نشریه مهندسی عمران و نقشه برداری- دانشکده فنی، دوره، ۴۳، شماره ۱، دی ماه ۱۳۸۸، از صفحه ۱ تا ۱۳

محیط نیمه بینهایت دولایه‌ای با رفتار ایزوتروپ جانبی تحت اثربار مماس بر سطح در فضای فرکانسی

عزیزالله اردشیر بهرستاقی[1] و مرتضی اسکندری قادی*[2]

[1]دانش آموخته کارشناسی ارشد سازه - دانشگاه علوم و فنون مازندران - بابل

[2]استادیار گروه علوم پایه مهندسی - پردیس دانشکده های فنی - دانشگاه تهران

(تاریخ دریافت ۸۶/۴/۲ ، تاریخ دریافت روایت اصلاح شده ۸۷/۴/۱۵، تاریخ تصویب ۸۷/۸/۷)

چکیده

در این مقاله یک لایه ایزوتروپ[1] جانبی مستقر بر یک نیم فضای ایزوتروپ جانبی طوری در نظر گرفته می شود که محور ایزوتروپی آنها موازی هم بوده و عمود بر سطوح آزاد لایه فوقانی باشد. این مجموعه تحت اثر نیروی سطحی دلخواه در فضای فرکانسی مـورد تحلیـل قـرار می گیرد. به منظور این تحلیل، معادلات در گیر[2] حرکت در فضای فرکانسی به وسیله توابع پتانسیل[3] ارائه شده توسط اسـکندری قـادی در سال ۲۰۰۵ میلادی در هر محیط (لایه فوقانی و نیم فضای تحتانی) به صورت مستقل در آمده و سپس معادلات حاکم بر توابع پتانسیل در دستگاه مختصات استوانه‌ای با استفاده از سری فوریه[4] و تبدیل هنکل[5] حل می شود. جواب به دست آمده در لایه تحتانی چنان است که شرط تشعشع[6] در آن در نظر گرفته می‌شود. نتایج نهایی برای تغییر مکان‌ها و تنش‌ها در فضای واقعی به صورت انتگرال هایی ارائه می‌شوند که در عین سادگی ظاهری، به علت نقاط شاخه‌ای[7] و قطب‌ها[8] از پیچیدگی خاصی برای برآورد عددی برخوردار است. با توجه به نقـاط شـاخه‌ای و قطب، نتایج عددی با دقت خاصی برآورده شده و انطباق عالی نتایج عددی در حالت های ساده ایزوتروپ و ایزوتروپ جانبی تک لایه‌ای دلالت بر صحت نتایج عددی به دست آمده در این مقاله دارد. برآورد عددی نتایج به دست آمده در محدودهٔ فرکانسی وسیع انجام و نتایج به صورت منحنی‌های تغییرات تغییر مکان و تنش بر حسب عمق و فاصله افقی ارائه شده است. نتایج این مقاله هـم در تحلیـل عـددی بـه روش‌هـای انتگرال های مرزی، همانند روش المان‌های مرزی و هم در تعیین توابع امپدانس شالوده‌های سطحی مستقر بر یک خـاک دو لایـه‌ای مـورد استفاده قرار می‌گیرد.

واژه‌های کلیدی : توابع پتانسیل، تغییر مکان، انتشار امواج[9]، محیط ایزوتروپ جانبی، تبدیل هنکل، بسط فوریه، نقاط شاخه‌ای، قطب

مقدمه

انتشار امواج در یک محیط ناشی از بارگذاری خارجی از جمله مباحثی بوده است که در قرن گذشته بسیاری از محققان و مهندسان در زمینه ریاضیات کاربردی و مکانیک مهندسی را به خود جلب کرده است. مقاله پایه‌ای در زمینه انتشار امواج مربوط به لمب (Lamb) در سال ۱۹۰۴[۱] می‌باشد. او در این مقاله، انتشار امواج ناشی از یک بار هارمونیک وارد بر یک محیط ایزوتروپ و ارتجاعی نیمه بی نهایت را بررسی کرده است و میدان تغییر مکان را در دو حالت دو بعدی و سه بعدی به دست آورده است. بعد از لمب محققان زیادی در زمینه انتشار امواج هارمونیک در محیط‌های ایزوتروپ تحقیق کرده‌اند و تحقیقات گسترده‌ای را ارائه کرده‌اند که از آن جمله می‌توان Achenbach در سال ۱۹۷۳[۲]، Aki و Richards در سال ۱۹۸۰[۳]، Apsel و Luco در سال ۱۹۸۳[۴] و Pak در سال ۱۹۸۷ [۵] را نام برد. Pekeris در سال ۱۹۵۵ انتشار امواج در فضای زمانی را مورد توجه قرار داده است [۶]. او امواج ناشی از یک ضربه ناگهانی با تغییرات زمانی هویساید را در یک محیط نیمه بی‌نهایت به دقت بررسی نموده‌است.

