نشریه مهندسی عمران و نقشه برداری- دانشکده فنی، دوره ۴۳، شماره ۱، دی ماه ۱۳۸۸، از صفحه ۳۵ تا ۴۸

تحلیل سه بعدی خم ۹۰ درجه تونل ها تحت اثر انتشار موج با استفاده از المان مرزی

محمد رضا صفری[1] و اسدا.. نورزاد [2*]

[1]دانش آموخته کارشناسی ارشد دانشکده مهندسی عمران - پردیس دانشکده های فنی - دانشگاه تهران

[2]استادیار دانشکده مهندسی عمران - پردیس دانشکده های فنی - دانشگاه تهران

(تاریخ دریافت ۸۵/۶/۲۵ ، تاریخ دریافت روایت اصلاح شده ۸۷/۵/۸، تاریخ تصویب ۸۷/۹/۲۴)

چکیده

این مقاله به تبیین روشی عددی برای تعیین پاسخ دینامیکی خم ۹۰ درجه تونل ها، با در نظر گرفتن اندرکنش تونل با محیط اطراف، در برابر گسترش امواج زلزله در حوزه زمانی می پردازد. فرض های اساسی در این مقاله رفتار خطی محیط های در نظر گرفته شده و قرارگیری تونل خمیده در عمق بسیار زیاد از سطح زمین است که در نتیجه آن تونل در محیط بی‌نهایت مدل می شود. شبیه سازی مسئله به دلیل وجود خم در تونل به صورت ۳ بعدی و با استفاده از روش المان مرزی انجام می شود. روش مذکور برای شبیه سازی مسائل اندر کنش خاک و سازه و گسترش امواج در محیط های بی‌نهایت یا نیمه بی‌نهایت مزیت های فراوانی دارد. در الگوریتم ارائه شده، مرزهای تونل بتنی یا فولادی و مرز محیط اطراف با استفاده از المان های حلقه مدل شده است. با توجه به نگاشت ارائه شده سطح مقطع تونل نیز می تواند به دو شکل دایره ای کامل و یا ۳/۴ دایره با دقت مناسبی مدل شود. در انتها مثالی ارائه می شود که خم ۹۰ درجه تونل با مقطع دایره ای تحت اثر انتشار موج فشاری پله ای با استفاده از الگوریتم ارائه شده تحلیل شده و ضرایب افزایش تنش در نقاط مختلف خم ارائه می شود. نتایج ارائه شده هنگامی که شعاع خم بیش از ۳۵ برابر شعاع داخلی مقطع تونل باشد به تحلیل های دو بعدی انجام شده بسیار نزدیک می شود.

واژه های کلیدی: تونل های خمیده، گسترش موج، روش المان مرزی، دستگاه مختصات منحنی الخط

مقدمه

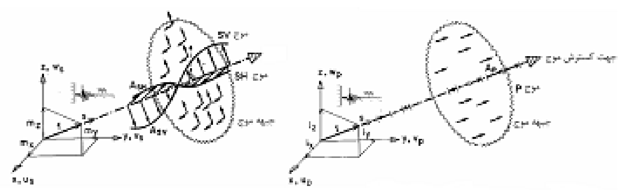
در حال حاضر در بسیاری از جوامع مدرن و در حال توسعه بخش عمده ای از سازه های زیر بنایی را سازه های مدفون تشکیل می دهند. از جمله این موارد می توان به شبکه های راه و راه آهن زیرزمینی، سیستم های خطوط حیاتی و سازه های زیرزمینی حجیم به عنوان مخزن سوخت های جامد یا مایع و یا برای حفاظت از جان انسان ها و یا نگهداری تجهیزات خاص اشاره کرد. در میان این سازه ها، تونل ها با توجه به گستره کاربرد اهمیت بسیاری دارند. بخش مهمی از تونل ها که بسیار مورد استفاده هستند و روش خاصی در ادبیات فنی برای تحلیل این قسمت وجود ندارد، خم ۹۰ درجه موجود در بعضی تونل‌ها است.

از جمله کارهای انجام شده برای بررسی رفتار دینامیکی تونل ها می توان به کار Chu & Koening در سال ۱۹۶۶ اشاره کرد[1]. در این تحقیق رفتار دینامیکی تونل های بدون پوشش با فرض رفتار کرنش مسطح تحت اثر فشار داخلی پله ای بررسی شده است. Manolis & Beskos در سال ۱۹۸۸ رفتار دینامیکی تونل های پوشش دار را با فرض رفتار کرنش مسطح و اتصال کامل بین بدنه و محیط اطراف، تحت اثر برخورد موج فشاری بررسی کردند[1]. کار Zhu & Nogami در سال ۱۹۹۴ بررسی رفتار تونل با پوشش در محیط ۳ بعدی و فرض اتصال کامل بین بدنه و محیط است[2]. این مقاله، اساس الگوریتم ارائه شده است. Stamos & Beskos در سال ۱۹۹۵ با استفاده از BEM الگوریتم مناسبی را برای مدل سازی سازه های زیرزمینی با طول زیاد در فضای فرکانسی ارائه دادند[3]. آنها در سال ۱۹۹۶ روش مناسبی را برای کاهش ابعاد مسئله از ۳ بعدی به ۲ بعدی ارائه دادند[4].

هدف از ارائه این مقاله، تبیین روشی برای چگونگی استفاده از روش عددی المان مرزی برای تعیین پاسخ دینامیکی خم ۹۰ درجه تونل در برابر امواج زلزله در دامنه زمانی است.

فرض های اساسی در این تحقیق، الاستیک بودن محیط های در نظر گرفته شده و اتصال کامل بین بدنه و محیط اطراف است.

* نویسنده مسئول : تلفن : ۶۱۱۱۲۱۸۱ ، فاکس : ۶۶۴۰۳۸۰۸ ، Email: norzad@ut.ac.ir



شکل ۱ : تغییر مکان امواج مختلف با توجه به راستای گسترش صفحه موج[۵].

به کمک الگوریتم ارائه شده، رفتار دینامیکی تونل خمیده را می‌توان برای هر یک از امواج P، SV وSH (شکل (۱) و یا ترکیب آنها تحت زوایای برخوردی متفاوت بررسی کرد.

در انتها یک حالت خاص از تونل خمیده، به وسیله روش ارائه شده تحلیل و سپس نتیجه با نتایج موجود در ادبیات فنی مقایسه می شود. به دلیل نبود آنالیز مشابه سعی شده است که با میل دادن شرایط مسئله به سمت مسائل دو بعدی کارآیی الگوریتم موجود را بررسی کرد.

معادلات حاکم بر مسئله

معادله حاکم در کلیه مسائلی که در ارزیابی رفتار دینامیکی مد نظر قرار می گیرد، معادله ناویردینامیکی است. این گونه مسائل با عنوان مسائل الاستودینامیک در تئوری الاستیسیته مطرح می شود. مسئله مورد بررسی این تحقیق، حل سه بعدی انتشار امواج الاستیک است. ابتدا نحوه به دست آوردن معادله حاکم الاستودینامیک بررسی می‌شود. در الاستودینامیک، معادلات پایه ای به شکل زیر ارائه می شود:

$$\sigma_{ij,i}+b_j=\rho\ddot{u}_j \tag{۱}$$

$$\sigma_{ij}=\lambda\varepsilon_{ij}\delta_{ij}+2\mu\varepsilon_{ij} \tag{۲}$$

$$\varepsilon_{ij}=0.5(U_{i,j}+U_{j,i}) \tag{۳}$$

که در آن σ_{ij} مؤلفه های تانسور تنش، b_j نیروی حجمی، u_i مؤلفه های جا به جایی، ρ جرم حجمی، ε_{ij} مؤلفه‌های تانسور کرنش، δ_{ij} دلتای کرونکر و λ,μ مشخصه های محیط هستند. با ترکیب ۳ رابطهٔ ذکر شده، معادله ناویر در حالت دینامیکی مطابق زیر به دست می آید:

$$(\lambda+\mu)U_{i,ij}+\mu U_{j,ii}+b_j=\rho\ddot{u}_j \tag{۴}$$

این معادله، معادله حاکم بر رفتار جسم الاستیک همگن و ایزوتروپ با حجم V و سطح $S=S_1+S_2$ است. رابطهٔ (۴) باید با شرایط اولیه؛

$$U_i(\vec{X},o)=U_i \tag{۵}$$
$$\dot{U}_i(\vec{X},o)=\dot{U}_i$$

در دامنه V و با شرایط مرزی؛

$$U_i(\vec{X},t)=U_i \qquad X\in S_1$$
$$t_i(\vec{X},t)=\sigma_{ij}.n_j=T_i \qquad X\in S_2 \tag{۶}$$

روی مرز S همراه باشد. در رابطه (۶) t_i بردار تنش و $n_j(X)$ بردار عمود بر مرز در نقطهٔ $\vec{X}$ و U_i، $\dot{U}_i$ وT_i مقادیر معلوم تغییر مکان ها، سرعت ها و بردارهای تنش هستند.

