

# ارائه کران پایین مطلوب به منظور زمان بندی زنجیره تأمین دومرحله‌ای با در نظر گرفتن زمان آماده‌سازی متفاوت

جواد صابری نسب<sup>۱</sup>، راشد صحرائیان<sup>۲\*</sup>، محمد روحانی نژاد<sup>۳</sup>

۱. دانشجوی کارشناسی ارشد مهندسی صنایع، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه شاهد، تهران

۲. دانشیار گروه مهندسی صنایع، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه شاهد، تهران

۳. دانشجوی دکتری مهندسی صنایع، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه شاهد، تهران

(تاریخ دریافت: ۹۵/۰۳/۱۷، تاریخ دریافت روایت اصلاح‌شده: ۹۷/۰۳/۰۴، تاریخ تصویب: ۹۷/۰۴/۱۲)

## چکیده

در این پژوهش، زمان بندی زنجیره تأمین دومرحله‌ای، شامل تولیدکنندگان و توزیع‌کنندگان بررسی شده است. پردازش کارها با ماشین‌های بسته‌بندی سریالی صورت می‌گیرد. وسایل نقلیه، کارها را برای پردازش‌های بیشتر به مشتریان تحویل می‌دهند. ظرفیت هر دسته محدود است و هزینه واحد تحویل هر دسته ثابت و مستقل از تعداد کارها در هر دسته محسوب می‌شود. زمان پردازش و آماده‌سازی کارها با توجه به انواع آن‌ها نیز متفاوت است. زمان آماده‌سازی با توجه به نوع کار درون هر دسته در نظر گرفته شده است. هدف مسئله حداقل کردن زمان پایان آخرین کار<sup>۱</sup> است. مدل سازی مسئله با روش برنامه‌ریزی عدد صحیح مختلط انجام و یک کران پایین<sup>۲</sup> برای این مسئله مدنظر قرار گرفته است. در پایان نیز نتایج محاسباتی برای بررسی کارایی کران پایین بیان شده است.

**واژه‌های کلیدی:** دسته تحویل، زمان بندی زنجیره تأمین، زمان آماده‌سازی، کران پایین.

## مقدمه

باید توجه داشت که کارایی و اثربخشی هر سازمانی حاصل عملکرد مدیریت و ساختار زنجیره تأمین آن است [۳]. در مسائل زمان بندی سنتی فرض می‌شد که همواره منابع نامحدودی برای تحویل کالاهای تمام شده به مشتریان وجود دارد و زمانی برای حمل و نقل کالا در نظر گرفته نمی‌شد. هنگامی که مقداری کافی از موجودی میان مراحل تولید و توزیع وجود دارد، می‌توان عملیات این دو مرحله را جدا از هم در نظر گرفت؛ از این رو با استفاده از روش‌های سنتی می‌توان به ارائه راه‌حل‌های مؤثر و معقول پرداخت [۴]. با این حال، سطح موجودی بالا منجر به افزایش هزینه‌های نگهداری موجودی و زمان جریان کل<sup>۴</sup> در زنجیره تأمین شده است.

در روش سنتی، تولید و توزیع به‌طور متوالی و جداگانه و بدون هماهنگی میان مراحل در نظر گرفته می‌شود. برای کاهش هزینه‌های تولید و توزیع، از ماشین‌های پردازش دسته‌ای و تحویل دسته‌ای کالاها استفاده می‌شود. زمان بندی دسته‌ها در سیستم‌های تولیدی از سیاست‌های رایج در صنایع است. در دهه گذشته زمان بندی دسته‌ها به

مدیریت زنجیره تأمین یکی از مقوله‌های مدنظر در جهان کسب و کار مدرن است که تمامی مراحل تولید از مواد اولیه تا ساخت محصول نهایی را شامل می‌شود [۱]. زنجیره تأمین مجموعه‌ای از همه نهادهای کسب و کار است که با هم کار می‌کنند تا اطمینان حاصل شود مشتری محصول یا خدمت را در زمان مناسب، با کیفیت مطلوب و با هزینه کمتری دریافت می‌کند. مدیریت زنجیره تأمین، این نهادها را با یکدیگر هماهنگ می‌کند. شبکه زنجیره تأمین نیز نهادهای کسب و کار را به صورت مناسب برمی‌گزیند که موجب افزایش عملکرد کلی زنجیره تأمین می‌شود [۲].

مفاهیمی نظیر تولید بهنگام<sup>۳</sup> موجب شده است که کارخانه‌ها به کاهش سطح موجودی خود تمایل پیدا کنند. همچنین این پدیده موجب توجه به مدل‌های یکپارچه نیز شده است. در میان این سیستم‌های یکپارچه، ارتباط زمان بندی سفارش‌ها در مرحله تولید و زمان بندی برای توزیع آن‌ها یکی از زمینه‌های مهم است.

## پیشینه پژوهش

مفهوم زمان‌بندی زنجیره تأمین را اولین بار هال و پاتس ارائه کردند [۱۰]. در چنین مسائلی، هدف، کاهش هزینه‌های تولید و توزیع است و انواعی از مسائل زمان‌بندی، تحویل کالاها و دسته‌بندی را شامل می‌شود. آن‌ها الگوریتم برنامه‌ریزی پویای مؤثری برای هر یک از این مسائل و مکانیسم‌هایی برای هماهنگی آن‌ها معرفی کردند. یانگ و همکاران [۱۱] مسئله زمان‌بندی زنجیره تأمین را ارائه کردند که در آن تولیدکننده سفارش‌ها را از خرده‌فروشان دریافت و سپس سفارش‌های خود را به تأمین‌کنندگان ارسال می‌کند. پس از این، تولیدکننده از سفارش‌ها برای تولید محصول بهره می‌برد. هدف آن‌ها حداقل کردن مجموع هزینه تحویل کل<sup>۵</sup> و زمان جریان کل است.

هوانگ و همکاران [۱۲] مسئله زمان‌بندی جریان کارگاهی دوماشینه را که شامل  $n$  کار است بررسی کردند. در این مسئله توالی کارها برای پردازش ثابت است. هدف آن‌ها کاهش زمان اتمام کارهاست<sup>۶</sup> هوانگ و لین [۱۳] مسئله زمان‌بندی جریان کارگاهی دومرحله‌ای را که کارها به صورت دسته‌ای با توالی ثابت پردازش می‌شوند ارزیابی کردند، با این هدف که مجموع تأخیرات کل<sup>۷</sup> و تعداد کارهای با تأخیر<sup>۸</sup> را بررسی کنند.