انتشار امواج در محیط‌های ناهمسان[10] نیز در گذشته مورد توجه قرار گرفته است. در حال حاضر با توجه به استفاده روز افزون از مواد ناهمسان نیاز به تحقیقات در زمینه انتشار امواج در این محیط‌ها بیشتر احساس می‌شود. برای مثال مواد کامپوزیت که در سال‌های اخیر در زمینه علوم و مهندسی کاربرد گسترده‌ای یافته‌اند دارای خاصیت ناهمسانی می‌باشند. از سوی دیگر در زمین‌هایی که خاک تحت اثر نیروی ثقل رسوب کرده است و نهشته‌های طبیعی سربار شده روی هم تشکیل داده است خاصیت ناهمسانی وجود دارد. اما با توجه به ملاحظات کاربردی در زمینه مهندسی محیط‌های

* نویسنده مسئول : تلفن : ۶۱۱۱۲۱۷۱ ، فاکس : ۶۶۴۶۹۸۰۹ ، Email: ghadi@ut.ac.ir

ناهمسان معمولاً به صورت ایزوتروپ جانبی و یا ارتوتروپیک[۱۱] مدل می‌شوند. یکی از بررسی‌های اولیه در زمینه انتشار امواج در محیط‌های ایزوتروپ جانبی توسط Stoneley در سال ۱۹۴۹ [۷] انجام گرفته است. او نشان داد که وجود مواد با خاصیت ایزوتروپ جانبی می‌تواند منجر به تفاوت های قابل توجهی در زمینه انتشار امواج نسبت به مواد ایزوتروپ گردد .

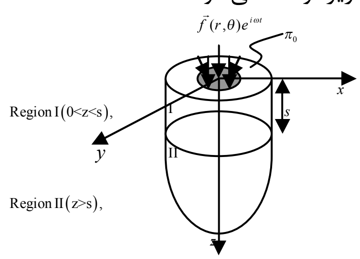
Synge در سال ۱۹۵۷ [۸]، انتشار امواج ریلی[۱۲] در محیط‌های ایزوتروپ جانبی را بررسی کرده است و نتیجه گرفته که این امواج فقط در صورتی در این محیطها منتشر می‌شوند که محور ایزوتروپی محیط یا عمود بر سطح آزاد و یا موازی این سطح باشد. Buchwald در سال ۱۹۶۱ نیز انتشار امواج ریلی در محیط‌های ایزوتروپ جانبی را بررسی کرده است [۹]. Rajapakse و Wang در سال۱۹۹۱ [۱۰] تغییر مکان‌ها وتنش‌های ناشی از ارتعاش هارمونیک یک جسم صلب دریک محیط ارتوتروپیک دو بعدی را به دست آورده‌اند. همچنین آنها تغییرمکان‌ها و تنش‌های ناشی از ارتعاش هارمونیک نیروی موثر بر پیرامون یک دایره مدفون دریک محیط ایزوتروپ جانبی را درحالت سه بعدی تعیین کرده‌اند[۱۱]. آنها دستگاه معادلات حرکت را با استفاده از روش توابع پتانسیل [۱۲و ۱۳] و استفاده از سه تابع پتانسیل به دو معادله درگیر و یک معادله مستقل تبدیل کرده و معادلات به دست آمده را با استفاده از تبدیلات انتگرالی[۱۳] حل کرده‌اند.

به علت وجود محیط‌های ناهمگن در طبیعت بررسی این محیطها همواره لازم می‌باشد. همچنین بررسی محیط‌های لایه‌ای برای بررسی امواج لاو و استونلی لازم می‌باشد. Apsel و Luco در سال ۱۹۸۳[۴] نیم فضای n لایه‌ای ایزوتروپ را بررسی کرده و تابع گرین را برای یک نیروی موثر بر یک لایه دلخواه به دست آورده‌اند.

در این مقاله یک لایه ایزوتروپ جانبی مستقر بر یک نیم‌فضای ایزوتروپ جانبی طوری در نظر گرفته می شود که محور ایزوتروپی آنها موازی هم بوده و عمود بر سطوح آزاد لایه فوقانی باشد. این مجموعه تحت اثر نیروی سطحی افقی دلخواه در فضای فرکانسی مورد تحلیل قرار گرفته و با استفاده از دو تابع پتانسیل که توسط اسکندری قادی و در سال ۲۰۰۵ [۱۴] ارائه گردیده است معادلات حرکت به طور کامل مجزا سازی می‌شوند. با استفاده از بسط فوریه در امتداد θ و استفاده از تبدیل هنکل در امتداد شعاعی در دستگاه مختصات استوانه‌ای، مسئله تبدیل به حل دو معادله دیفرانسیل معمولی کاملاً مجزا از هم برای توابع پتانسیل در فضای تبدیل یافته[۱۴] هنکل- فوریه می‌شود. برای به دست آوردن جواب‌ها در فضای واقعی[۱۵] باید از جواب‌های تحلیلی به دست آمده در فضای تبدیل یافته به صورت عددی انتگرال‌گیری کنیم. در انتها پاسخ های مختلف ناشی از بار گسترده یکنواخت با برآیند واحد در جهت افقی (مماس بر سطح) موثر بر سطح دایره‌ای به شعاع a در محدوده وسیع فرکانسی و به صورت گرافیکی ارائه می‌شود.