حل معادله (۴) منجر به تابعی می شود که تغییر مکان نقاط را در محیط بدون هیچگونه نامنظمی، نتیجه می دهد. همان طور که در شکل (۱) دیده می شود، در صورتی که در اثر حل معادلهٔ (۴) تغییرمکان در راستای L در مبدأ به صورت تابع f(t) باشد (همانند خروجی دستگاه‌های شتاب نگار که قابل تبدیل به تابع تغییر مکان هستند) تغییر مکان‌ها در اثر موج های مختلف به صورت زیر خواهد بود[۵].

$$f_P(\vec{X},t)=\begin{cases} f(\vec{X}.\vec{n}/C_1-t) & \vec{X}.\vec{n}/C_1-t>0 \\ 0 & \vec{X}.\vec{n}/C_1-t\le 0 \end{cases}$$

$$\underset{P-wave}{U_x}(\vec{X},t)=l_x f_p(\vec{X},t)$$
$$\underset{P-wave}{U_y}(\vec{X},t)=l_y f_p(\vec{X},t) \tag{۷}$$
$$\underset{P-wave}{U_z}(x,t)=l_z f_p(x,t)$$

$$f_{SV}(\vec{X},t)=\begin{cases} f(\vec{X}.\vec{n}/C_2-t) & \vec{X}.\vec{n}/C_2-t>0 \\ 0 & \vec{X}.\vec{n}/C_2-t\le 0 \end{cases}$$

$$\underset{SV-wave}{U_x}(\vec{X},t)=\left(l_x l_z\Big/\sqrt{l_x^2+l_x^2}\right)f_{SV}(\vec{X},t)$$
$$\underset{SV-wave}{U_y}(\vec{X},t)=\left(l_y l_z\Big/\sqrt{l_x^2+l_x^2}\right)f_{SV}(\vec{X},t) \tag{۸}$$

$$\underset{SV-wave}{U_z}(\vec{X},t)=\sqrt{l_x^2+l_y^2}\; f_{SV}(\vec{X},t)$$

$$f_{SH}(\vec{X},t)=\begin{cases} f(\vec{X}.\vec{n}/C_2-t) & \vec{X}.\vec{n}/C_2-t>0 \\ 0 & \vec{X}.\vec{n}/C_2-t\le 0\end{cases}$$

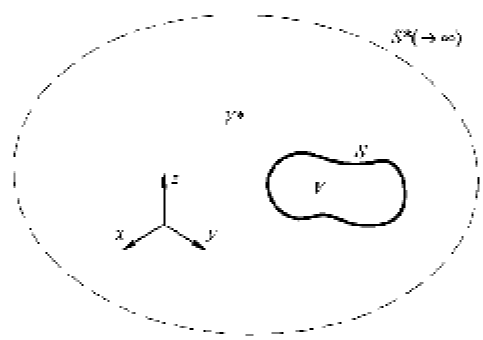
$$\underset{SH-wave}{U_x}(\vec{X},t)=\left(l_y\Big/\sqrt{l_x^2+l_y^2}\right)f_{SH}(\vec{X},t)$$

$$\underset{SH-wave}{U_y}(\vec{X},t)=\left(l_x\Big/\sqrt{l_x^2+l_y^2}\right)f_{SH}(\vec{X},t) \qquad (۹)$$

$$\underset{SH-wave}{U_z}(\vec{X},t)=0$$

که در آنها C_1, C_2 به ترتیب سرعت موج عرضی و طولی، $\underset{K-Wave}{U_i}$ مؤلفه i ام تغییر مکان موج نوع K و l_i مؤلفه i ام بردار عمود بر صفحه موج در مختصات کلی است.

برای بررسی اثر نامنظمی موجود در محیط باید از یک سری معادلات اضافی(که اغلب معادلات انتگرالی هستند) حاکم بر مسئله کمک گرفته شود. با استفاده از تئوری تقابل دینامیکی که در واقع بسط تئوری تقابل بتی در الاستواستاتیک است، معادلات پایه ای حاکم بر مسئله که موسوم به معادلات انتگرال مرزی هستند به دست می آید. برای استفاده از این معادلات، ۲ حالت مستقل دینامیکی از جسمی که در شکل (۲) نشان داده شده است را در نظر بگیرید. حالت اول با مشخصه های $(u_i, t_i, u_i^0, \dot{u}_i^0, b_i)$ و حالت دوم با مشخصه های $(u_i^*, t_i^*, u_i^{*o}, \dot{u}_i^{*o}, b_i^*)$ تعریف می‌شوند. هر یک از این حالات به طور مستقل به تعادل دینامیکی رسیده اند [۷].



شکل۲: جسم نامحدود V^* که جسم محدود V را شامل می شود[۷].

با استفاده از قضیهٔ تقابل دینامیکی در حجم V که توسط سطح S محصور شده است، برای $t \ge 0$ (زمان) خواهیم داشت[۷]:

$$\int_S t_i * u_i^* dS+\int_V \rho[b_i * u_i^* +\dot{u}_i^o u_i^* +\dot{u}_i^o \ddot{u}_i^*]dV= \int_s t_i^* * u_i dS+\int_V \rho[b_i^* * u_i +\dot{u}_i^{*o} u_i +\dot{u}_i^{*o}\ddot{u}_i]dV \qquad (۱۰)$$

که در معادلهٔ بالا (*) نشان دهنده کانولوشن ریمن است[۷]. در حالت به تعادل رسیده (۲) در جسم شکل (۲) $(u_i^*, t_i^*, u_i^{*o}, \dot{u}_i^{*o}, b_i^*)$ به عنوان پاسخ جسم به یک ضربهٔ واحد که در زمان τ و در نقطهٔ X′ و در جهت e_i به جسم وارد شده است در نظر گرفته می شود؛

$$\rho\, b_i^* = \delta(t-\tau)\delta(\vec{X}-\vec{X}')e_i \qquad (۱۱)$$

که δ نشان دهنده تابع دلتای دیراک است. جا به جایی ها و بردارهای تنش در جسم شکل (۲) در حالت (۲) به صورت زیر به دست می آید:

$$u_i(X,t)= U_{ij}(X,X', t')\, e_j \qquad (۱۲)$$

$$t_i(X,t)= T_{ij}(X,X', t')\, e_j \qquad (۱۳)$$

که در معادلات بالا $t' = t-\tau$ است. با جاگذاری معادلات (۱۱) و (۱۲) و (۱۳) در معادله ناشی از تقابل دینامیکی (۱۰)، به دست می آوریم؛

$$\begin{aligned} u_i(\vec{X}',t) = & \int_s \int_0^t [U_{ij}(\vec{X},\vec{X}',t')\,t_j(\vec{X},\tau) \\ & - T_{ij}(X,\vec{X}',t')\,u_j(\vec{X},\tau)]\; d\tau\; ds + \\ & + \int_V \int_0^t U_{ij}(\vec{X},\vec{X}',t')\,b_j(\vec{X},\tau)\; d\tau\; dv + \\ & + \rho\int_V [\left(U_{ij}(\vec{X},\vec{X}',t,o\right)\frac{\partial u_j(\vec{X},o)}{\partial t} + \\ & \frac{\partial U_{ij}(\vec{X},\vec{X}',t-o)}{\partial t} u_j(\vec{X},o)]dV \end{aligned} \qquad (۱۴)$$

معادله بالا تغییر مکان نقاط داخلی را به مقادیر تغییر مکان و بردار تنش نقاط در روی مرز مرتبط می کند. در معادلهٔ بالا T_{ij} و U_{ij} به عنوان حل اساسی یا تابع گرین سه بعدی مشهور هستند که در مرجع[۷] به طور کامل آورده شده است و به دلیل حجم زیاد از بازنویسی آنها خودداری شده است.

معادلهٔ انتگرال مرزی تغییر مکانی با میل دادن نقطهٔ X′ به سمت مرز به دست می آید. در واقع برای حل معادلهٔ (۱۴)، نیازمند مقادیر تغییر مکان و بردار تنش در مرز هستیم و به همین دلیل نقطهٔ X′ را به سمت مرز میل داده تا در مرز برحسب نیاز (مرز نیومن یا مرز دیرکله) تغییر مکان یا بردار تنش را به دست بیاوریم. اما همان‌طور که از معادلهٔ (۱۴) مشخص است، یک سری از انتگرال‌ها روی مرز گرفته می شود (X ∈ S). به همین

دلیل هنگامی که X' به سمت مرز میل می کند، فاصله در آن نقطهٔ ($\varepsilon=X'-X$) به سمت صفر میل می کند و تکنیگی در فرمولاسیون به وجود می آید. برای همین و برای مطالعه رفتار تکنیگی اتفاق افتاده در روابط، سطح S را به دو سطح ($S-S_\varepsilon$) و S_ε مجزا کرده و با اعمال حد $\varepsilon\to 0$ ، رفتار سینگولاریته بررسی می شود. پس از رفع این تکنیگی که به تکنیگی نوع اول معروف است[۱] به معادله (۱۵) خواهیم رسید که در آن $C_{ij}(X')$ بر حسب اینکه X' روی چه سطحی قرار گرفته باشد، تعیین می شود. در نتیجه خواهیم داشت:

$$C_{ij}(\vec{X}')\,u_j(\vec{X}',t)=\int_0^t\int_s U_{ij}(\vec{X},\vec{X}',t')\,t_j(\vec{X},\tau)\,ds\,d\tau - \int_0^t\int_s T_{ij}(\vec{X},\vec{X}',t')\,u_j(\vec{X},t)\,ds\,d\tau \qquad (۱۵)$$

$$C_{ij}(\vec{X}')=\begin{cases}1 & \text{If} \quad \vec{X}'\in V\\ 0.5\delta_{ij} & \text{If} \quad \vec{X}'\in S \quad (S \ \text{smooth})\\ 0 & \text{If} \quad \vec{X}'\notin V\,U\,S\end{cases} \qquad (۱۶)$$

تکنیگی نوع دوم بر اساس روش ارائه شده در مرجع [۸] رفع می شود. جواب های اساسی تغییر مکان و تنش در پیوست معرفی شده اند.