کیم و همکاران [۱۴] مدل زمان‌بندی و برنامه‌ریزی تولید یکپارچه را برای محصولات چندسطحی با در نظر گرفتن معیارهای تولید و محدودیت‌های زمان‌بندی ارائه و به روش ابتکاری به حل مسئله پرداختند. مهرآوران و لانگدران [۱۵] مسئله زمان‌بندی جریان کارگاهی را با زمان آماده‌سازی وابسته به توالی<sup>۹</sup> بررسی کردند. هدف مسئله حداقل کردن موجودی کالای در جریان ساخت<sup>۱۰</sup> برای تولیدکننده و افزایش سطح خدمات برای مشتریان بود. آن‌ها با توسعه روش ابتکاری و استفاده از مفهوم جست‌وجوی ممنوعه<sup>۱۱</sup> به حل مسئله پرداختند.

پی و همکاران [۱۶] مسئله زمان‌بندی زنجیره تأمین دومرحله‌ای را به منظور حداقل کردن زمان پایان آخرین کار ارزیابی کردند. اندازه کارها متفاوت است و کارها انواع گوناگونی دارند. برای کاهش هزینه‌های توزیع از تحویل دسته‌ای بهره بردند و به کمک الگوریتم برنامه‌ریزی پویا به

این دلیل که ممکن است سبب پردازش ارزان‌تر و سریع‌تر کارها شود، بسیار مدنظر قرار گرفته بود [۵].

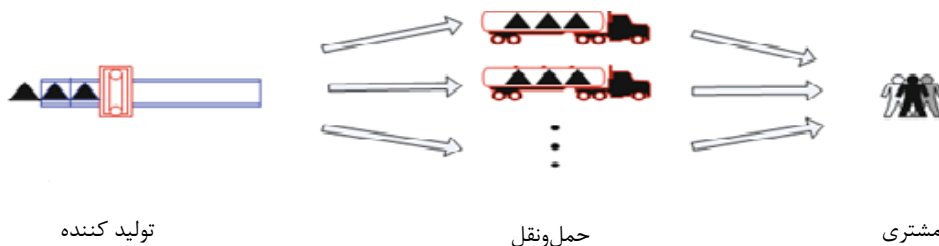
دلیل اصلی استفاده از ماشین‌های پردازش دسته‌ای، کاهش زمان راه‌اندازی ماشین‌آلات است که این زمان می‌تواند ناشی از تغییر در ابزارآلات یا تمیز کردن ماشین‌های تولیدی باشد. ماشین‌های پردازش دسته‌ای به دو نوع پردازش دسته‌ای سریال و پردازش دسته‌ای موازی تقسیم می‌شود. در دسته‌بندی سریال، کارها به صورت انفرادی پردازش می‌شود و زمان پردازش کل با مجموع زمان پردازش همه کارهای درون یک دسته برابر است. در ماشین دسته‌بندی موازی، چندین کار به طور هم‌زمان پردازش می‌شود و زمان پردازش کل دسته، با زمان پردازش آخرین کار درون یک دسته برابر خواهد بود [۶]. برخی صنایع که از ماشین‌های پردازش دسته‌ای استفاده می‌کنند عبارت‌اند از: صنایع فلز، عملیات حرارتی، اجاق‌گاز، فرایندهای شیمیایی مخازن و کوره، فرایند تست مدارهای الکترونیکی و فرایند ساخت ویفر [۷]. در این مقاله بر ماشین‌های دسته‌بندی سریال تمرکز شده است.

یکی دیگر از دلایل افزایش قیمت تمام‌شده کالاها، هزینه حمل‌ونقل آن‌هاست. چنگ و کاهلیچر [۸] روشی را معرفی کرده‌اند که براساس آن درون یک دسته چندین کار قرار می‌گیرد. طراحی دسته تحویل، روش مناسبی برای کاهش هزینه حمل‌ونقل است [۹].

در این پژوهش، مسئله زمان‌بندی زنجیره تأمین دومرحله‌ای که مراحل تولید و توزیع به طور یکپارچه است و کارها گوناگون هستند، بررسی می‌شود. به منظور کاهش هزینه‌های تولید، کارها به صورت دسته‌ای پردازش می‌شوند و تعیین زمان آماده‌سازی دسته‌ها با توجه به انواع کارهای موجود در دسته صورت می‌گیرد. برای کاهش هزینه‌های توزیع، کارها به صورت دسته‌ای حمل می‌شوند.

در بخش بعدی مقاله، مروری مختصر بر ادبیات زمان‌بندی در زنجیره تأمین صورت می‌گیرد. در ادامه، پس از تعریف مسئله، مدل ریاضی آن بیان و به کمک آن کران پایین مطلوبی برای مسئله ارائه می‌شود. در نهایت، بررسی نتایج محاسباتی صورت می‌گیرد. نوشتار با جمع‌بندی نتایج و ارائه زمینه‌های پژوهش‌های آتی خاتمه می‌یابد.

دومرحله‌ای پرداخته شد. مرحله اول شامل تولیدکننده و مرحله دوم شامل توزیع‌کننده است. فرض می‌شود کارخانه‌ای تولیدی وجود دارد که باید  $N$  کار را پردازش کند. پس از پردازش، کارها به کمک وسایل حمل‌ونقل تحویل مشتری داده می‌شوند. برای تبدیل مسئله مورد نظر به مسئله زمان‌بندی، تولیدکنندگان و وسایل نقلیه را یک ماشین در نظر می‌گیریم. شکل ۱ نمای کلی مسئله مدنظر را نشان می‌دهد.



شکل ۱. نمایی از زمان‌بندی زنجیره تأمین از تولیدکننده تا مشتری

حل مسئله پرداخته شد. همچنین زمان آماده‌سازی را برای هر دسته ثابت در نظر گرفتند. در پژوهش حاضر، زمان آماده‌سازی برای هر دسته با توجه به نوع کارهای درون آن‌ها متغیر است. همچنین کران پایین مطلوبی برای حل مسئله پیش‌رو ارائه شده است.

### شرح مدل

در این مقاله به بررسی زمان‌بندی زنجیره تأمین

$$p_k = \sum_{j_1 \in b_k} p_i \quad (I = 1, 2, \dots, N) \quad (1)$$

زمان آماده‌سازی برای هر دسته با توجه به نوع کارهای درون هر دسته تعیین می‌شود. برای تعیین این زمان به صورت زیر عمل می‌کنیم:

۱. کارهایی را که در هر دسته موجود است مشخص می‌کنیم؛
۲. نوع کارهایی را که در هر دسته وجود دارد تعیین می‌کنیم؛
۳. از آنجا که هر نوع از کارها زمان آماده‌سازی مخصوصی دارد، پس از شناسایی نوع کارهای موجود در هر دسته، زمان آماده‌سازی برابر با بیشترین مقدار  $t_1$  (زمان آماده‌سازی کار نوع ۱ ام) است.

