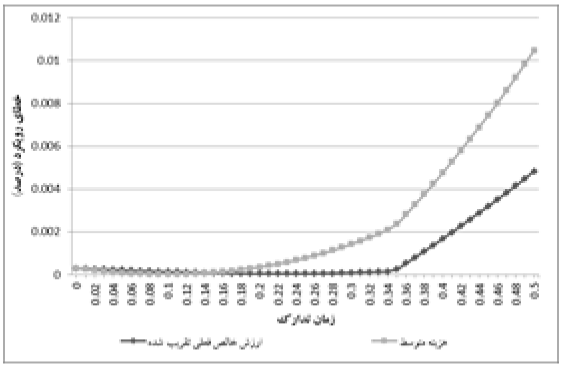
پارامترهای مسائل نمونه‌ای که در این بخش بررسی می‌شوند، با توزیع یکنواخت گسسته مقداردهی شده‌اند. نرخ تنزیل برای تمامی مسائل این بخش، ثابت، و ۰/۲ درنظر گرفته شده است. مشخصات رده‌های مسئله، در جدول ۱ قابل‌مشاهده است. در این ۱۰۰ مسئله، با افزایش زمان تدارک، روند تغییرات خطای رویکردهای هزینهٔ متوسط و ارزش خالص فعلی تقریب‌شده ارزیابی شده است. در شکل ۵ و شکل بزرگ‌نمایی‌شدهٔ ۶، میانگین نمودار خطای رویکردهای هزینهٔ متوسط و ارزش خالص فعلی تقریب‌شده، نسبت به زمان تدارک، در ۱۰۰ مسئلهٔ مورد بررسی قابل‌مشاهده است.

مشاهده می‌شود که با افزایش زمان تدارک، عملکرد رویکرد ارزش خالص فعلی تقریب‌شده، به‌لحاظ کاهش خطا، بر عملکرد رویکرد هزینهٔ متوسط پیشی می‌گیرد.

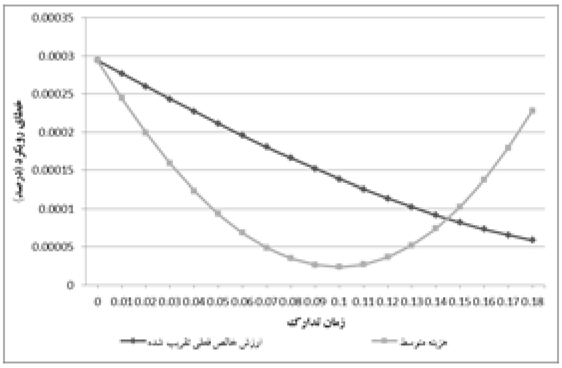
پیش‌نیاز استفاده از تقریب خطی به‌وسیلهٔ بسط مک‌لورن، *iT<<1* است [۱۲]. در ۱۰۰ مسئلهٔ تولیدشده، با افزایش نرخ تنزیل، خطای رویکردهای ارزش خالص فعلی تقریب‌شده و هزینهٔ متوسط، نسبت به رویکرد ارزش خالص فعلی تقریب‌نشده بررسی شده است. بازهٔ تغییر نرخ تنزیل، [۰/۸۱، ۰/۰۱] انتخاب شده است.

جدول ۱. مشخصات توزیع پارامترهای مسائل نمونه

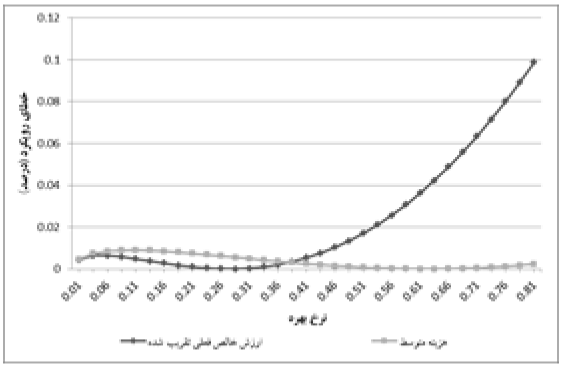
پارامتر	بازهٔ توزیع یکنواخت
D	[۲۰۰، ۸۰۰]
P_1	[۱۵۰۰، ۱۸۰۰]
P_2	[D+۲۰، P_1-۲۰]
A_1, A_2	[۵۰، ۴۰۰]
C_{tr}	[۱۰۰، ۵۰۰]
c_1, c_2	[۱۰، ۱۰۰]