انتگرال‌گیری هسته های تکین نسبت به زمان

برای انجام انتگرال‌گیری در حوزه زمان در معادله (۱۵) مجبور به مجزاسازی زمان همانند مجزاسازی مکان هستیم. برای مجزاسازی زمان، محور زمان تا لحظه t_k به K گام زمانی تقسیم می شود، به طوری که $t_K=K\Delta t$ است. در هر گام زمانی میزان تغییرات متغیرهای میدانی (تغییرمکان و بردار تنش) به فرم معینی دانسته فرض می شود. با توجه به این که توابع زمانی موجود در هسته ها به طور خطی فرض می شوند، می توان انتگرال‌گیری نسبت به زمان را به صورت تحلیلی انجام داد. فرضیات متفاوتی برای در نظر گرفتن تغییرات متغیرهای میدانی در بازه های زمانی وجود دارد[۷]. در این تحقیق تغییرات تغییر مکان در بازه های زمانی به صورت خطی و تغییرات بردار تنش به صورت ثابت در نظر گرفته شده است، در نتیجه خواهیم داشت:

$$t_i(\vec{X},\tau)=\sum_{k=1}^{K}\phi_k(\tau)\,t_i^m(\vec{X}) \qquad (۱۷)$$

$$u_i(\vec{X},\tau)=\sum_{k=1}^{K}\left(\Theta_1(\tau)u_i^k(\vec{X})+\Theta_2(\tau)u_i^{k-1}(\vec{X})\right) \qquad (۱۸)$$

که در معادلات بالا:

$$\begin{aligned}\phi_k(\tau)&=H(\tau-(k-1)\Delta t)-H(\tau-k\Delta t)\\ \Theta_1(\tau)&=\frac{\tau-(k-1)\Delta t}{\Delta t}\phi_k(\tau)\\ \Theta_2(\tau)&=\frac{k\Delta t-\varepsilon}{\Delta t}\phi_k(\tau)\end{aligned} \qquad (۱۹)$$

در روابط بالا $H(\tau)$ نشان دهنده تابع پله‌ای واحد و $u_i^k(\vec{X})$ و $t_i^k(\vec{X})$ ، بردار تنش و جا به جایی در زمان $k\Delta t=t$ در نقطه مرزی X است. اگر معادله (۱۵) را برای زمان ($=K\Delta t$) t_K در نظر بگیریم، در نتیجه خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}&C_{ij}(\vec{X}')\,u_j^K(\vec{X}')=\\ &\sum_{k=1}^{K}\int_s\int_{(k-1)\Delta t}^{k\Delta t}U_{ij}(\vec{X}',\vec{X},t')\times t_j^k(\vec{X})\,d\tau\,ds+\\ &-\sum_{k=1}^{K}\int_s\int_{(k-1)\Delta t}^{k\Delta t}T_{ij}(\vec{X}',\vec{X},t')\times\\ &\left[\Theta_1(\varepsilon)u_i^k(X)+\Theta_2(\varepsilon)u_i^{k-1}(X)\right]d\tau\,ds\end{aligned} \qquad (۲۰)$$

پس از انجام انتگرال گیری تحلیلی نسبت به زمان هسته های تکین به روابط زیر خواهیم رسید :

$$\begin{aligned}C_{ij}(\vec{X}')\,u_j^K(\vec{X}')&=\sum_{k=1}^{K}\int_s U_{ij}^{*\,K-k+1}t_j^k(\vec{X})\,ds\\ &-\sum_{k=1}^{K}\int_s\left(T_{ij1}^{*K-k+1}+T_{ij2}^{*K-k}\right)u_j^k(\vec{X})\,ds\end{aligned} \qquad (۲۱)$$

که U_{ij}^{*K-k+1} و $T_{ij\gamma}^{*K-k+1}$ $(\gamma=1,2)$ به صورت کامل در مرجع [۷] ارائه شده است.

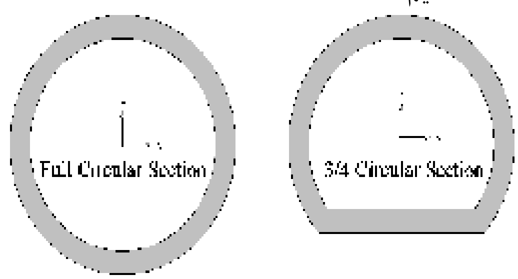
مجزاسازی هندسه

در تکنیک المان مرزی، مرز سازه توسط تعدادی المان تقسیم بندی می شود. مسئله حاضر از نوع مسائل اندرکنش بوده و سطوح مختلفی در مواد متفاوت وجود دارد. این سطوح با یک سری روابط همسازی به هم مرتبط می شوند. همان طور که در شکل (۳) دیده می‌شود، برای مجزاسازی، دو سطح وجود دارد که یکی سطح داخلی دیوارهٔ تونل‌ها است و دیگری سطح خارجی آن.

شکل ۳ : مدلی از دیواره بتنی خم ۹۰ درجه در تونل.

با توجه به اینکه در کلیه سطوح از یک نوع المان استفاده می شود تنها مجزاسازی یکی از این سطوح مورد بحث قرار می گیرد.

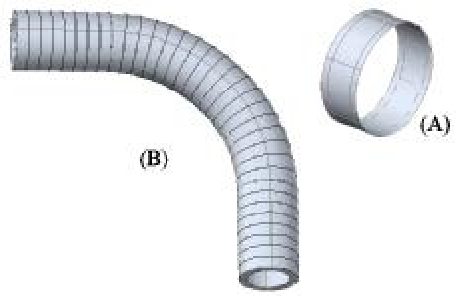
انواع المان ها مانند المان ثابت، المان مربعی چهار گرهی، المان مثلثی ۳ گرهی، المان مربعی ۸ گرهی و المان مثلثی ۶ گرهی و ... می توانند برای مجزاسازی این سطوح استفاده شوند. به طور معمول در کارهای عمومی المان مرزی از المان‌های مربعی ۸ گرهی و یا مثلثی ۶ گرهی استفاده می شود. مسئله، تنها برای ۲ نوع مقطع تونل می‌تواند حل شود، که عبارتند از ۱) مقطع دایره ای کامل ۲) مقطع ۳/۴ دایره و با توجه به شکل این مقاطع که در شکل (۴) نشان داده شده اند، می توانیم از المان‌های خاص که به المان های حلقه معروف هستند، استفاده کنیم.



شکل ٤ : مقاطع مختلف تونل خمیده در مدلسازی عددی و دستگاه مختصات محلی در مقطع خم تونل.

در شکل (۵) می توانید محدوده خم ۹۰ درجه تونل را بعد از المان بندی به وسیله المان های حلقه مشاهده کنید. در حقیقت با استفاده از این المان‌ها، تونل به یک سری حلقه های استوانه ای کوچک تبدیل می شود. برای به دست آوردن توابع شکلی و روابط مربوط به این المان از یک دستگاه مختصات خاص استفاده می شود و این دستگاه مختصات در حالت کلی تا انتهای مسئله ثابت باقی می ماند. همان طور که در شکل (۴) دیده می شود، صفحه مقطع تونل در صفحه محورهای مختصات x و y بوده و محور مختصات Z همواره در راستای محور طولی تونل که می تواند مستقیم و یا منحنی باشد، قرار می گیرد.

یک مقطع دلخواه که عمود بر محور Z است، می تواند به صورت تقریبی به یک دایره با شعاع واحد در یک دستگاه مختصات استوانه ای نگاشت شود. مقطع دلخواه و نگاشت آن روی دایرهٔ با شعاع واحد در مختصات استوانه ای در شکل (۷) نشان داده شده است.



شکل ٥ : (A) تصویری از المان حلقه که توسط آن هر یک از سطوح مجزا سازی می‌شود. (B) تونل خمیده بعد از المان بندی.

می توان یک نگاشت بین دستگاه های مختصات تعریف کرد به طوری که نقطهٔ i ام در شکل واقعی مقطع با مختصات (x_i,y_i)، به نقطه ای با زاویهٔ مرکزی θ_i روی دایره ای با شعاع واحد نگاشت شود. در حالت کلی این نگاشت به صورت زیر نشان داده می شود[۲]:

$$x = \sum_i N_i(\theta,\theta_i)x_i \qquad (۲۲)$$

$$y = \sum_i N_i(\theta,\theta_i)y_i$$

به طوری که x_i, y_i مختصات x و y در مقطع واقعی در نقطهٔ i ام روی مقطع در محیط اصلی است و همچنین θ زاویه در مختصات استوانه ای بعد از نگاشت است و $N_i(\theta, \theta_i)$ تابعی از θ, θ_i است. تابع $N_i(\theta, \theta_i)$ به شکل زیر تعریف می شوند:

$N_i(\theta, \theta_i) = 1 \quad \& \; N_i(\theta, \theta_j)= 0$ $\qquad N_i(\theta, \theta_i)$ یک تابع هارمونیک است (۲۳)

شکل ٦ : نگاشت تقریبی مقطع ٣/٤ دایره به دایره با شعاع واحد.

با توجه به رابطه (۲۳) برای Q نقطه (... و 2^n و ... و ۳۲ و ۱۶ و ۸ و ۴ = Q) تابع نگاشت به شکل کلی زیر تبدیل می‌شود[۲] :

$$N_q(\theta,\theta_q) = \sum_{p=0}^{q/2} C_p CosP(\theta - \theta_q) \qquad (۲۴)$$

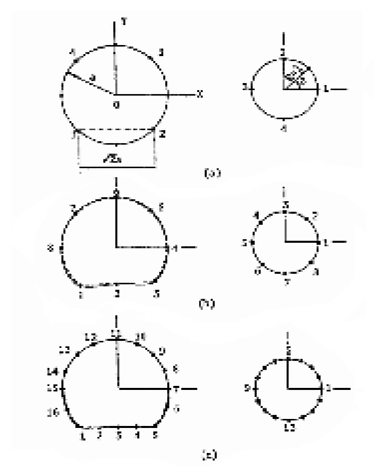
که در رابطهٔ (۲۴)

$$C_p = \begin{cases} 1/Q & p = 0 \ or \ Q/2 \\ 2/Q & p = 1,2,...,Q/2-1 \end{cases} \qquad (۲۵)$$

بنابراین با توجه به رابطهٔ (۲۴) و (۲۲) نگاشت مختصات برای Q نقطه به شکل زیر است :

$$x = \sum_{q=1}^{Q}\sum_{p=0}^{Q/2} C_p Cosp(\theta - \theta_q) x_q$$
$$y = \sum_{q=1}^{Q}\sum_{p=0}^{Q/2} C_p Cosp(\theta - \theta_q) y_q \qquad (۲۶)$$