در مثال ۱، در دسته اول کارهای ۱ و ۴ قرار دارند که کار ۱ به کار نوع ۱ و کار ۴ به کار نوع ۲ مربوط است؛ بنابراین زمان آماده‌سازی برابر است با:

$$\text{Max} \{t_1, t_2\} = \max \{2, 3\} = 3$$

به طور کلی می‌توان از معادله ۲ برای تعیین زمان آماده‌سازی استفاده کرد:

$$f_k = (x_{1k} y_{1k} t_1, x_{2k} y_{2k} t_2, \dots, x_{1n} y_{1n} t_n) \quad (2)$$

که  $f_k$  زمان آماده‌سازی دسته  $k$  ام است. تعریف  $x_{ik}$  و

$N$  کار مستقل برای پردازش در دسترس تولیدکننده قرار دارد و کارها به  $n$  نوع مختلف تقسیم می‌شوند. کار نوع  $l$  ام به صورت  $j^l$  نمایش داده می‌شود:

$$j = j^1 \cup j^2 \dots \cup j^l \cup \dots \cup j^n$$

زمان پردازش با توجه به نوع کارها با یکدیگر متفاوت است. همه کارها داخل دسته‌ها پردازش شده‌اند و تا زمانی که کل دسته پردازش نشود هیچ کاری آزاد نمی‌شود. مسئله شامل دو مرحله تولید و حمل کارها به کمک وسایل نقلیه از تولیدکننده به مشتری است. در مرحله اول، کارها روی ماشین‌های دسته‌بندی سریال پردازش می‌شوند. فرض می‌شود ظرفیت این ماشین‌ها ثابت و برابر  $c$  است؛ بنابراین اندازه همه کارها در هر دسته نباید از ظرفیت ماشین تجاوز کند. پیش از اینکه پردازش یک دسته شروع شود، زمان راه‌اندازی برای آن دسته نیاز است.  $p_k$  و  $p_i$  به ترتیب نشان‌دهنده زمان پردازش کار  $i$  ام و دسته  $k$  ام هستند. در ماشین‌های دسته‌بندی سریال، کارها یکی پس از دیگری پردازش می‌شوند؛ بنابراین زمان پردازش دسته  $k$  ام با زمان پردازش تمامی کارهایی که در دسته  $k$  ام قرار دارند برابر است. معادله ۱ زمان پردازش همه کارهایی را که در دسته  $k$  ام قرار دارند نشان می‌دهد:

$M$  و  $C$  به ترتیب نشان دهنده تولیدکننده و مشتری هستند. 1 نشان می دهد مدل ما تک ماشینی است.  $b=c$  نشان دهنده این است که تولیدکننده یک ماشین دسته بندی سریال با ظرفیت  $c$  دارد.  $\tau_k = T$  بدین معناست که زمان حمل از تولیدکننده تا مشتری ثابت و برابر با  $T$  است.  $\sum_{j_i \in b_k} s_i \leq c$  بر این نکته تأکید دارد که اندازه کارها در دسته نباید از ظرفیت ماشین بیشتر شود.  $C_{max}$  بدین معناست که هدف مسئله، حداقل کردن زمان پایان آخرین کار است. برای سادگی مسئله را به صورت  $\Phi$  نشان می دهیم.

مثال ۱. پنج کار برای پردازش وجود دارد. مقادیر پارامترها به شکل زیر است:

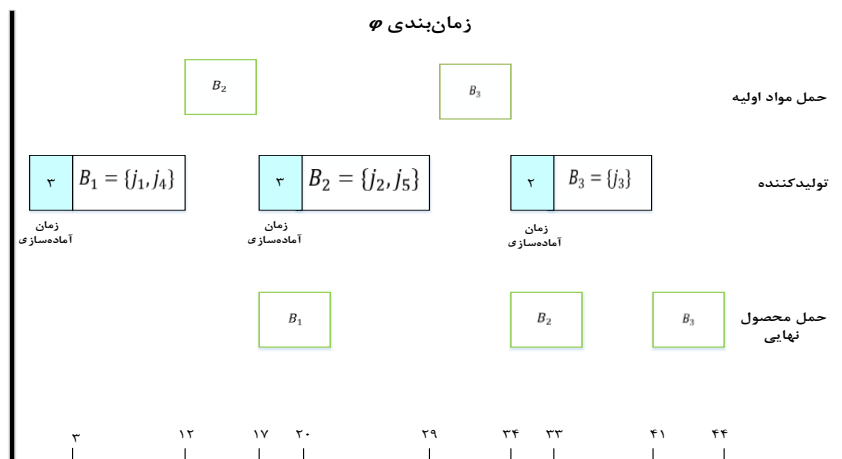
$$p_4 = p_5 = 5, p_1 = p_2 = p_3 = 4, j^2 = \{j_4, j_5\},$$

$$j^1 = \{j_1, j_2, j_3\}, T = 5, c = 11, t^2 = 3, t^1 = 2,$$

$$s_5 = 5, s_4 = 4, s_1 = s_2 = s_3 = 6$$

$y_{ik}$  در بخش معرفی پارامترها و متغیرها آمده است. پس از تعیین زمان آماده سازی، در مرحله دوم برای جابه جایی کارها برنامه ریزی می کنیم. در ابتدا باید بیان کرد که پیش از پردازش کارها، مواد اولیه با وسایل حمل و نقل وارد بخش تولید می شوند (فرض می شود وسایل حمل به صورت دو سر پر حرکت می کنند). تمامی دسته ها به کمک وسیله نقلیه برای پردازش های بیشتر به مشتریان ارسال می شود. زمان حمل و نقل ثابت و برابر  $T$  است. در این مقاله فرض می شود که ظرفیت وسیله نقلیه و ماشین های تولیدی با هم برابر است؛ بنابراین هر وسیله نقلیه ای در هر جابه جایی تنها یک دسته را جابه جا می کند. با استفاده از مفهوم ارائه شده گراهام و همکاران [۱۷] مسئله پیشنهادی به صورت معادله ۳ می آید:

$$M \Rightarrow C, 1 \left| b=c, \tau_k = T \sum_{j_i \in b_k} s_i \leq c \right| C_{max} \quad (3)$$



شکل ۲. گانت چارت زمان بندی بهینه برای مثال ۱

$$B_1 = \{j_1, j_4\}, B_2 = \{j_2, j_5\}, B_3 = \{j_3\},$$

$$C_{max} = makespan = 44$$

پیش از ارائه مدل ریاضی مسئله، فرضیه های زیر برای مسئله ارائه می شود:

- همه تسهیلات (ماشین و وسایل نقلیه) در زمان صفر در دسترس هستند.
- پیش از اینکه دسته ای شروع به پردازش کند به زمان آماده سازی نیاز دارد.
- ظرفیت ماشین بزرگ تر از اندازه همه کارهاست.