بیان مسئله

محیط نیمه متناهی ارتجاعی دو لایه‌ای با رفتار ایزوتروپ جانبی را در دستگاه مختصات استوانه‌ای (r, θ, z) چنان در نظر می‌گیریم که محور z عمود بر صفحه ایزوتروپی[۱۶] باشد. در این صورت معادلات حرکت بر حسب تغییرمکان‌ها برای هر یک از محیطها (لایه‌ها)، به صورت زیر نوشته می‌شوند[۱۵]:



شکل ۱: محیط نیمه بی نهایت دو لایه‌ای با رفتار ایزوتروپ جانبی تحت اثر نیروی دلخواه $f(r,\theta)e^{i\omega t}$ موثر بر سطح محدود π_0.

$$A_{11}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r}-\frac{U}{r^2}\right)+\frac{A_{11}-A_{12}}{2}\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}$$
$$+A_{44}\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}+\frac{A_{11}+A_{12}}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2 V}{\partial r\partial\theta}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial V}{\partial\theta}\right)$$
$$-2A_{11}\frac{1}{r^2}\frac{\partial V}{\partial\theta}+(A_{13}+A_{44})\frac{\partial^2 W}{\partial r\partial z}=\rho\frac{\partial^2 U}{\partial t^2},$$
$$\frac{A_{11}-A_{12}}{2}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r}-\frac{V}{r^2}\right)+A_{11}\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial\theta^2}$$
$$+A_{44}\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}+\frac{A_{11}+A_{12}}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2 U}{\partial r\partial\theta}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial U}{\partial\theta}\right)$$
$$+2A_{11}\frac{1}{r^2}\frac{\partial U}{\partial\theta}+(A_{13}+A_{44})\frac{1}{r}\frac{\partial^2 W}{\partial\theta\partial z}=\rho\frac{\partial^2 V}{\partial t^2},$$

$$A_{33}\frac{\partial^2 W}{\partial z^2}+A_{44}\left(\frac{\partial^2 W}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 W}{\partial\theta^2}\right)$$
$$+(A_{13}+A_{44})\left(\frac{\partial^2 U}{\partial r\partial z}+\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial z}\right)$$
$$+(A_{13}+A_{44})\frac{1}{r}\frac{\partial^2 V}{\partial\theta\partial z}=\rho\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \qquad (۱)$$

که در آن U , V و W مولفه‌های بردار تغییر مکان به ترتیب در امتدادهای r, θ و z می‌باشند. ρ جرم مخصوص محیط و t معرف زمان می‌باشد. در رابطه (۱) $\mathrm{A_{ij}}$ $(\mathrm{i,j}=\mathrm{r},\theta,\mathrm{z})$ ثابت‌های ارتجاعی بوده و داریم [۱۵] :

$$A_{66}=(A_{11}-A_{12})/2 \qquad (۲)$$

برای حالت مصالح ایزوتروپ ضرایب ارتجاعی A_{11} تا A_{66} بر حسب ضرایب لامه[۱۷] λ و μ عبارتند از

$$\mathrm{A}_{11}=\mathrm{A}_{33}=\lambda+2\mu,\ \ \mathrm{A}_{12}=\mathrm{A}_{13}=\lambda,$$
$$\mathrm{A}_{44}=\mathrm{A}_{66}=\mu \qquad (۳)$$

اگر E معرف مدول یانگ در صفحه ایزوتروپی، E' معرف مدول یانگ عمود بر صفحه ایزوتروپی، υ معرف ضریب پواسون در صفحه ایزوتروپی (جمع شدگی در صفحه ایزوتروپی به علت کشش در همین صفحه)، υ' معرف ضریب پواسون عمود بر صفحه ایزوتروپی (جمع شدگی عمود بر صفحه ایزوتروپی به علت کشش در این صفحه)، G معرف مدول برشی در صفحه ایزوتروپی و G' معرف مدول برشی در صفحات عمود بر صفحه ایزوتروپی باشد در این صورت خواهیم داشت[۱۵]:

$$A_{11}=\frac{E(1-\frac{E}{E'}\upsilon'^2)}{(1+\upsilon)(1-\upsilon-2\frac{E}{E'}\upsilon'^2)},\ A_{13}=\frac{E\upsilon'}{1-\upsilon-2\frac{E}{E'}\upsilon'^2},$$
$$A_{33}=\left[E'(1-\upsilon)\right]\Big/\left[1-\upsilon-2\frac{E}{E'}\upsilon'^2\right],$$
$$A_{44}=G',\ \ A_{66}=E/2(1+\upsilon)=G \qquad (۴)$$

توابع پتانسیل

معادلات حرکت (۱)، یک دستگاه معادلات دیفرانسیل درگیر با مشتقات جزیی می‌باشند. به منظور مجزا سازی این معادلات از دو تابع پتانسیل $\tilde{F}$ و $\tilde{\chi}$ استفاده شده است. مولفه‌های بردار تغییر مکان بر حسب توابع پتانسیل $\tilde{F}$ و $\tilde{\chi}$ در دستگاه مختصات استوانه‌ای و در حالت دینامیکی به صورت زیر نوشته می‌شوند [۱۴]:

$$U=-\alpha_3\frac{\partial^2\tilde{F}}{\partial r\partial z}-\frac{1}{r}\frac{\partial\tilde{\chi}}{\partial\theta},\ V=-\alpha_3\frac{1}{r}\frac{\partial^2\tilde{F}}{\partial\theta\partial z}+\frac{\partial\tilde{\chi}}{\partial r}$$
$$W=(1+\alpha_1)\left[\nabla^2{}_{r\theta}+\beta\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\frac{\rho_0}{1+\alpha_1}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]\tilde{F} \qquad (۵)$$