برای تعیین دقت این نگاشت مقطعی که در شکل (۶) نشان داده شده است، به طور تقریبی، با استفاده از رابطهٔ کلی نگاشت که در رابطهٔ (۲۶) ارائه شده، به یک دایره با شعاع واحد نگاشت شده است. تعداد نقاط در نظر گرفته شده در این مثال $Q=4,8,16$ است. خط پر در سمت چپ شکل (۷)، شکل مقطع را بعد از نگاشت معکوس (نگاشت از دایره به شعاع واحد به شکل حقیقی مقطع) به وسیله روش ارائه شده و خط چین شکل واقعی مقطع را نشان می دهد. همان‌گونه که در شکل دیده می‌شود با افزایش تعداد نقاط روی محیط مقطع، دقت نگاشت افزایش می یابد. در فرمول بندی روش المان مرزی، معادلات انتگرال مرزی ۳ بعدی ارائه شده در رابطهٔ (۲۱)، مجزاسازی در راستای محور طولی تونل و مقطع آن انجام می شود. مجزاسازی در راستای محور طولی تونل نیز به این ترتیب انجام می‌گیرد:



شکل ۷ : نگاشت معکوس از دایره به شعاع واحد به شکل اصلی مقطع[۲].

$$Z = \psi_1 Z_1 + \psi_2 Z_2 \qquad (۲۶)$$

که در این رابطهٔ، Z_1 طول محور مختصات در راستای محور طولی تونل در ابتدای المان حلقه و Z_2 میزان محور مختصات در راستای محور طولی تونل در انتهای المان حلقه است و ψ_1 و ψ_2 به ترتیب عبارتند از:

$$\psi_1 = \frac{1-\eta}{2}, \psi_2 = \frac{1+\eta}{2} \qquad (۲۷)$$

با توجه به مجزا سازی هندسی انجام گرفته می توانیم روابطی را که در فرمولاسیون المان مرزی استفاده می شود به دست بیاوریم. این روابط عبارتند از:

$$r^2 = \left(\sum_{q=1}^{Q}\sum_{p=0}^{Q/2} C_p Cosp(\theta,\theta_q) x_q - x_i\right)^2 + \left(\sum_{q=1}^{Q}\sum_{p=0}^{Q/2} C_p Cosp(\theta,\theta_q) y_q - y_i\right)^2 + (z - z_i)^2 \qquad (۲۸)$$

$$\frac{\partial}{\partial n} = r_{,1}n_1 + r_{,2}n_2 + r_{,3}n_3 \qquad (۲۹)$$

$$\begin{Bmatrix} r_{,1} \\ r_{,2} \\ r_{,3} \end{Bmatrix} = \frac{1}{r}\begin{Bmatrix} \sum_{q=1}^{Q/2}\sum_{p=0}^{Q/2} C_p Cosp(\theta - \theta_q) x_q - x_i \\ \sum_{q=1}^{Q/2}\sum_{p=0}^{Q/2} C_p Cosp(\theta - \theta_q) y_q - y_i \\ Z - Z_i \end{Bmatrix} \qquad (۳۰)$$

$$\begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Omega = \sqrt{\left(\sum_{q=1}^{Q}\sum_{p=0}^{Q/2} C_p \times p \times \sin p(\theta - \theta_q) x_q\right)^2 + \left(\sum_{q=1}^{Q}\sum_{p=0}^{Q/2} C_p \times p \times \sin p(\theta - \theta_q) y_q\right)} \qquad (۳۱)$$

$$N_1 = \sum_{q=1}^{Q}\sum_{p=0}^{Q/2} C_p \times p \times \sin p(\theta - \theta_q) x_q \Big/ \Omega$$

$$N_2 = \sum_{q=1}^{Q}\sum_{p=0}^{Q/2} C_p \times p \times \sin p(\theta - \theta_q) y_q \Big/ \Omega$$

$$dS = \left[\Omega \times \left(\frac{dz}{d\eta}\right)\right] \times d\theta d\eta \qquad (۳۲)$$

مجزاسازی متغیرهای میدانی در هندسه

متغیرهای میدانی در مقطع تونل مقادیر متفاوتی دارند. اما هنگامی که هندسه تونل به محیط نگاشت شده

انتقال داده می شود. تغییرات این متغیرها را مـی تـوان بـا تغییر θ (زاویه مرکزی مقطع) بیان کرد. همان طـور کـه در شکل (۸) نیز می بینید، این متغیرهـا هنگـامی کـه θ>2π باشد تکرار می شوند. در واقع می تـوان گفـت بـه صـورت ذاتی با متغیر θ متنـاوب هسـتند. پـس بـا توجـه بـه ایـن موضوع اگر این متغیرها را به صورت ترم های سری فوریـه بنویسیم، می توانیم مطمئن باشیم که بعد از تعداد کمی از ترم های فوریه این متغیرها به سرعت همگرا می شوند. بـه همین دلیل به جـای اینکـه از المـان هـای ایزوپارامتریـک استفاده شود و به تعداد گره ها معادلـه بـرای حـل داشـته باشیم، از سری فوریه برای مجزاسازی متغیرهـای میـدانی استفاده می شود. در واقع به ایـن روش از تعـداد معـادلات هم بسیار کاسته می شود. بنابراین مجزاسازی به شکل زیر انجام می گیرد[۲]:

$$u^m(\vec{x}) = \sum_{s=1}^{S}[\delta_s(\theta)]u_s^m(\vec{x}) \qquad (۳۳)$$

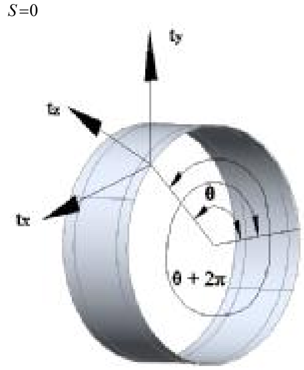
که در این رابطـه، $\delta_s(\theta)$ تـرم s ام سـری فوریـه اسـت (S= 0,1,2,…,S) که به طور مثال خواهیم داشت:

$S= 0 \rightarrow \delta_s(\theta)= 1$
$S= 1 \rightarrow \delta_s(\theta)= \cos\theta$
$S= 2 \rightarrow \delta_s(\theta)= \sin\theta, \ldots$

پایین نویس s در واقع نشـان دهنـده تـرم S ام سـری فوریه است. در واقع $u_s^m(\vec{x})$ نشان دهنـده ضـریب ثابـت ترم S ام جا به جایی در زمان $m\Delta t$ در مقعطـی اسـت کـه بردار مکان نقطه $(\vec{x})$، در آن جا قرار دارد.

به همین ترتیب برای بردار تنش هم خواهیم داشت :

$$t^m(\vec{x}) = \sum_{S=0}^{S}[\delta_s(\theta)]t_s^m(\vec{x}) \qquad (۳۴)$$



شکل ۸ : متناوب بودن تغییرات متغیرهای میدانی نسبت به زاویه مرکزی.

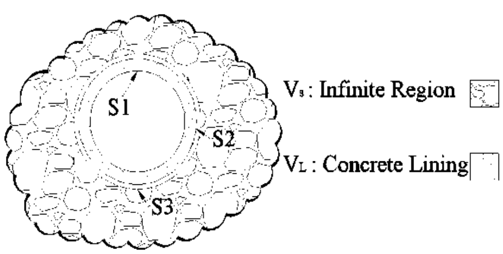
در واقع به کمک این نوع مجزاسازی تعداد معادلات و متغیرها در همه مقاطع تونل‌ها، از تعداد گره های موجود در هر مقطع به تعداد ترم های سری فوریه کاهش می‌یابد، زیرا تنها به تعداد ترم های سری فوریه در هر مقطع متغیر موجود است و به همین دلیل تنها به همین تعداد معادله المان مرزی را برای گره‌های موجود در هر مقطع اعمال می‌کنیم.

تفرق امواج در سازه های مدفون

هنگامی که موج به بـی نظمـی هـای محـدود سـطح زمین مانند گودال‌ها یا بی نظمی هـای زیرزمینـی ماننـد حفره ها و اجسام زیرزمینی برخورد مـی کنـد، بـه دلیـل متفاوت بودن خصوصیات محیط اولیه و بی نظمی موجود، قسمتی از آن، تغییر مسـیر داده و قسـمت دیگـر در ایـن محیط انتشار می یابد. به این فرآیند تفرق گفته می شود. در عمل فرض می شود که موج اولیه در برخورد بـه ایـن بی نظمی‌ها بـدون تغییـر منتشـر مـی شـود و در همـین هنگام محیط دوم، خود تبدیل به یک منبع موج می شود و با ارتعاش های خود یک موج ثانویه به نام موج متفـرق شده ایجاد می‌کند، به گونه ای که مجمـوع ایـن دو مـوج بیانگر حالت واقعی است. بنابراین در مسائل تفرق امـواج، میدان تغییر مکان کل u_i به عنوان مجموع میـدان تغییـر مکان آزاد u_i^f و میدان تغییـر مکـان متفـرق شـده u_i^s تعریف می شود، یعنی[۴]:

$$u_i = u_i^f + u_i^s \qquad (۳۵)$$

در واقع u_i^f نشان دهنده میدان موج در فضا با فرض نبود بی نظمـی اسـت. در نـیم فضـا u_i^f برابـر مجمـوع مـوج برخـوردی u_i^i و مـوج مـنعکس شـده از سـطح آزاد u_i^r است. میدان متفرق شده u_i^s شرایط تشعشع در بی‌نهایت را ارضا می کند.



شکل ۹ : مقطع تونل با دیواره بتنی در محیط بی‌نهایت و نام گذاری سطوح .