برای حل مسئله، ابتدا باید به این نکته توجه کرد که ظرفیت هر دسته نباید از ظرفیت ماشین دسته بندی بیشتر شود؛ بنابراین کارهای ۱ و ۱ و کارهای ۲ و ۳ در یک دسته قرار نمی گیرند. فرض می شود که برای پردازش دسته اول مواد اولیه در دسترس است، اما پیش از پردازش دسته های بعدی، مواد اولیه با وسایل حمل و نقل در دسترس تولیدکننده قرار می گیرد. زمان آماده سازی برای هر دسته با توجه به نوع کارهای درون آن تعیین می شود. شکل ۲ نشان می دهد مسئله  $\Phi$  شامل سه دسته است:

- به مقدار کافی وسیله نقلیه برای پردازش کارها وجود دارد.
  - زمان آماده‌سازی برای ماشین به توالی دسته‌ها وابسته نیست.
  - وقفه مجاز نیست؛ یعنی زمانی که دسته‌ای شروع به پردازش می‌کند عملیات تا زمان تکمیل پردازش متوقف نمی‌شود.
  - پیش از شروع پردازش هر دسته (به غیر از دسته اول) مواد اولیه با وسایل حمل و نقل وارد کارخانه تولیدی می‌شوند.
- $x_{ik}$  متغیر صفر و ۱ که اگر کار  $i$  ام درون دسته  $k$  ام باشد، ۱ و در غیر این صورت صفر را می‌پذیرد.
- $Z_k$  متغیر صفر و یک که اگر حداقل یک کار به دسته  $k$  ام اختصاص یابد، ۱ و در غیر این صورت صفر می‌گیرد.
- $f_k$  متغیری پیوسته برای تعیین زمان شروع پردازش کار  $i$  ام.
- در نهایت، مدل به صورت مسئله زمان بندی زنجیره تأمین فرمول بندی می‌شود:

$$\min C_{\max} = \sum_{i=1}^N P_i + \sum_{k=1}^h f_k + T \sum_{k=1}^h Z_k \quad (۴)$$

s.t.

$$f_k \geq x_{ik} y_{il} t_l \quad \forall i=1, \dots, N, l=1, \dots, n, k=1, \dots, h \quad (۵)$$

$$\sum_{k=1}^h x_{ik} = 1 \quad \forall i=1, \dots, N \quad (۶)$$

$$\sum_{i=1}^N s_i x_{ik} \leq c \quad \forall k=1, \dots, h \quad (۷)$$

$$\sum_{i=1}^N x_{i,k} - z_k M \leq 0 \quad \forall k=1, \dots, h \quad (۸)$$

$$x_{ik}, y_{il}, z_{ij}, d_{kr} \in \{0 \text{ or } 1\} \quad \forall i, j, l, k, r \quad (۹)$$

عبارت ۴ نشان دهنده تابع هدف مسئله است. همان طور که بیان شد هدف مسئله حداقل کردن زمان پایان آخرین کار است که سه قسمت را شامل می‌شود. در قسمت اول، محاسبه مجموع زمان پردازش آخرین کار صورت می‌گیرد. در قسمت دوم مجموع زمان آماده‌سازی برای هر دسته تعیین و در قسمت سوم زمان مجموع زمان حمل و نقل محصول نهایی و مواد اولیه در نظر گرفته می‌شود. محدودیت ۵ زمان آماده‌سازی را برای هر دسته مشخص می‌کند. محدودیت ۶ بیان می‌کند که هر کار تنها باید به یک دسته تعلق بگیرد. براساس محدودیت ۷ اندازه کل کارها در یک دسته نباید از ظرفیت ماشین تجاوز کند. محدودیت ۸ نشان می‌دهد پیش از تخصیص کار  $i$  ام به دسته  $h$  ام باید دسته  $h$  ام ایجاد شود. متغیرهای مدل در محدودیت ۹ تعریف می‌شوند.

### کران پایین مسئله

در این مقاله یک کران پایین مطلوب پیشنهاد می‌شود. برای حداقل کردن زمان حمل و نقل کل باید تعداد دسته‌ها را حداقل کرد. به منظور کاهش زمان آماده‌سازی، کارهایی

### مدل ریاضی

در این بخش، مدل برنامه ریزی خطی عدد صحیح مختلط برای فرمول بندی زمان بندی زنجیره تأمین تک هدفه ارائه می‌شود که کارها به صورت دسته‌ای با ماشین‌های دسته بندی سریال پردازش می‌شوند. پیش از ارائه مدل پیشنهادی، پارامترها، شمارنده‌ها و متغیرهای مدل به صورت زیر معرفی می‌شوند.

- $N$  تعداد کل کارها
- $n$  تعداد کل انواع کارها
- $h$  تعداد کل دسته‌ها  $\sum_{j_i \in b_k} s_i / c \leq h \leq N$
- $i, j$  شمارنده کارها  $(i, j: 1, 2, \dots, N)$
- $l$  شمارنده انواع کارها  $(l: 1, 2, \dots, n)$
- $k$  شمارنده دسته‌ها  $(k, f: 1, 2, \dots, h)$
- $p_i$  زمان پردازش کار  $i$  ام
- $s_i$  اندازه کار  $i$  ام
- $C$  ظرفیت ماشین و وسیله حمل و نقل
- $t_l$  زمان آماده‌سازی کار نوع  $l$  ام
- $J$  مجموعه تمامی کارها  $J = \{J_1, J_2, \dots, J_n\}$
- $T$  زمان حمل تحویل دسته پردازش شده به مشتری به علاوه زمان حمل انتقال دسته آماده پردازش بعدی از انبار به سالن تولید
- $M$  مقدار مثبت بزرگ
- $y_{il}$  پارامتری صفر و ۱ است که اگر کار  $i$  ام درون نوع  $l$  ام باشد، مقدار ۱ و در غیر این صورت مقدار صفر می‌گیرد.

متغیرهای مورد نیاز در مدل عبارت‌اند از:

$$LB_{C_{max}} = \sum_{i=1}^N P_i + \sum_{i=1}^n A_{Q(0)} t_1 + T \sum_{i=1}^N \frac{S_i}{c} \quad (20)$$

**قضیه:** رابطه ۱۹ کرانی پایین برای  $C_{max}$  ارائه می‌دهد.

**اثبات:** به منظور اثبات درستی رابطه ۲۰ ضروری است دو رویکرد زیر که رویکرد پایه‌ای و شکل‌دهنده کران پایین پیشنهادی هستند تشریح شوند. با توجه به شرایط مسئله مدنظر برای دستیابی به کران پایین پیشنهادی، رعایت دو شرط زیر ضروری است:

شرط ۱: کران پایین برای حداقل تعداد دسته‌های ممکن به دست بیاید؛

شرط ۲: برای کران پایین تعداد دسته ممکن، به یک کران پایین مجموع زمان آماده‌سازی دست بیابیم.