که در آن

$$\alpha_1=\frac{A_{66}+A_{12}}{A_{66}},\alpha_2=\frac{A_{44}}{A_{66}},\alpha_3=\frac{A_{13}+A_{44}}{A_{66}} \qquad (۶)$$

$$\beta=\frac{\alpha_2}{1+\alpha_1},\rho_0=\frac{\rho}{A_{66}},\nabla^2_{r\theta}=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \qquad (۷)$$

اما با فرض هارمونیک بودن حرکت می‌توان توابع پتانسیل و مولفه‌های بردار تغییر مکان را به شرح زیر نوشت:

$$\left[U,V,W(r,\theta,z,t)\right]=\left[u,v,w(r,\theta,z)\right]e^{i\omega t},$$
$$\left[\tilde{F},\tilde{\chi}(r,\theta,z,t)\right]=\left[F,\chi(r,\theta,z)\right]e^{i\omega t},etc. \qquad (۸)$$

به طوری که ω فرکانس زاویه‌ای حرکت هارمونیک و u، v و w دامنه‌های مولفه‌های بردار تغییر مکان به ترتیب در امتدادهای r، θ و z می‌باشند. با جایگزینی روابط (۸) در (۵) می‌توان نوشت:

$$u=-\alpha_3\frac{\partial^2 F}{\partial r\partial z}-\frac{1}{r}\frac{\partial\chi}{\partial\theta},v=-\alpha_3\frac{1}{r}\frac{\partial^2 F}{\partial\theta\partial z}+\frac{\partial\chi}{\partial r},$$
$$w=(1+\alpha_1)\left[\nabla^2{}_{r\theta}+\beta\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\frac{\rho_0}{1+\alpha_1}\omega^2\right]F. \qquad (۹)$$

با قرار دادن روابط (۸) و (۹) در معادلات حرکت (۱) ، دو معادله دیفرانسیل کاملاً مستقل از هم حاکم بر توابع پتانسیل F و χ به صورت زیر درمی‌آیند [۱۴]:

$$\left[\Box_1\Box_2+\delta\omega^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]F(r,\theta,z)=0, \qquad (۱۰)$$

$$\Box_0\chi(r,\theta,\mathrm{z})=0, \qquad (۱۱)$$

که در آن:

$$\Box_i=\nabla^2_{r\theta}+\frac{1}{s_i^2}\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\frac{1}{\mu_i}\rho_0\omega^2\ (i=0,1,2) \qquad (۱۲)$$

و

$$\mu_0=1,\mu_1=\alpha_2=\frac{\mathrm{A}_{44}}{\mathrm{A}_{66}},\mu_2=1+\alpha_1=\frac{\mathrm{A}_{11}}{\mathrm{A}_{66}}$$
$$\frac{\delta}{\rho_0}=\left[\frac{\mathrm{A}_{66}}{\mathrm{A}_{11}}(1+\frac{\mathrm{A}_{33}}{\mathrm{A}_{44}})-\frac{1}{\mu_1 s_2^2}-\frac{1}{\mu_2 s_1^2}\right]$$
$$s_0^2=\frac{1}{\alpha_2}=\frac{A_{66}}{A_{44}} \qquad (۱۳)$$

پارامترهای s_1^2 و s_2^2 ریشه‌های معادله زیر هستند:

$$A_{33}A_{44}s^4+(A_{13}^2+2A_{13}A_{44}-A_{11}A_{33})s^2+A_{11}A_{44}=0 \qquad (۱۴)$$

s_1 و s_2 می‌توانند اعداد مختلط باشند اما نمی‌توانند اعداد موهومی خالص باشند [۱۵]. در معادلات (۱۰) و (۱۱)، می‌توان توابع F و χ را نسبت به θ به صورت سری فوریه نوشت. سری فوریه مختلط این توابع به صورت زیر هستند [۱۶]:

$$[F,\chi](r,\theta,z)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\left[F_m(r,z),\chi_m(r,z)\right]e^{im\theta}, \quad (۱۵)$$

که در آن F_m و χ_m ضرایب m ام سری فوریه توابع F و χ هستند [۱۶]:

$$F_m,\chi_m=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[F,\chi\right]e^{-im\theta}d\theta \quad (۱۶)$$

با قرار دادن روابط (۱۵) در معادلات (۱۰) و (۱۱) این معادلات به صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$\left[\square_{1m}\square_{2m}+\delta\omega^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]F_m(r,z)=0 \quad (۱۷)$$

$$\square_{0m}\,\chi_m(r,z)=0 \quad (۱۸)$$

که در آن:

$$\square_{im}=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}-\frac{m^2}{r^2}+\frac{1}{s_i^2}\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\frac{1}{\mu_i}\rho_0\omega^2,\quad i=(0,1,2) \quad (۱۹)$$

با توجه به هندسه و شرایط مرزی مسئله بسیار مناسب می باشد که از تبدیل هنکل مرتبه m ام نسبت به امتداد شعاعی r به شرح زیر استفاده شود[۱۶]:

$$\left[F_m^m,\chi_m^m\right](\xi,z)=\int_0^\infty\left[F_m,\chi_m\right](r,z)\,rJ_m(\xi r)dr \quad (۲۰)$$