در این مقاله تونل خمیده با دیواره بتنی یـا فـولادی در نظر گرفته می شود و با توجـه بـه اینکـه خصوصـیات محیط با خصوصیات دیواره تونل متفاوت است، همان طور

که در شکل (۹) نشان داده شده، با فرض تماس کامل بین دیواره خارجی بدنه تونل و محیط اطراف ($S_3 \equiv S_2$) دو سری مرز وجود دارد که یکی مرز داخلی دیواره تونل و دیگری مرز خارجی دیواره تونل را مدل می کند. حال می توان برای هر یک از محیط ها از معادله انتگرال مرزی استفاده کرد. برای محیط بی‌نهایت خاک خواهیم داشت:

$$C_{ij}\left(\vec{X}'\right)u_j^K\left(\vec{X}'\right)=\sum_{k=1}^{K}\int_{(S_3)}U_{ij}^{*K-k+1}t_j^k ds_3 - \sum_{k=1}^{K}\oint_{S_3}\left(T_{ij1}^{*K-k+1}+T_{ij2}^{*K-k}\right)u_j^k ds_3 \longrightarrow \vec{X}'\in S_3 \qquad (۳۶)$$

همچنین برای محیط دیواره تونل خواهیم داشت:

$$C_{ij}\left(\vec{X}'\right)u_j^K\left(\vec{X}'\right)= \sum_{k=1}^{K}\left\{\int_{S_1}U_{ij}^{*K-k+1}t_j^k ds_1+\int_{S_2}U_{ij}^{*K-k+1}t_j^K ds_2\right\} - \sum_{k=1}^{K}\left\{\oint_{S_1}\left(T_{ij1}^{*K=k+1}+T_{ij2}^{*K-k+1}\right)u_j^k ds_1 + \oint_{S_2}\left(T_{ij1}^{*K-k+1}+T_{ij2}^{*K-k}\right)u_j^k ds_2\right\} \qquad (۳۷)$$

پس از مجزاسازی مرزها با المان های متفاوت و انتخاب نقاط X' روی ($S_1 U S_2$) ، برای معادلات (۳۶) و (۳۷) این نوع از به معادلات ماتریسی می‌رسیم:

محیط خاک:

$$[H]\{U_3\}+[G]\{t_3\}=\{D_1\} \qquad (۳۸)$$

محیط دیواره بتنی:

$$\begin{bmatrix}H_{11} & H_{12}\\ H_{21} & H_{22}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}U_{S1}\\ U_{S2}\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}G_{11} & G_{12}\\ G_{21} & G_{22}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}t_{S1}\\ t_{S2}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}D_2\\ D_3\end{Bmatrix} \qquad (۳۹)$$

معادلات (۳۸) و (۳۹) برای متغیرهای میدانی کل (total field) تشکیل شده و در نتیجه به معادلات همسازی برای ارتباط بین دو محیط دیواره تونل و خاک نیاز است؛

$$U_{S3}^f+U_{S3}^s=U_{S2}^t \qquad (۴۰)$$

$$t_{S3}^f+t_{S3}^s=-t_{S2}^t \qquad (۴۱)$$

$$t_{S1}^t=0 \qquad (۴۲)$$

با توجه به معادلات (۳۸) تا (۴۲)، شش سری مجهول و شش سری معادله وجود دارد که با حل این معادلات در هر یک از بازه های زمانی به حل مورد نظر و مجهولات خواهیم رسید.

مجهولات عبارتند از $u_i^O, t_i^O, u_i^I, t_i^I, u_i^s, t_i^s$ که به ترتیب بردار تنش تفرق یافته محیط (t_i^s)، جا به جایی‌های تفرق یافته محیط در سطح تماس بین خاک و سازه تونل (u_i^s)، بردار تنش کل در سطح خارجی سازه تونل (t_i^O) و جا به جایی کل در سطح خارجی سازه تونل (u_i^O) ، بردار تنش کل سطح داخلی سازه تونل (t_i^I) و جا به جایی کل سطح داخلی سازهٔ تونل (u_i^I).

نحوه تشکیل معادلات (۳۸) و (۳۹) به تشریح توضیح داده می شود. ابتدا معادله مجزاسازی شده در زمان و مکان المان مرزی برای محیط و مرز خارجی تونل به شکل زیر بازنویسی می شود:

$$C_{ij}u_j^K(\vec{\xi})=\sum_{k=1}^{K}\sum_{n=1}^{N}\int_{-1}^{+1}\int_0^{2\pi}U_{ij1}^{K-k+1}\hat{t}_j^{kn}|J|d\eta d\theta - \sum_{k=1}^{K}\sum_{n=1}^{N}\int_{-1}^{+1}\int_0^{2\pi}(T_{ij1}^{K-k+1}+T_{ij1}^{K-k})\hat{u}_j^{kn}|J|d\eta d\theta \qquad (۴۳)$$

در سمت چپ معادله (۴۳)، اندیس j نشان دهنده مؤلفه jام متغیرمیدانی نقطهٔ $\vec{\xi}$ است که معادله انتگرال مرزی برای این مؤلفه نقطه $\vec{\xi}$ نوشته می شود. سطح حفاری به یک سطح استوانه ای با شعاع واحد نگاشت می‌شود که انتگرال روی سطح را به θ که زاویه مرکزی مقطع استوانه به شعاع واحد است و η که طول نگاشت شده استوانه است، تبدیل می کند. اندیس k یا K، اندیسی است که زمان مورد نظر (kΔt) را نشان می دهد و n یا N شماره مقطعی را نشان می دهد که تأثیر آن مقطع را در نقطهٔ $\vec{\xi}$ بررسی می کنیم. بالانویس «^» نشان دهنده متغیرها در سطح حفاری است. تغییرات متغیرهای میدانی در طول المان حلقه به شکل خطی فرض می‌شود:

$$\hat{t}_j^k=\frac{1-\eta}{2}\hat{t}_j^{kn}+\frac{1-\eta}{2}\hat{t}_j^{k(n+1)}$$

$$\hat{u}_j^k=\frac{1-\eta}{2}\hat{u}_j^{kn}+\frac{1-\eta}{2}\hat{u}_j^{k(n+1)} \qquad (۴۴)$$

$\hat{u}_j^{kn}$ و $\hat{t}_j^{kn}$ در محیط دایره متناوب و با دورهٔ تناوب 2π تکرار می شود. در نتیجه می توانیم از سری فوریه برای مدل کردن این متغیرها استفاده کنیم. اگر متغیرهای $\hat{a}_s$, $\hat{b}_s$ به ترتیب ضرایب ترم فوریه sام بردار تنش و جا به جایی باشند، برای سطح حفاری محیط خواهیم داشت:

$$\left[C_{ij}\delta_s\right]\left\{\hat{a}_{sj}^{KN}\right\}=\left[(G_{ij}^{KK})_{ns}\right]\left\{\hat{b}_{sj}^{Kn}\right\}-\left[(H_{ij}^{KK})_{ns}\right]\times$$
$$\times\left\{\hat{a}_{sj}^{Kn}\right\}+\sum_{k=1}^{K-1}\left(\left[\left(G_{ij}^{Kk}\right)_{ns}\right]\left\{\hat{b}_{sj}^{kn}\right\}-\left[\left(H_{ij}^{Kk}\right)_{ns}\right]\left\{\hat{a}_{sj}^{kn}\right\}\right)$$

$$\left[C_{ij}\delta_s\delta_{Nn}+\left(H_{ij}^{Kk}\right)_{ns}\right]\left\{\hat{a}_{sj}^{kn}\right\}=\left[\left(G_{ij}^{Kk}\right)_{ns}\right]\left\{\hat{b}_{sj}^{kn}\right\}+\left\{D_1\right\}$$
$$\left\{D_1\right\}=\sum_{k=1}^{K-1}\left(\left[\left(G_{ij}^{Kk}\right)_{ns}\right]\left\{\hat{b}_{sj}^{kn}\right\}-\left[\left(H_{ij}^{Kk}\right)_{ns}\right]\left\{\hat{a}_{sj}^{kn}\right\}\right) \qquad (۴۵)$$

در رابطه (۴۵) :

$$\left(H_{ij}^{Kk}\right)_{ns}=\int_{-1}^{+1}\int_{0}^{2\pi}\frac{l_{(n-1)}}{2}\left(T_{ij1}^{K-k+1}+T_{ij2}^{K-k}\right)\delta_3\times\Omega\frac{1+\eta}{2}d\eta d\theta$$
$$+\int_{-1}^{+1}\int_{0}^{2\pi}\frac{l_{(n)}}{2}\left(T_{ij1}^{K-k+1}+T_{ij2}^{K-k}\right)\delta_s\times\Omega\times\frac{1-\eta}{2}d\theta d\eta$$
$$\left(G_{ij}^{Kk}\right)_{ns}=\int_{-1}^{+1}\int_{0}^{2\pi}\frac{l_{(n-1)}}{2}U_{ij1}^{K-k+1}\times\delta_s\times\Omega\times\frac{1-\eta}{2}\,d\partial d\eta$$
$$+\int_{-1}^{+1}\int_{0}^{2\pi}\frac{l_{(n)}}{2}U_{ij1}^{K-k+1}\times\delta_s\times\Omega\times\frac{1-\eta}{2}\,d\partial d\eta \qquad (۴۶)$$

با توجه به معادلات اضافی (۴۰) و (۴۱) و تبدیل آن به ضرایب ترم های فوریه، $\{D_1\}$ در (۴۵) به شکل رابطه (۴۴) تبدیل می شود :

$$\hat{a}^f+\hat{a}^s=\hat{\hat{a}}^s$$
$$\hat{b}^f+\hat{b}^s=-\hat{\hat{b}}^s \qquad (۴۷)$$

که در روابط (۴۳) بالانویس f نشان دهنده میدان آزاد موج و بالانویس s نشان دهنده میدان تفرق یافته موج است:

$$\left\{D_1\right\}=\sum_{k=1}^{K-1}\left(\left[\left(G_{ij}^{Kk}\right)_{ns}\right]\left\{\hat{\hat{b}}_{sj}^{kn}\right\}-\left[\left(H_{ij}^{Kk}\right)_{ns}\right]\left\{\hat{\hat{a}}_{sj}^{kn}\right\}\right)+$$
$$+\sum_{k=1}^{K-1}\left(\left[\left(G_{ij}^{Kk}\right)_{ns}\right]\left\{-\hat{b}_{sj}^{fkn}\right\}-\left[\left(H_{ij}^{Kk}\right)_{ns}\right]\left\{\hat{a}_{sj}^{fkn}\right\}\right) \qquad (۴۸)$$
$$+\left[C_{ij}\delta_s\delta_{Nn}\right]\left\{\hat{a}_{sj}^{fkn}\right\}$$