بدیهی است با توجه به اینکه تابع هدف مسئله تنها به تعداد دسته‌ها و زمان آماده‌سازی هر دسته وابسته است، هدف اصلی تجمیع دو کران پایین برای تعداد دسته‌ها و مجموع زمان آماده‌سازی (برای کران پایین تعداد دسته‌ها) کران پایین برای تابع است؛ بنابراین به منظور اثبات کران پایین رابطه ۲۰ ضروری است اثبات کنیم فرایندی که به تولید کران پایین مسئله منجر می‌شود، کرانی پایین برای حداقل تعداد دسته‌های ممکن و همچنین مجموع زمان آماده‌سازی دسته‌ها فراهم می‌کند.

دربارۀ شرط اول باید اشاره کرد از آنجا که در محاسبات کران پایین مسئله فرض انقطاع کارها مجاز شمرده شده است، کارها با فرض نداشتن ظرفیت کافی در یک دسته می‌توانند منقطع شوند و پردازش بخشی از کار در دسته حاضر و بخشی دیگر در دسته بعدی صورت بگیرد. براین اساس می‌توان پی برد همه دسته‌های ماقبل آخر به‌طور کامل از ظرفیتشان استفاده می‌کنند؛ بنابراین از آنجا که ظرفیت تمام دسته‌ها مساوی و برابر  $c$  فرض شده است، می‌توان دریافت که تعداد دسته‌های به‌دست‌آمده در محاسبۀ کران پایین مسئله، کرانی پایین برای حداقل تعداد دسته‌های ممکن و برابر با رابطه زیر تولید می‌کند:

$$\text{کران پایین حداقل تعداد دسته‌های ممکن} = \left\lceil \sum_{i=1}^N \frac{S_i}{c} \right\rceil$$

درمورد شرط دوم از آنجا که زمان آماده‌سازی هر دسته با ماکزیمم زمان آماده‌سازی کارهای متعلق به آن دسته برابر است، در تولید کران پایین مسئله از تنوع کارها در دسته‌های

از یک نوع درون یک دسته فرار می‌گیرند. مجموعه  $A_{Q(0)}$  تعریف و به کمک معادله بازگشتی به حل مسئله پرداخته می‌شود. اعضای این مجموعه براساس  $t_1$  به صورت نزولی مرتب شده‌اند. به کمک گام‌های زیر به تعیین کران پایین مسئله می‌پردازیم:

گام ۱: ابتدا حداقل دسته‌های ممکن را به دست می‌آوریم:

$$\sum_{i=1}^N \frac{S_i}{c} = \text{حداقل دسته‌های ممکن} \quad (10)$$

گام ۲: نوع کارها را براساس زمان آماده‌سازی هر نوع ( $t_i$ ) به صورت نزولی ( $Q$ ) مرتب می‌کنیم:

$$Q = Q(1), Q(2), \dots, Q(n) \quad (11)$$

گام ۳: مجموع اندازه هر نوع کار را بر ظرفیت ماشین تولیدی تقسیم می‌کنیم و آن را  $B_{Q(i)}$  می‌نامیم.

$$B_{Q(i)} = \sum_{i \in J_{Q(i)}} \frac{S_i}{c} \quad (12)$$

گام ۴: معادلات زیر تعداد دسته مورد نیاز برای هر نوع را مشخص می‌کند. با ضرب این دسته‌ها برای هر نوع در زمان آماده‌سازی هر نوع کار، مجموع زمان آماده‌سازی به دست می‌آید.

$$A'_{Q(i)} = B_{Q(i)} \quad \forall i=1, A_{Q(1)} = A'_{Q(0)} \quad (13)$$

$$A'_{Q(i)} = B_{Q(i)} - (A_{Q(i-1)} - A'_{Q(i-1)}) \quad \forall i \geq 2 \quad (14)$$

$$\sum_{i=1}^n A_{Q(i)} t_i = \text{زمان آماده‌سازی کل} \quad (15)$$

معادلات بازگشتی زیر تعداد دسته‌های مورد نیاز برای هر نوع کار را به منظور تعیین کران پایین ارائه می‌دهند:

$$A'_{Q(i)} = \sum_{i \in J_{Q(i)}} \frac{S_i}{c} (A_{Q(i)} - A'_{Q(i)}) \quad (16)$$

$$A'_{Q(2)} = \sum_{i \in J_{Q(2)}} \frac{S_i}{c} (A_{Q(1)} - A'_{Q(1)}) \quad (17)$$

$$A'_{Q(3)} = \sum_{i \in J_{Q(3)}} \frac{S_i}{c} (A_{Q(2)} - A'_{Q(2)}) \quad (18)$$

⋮

$$A'_{Q(n)} = \sum_{i \in J_{Q(n)}} \frac{S_i}{c} (A_{Q(n-1)} - A'_{Q(n-1)}) \quad (19)$$

سپس با توجه به فرمول زیر کران پایین به دست می‌آید:

$$A'_{Q(1)} = \frac{9}{11} \quad A_{Q(1)} = \left\lceil \frac{9}{11} \right\rceil = 1$$

$$A'_{Q(2)} = \frac{18}{11} - \left(1 - \frac{9}{11}\right) = \frac{16}{11}$$

$$AS_{Q(2)} = \left\lceil \frac{16}{11} \right\rceil = 2$$

بنابراین مقدار کران پایین برابر است با:

$$LB_{c_{max}} = \sum_{i=1}^N p_i + \sum_{i=1}^n A_{Q(i)} t_i + T \left\lceil \sum_{i=1}^N \frac{s_i}{c} \right\rceil$$

$$= 22 + 3(1) + 2(2) + 5(3) = 44$$

مقایسه کران پایین به دست آمده با پاسخ اصلی مسئله نشان می‌دهد شکاف روش پیشنهادی به جواب دقیق صفر است که نشان‌دهنده کارایی کران پایین ارائه شده است. مقایسه‌های بیشتر کران پایین با جواب دقیق مسئله در جدول‌های ۲ و ۳ آمده است.

### نتایج محاسباتی

نوآوری این پژوهش در روش حل است (ارائه کران پایین مطلوب). ابتدا به تعیین اعتبار مدل با استفاده از مثال عددی در ابعاد کوچک و مقایسه آن با جواب‌های دقیق پرداخته شد. بار دیگر مثال ۱ را در نظر بگیرید. جواب دقیق به دست آمده و مقدار کران پایین به دست آمده ۴۴ است. شکاف به دست آمده برای این مثال صفر است. به منظور نشان دادن توانایی کران پایین پیشنهادی، از جواب‌های دقیق در ابعاد کوچک و برای نمایش سرعت و کیفیت آن از مثال‌های عددی در ابعاد متوسط و بزرگ استفاده شده است. از آنجا که مسئله مطرح شده در این مقاله از نظر ساختاری جدید و متفاوت با ادبیات موضوع است، نمی‌توان نتایج حاصل از آن را با ادبیات موضوع مقایسه کرد. براین اساس جواب‌های کران پایین با جواب‌های روش دقیق مقایسه می‌شود. برای تعیین جواب دقیق مسئله از نرم‌افزار GAMS22.2 و برای اجرای کران پایین پیشنهادی از نرم‌افزار MATLAB R2014 استفاده شد. همه محاسبات در رایانه‌ای شخصی با مشخصات CPU 2.66 GHZ و با 4GH RAM صورت گرفت.