که تبدیل معکوس هنکل[18] آن عبارتست از

$$\left[F_m,\chi_m\right](r,z)=\int_0^\infty\left[F_m^m,\chi_m^m\right](\xi,z)\,\xi J_m(\xi r)d\xi \quad (۲۱)$$

که در آن J_m تابع بسل[19] نوع اول از مرتبه m می‌باشد. با قرار دادن رابطه (۲۰) در معادلات (۱۷) و (۱۸) این معادلات به صورت زیر درمی‌آیند:

$$\left[\bar{\square}_{1m}\bar{\square}_{2m}+\delta\omega^2\frac{d^2}{dz^2}\right]F_m^m(\xi,z)=0 \quad (۲۲)$$

$$\bar{\square}_{0m}\,\chi_m^m(\xi,z)=0 \quad (۲۳)$$

که در آن:

$$\bar{\square}_{im}=\frac{\rho_0\omega^2}{\mu_i}-\xi^2+\frac{1}{s_i^2}\frac{d^2}{dz^2}\quad(i=0,1,2) \quad (۲۴)$$

معادلات (۲۲) و (۲۳) به ترتیب یک معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه چهارم و مرتبه دوم با ضرایب ثابت می‌باشند و جواب آنها در محیط‌های I و II با توجه به شرط تشعشع در محیط II به شکل زیر می‌باشند:

$$\begin{cases}F_{\mathrm{I}m}^m(\xi,z)=A_{\mathrm{I}m}(\xi)e^{-\lambda_{\mathrm{I}1}z}+B_{\mathrm{I}m}(\xi)e^{-\lambda_{\mathrm{I}2}z}\\ \qquad\qquad +C_{\mathrm{I}m}(\xi)e^{\lambda_{\mathrm{I}1}z}+D_{\mathrm{I}m}(\xi)e^{\lambda_{\mathrm{I}2}z}\\ \chi_{\mathrm{I}m}^m(\xi,z)=G_{\mathrm{I}m}(\xi)e^{-\lambda_{\mathrm{I}3}z}+H_{\mathrm{I}m}(\xi)e^{\lambda_{\mathrm{I}3}z}\end{cases}$$

(۲۵-الف)

$$\begin{cases}F_{\mathrm{II}m}^m(\xi,z)=A_{\mathrm{II}m}(\xi)e^{-\lambda_{\mathrm{II}1}z}+B_{\mathrm{II}m}(\xi)e^{-\lambda_{\mathrm{II}2}z},\\ \chi_{\mathrm{II}m}^m(\xi,z)=G_{\mathrm{II}m}(\xi)e^{-\lambda_{\mathrm{II}3}z},\end{cases}$$

(۲۵-ب)

که در آن[۱۷، ۱۸، ۱۹ و ۲۰]:

$$\lambda_{t1}=\sqrt{a_t\xi^2+b_t+\frac{1}{2}\sqrt{c_t\xi^4+d_t\xi^2+e_t}},$$
$$\lambda_{t2}=\sqrt{a_t\xi^2+b_t-\frac{1}{2}\sqrt{c_t\xi^4+d_t\xi^2+e_t}},$$
$$\lambda_{t3}=\sqrt{s_{t0}^2(\xi^2-\rho_{t0}\omega^2)}. \quad (۲۶)$$

$\lambda_{tj}\ (j=1,2\ ,\ t=\mathrm{I},\mathrm{II})$ چنان اختیار می‌گردند که قسمت حقیقی آن مثبت باشند. ثابت ها در رابطه (۲۶) برای t=(I, II) به صورت زیر هستند[۱۷، ۱۸، ۱۹ و ۲۰]:

$$a_t=\frac{1}{2}(s_{t1}^2+s_{t2}^2),\ b_t=-\frac{1}{2}\rho_t\omega^2\left(\frac{1}{A_{t33}}+\frac{1}{A_{t44}}\right),$$
$$c_t=(s_{t2}^2-s_{t1}^2)^2,\ e_t=\rho_t^2\omega^4\left(\frac{1}{A_{t33}}-\frac{1}{A_{t44}}\right)^2$$
$$d_t=-2\rho_t\omega^2\left[\left(\frac{1}{A_{t33}}+\frac{1}{A_{t44}}\right)(s_{t1}^2+s_{t2}^2)-2\frac{A_{t11}}{A_{t33}}\left(\frac{1}{A_{t11}}+\frac{1}{A_{t44}}\right)\right]. \quad (۲۷)$$

$A_{\mathrm{I}m}(\xi)$، $B_{\mathrm{I}m}(\xi)$، $C_{\mathrm{I}m}(\xi)$، $D_{\mathrm{I}m}(\xi)$، $G_{\mathrm{I}m}(\xi)$، $H_{\mathrm{I}m}(\xi)$، $A_{\mathrm{II}m}(\xi)$، $B_{\mathrm{II}m}(\xi)$ و $G_{\mathrm{II}m}(\xi)$ در معادلات (۲۵) توابعی مجهول می‌باشند که با نوشتن شرایط مرزی و پیوستگی بایستی بدست آیند.