که در رابطه (۴۸)، بالانویس « $\hat{\hat{a}}$, $\hat{\hat{b}}$ » نشان دهنده ضرایب ترم های بسط فوریه برای سطح خارجی دیواره است. $\hat{b}_{sj}^{fkn}$ عبارت است از ضریب ترم فوریه s ام مربوطه به مؤلفه j ام بردار تنش میدان آزاد. بالانویس f نماینده میدان آزاد، k نشان دهنده زمان $k\Delta t$ و n نشان دهنده مقطعی است که گیرنده در آن مقطع وجود دارد. بالانویس «~» مربوطه به سطح داخلی تونل است، در نتیجه خواهیم داشت:

$$\tilde{u}_j^{kn}\Rightarrow\tilde{a}_{sj}^{kn}\qquad AND\qquad \tilde{t}_j^{kn}=0 \qquad (۴۹)$$

به این علت بردار تنش در سطح داخلی تونل صفر در نظر گرفته شده که تونل بدون فشار داخلی است. در صورتی که تونل، با فشار داخلی ثابت باشد، می توان این شرایط را با شرایط به وجود آمده جمع کرد و در حقیقت از اصل سوپرپوزیشن استفاده کرد. اگر معادلات را یک بار برای سازه تونل بنویسیم خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix}C_{ij}\delta_s & O\\ O & C_{ij}\delta\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\tilde{a}_{sj}^{KN}\\ \hat{\hat{a}}_{sj}^{KN}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\left(G_{ij}^{Kk}\right)_{ns}^{22} & \left(G_{ij}^{Kk}\right)_{ns}^{23}\\ \left(G_{ij}^{Kk}\right)_{ns}^{32} & \left(G_{ij}^{Kk}\right)_{ns}^{33}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}O\\ \hat{\hat{b}}_{sj}^{kn}\end{Bmatrix}$$
$$-\begin{bmatrix}\left(H_{ij}^{Kk}\right)_{ns}^{22} & \left(H_{ij}^{Kk}\right)_{ns}^{23}\\ \left(H_{ij}^{Kk}\right)_{ns}^{32} & \left(H_{ij}^{Kk}\right)_{ns}^{33}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\tilde{a}_{sj}^{kn}\\ \hat{\hat{a}}_{sj}^{kn}\end{Bmatrix}+$$
$$\sum_{k=1}^{K-1}\begin{bmatrix}\left(G_{ij}^{Kk}\right)_{ns}^{22} & \left(G_{ij}^{Kk}\right)_{ns}^{23}\\ \left(G_{ij}^{Kk}\right)_{ns}^{32} & \left(G_{ij}^{Kk}\right)_{ns}^{33}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}O\\ \hat{\hat{b}}_{sj}^{kn}\end{Bmatrix}+ \qquad (۵۰)$$
$$\begin{bmatrix}\left(H_{ij}^{Kk}\right)_{ns}^{22} & \left(H_{ij}^{Kk}\right)_{ns}^{23}\\ \left(H_{ij}^{Kk}\right)_{ns}^{32} & \left(H_{ij}^{Kk}\right)_{ns}^{33}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\tilde{a}_{sj}^{kn}\\ \hat{\hat{a}}_{sj}^{kn}\end{Bmatrix}$$

در رابطهٔ (۵۰) ، $\left(G_{ij}^{Kk}\right)_{ns}$ و $\left(H_{ij}^{Kk}\right)_{ns}$ همانند روابط (۴۶) تعریف می شوند، با این تفاوت که بالانویس $(\ldots)^{23}$ نماینده این موضوع است که عدد اول نشان دهنده سطحی است که گیرنده در آن وجود دارد و عدد دوم نشان دهنده سطحی است که فرستنده در آن قرار دارد. عدد (2) نشان دهنده سطح داخلی دیوارهٔ تونل و عدد (3) نشان دهنده سطح خارجی دیواره تونل است. با توجه به روابط ذکر شده معادلات (۴۵) و (۵۰) به معادله ماتریسی زیر تبدیل می شود:

$$\begin{bmatrix}O & C_{ij}\delta_s\delta_{Nn}+\left(H_{ij}^{KK}\right)_{ns} & -\left(G_{ij}^{KK}\right)_{ns}\\ C_{ij}\delta_s\delta_{Nn}+\left(H_{ij}^{KK}\right)_{ns}^{22} & \left(H_{ij}^{KK}\right)_{ns}^{23} & -\left(G_{ij}^{KK}\right)_{ns}^{23}\\ \left(H_{ij}^{KK}\right)_{ns}^{32} & C_{ij}\delta_s\delta_{Nn}+\left(H_{ij}^{KK}\right)_{ns}^{33} & -\left(G_{ij}^{KK}\right)_{ns}^{33}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\tilde{a}_{sj}^{kn}\\ \hat{\hat{a}}_{sj}^{kn}\\ \hat{\hat{b}}_{sj}^{kn}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}D_1\\ D_2\\ D3\end{Bmatrix}$$

(۵۱)

$$D_1=\sum_{k=1}^{K-1}\left(\left[\left(G_{ij}^{Kk}\right)_{ns}\right]\left\{\hat{b}_{sj}^{kn}+\hat{b}_{sj}^{fkn}\right\}-\left[\left(H_{ij}^{Kk}\right)_{ns}^{22}\right]\left\{\hat{a}_{sj}^{kn}+\hat{a}_{sj}^{fkn}\right\}\right)-$$
$$\left(C_{ij}\delta_s+\left[\left(H_{ij}^{KK}\right)_{ns}\right]\right)\left\{\hat{a}_{sj}^{fKn}\right\}+\left[\left(G_{ij}^{KK}\right)_{ns}\right]\left\{\hat{b}_{sj}^{fKn}\right\}$$
$$D_2=\sum_{k=1}^{K-1}\left(\left[\left(G_{ij}^{Kk}\right)_{ns}^{23}\right]\left\{\hat{b}_{sj}^{kn}+\hat{b}_{sj}^{fkn}\right\}-\left[\left(H_{ij}^{Kk}\right)_{ns}^{23}\right]\left\{\hat{a}_{sj}^{kn}+\hat{a}_{sj}^{fkn}\right\}-\left[\left(H_{ij}^{Kk}\right)_{ns}^{22}\right]\left\{\tilde{a}_{sj}^{kn}\right\}\right)-$$
$$\left(\left[\left(H_{ij}^{KK}\right)_{ns}^{23}\right]\right)\left\{\hat{a}_{sj}^{fKn}\right\}+\left[\left(G_{ij}^{KK}\right)_{ns}^{23}\right]\left\{\hat{b}_{sj}^{fKn}\right\}$$
$$D_3=\sum_{k=1}^{K-1}\left(\left[\left(G_{ij}^{Kk}\right)_{ns}^{33}\right]\left\{\hat{b}_{sj}^{kn}+\hat{b}_{sj}^{fkn}\right\}-\left[\left(H_{ij}^{Kk}\right)_{ns}^{32}\right]\left\{\tilde{a}_{sj}^{kn}\right\}-\left[\left(H_{ij}^{Kk}\right)_{ns}^{33}\right]\left\{\hat{a}_{sj}^{kn}+\hat{a}_{sj}^{fkn}\right\}\right)-$$

$$\left(C_{ij}\delta_s\delta_{Nn}+\left[\left(H_{ij}^{KK}\right)_{ns}^{33}\right]\right)\left\{\hat{a}_{sj}^{fKn}\right\}+\left[\left(G_{ij}^{KK}\right)_{ns}^{33}\right]\left\{\hat{b}_{sj}^{fKn}\right\}$$

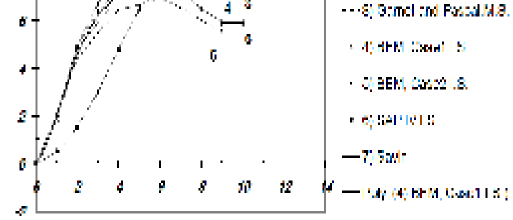
این معادله ماتریسی در زمانه ای مختلف از ابتدای زمان یعنی زمان رسیدن موج به خم تا انتهای آن یعنی زمانی که موج از خم به طور کامل عبور کرده باشد، تشکیل و حل می شود. حل معادلهٔ (۴۷) براساس روش حذفی گوس- جوردن انجام می شود و با توجه به ثوابت سمت راست معادلهٔ (۴۷) در هر قسمت از جواب های بازه قبل استفاده می شود.

نتایج عددی

مسئله مورد بحث، تحلیل دینامیکی یک تونل خمیده تحت گسترش موج پله ای P در محیط بی‌نهایت می‌باشد. تونل خمیده و شکل موج بر حسب زمان در شکل (۱۰) نشان داده شده است.

شکل ۱۰ : تونل خمیده تحت اثر گسترش موج پله ای فشاری.

ارزیابی رفتار دینامیکی با بررسی ضریب تمرکز تنش (SCF) در دیواره تونل انجام می‌گیرد. نسبت‌های ارائه شده، نسبت تنش حلقوی ($\sigma_{\theta\theta}$) در زاویه مرکزی $\theta =$ ۰ به تنش وارده در اثر موج فشاری است. ضریب تمرکز تنش در مقاطعی که بعد از خم قرار می‌گیرد و در نقطه A ارائه می شود. فاصله هر یک از این مقاطع $R\times\pi/36$ است که برای شعاع های متفاوت خم متفاوت است.



شکل ۱۱ : نتایج تحلیل ۲ بعدی تونل.

نتایجی که در شکل (۱۱) ارائه شده است، نتایج تحلیل یک تونل با دیواره فولادی در حالت ۲ بعدی (کرنش مسطح) تحت اثر موج نشان داده شده در شکل (۱۰) است. این جواب ها به ترتیب عبارتند از : ۱) جواب تحلیلی عددی [۹] (1962) Baron & Parnes ۲و۳) جواب تحلیلی عددی [۱۰] Carnet &Crouzet-Pascal (1966) ۴) روش عددی المان مرزی در فضای فرکانسی بر اساس فرمول بندی میدان کل متغیرها ۵) روش عددی المان مرزی در فضای فرکانسی بر اساس فرمول‌بندی میدان تفرق یافته متغیرها ۶) جواب عددی با استفاده از برنامه المان محدود SAP IV [۱۱] ۷) جواب تحلیلی Savin (1961) که مسئله را در حالت کرنش مسطح برای بارگذاری استاتیک حل کرده است[۱۲].