شکل ۵. نمودار خطاها نسبت به افزایش زمان تدارک



شکل ۶. نمودار بزرگ‌نمایی‌شدهٔ خطاها نسبت به افزایش زمان تدارک



شکل ۷. نمودار میانگین خطا نسبت به افزایش نرخ تنزیل

نمودار روند میانگین خطاها، در شکل ۷ قابل‌مشاهده است. همان‌طورکه در شکل ۷ پیداست، با افزایش نرخ تنزیل، خطای رویکرد ارزش خالص فعلی تقریب‌شده، روندی افزایشی دارد. عملکرد رویکرد ارزش خالص فعلی تقریب‌شده، تا حدود نرخ تنزیل ۳۸ درصد، بهتر از عملکرد رویکرد هزینهٔ متوسط است، اما با افزایش بیشتر نرخ تنزیل، خطای رویکرد ارزش خالص فعلی تقریب‌شده، بر خطای رویکرد هزینهٔ متوسط پیشی می‌گیرد؛ درحالی‌که خطای رویکرد هزینهٔ متوسط در همین بازه، روند تقریباً کاهشی دارد. نرخ تنزیل ۰/۸۱ (۸۱ درصد) در جهان واقعی نامتعارف است، اما حتی در این نرخ هم خطای ۰/۰۰۲ درصد، بسیار ناچیز و قابل‌قبول است. این بدان معناست که در نرخ تنزیل بزرگ هم، رویکرد هزینهٔ متوسط نتیجه‌ای قابل‌اعتماد به دست می‌دهد. همچنین تقریب خطی به‌وسیلهٔ بسط مک‌لورن، در نرخ تنزیل ۸۱ درصد، خطای ۰/۱ درصد دارد که با وجود اینکه در قیاس با خطای رویکرد هزینهٔ متوسط بزرگ است، خطایی قابل‌قبول به‌شمار می‌رود.

نتیجه‌گیری

در این مقاله، مسئلهٔ تعیین اندازهٔ دستهٔ مشترک در سیستم موجودی دو رده‌ای را با لحاظ‌کردن زمان تدارک، به‌وسیلهٔ رویکرد ارزش خالص فعلی بررسی کردیم. پس از تقریب خطی به‌وسیلهٔ بسط مک‌لورن، نگاشت‌هایی برای هزینه‌های نگهداری و آماده‌سازی به‌دست آوردیم و به این نتیجه رسیدیم که هم در حالت زمان تدارک صفر و هم غیرصفر، دو رویکرد هزینهٔ متوسط و ارزش خالص فعلی، به یک نتیجه منجر نمی‌شوند و ناهم‌ارزی اتفاق می‌افتد. همچنین به‌وسیلهٔ روابط تحلیلی، الگوریتم دقیق برای یافتن سیاست بهینه، در حالات زمان تدارک صفر و غیرصفر ارائه کردیم. همچنین با تحلیل نتایج عددی، به این نتیجه رسیدیم که رویکرد ارزش خالص فعلی تقریب‌شده در قیاس با رویکرد هزینهٔ متوسط، با افزایش زمان تدارک، خطای کمتر و با افزایش نرخ تنزیل، خطای بیشتری دارد.

مراجع

1. Muller, H. E. (2009). "Supplier integration: an international comparison of supplier and automaker experiences", *International Journal of Automotive Technology and Management*, Vol. 9, No.1, PP. 18-39.
2. Clark, A. J. (1958). "A dynamic, single-item, multi-echelon inventory model", RM-2297, *Rand Corporation*, Santa monica, California
3. Clark, A. J. and Scarf, H. (1960). "Optimal policies for a multi-echelon inventory problem", *Management Science*, Vol. 6, No. 4, PP. 475–490.
4. Goyal, S. (1976). "An integrated inventory model for a single supplier-single customer problem", *International Journal of Production Research*, Vol. 15, No. 1, PP. 107–111.
5. Banerjee, A. (1986). "A joint economic-lot-size model for purchaser and vendor", *Decision Sciences*, Vol. 17, No. 3, PP. 292–311.
6. Goyal, S. (1988). "A joint economic-lot-size model for purchaser and vendor", *Management Science*, Vol. 19, No. 1, PP. 236–241.
7. Monahan, J. (1984). "A quantity discount pricing model to increase vendor profits", *Management Science*, Vol. 30, No. 6, PP. 720–726.
8. Lee, H. L. and Rosenblatt, M. J. (1986). "A generalized quantity discount pricing model to increase supplier's profits", *Management Science*, Vol. 32, No. 9, PP. 1177–1185.
9. Hwang, H. and Kim, K.H. (1986). "Supplier's discount policy with a single price break point", *Production Economics Supply*, Vol. 10, No. 1, PP. 279–286.
10. Kim, K. H. and Hwang, H. (1989). "Simultaneous improvement of supplier's profit and buyer's cost by utilizing quantity discount", *J Oper Res Soc*, Vol. 40, No. 3, PP. 255–265.