به منظور تجزیه و تحلیل عوامل مؤثر بر عملکرد کران پایین روش پیشنهادی، پانزده آزمایش در ابعاد کوچک، متوسط و بزرگ تولید شده است. این داده‌ها تا حد امکان از پژوهش‌های پیشین [۱۵] استخراج و در مواردی که

مختلف یا به عبارت دیگر از پراکندگی کارها با زمان آماده‌سازی بالا در دسته‌های مختلف جلوگیری شده است. بدین صورت که کارهای هر دسته متعلق به یک گروه هستند و تنها در صورت تخصیص کامل کارهای یک گروه به یک دسته و وجود ظرفیت خالی در آن دسته، کارها از گروه بعدی به آن دسته اضافه می‌شوند. برای اثبات اینکه این نحوه تخصیص به تولید کران پایین برای مجموع زمان آماده‌سازی منجر خواهد شد، از تکنیک جابه‌جایی جفتی استفاده می‌کنیم. فرض کنید دو گروه از کار با زمان‌های آماده‌سازی متفاوت وجود دارند. گروه  $a$  با زمان آماده‌سازی  $t_a$  و گروه  $b$  با زمان آماده‌سازی  $t_b$ ؛ به طوری که  $t_b < t_a$  با فرض اینکه همه کارهای گروه  $a$  به دسته  $k$  و تمامی کارهای گروه  $b$  به دسته  $k+1$  مربوط است، مجموع زمان آماده‌سازی دو دسته برابر است با  $t_a + t_b$ . حال اگر کار  $a_i$  از گروه  $a$  را از دسته  $k$  به دسته  $k+1$  و کار  $b_j$  از گروه  $b$  را از دسته  $k+1$  به دسته  $k$  منتقل کنیم، مجموع زمان آماده‌سازی دو دسته برابر است با  $t_a + t_b + 2t_b > t_a + t_b$ ؛ بنابراین مجموع زمان آماده‌سازی بدتر می‌شود و در نتیجه اثبات کامل است.

کران پایین برای مثال ۱ به صورت زیر به دست می‌آید:  
گام ۱: ابتدا حداقل دسته‌های ممکن را به دست می‌آوریم:

$$\left\lceil \sum_{i=1}^N \frac{s_i}{c} \right\rceil = \left\lceil \frac{27}{11} \right\rceil = 3$$

گام ۲: زمان آماده‌سازی را به صورت نزولی  $t_1 = \{3, 2\}$  و نوع کارها را نیز براساس زمان آماده‌سازی هر نوع  $t_1$  به صورت نزولی ( $Q$ ) مرتب می‌کنیم:

در این مثال دو نوع کار وجود دارد. با توجه به اینکه زمان آماده‌سازی کار نوع دوم بیشتر است، این کار در اولویت اول قرار می‌گیرد:

$$Q = Q(1), Q(2)$$

که در اینجا  $Q(1)$  کارهای نوع اول و  $Q(2)$  کارهای نوع دوم هستند.

گام (۳): از معادلات زیر مقدار  $B_{Q(i)}$  را به دست می‌آوریم:

$$B_{Q(1)} = \frac{5+4}{11} = \frac{9}{11}$$

$$B_{Q(2)} = \frac{6+6+6}{11} = \frac{18}{11}$$

گام (۳): تعداد دسته مورد نیاز را به دست می‌آوریم:

جداول ۲ و ۳ نشان‌دهنده نتایج محاسباتی با توجه به تعداد کارهای متفاوت و  $c=30$  و  $c=35$  است. برای این دو سطح از ظرفیت، مقدار  $C_{max}$  و شکاف نشان داده شده است.

شکل‌های ۳ و ۴ به مقایسه اختلاف کران پیشنهادی با روش دقیق برای  $c=30$  و  $c=35$  می‌پردازد. با توجه به این شکل‌ها می‌توان دریافت میزان اختلاف در مقایسه با پاسخ بهینه مسئله مطلوب است. با افزایش تعداد کارها، زمان حل مسئله با روش پیشنهادی تقریباً ثابت است، اما زمان حل مسئله به‌کمک روش دقیق به تعداد کارهای مورد پردازش وابسته است؛ به طوری که برای ۵۰ کار، حتی بعد از ۲۴ ساعت قادر به حل مسئله نیست.

داده‌های بیشتری مورد نیاز بوده از اعداد تصادفی استفاده شده است.

در این مطالعه مقادیر پارامترها به‌کمک توزیع یکنواخت تعیین شد (جدول ۱).

یک آزمایش با دو عامل ( $n$  و  $C$ ) طراحی می‌کنیم. ۱۵ اندازه متفاوت برای تعداد کارها و دو سطح ۳۰ و ۳۵ برای ظرفیت ماشین تولیدی آزمایش می‌شود. مقایسه نتایج به‌دست‌آمده از کران پایین با جواب دقیق صورت می‌گیرد. به‌منظور مقایسه عملکرد کران پایین ارائه‌شده، از معادله زیر برای تعیین شکاف روش ارائه‌شده با روش دقیق استفاده شد:

$$GAP = (C_{max} - LB) / LB \quad (21)$$

جدول ۱. مقادیر پارامترها

پارامتر	توضیح	مقادیر
N	تعداد کارها	۲۰، ۲۵، ۳۵، ۴۰، ۵۰، ۷۰، ۱۰۰، ۱۵۰، ۲۰۰، ۳۰۰
c	ظرفیت ماشین دسته‌بندی و وسیله حمل‌ونقل	۳، ۵، ۱۰، ۱۵
$s_i$	اندازه کارها	۳۰ و ۳۵
$n_i$	تعداد انواع کار	U[9,15]
$p_i$	زمان پردازش کار	۲، ۳، ۵، ۶، ۷، ۸، ۱۰، ۱۵، ۲۰، ۲۵، ۳۰
$t_i$	زمان راه‌اندازی برای هر نوع از کارها	U[6,12]
T	زمان حمل‌ونقل از تولیدکننده تا مشتری	U[2,8]
		۲۰