زمانی که موج فشاری شعاع حفاری تونل را طی می‌کند، مدت زمانی است که برای نرمالیزه کردن محور افقی استفاده شده است. این زمان با توجه به مشخصات هندسی که ذکر می شود برابر با ۰.۰۰۱ ثانیه خواهد بود. مشخصات محیط و دیواره فولادی به این ترتیب تعریف می شود:

مشخصات محیط:

$\rho = 2670\ (N.S^2/m^4)$ $\mu=\lambda=2.48\times10^{10}$ Pa

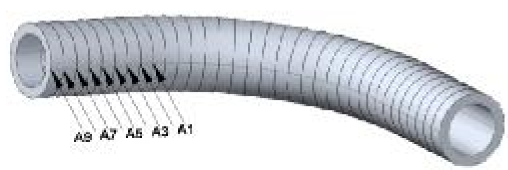
مشخصات دیواره فلزی :

$\rho = 7800\ (N.S^2/m^4)$ $\mu=\lambda=8.27\times10^{10}$ Pa

مشخصات محیط مربوط به سنگ گرانیت است. شعاع داخلی تونل ۵.۳۸ متر و شعاع داخلی آن ۵.۱۸ متر است. محدوده خم به ۱۷ المان حلقه و محدوده تونل مستقیم بالای خم با ۸ المان حلقه و تونل مستقیم پایین خم با ۵ المان حلقه مدل شده است. بازه های زمانی برای حل مسئله برابر $\alpha R\times\pi/36C_1$ است که در این رابطه سرعت موج مربوط به سرعت موج در بدنه فولادی تونل است و α بهینه ترین مقدار را پس از انجام چند آنالیز می گیرد. این مقدار برابر ۰.۷۵ پس از چندین آنالیز انتخاب شده است. برای مجزا سازی متغیرهای هندسی نیز از ۳ ترم فوریه استفاده شده است. همان گونه که در شکل (۱۲) نشان داده شده است، نسبت SCF برای نقاط A1 تا A8 رسم می شوند.

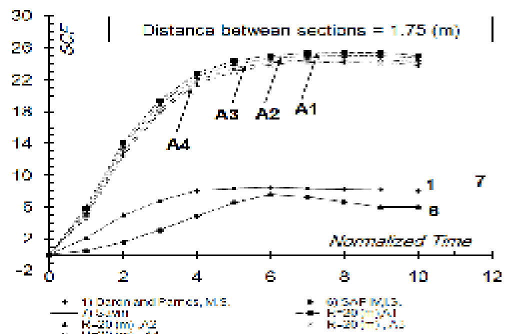
همان طور که در شکل (۱۳) و (۱۴) دیده می شود، هنگامی که نسبت شعاع خم به شعاع متوسط مقطع تونل ۳/۸ است، اثر خم بسیار زیاد بوده و نسبت SCF با گذشت زمان افزایش پیدا می کند. در بازه زمانی دهم این

مقدار برای نقاط A4 و A8 به ترتیب برابر ۳/۱ و ۲/۷۸ برابر حل استاتیک Savin است. در بازه زمانی دهم حل Baron & Parnes و SAP IV به مقدار حل استاتیک نزدیک شده است.

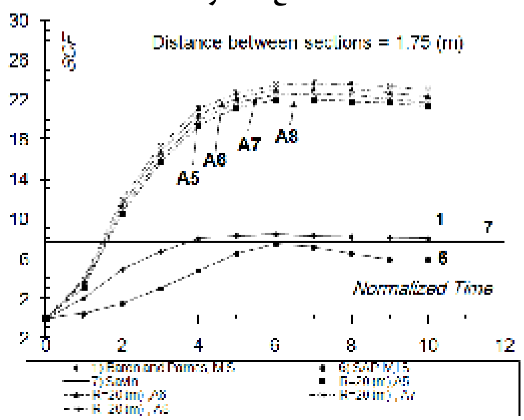


شکل ۱۲: ضریب تمرکز تنش برای نقاط نشان داده شده در این شکل ترسیم می‌شوند.

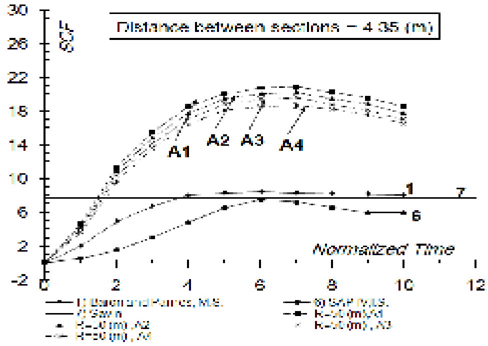
همان‌گونه که در اشکال (۱۵) و (۱۶) دیده می شود، با افزایش شعاع گردش خم به ۵۰ متر و نسبت شعاع گردش خم به شعاع متوسط ۹/۴۶، منحنی SCF به سمت پایدار شدن نزدیک می شود. در این حالت در بازه زمانی دهم برای نقطه A4 و A8 مقدار SCF به ترتیب برابر ۲/۱۶ و ۱/۹۰ برابر حلSAVIN است.



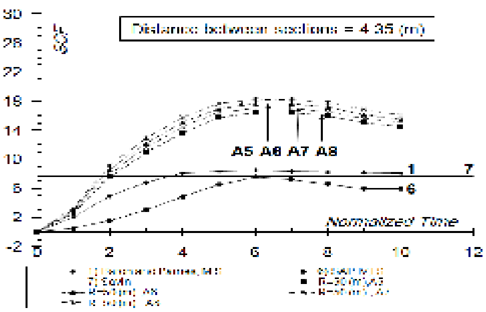
شکل ۱۳: ضریب تمرکز تنش در نقاط متناظر A در خم تونل با شعاع ۲۰ متر.



شکل۱۴: ضریب تمرکز تنش در نقاط متناظر A در خم تونل با شعاع ۲۰ متر.



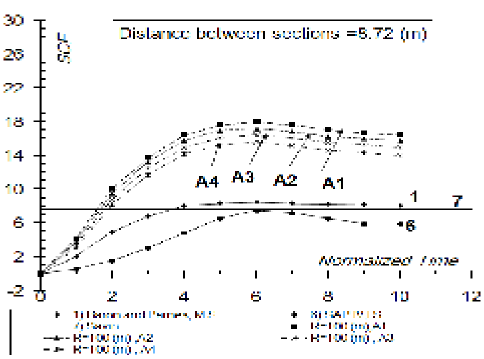
شکل ۱۵: ضریب تمرکز تنش در نقاط متناظر A در خم تونل با شعاع ۵۰ متر.



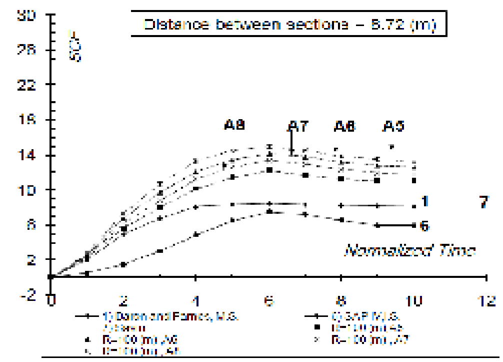
شکل ۱٦: ضریب تمرکز تنش در نقاط متناظر A در خم تونل با شعاع ۵۰ متر.

نکته قابل توجه در اشکال، افزایش فاصله بین منحنی های رسم شده برای نقاط A1 تا A8 نسبت به اشکال (۱۳) و (۱۴) است. این موضوع نشان دهنده کاهش اثر خم با حرکت در راستای تونل و در جهت دور شدن از خم است.

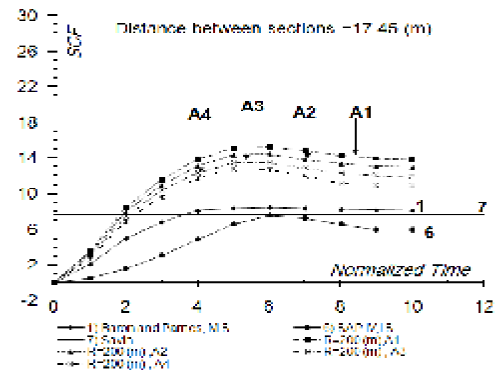
در اشکال (۱۷) و (۱۸) نیز مسیر اصلی همانند اشکال قبلی است. قابل ذکر است که همگرا شدن به سمت یک مقدار ثابت در این اشکال بهتر دیده می شود. این موضوع به دلیل افزایش فاصله نقاط روی خم و همچنین افزایش شعاع خم است.



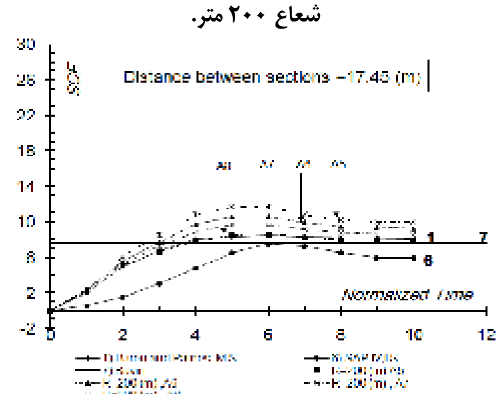
شکل ۱۷: ضریب تمرکز تنش در نقاط متناظر A در خم تونل با شعاع ۱۰۰ متر.



شکل ۱۸: ضریب تمرکز تنش در نقاط متناظر A در خم تونل با شعاع ۱۰۰ متر.



شکل ۱۹: ضریب تمرکز تنش در نقاط متناظر A در خم تونل با شعاع ۲۰۰ متر.



شکل ۲۰: ضریب تمرکز تنش در نقاط متناظر A در خم تونل با شعاع ۲۰۰ متر.

در این اشکال نسبت شعاع خم به شعاع متوسط مقطع برابر ۱۸.۹۴ است. مقادیر SCF نیز برای نقاط A4 و A8 به ترتیب ۱.۸۲ و ۱.۴۴ برابر حل SAVIN است.

اشکال (۱۹) و (۲۰) برای نسبت شعاع خم به شعاع متوسط مقطع برابر با ۳۷.۸۸ رسم شده است. در این اشکال مقدار SCF برای نقاط A4 و A8 به ترتیب ۱/۴۳ و ۱/۰۴ برابر حل SAVIN است.