11. Joglekar, P. N. (1988). Note—Comments on "A quantity discount pricing model to increase vendor profits", *Management Science*, Vol. 34, No. 11, PP. 1391–1398.

12. Beullens, P. and Janssens, G. K. (2014). "Adapting inventory models for handling various payment structures using net present value equivalence analysis", *International Journal of Production Economics*, Vol. 157, No. 1, PP. 190–200.

13. Silver, E. A., Peterson, R. and Pyke, D. F. (1998). *Inventory Management and Production Planning and Scheduling*, Wiley, New York.

14. Hillier, F. S. and Lieberman, G. J. (2005). *Introduction to operations research*, McGraw-Hill, New York, London.

15. Beullens, P. (2014). "Revisiting foundations in lot sizing-connections between Harris, Crowther, Monahan, and Clark", *International Journal of Production Economics*, Vol. 155, No. 1, PP. 68–81.

16. Lu, L. (1995). "A one-vendor multi-buyer integrated inventory model", *European Journal of Operational Research*, Vol. 81, No. 2, PP. 312–323.

17. Goyal, S. K. (1995). "A one-vendor multi-buyer integrated inventory model: A comment", *European Journal of Operational Research*, Vol. 82, No. 1, PP. 209–210.

18. Hill, R. M. (1999). "The optimal production and shipment policy for the single-vendor single buyer integrated production-inventory problem", *International Journal of Production Research*, Vol. 37, No. 11, PP. 2463–2475.

19. Hill, R. and Omar, M. (2006). "Another look at the single-vendor single-buyer integrated production-inventory problem", *International Journal of Production Research*, Vol. 44, No. 4, PP. 791–800.

20. Munson, C. and Rosenblatt, M. (2001). "Coordinating a three-level supply chain with quantity discounts", *IIE Transactions*, 33, No. 5, 371–384.

21. Van der Laan, E., and Teunter, R. (2002). "Average costs versus net present value: a comparison for multi-source inventory models", *Quantitative Approaches to Distribution Logistics and Supply Chain Management*, PP. 359–378, Springer, Berlin Heidelberg

22. Beullens, P. and Janssens, G. K. (2011). "Holding costs under push or pull conditions – the impact of the anchor point", *European Journal of Operational Research*, Vol. 215, No. 1, PP. 115–125.

23. Ben-Daya, M. and Al-Nassar, A. (2008). "An integrated inventory production system in a three-layer supply chain", *Production Planning and Control*, Vol. 19, No. 2, PP. 97–104.

24. Giri, B. and Bardhan, S. (2011). "Coordinating a two-echelon supply chain under inflation and time value of money", *International Journal of Industrial Engineering Computations*, Vol. 2, No. 4, PP. 811–818.

25. Gloc, C., and Kim., T. (2014). "Shipment consolidation in a multiple-vendor single-byer integrated inventory model", *Computers and Industrial Engineering*, Vol. 70, No. 1, PP. 31–24.

26. Sadjadi, S., Zokaee, S. and Dabiri, N. (2014). "A single-vendor single-buyer joint economic lot size model subject to budget constraints", *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, Vol. 70, No. 9-12, PP. 1699–1707.

27. Malekian, Y. and Mirmohammadi S. H. (2015). "Determination of joint economic lot-size in a two-echelon production system with finite rate considering lead-time", *International Journal of Optimization in Civil Engineering*, Vol. 5, No. 3, PP. 375–389.

28. Glock, C. H. (2012). "The joint economic lot size problem: a review", *International Journal of Production Economics*, Vol. 135, No. 2, PP. 671–686.

29. Grubbström, R. W. (1967). "On The Application of the laplace transform to certain economic problems", *Management Science*, Vol. 13, No. 7, PP. 558–567.

واژه‌های لاتین به ترتیب استفاده در متن

1. Average Cost Approach
2. Net Present Value Approach
3. Echelon
4. Economic Order Quantity
5. Lot-for-lot
6. Suboptimal
7. Serial Multi-Echelon Systems
8. Anchor Point
9. Lead-time
10. Joint Economic Lot-Size
11. Laplace Transform