جدول ۲. نتایج محاسباتی برای  $C=30$

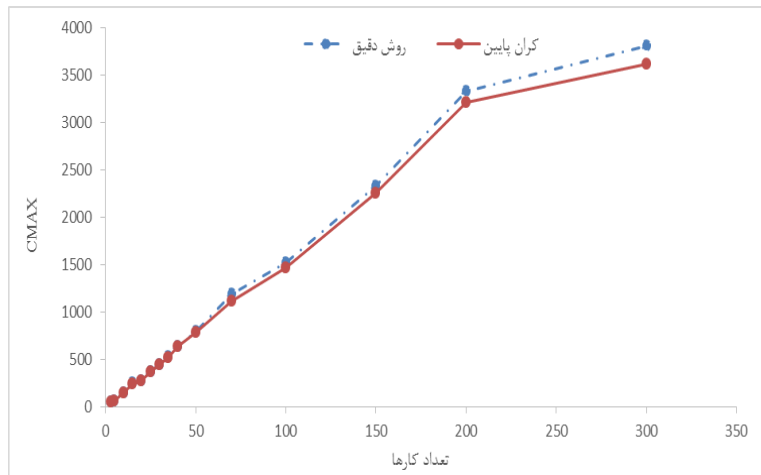
	تعداد کارها	تعداد نوع کارها	$C_{max}^{exact}$	زمان حل (s)	$C_{max}^{lb}$	زمان حل (s)	Gap
۱	۳	۲	۴۲	۰/۲۵۴	۴۲	۰/۰۰۲۳۶۹	۰
۲	۵	۲	۶۶	۰/۲۲۴	۶۶	۰/۰۰۲۲۳۵	۰
۳	۱۰	۳	۱۳۷	۰/۲۹۸	۱۳۶	۰/۰۱۷۲۰۵	۰/۰۷۳۵۲۹
۴	۱۵	۵	۲۰۴	۱۳/۲۵۳	۱۹۳	۰/۰۰۴۱۷۴	۵/۶۹۹۴۸
۵	۲۰	۵	۳۲۷	۴۷/۷۹۸	۳۱۵	۰/۰۰۴۵۱۶	۳/۸۲
۶	۲۵	۶	۴۰۰	۲۵۸۸/۴۴۶	۳۸۱	۰/۰۰۴۸۷۹	۴/۹۸۷
۷	۳۰	۷	۴۸۶	۳۶۰ <sup>۱</sup>	۴۶۵	۰۰۴۳۶۱	۴/۵۱۶
۸	۳۵	۷	۵۶۱	۳۶۰ <sup>*</sup>	۵۳۳	۰/۰۰۴۷۷۶	۵/۲۵۳
۹	۴۰	۸	۶۶۲	۳۶۰ <sup>*</sup>	۶۴۲	۰/۰۰۴۵۷۴	۳/۱۱۵
۱۰	۵۰	۱۰	۷۶۸	۳۶۰ <sup>*</sup>	۷۴۸	۰/۰۰۵۲۵۶	۲/۶۷۴
۱۱	۷۰	۱۴	۱۱۸۷	۳۶۰ <sup>*</sup>	۱۱۷۰	۰/۰۰۷۷۹۷	۱/۴۵۳
۱۲	۱۰۰	۲۰	۱۶۸۳	۳۶۰ <sup>*</sup>	۱۶۰۶	۰/۰۰۷۷۵۳	۴/۷۹۵
۱۳	۱۵۰	۲۵	۲۴۴۶	۳۶۰ <sup>*</sup>	۲۳۰۸	۰/۰۰۰۸۴۶	۵/۵۴۶
۱۴	۲۰۰	۲۵	۳۱۹۴	۳۶۰ <sup>*</sup>	۳۰۳۲	۰/۰۱۳۷۶۹	۵/۳۴۳
۱۵	۳۰۰	۳۰	۴۰۸۹	۳۶۰ <sup>*</sup>	۳۷۸۸	۰/۰۰۴۹۴۴	۷/۹۴۶

۱. در اینجا، بهترین پاسخی که پس از ۳۶۰۰ ثانیه (۱ ساعت) اجرای برنامه GAMS به‌دست آمده است ذکر می‌شود.

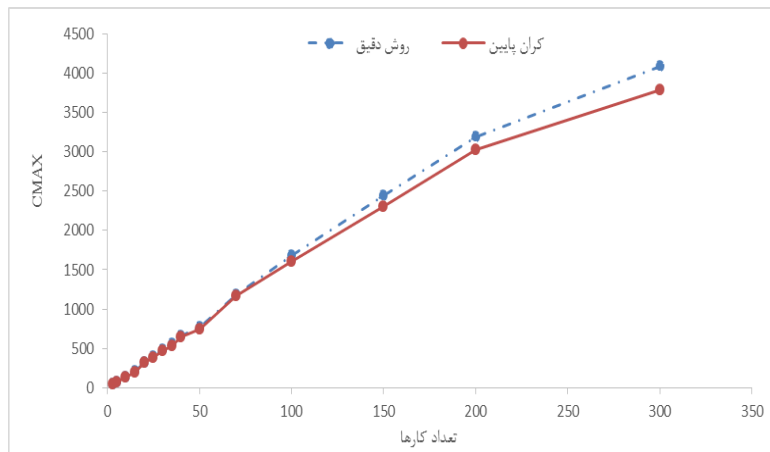


جدول ۳. نتایج محاسباتی برای  $C=35$

	تعداد کارها	تعداد نوع کارها	$C_{max}^{exact}$	زمان حل (s)	$C_{max}^{lb}$	زمان حل (s)	Gap
۱	۳	۲	۵۰	۰/۲۰۹	۵۰	۰/۰۰۳۶۴۳	۰
۲	۵	۲	۶۲	۰/۲۸۸	۶۲	۰/۰۰۲۵۷۶	۰
۳	۱۰	۳	۱۵۰	۰/۵۰۴	۱۵۰	۰/۰۰۳۹۳۰	۰
۴	۱۵	۵	۲۴۹	۱۲/۵۴۹	۲۴۱	۰/۰۰۲۵۸۰	۳/۴۲
۵	۲۰	۵	۲۷۸	۴۰۸/۹۸۳	۲۷۸	۰/۰۰۲۵۹۵	۰
۶	۲۵	۶	۳۷۲	۱۱۲۰/۳۴۳	۳۷۰	۰/۰۰۳۵	۰/۵۴۱
۷	۳۰	۷	۴۴۰	۲۲۲۰	۴۳۹	۰/۰۰۵۱۱۸	۰/۲۲۷
۸	۳۵	۷	۵۳۳	۳۶۰۰*	۵۲۲	۰/۰۰۳	۱/۹۱۶
۹	۴۰	۸	۶۳۶	۳۶۰۰*	۶۳۲	۰/۰۰۴۳۴	۰/۶۳۳
۱۰	۵۰	۱۰	۷۹۲	۳۶۰۰*	۷۸۲	۰/۰۰۲۴۶۰	۱/۲۷۹
۱۱	۷۰	۱۴	۱۱۹۲	۳۶۰۰*	۱۱۱۷	۰/۰۰۳۶۳۱	۶/۷۱۴
۱۲	۱۰۰	۲۰	۱۵۱۵	۳۶۰۰*	۱۴۶۳	۰/۰۰۳۸۹۶	۳/۵۵۴
۱۳	۱۵۰	۲۵	۲۳۲۸	۳۶۰۰*	۲۲۴۹	۰/۰۰۲۵۴۰	۳/۵۱۲
۱۴	۲۰۰	۲۵	۳۳۲۸	۳۶۰۰*	۳۲۱۲	۰/۰۰۲۶۲۸	۳/۶۱۱
۱۵	۳۰۰	۳۰	۳۸۰۹	۳۶۰۰*	۳۶۱۴	۰/۰۰۴۴۴	۵/۳۹۶