نتیجه گیری

با توجه به فرمول بندی ارائه شده، خم ۹۰ درجه تونل های با دیواره را می توان به صورت سه بعدی تحت اثر انتشار موج بررسی کرد. موج برخوردی می تواند با هر زاویه ای نسبت به محور تونل قرار گیرد. به دلیل کمبود آنالیز های انجام شده در این زمینه در ادبیات فنی فقط یک مثال خاص توسط این فرمول بندی بررسی می‌شود. قابل ذکر است که فرمول بندی به طور کامل عمومی است و برای هر نوع موجی با هر راستایی قابل اعمال است. همان طور که در نتایج مثال عددی دیده شد، با افزایش شعاع گردش تونل و حرکت در راستای دور شدن از خم، اثر وجود خم کاهش می‌یابد. این امر با کاهش نسبت SCF شعاع های متفاوت گردش خم در اشکال مشهود است. در نسبت شعاع گردش خم به شعاع متوسط مقطع برابر ۳۷.۸۸ و با فاصله ۱۲۲.۵ متر از خم ۹۰ درجه مقدار SCF برای نقطه نظیر A در مقطع برابر ۱.۰۴ برابر حل SAVIN است. این موضوع نشان دهنده این حقیقت است که در زمانی که خم ۹۰ درجه در تونل ها وجود دارد، رفتار دینامیکی تا فاصله ای تقریبا برابر با شعاع مقطع تونل متأثر از وجود خم بوده و نمی توان از حل‌های دو بعدی برای بررسی رفتار دینامیکی این سازه ها استفاده کرد.

مراجع

1 - Manolis, G. D. and Beskos, D. E. (1988). *Boundary Element Method in Elastodynamics*, Unwin Hyman, London.

2 - Nogami, T. and Zhu, J. X. (1994). "Transient Response of finitely long cylindrical cavity with arbitrary cross-section." *Soil dynamics and earthquake engineering*, Vol. 13, PP. 31-43.

3 - Stamos, A. A. and Beskos, D. E. (1995). "Dynamic analysis of large 3D underground structures by The BEM." *Earthquake Eengineering and Structural Dynamics,* Vol. 24, PP. 917-934.

4 - Stamos, A. A. and Beskos, D. E. (1996). "3D seismic response analysis of long lined tunnels in half space." *Soil Dynamics and Earthquake Engineering,* Vol.15, PP. 111-118.

5 - Wolf, J. P. (1988). *Soil Structure Interaction in Time Domain*, Prentice-Hall, Inc

6 - Marrero, M. and Dominguez, J. (2003). "Numerical behavior of time domain BEM for three-dimensional transient elastodynamic problems." *Engineering Analysis with Boundary Elements,* Vol. 27, PP. 39-48

7 - Aliabadi, M. H.(2002). *The Boundary Element Method*, John Wiley & Sons, LTD

8 - Guiggiani, M.(1992)."Computing principal value integrals in 3D BEM for time-harmonic elastodynamics – A direct approach." C*ommunication in Applied Nnumerical Methods*, Vol. 8, PP. 141-149.

9 - Baron, M. L. and Parnes, R. (1962). "Displacement and velocities produced by the diffraction of a pressure wave by a cylindrical tunnel in an elastic medium." *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 29, PP. 385-395

10 - Garnet, H. and Crouzet-Pascal, J. (1966). "Transient of circular cylinder of a arbitrary thickness in an elastic medium, to a plan dilatational wave." *Journal of Applied Mechanics,* Vol. 33, PP. 521-531

11 - Bathe, K. J. and Wilson, E. L. (1973). *SAP IV "Structural analysis program for elastic and dynamic response of a linear system.* Report No. EERC 73-11, University of California, Berkeley

12 - Savin, G. N. (1961). *Stress Concentration around Holes*, New York, Pergamon Press

پیوست

هسته اساسی تغییر مکان وتنش

اگر پارامترهای A,B,KC را در زمان آنالیز KΔt و زمان انتگرال گیری kΔt ، به شکل زیر تعریف کنیم:
$A=(K-k+1), B=(K-k)=A-1, KC=(C2/C1)^2$ برای کلیه نقاط انتگرال‌گیری، بر اساس فاصله فرستنده تا گیرنده (r)، پنج حالت مختلف ممکن است اتفاق بیافتد. هسته های اساسی تغییر مکان و تنش با توجه به این مطلب و رابطه (۴۶) به این ترتیب به دست می آید :

$$U_{ij}=\frac{1}{4\pi\rho}\left(\varphi_u\delta_{ij}-\chi_u r_{,i}r_{,j}\right)$$

$$T_{ij\gamma}=\frac{1}{4\pi}\left[\left(\varphi_{\gamma,r}-\frac{\chi_\gamma}{r}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial n}\delta_{ij}+r_{,j}n_i\right)-2\frac{X_\gamma}{r}\left(n_j r_{,i}-2r_{,i}r_{,j}\frac{\partial r}{\partial n}\right)\right.$$
$$\left.-2X_{\gamma,r}r_{,i}r_{,j}\frac{\partial r}{\partial n}+\left(\left(\frac{C_1}{C_2}\right)^2-2\right)\left(\varphi_{\gamma,r}-\chi_{\gamma,r}-2\frac{\chi_\gamma}{r}\right)r_{,i}n_j\right]$$

$\mathrm{CASE1: IF}[(\mathrm{r}<\mathrm{BC_2\Delta t})\ \mathrm{.AND.}\ (\mathrm{r}>\mathrm{AC_1\Delta t})]$

$$\varphi_u=\chi_u=\varphi_\gamma=\chi_\gamma=0$$

$\mathrm{CASE2: IF}[(\mathrm{BC_1\Delta t}<\mathrm{r}<\mathrm{AC_1\Delta t}).\mathrm{AND}.(\mathrm{r}>\mathrm{AC_2\Delta t})]$

$$\varphi_u=\frac{KC}{2r}-\frac{(A\Delta tC_2)^{2'}}{2r^3}\quad,\quad\chi_u=3\varphi_u-\frac{KC}{r}\quad,\quad\varphi_1=\frac{KC}{2r}\left(A\Delta t-\frac{2r}{3C_1}\right)-\frac{(A\Delta t)^3C_2^2}{2r^3}$$

$$\chi_1=3\varphi_1-\frac{KC}{r}\left(A\Delta t-\frac{r}{C_1}\right)\quad,\quad\varphi_{1,r}=-\frac{\chi_1}{r}\quad,\chi_{1,r}=-\frac{3\chi_1}{r}+\frac{B\Delta t}{r^2}$$

$$\varphi_2=\frac{KC}{2r}\left(\frac{2r}{3C_1}-B\Delta t\right)-\frac{(A\Delta t)^3C_2^2}{6r^3}-\frac{(A\Delta t)^3C_2^2}{2r^3A}\quad,\quad\chi_2=3\varphi_2+\frac{KC}{r}\left(B\Delta t-\frac{r}{C_1}\right)\quad,\quad\varphi_{2,r}=-\frac{\chi_2}{r}$$

$$\chi_{2,r}=-\frac{3\chi_2}{r}-\frac{KC(B\Delta t)}{r^2}$$

$\mathrm{CASE3: IF}(\mathrm{BC_1\Delta t}<\mathrm{r}<\mathrm{AC_2\Delta t})$

$$\varphi_u=\frac{1+KC}{2r}\quad,\quad\chi_u=3\varphi_u-\frac{2+KC}{r}\quad,\quad\varphi_1=\frac{KC}{2r}\left(A\Delta t-\frac{2r}{3C_1}\right)-\left(A\Delta t-\frac{2r}{3C_2}\right)\times\frac{1}{2r}+\frac{1}{r}\left(A\Delta t-\frac{r}{C_2}\right)$$

$$\chi_1=3\varphi_1-\frac{2}{r}\left(A\Delta t-\frac{r}{C2}\right)-\frac{KC}{r}\left(A\Delta t-\frac{r}{C_1}\right)\quad,\quad\varphi_{1,r}=-\frac{\chi_1}{r}-\frac{A\Delta t}{r^2}\quad,\quad X_{1,r}=-\frac{3\chi_1}{r}-\frac{1-KC}{r^2}A\Delta t$$

$$\varphi_2=\frac{KC}{2r}\left(\frac{r}{C_1}-B\Delta t\right)-\left(\frac{r}{C_2}-B\Delta r\right)\frac{1}{2r}-\frac{KC}{6C_1}+\frac{1}{6C_2}+\frac{1}{r}\left(\frac{r}{C_2}-B\Delta t\right)$$

$$\chi_2=3\varphi_2+\frac{2}{r}\left(B\Delta t-\frac{r}{C_1}\right)+\frac{KC}{r}\left(B\Delta r-\frac{r}{C_1}\right)\quad,\quad\varphi_{2,r}=-\frac{\chi_2}{r}+\frac{B\Delta t}{r^2}\quad,\quad\chi_{2,r}=-\frac{3\chi_2}{r}+\frac{(1-KC)B\Delta t}{r^2}$$

$\mathrm{CASE4: IF}(\mathrm{AC_2\Delta t}<\mathrm{r}<\mathrm{BC_2\Delta t})$

$$\varphi_u=\frac{C_2^2(1-2A)(\Delta t)^2}{2r^3}\quad,\quad\chi_u=3\varphi_u\quad,\quad\varphi_1=\frac{C_2^2\left(4(A-1)^2-A^3\right)}{6r^3}(\Delta t)^3\quad,\quad\chi_1=3\varphi_1\quad,\quad\varphi_{1,r}=-\frac{\chi_1}{r}$$

$$\chi_{1,r}=-\frac{3\chi_1}{r}\quad,\quad\varphi_2=\frac{e_2^2}{6r^3}\left(B^2+2A^2\right)(\Delta t)^3\quad,\quad\chi_2=3\varphi_2\quad,\quad\varphi_{2,r}=-\frac{\chi_2}{r}\quad,\quad\chi_{2,r}=-\frac{3\chi_2}{r}$$