شکل ۳. مقادیر  $C_{max}$  روش پیشنهادی و روش دقیق برای  $C=35$



شکل ۴. مقادیر  $C_{max}$  روش پیشنهادی و روش دقیق برای  $C=30$

در حل مسئله مذکور است. زمان حل روش مورد نظر از روش دقیق بسیار کمتر است.

از موضوعات جذاب برای پژوهش‌های آتی می‌توان به در نظر گرفتن مراحل دیگر زنجیره تأمین، توابع هدف دیگر و محدودیت‌های دنیای واقعی مانند بافر و زمان حمل‌ونقل متغیر اشاره کرد. همچنین استفاده از الگوریتم‌های ابتکاری یا فراابتکاری برای حل مسئله و چندین کارخانه به جای یک کارخانه نیز می‌تواند مدنظر قرار بگیرد.

### نتیجه‌گیری و پیشنهاد برای پژوهش‌های آتی

در این پژوهش زمان‌بندی زنجیره تأمین دومارحله‌ای شامل تولیدکننده و توزیع‌کننده با در نظر گرفتن زمان آماده‌سازی متفاوت بررسی شد. زمان آماده‌سازی با توجه به نوع کار در هر دسته متفاوت است. برای این مسئله، کران پایین مطلوبی ارائه شد که محاسبه آن با نرم‌افزار متلب ۲۰۱۴ صورت گرفت. برای مقایسه روش پیشنهادی آن را با جواب دقیق مقایسه کردیم که نشان‌دهنده کارایی روش ارائه‌شده

### منابع

1. Agnetis, A., Hall, N. G., and Pacciarelli, D. (2006). "Supply Chain Scheduling: Sequence Coordination", *Discrete Applied Mathematics*, Vol. 154, No. 15, PP. 2044-2063.
2. Omrani, H., and Adabi, F. (2016). "A Multiple Objective Programming Model for Designing of Supply Chain Network with Efficient Manufacturers and Distributors", *Journal of Industrial Engineering*, Vol. 50, No. 2, PP. 261-278.
3. Rahimi, Y. et al. (2015). "Design Model Innovative Performance Evaluation of Suppliers and Contractors in Construction Supply Chain Management", *Journal of Industrial Engineering*, Vol. 49, No. 2, PP. 199-210.
4. Tavakoli Moghaddam, R. et al. (2012). "Scheduling an Integrated Production and Air Transportation in Supply Chain with Sequence-Dependent Setup Times", *International Journal of Industrial Engineering and Production Management*, Vol. 23, No. 3, PP. 351-362.
5. Potts, C. N., and Kovalyov, M. Y. (2000). "Scheduling with Batching: A Review", *European Journal of Operational Research*, Vol. 20, No. 120, PP. 228-249.
6. Xu, R., Chen, H., and Li, X. (2012). "Makespan Minimization on Single Batch-Processing Machine Via Ant Colony Optimization", *Computers and Operations Research*, Vol. 39, No. 3, PP. 582-593.
7. Al Salamah, M. (2015). "Constrained Binary Artificial Bee Colony to Minimize the Makespan for Single Machine Batch Processing with Non-Identical Job Sizes", *Applied Soft Computing*, Vol. 29, No. 29, PP. 379-385.
8. Cheng, T., and Kahlbacher, H. (1993). "Scheduling with Delivery and Earliness Penalties. Asia-Pacific", *Journal of Operational Research*, Vol. 10, No. 2, PP. 145-152.
9. Karimi, N., and Davoudpour, H. (2017). "Integrated Production and Delivery Scheduling for Multi-Factory Supply Chain with Stage-Dependent Inventory Holding Cost", *Computational and Applied Mathematics*, Vol. 36, No. 4, PP. 1529-1544.
10. Hall, N. G. and Potts, C. N. (2003). "Supply Chain Scheduling: Batching and Delivery", *Operations Research*, Vol. 51, No. 4, PP. 566-584.
11. Yeung, W. K., Choi, T. M., and Cheng, T. (2011). "Supply Chain Scheduling and Coordination with Dual Delivery Modes and Inventory Storage Cost", *International Journal of Production Economics*, Vol. 2, No. 132, PP. 223-229.
12. Hwang, F., Kovalyov, M. Y., and Lin, B. M. (2012). "Total Completion Time Minimization in Two-Machine Flow Shop Scheduling Problems with a Fixed Job Sequence", *Discrete Optimization*, Vol. 9, No. 1, PP. 29-39.
13. Hwang, F., and Lin, B. M. (2012). "Two-Stage Assembly-Type Flowshop Batch Scheduling Problem Subject to a Fixed Job Sequence", *Journal of the Operational Research Society*, Vol. 6, No. 63, PP. 839-845.
14. Kim, H., Jeong, H. I., and Park, J. (2008). "Integrated Model for Production Planning and Scheduling in a Supply Chain Using Benchmarked Genetic Algorithm", *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, Vol. 39, No. 11 and 12, PP. 1207-1226.

15. Mehravaran, Y., and Logendran, R. (2012). "Non-Permutation Flowshop Scheduling in a Supply Chain with Sequence-Dependent Setup Times", International Journal of Production Economics, Vol. 2, No. 135, PP. 953-963.
16. Pei, J. et al. (2014). "A Novel Hybrid Dynamic Programming Algorithm for a Two-Stage Supply Chain Scheduling Problem", In Learning and Intelligent Optimization, Vol. 8426, No.27 , PP. 242-257.
17. Graham, R. L. et al. (1979). "Optimization and Approximation in Deterministic Sequencing and Scheduling: A Survey", Annals of Discrete Mathematics, Vol. ???, No. 5, PP. 287-326.

واژه های انگلیسی به ترتیب استفاده در متن

1. Makespan
2. Lower Bound
3. Just in Time (Jit)
4. Total Flow Time
5. Total Delivery Cost
6. Total Completion Time
7. Total Tardiness
8. Number of Tardy Jobs
9. Sequence-Dependent Set Up Time
10. Work in Process (Wip)
11. Tabu Search (Ts)