توابع $\lambda_{t1}(\xi)$, $\lambda_{t2}(\xi)$, $\lambda_{t3}(\xi)$ توابعی چند مقداره[20] هستند. هر تابع چند مقداره در واقع مجموعه‌ای از توابع تک مقداری[21] است. هر یک از اعضای این مجموعه یک بریدگی شاخه[22] از تابع چند مقداره نامیده می‌شود. نقطه تکین[23] مشترک بین همه بریدگی‌های شاخه برای تابع چند مقداره یک نقطه شاخه‌ای نامیده می‌شود. نقاط شاخه‌ای متناظر با توابع λ_{ti} (i=1, 2, 3) توسط معادله زیر به دست می‌آیند.

$$\lambda_{ti}=0 \qquad (i=1,2,3) \quad (۲۸)$$

با قراردادن روابط (۲۶) در رابطه (۲۸) نقاط شاخه‌ای متناظر با توابع λ_{ti} $(i=1, 2, 3)$ به صورت زیر به دست می‌آیند[۱۷، ۱۹]:

$$\xi_{\lambda_{t1}} = \omega\sqrt{\rho_t / A_{t11}},\ \xi_{\lambda_{t2}} = \omega\sqrt{\rho_t / A_{t44}},\ \xi_{\lambda_{t3}} = \omega\sqrt{\rho_t / A_{t66}} \qquad (۲۹)$$

به منظور تک مقداری کردن توابع λ_{ti} $(i=1, 2, 3)$ بریدگی‌های شاخه به گونه‌ای انتخاب می‌شوند که $\boldsymbol{Re}\,(\lambda_{ti}) \geq \boldsymbol{0}$ باشد (شکل ۲). با انتخاب بریدگی‌های شاخه به صورت فوق و به منظور ارضای شرط تشعشع جملات $e^{\lambda_{II1}}$، $e^{\lambda_{II2}}$ و $e^{\lambda_{II3}}$ در رابطه (۲۵-ب) حذف شده‌اند.

جواب کلی معادلات حرکت

مطابق شکل (۱) فرض می‌شود که نیروی هارمونیک دلخواه به شدت $\boldsymbol{f}(r,\theta)e^{i\omega t}$ روی صفحه π_0 در سطح $z=0$ اعمال می گردد. بر این اساس شرایط مرزی در سطح $z=0$ با استفاده از رابطه کوشی ($\sigma_{ij}n_j = f_i$) به صورت زیر می‌باشد (f_i مؤلفه‌های بردار نیرو، n_j بردار نرمال سطح و σ_{ij} مؤلفه‌های تانسور تنش در سطح مورد نظر هستند):

$$\begin{aligned}
&-\sigma_{Irz}(r,\theta,z=0,t) = P(r,\theta)e^{i\omega t},\\
&-\sigma_{Iz\theta}(r,\theta,z=0,t) = Q(r,\theta)e^{i\omega t},\ (r,\theta)\in\pi_0 \qquad (۳۰\text{-الف})\\
&-\sigma_{Izz}(r,\theta,z=0,t) = R(r,\theta)e^{i\omega t},\\
&\sigma_{Irz} = \sigma_{Iz\theta} = \sigma_{Izz} = 0,\quad z=0,\quad (r,\theta)\notin\pi_0.
\end{aligned}$$

شرایط پیوستگی در مرز محیط های (I,II):

$$\begin{aligned}
&\sigma_{IIrz}(r,\theta,z=s^-,t) - \sigma_{Irz}(r,\theta,z=s^+,t) = 0,\\
&\sigma_{IIz\theta}(r,\theta,z=s^-,t) - \sigma_{Iz\theta}(r,\theta,z=s^+,t) = 0,\\
&\sigma_{IIzz}(r,\theta,z=s^-,t) - \sigma_{Izz}(r,\theta,z=s^+,t) = 0,\\
&U_I = U_{II},\ V_I = V_{II},\ W_I = W_{II},\ \forall(r,\theta,t), z=s.
\end{aligned}$$
(۳۰-ب)

که در آن s^- و s^+ به ترتیب حد z هستند وقتی z از سمت چپ یا راست به s نزدیک می‌شود. در بینهایت دور $(r\to\infty)$ یا $(z\to\infty)$ کلیه مؤلفه‌های تانسور تنش و بردار تغییر مکان صفر هستند. شرایط در $(r\to\infty)$ در تبدیل هنکل دیده شده است و شرایط در $(z\to\infty)$ در رابطه (۲۵- ب) در نظر گرفته شده است. در روابط (۳۰- الف)، $P(r,\theta)$، $Q(r,\theta)$ و $R(r,\theta)$ مولفه‌های بردار بارگذاری $\boldsymbol{f}(r,\theta)$ به ترتیب در امتدادهای r, θ, z می‌باشند. با توجه به در اختیار داشتن توابع پتانسیل در فضای هنکل فوریه، معادلات (۳۰) باید در آن فضا نوشته شوند تا با استفاده از آنها به توان توابع $A_{Im}(\xi)$، $B_{Im}(\xi)$، $C_{Im}(\xi)$، $D_{Im}(\xi)$، $G_{Im}(\xi)$، $H_{Im}(\xi)$، $A_{IIm}(\xi)$، $B_{IIm}(\xi)$ و $G_{IIm}(\xi)$ را به دست آورد. بدین منظور تنش‌ها نیز باید بر حسب توابع پتانسیل نوشته شوند. با استفاده از روابط تنش-کرنش، کرنش-تغییرمکان و تغییرمکان- توابع پتانسیل می‌توان روابط تنش-توابع پتانسیل را در فضای هنکل- فوریه به صورت زیر به دست آورد[۱۷ و ۱۹]:

$$\begin{aligned}
&\sigma_{zrm}^{m-1} - i\sigma_{z\theta m}^{m-1} = -A_{44}\xi\Big[(\alpha_3-\alpha_2)\frac{d^2}{dz^2} + \xi^2(1+\alpha_1) - \rho_0\omega^2\Big]F_m^m - A_{44}\xi i\frac{d\chi_m^m}{dz}\\
&\sigma_{zrm}^{m+1} + i\sigma_{z\theta m}^{m+1} = A_{44}\xi\Big[(\alpha_3-\alpha_2)\frac{d^2}{dz^2} + \xi^2(1+\alpha_1) - \rho_0\omega^2\Big]F_m^m - A_{44}\xi i\frac{d\chi_m^m}{dz}, \qquad (۳۱)\\
&\sigma_{zzm}^{m} = \frac{d}{dz}\Big[\alpha_3 A_{13}\xi^2 + A_{33}\big(\rho_0\omega^2 - \xi^2(1+\alpha_1)\big) + A_{33}\alpha_2\frac{d^2}{dz^2}\Big]F_m^m,
\end{aligned}$$

که در آن σ_{zrm}^{m-1} و $\sigma_{z\theta m}^{m+1}$ و ... تبدیل هنکل مرتبه $m-1$، $m+1$ و ... ضرایب m ام سری فوریه مولفه‌های تانسور تنش می‌باشند. همچنین روابط تغییرمکان-توابع پتانسیل در فضای هنکل-فوریه به صورت زیر می‌آیند[۱۷، ۱۸، ۱۹ و ۲۰]:

$$\begin{aligned}
&u_m^{m-1} - iv_m^{m-1} = -\alpha_3\xi\frac{dF_m^m}{dz} - i\xi\chi_m^m,\\
&u_m^{m+1} + iv_m^{m+1} = \alpha_3\xi\frac{dF_m^m}{dz} - i\xi\chi_m^m, \qquad (۳۲)\\
&w_m^m = (1+\alpha_1)\Big[-\xi^2 + \beta\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\rho_0\omega^2}{1+\alpha_1}\Big]F_m^m
\end{aligned}$$

که در آن u_m^{m-1} , u_m^{m+1} به ترتیب تبدیل هنکل مرتبه $m-1$ و مرتبه $m+1$ تابع u_m ، v_m^{m-1}, v_m^{m+1} به ترتیب تبدیل هنکل مرتبه $m-1$ و $m+1$ تابع v_m و w_m^m, χ_m^m و F_m^m به ترتیب تبدیل هنکل مرتبه m توابع w_m, χ_m و F_m می‌باشند.

با استفاده از روابط (۳۱)، (۳۲) و (۲۵)، شرایط مرزی و شرایط پیوستگی داده شده در (۳۰) بر حسب توابع $A_{Im}(\xi)$، $B_{Im}(\xi)$، $C_{Im}(\xi)$، $D_{Im}(\xi)$، $G_{Im}(\xi)$، $H_{Im}(\xi)$، $A_{IIm}(\xi)$، $B_{IIm}(\xi)$ و $G_{IIm}(\xi)$ به صورت زیر در می‌آیند[۱۹]:

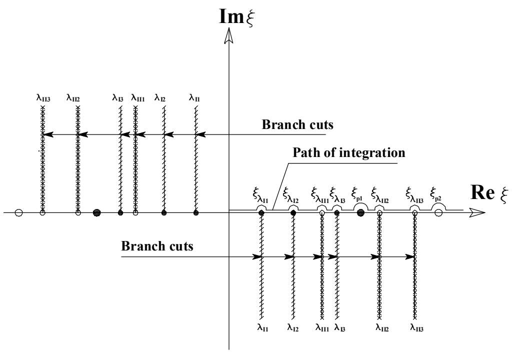
$$
\begin{aligned}
&A_{I44}\xi\left[\eta_{I1}(A_{Im}+C_{Im})+\eta_{I2}(B_{Im}+D_{Im})\right]\\
&+A_{I44}\xi i\lambda_{I3}(H_{Im}-G_{Im})=P_m^{m-1}-iQ_m^{m-1},\\
&-A_{I44}\xi\left[\eta_{I1}(A_{Im}+C_{Im})+\eta_{I2}(B_{Im}+D_{Im})\right]\\
&+A_{I44}\xi i\lambda_{I3}(H_{Im}-G_{Im})=P_m^{m+1}+iQ_m^{m+1},\\
&A_{I33}\left[-\nu_{I1}A_{Im}-\nu_{I2}B_{Im}+\nu_{I1}C_{Im}+\nu_{I2}D_{Im}\right]=R_m^m,\\
&-A_{I44}\xi\left[\eta_{I1}(A_{Im}e^{-\lambda_{I1}s}+C_{Im}e^{\lambda_{I1}s})+\eta_{I2}(B_{Im}e^{-\lambda_{I2}s}\right.\\
&\left.+D_{Im}e^{\lambda_{I2}s})\right]-A_{I44}\xi\, i\,\lambda_{I3}(H_{Im}e^{\lambda_{I3}s}-G_{Im}e^{-\lambda_{I3}s})\\
&+A_{II44}\xi\left[\eta_{II1}A_{IIm}e^{-\lambda_{II1}s}+\eta_{II2}B_{IIm}e^{-\lambda_{II2}s}\right]\\
&-A_{II44}\xi\, i\,\lambda_{II3}G_{IIm}e^{-\lambda_{II3}s}=0,\\
&A_{I44}\xi\left[\eta_{I1}(A_{Im}e^{-\lambda_{I1}s}+C_{Im}e^{\lambda_{I1}s})+\eta_{I2}(B_{Im}e^{-\lambda_{I2}s}\right.\\
&\left.+D_{Im}e^{\lambda_{I2}s})\right]-A_{I44}\xi\, i\,\lambda_{I3}(H_{Im}e^{\lambda_{I3}s}-G_{Im}e^{-\lambda_{I3}s})\\
&-A_{II44}\xi\left[\eta_{II1}A_{IIm}e^{-\lambda_{II1}s}+\eta_{II2}B_{IIm}e^{-\lambda_{II2}s}\right]\\
&-A_{II44}\xi\, i\,\lambda_{II3}G_{IIm}e^{-\lambda_{II3}s}=0,\\
&A_{I33}\xi\left[\nu_{I1}(A_{Im}e^{-\lambda_{I1}s}-C_{Im}e^{\lambda_{I1}s})\right.\\
&\left.+\nu_{I2}(B_{Im}e^{-\lambda_{I2}s}-D_{Im}e^{\lambda_{I2}s})\right]\\
&-A_{II33}\xi\left[\nu_{II1}A_{IIm}e^{-\lambda_{II1}s}+\nu_{II2}B_{IIm}e^{-\lambda_{II2}s}\right]=0,\\
&\alpha_{I3}\xi\left(-\lambda_{I1}A_{Im}e^{-\lambda_{I1}s}-\lambda_{I2}B_{Im}e^{-\lambda_{I2}s}+\lambda_{I1}C_{Im}e^{\lambda_{I1}s}\right.\\
&\left.+\lambda_{I2}D_{Im}e^{\lambda_{I2}s}\right)-i\,\xi\left(G_{Im}e^{-\lambda_{I3}s}+H_{Im}e^{\lambda_{I3}s}\right)\\
&-\alpha_{II3}\xi\left(-\lambda_{II1}A_{IIm}e^{-\lambda_{II1}s}-\lambda_{II2}B_{IIm}e^{-\lambda_{II2}s}\right)\\
&+i\,\xi\left(G_{IIm}e^{-\lambda_{II3}s}\right)=0,\\
&-\alpha_{I3}\xi\left(-\lambda_{I1}A_{Im}e^{-\lambda_{I1}s}-\lambda_{I2}B_{Im}e^{-\lambda_{I2}s}+\lambda_{I1}C_{Im}e^{\lambda_{I1}s}\right.\\
&\left.+\lambda_{I2}D_{Im}e^{\lambda_{I2}s}\right)-i\,\xi\left(G_{Im}e^{-\lambda_{I3}s}+H_{Im}e^{\lambda_{I3}s}\right)\\
&+\alpha_{II3}\xi\left(-\lambda_{II1}A_{IIm}e^{-\lambda_{II1}s}-\lambda_{II2}B_{IIm}e^{-\lambda_{II2}s}\right)\\
&+i\,\xi\left(G_{IIm}e^{-\lambda_{II3}s}\right)=0,\\
&\varphi_{I1}(A_{Im}e^{-\lambda_{I1}s}+C_{Im}e^{\lambda_{I1}s})+\varphi_{I2}(B_{Im}e^{-\lambda_{I2}s}\\
&+D_{Im}e^{\lambda_{I2}s})-\varphi_{II1}A_{IIm}e^{-\lambda_{II1}s}-\varphi_{II2}B_{IIm}e^{-\lambda_{II2}s}=0,
\end{aligned}
\qquad (۳۳)
$$

که در آن:

$$
\begin{cases}
\eta_{ti}=(\alpha_{t3}-\alpha_{t2})\lambda_{ti}^2+\xi^2(1+\alpha_{t1})-\rho_{t0}\omega^2,\\
\nu_{ti}=(\eta_{ti}-\alpha_{t3}\dfrac{A_{t13}}{A_{t33}}\xi^2-\alpha_{t3}\lambda_{ti}^2)\lambda_{ti},\\
\varphi_{ti}=\alpha_{t3}\lambda_{ti}^2-\eta_{ti}, \qquad t=(I,II),\ i=(1,2,3).
\end{cases}
\qquad (۳۴)
$$

معادلات (۳۳) یک سیستم معادلات جبری خطی برای توابع مجهول $A_{Im}(\xi)$، $B_{Im}(\xi)$، $C_{Im}(\xi)$ ، $D_{Im}(\xi)$، $G_{Im}(\xi)$، $H_{Im}(\xi)$، $A_{IIm}(\xi)$ ، $B_{IIm}(\xi)$ و $G_{IIm}(\xi)$ می باشد. ضرایب $G_{Im}(\xi)$، $H_{Im}(\xi)$ و $G_{IIm}(\xi)$ به صورت تحلیلی، به راحتی محاسبه شده [روابط (۳۵)] و برای تعیین مابقی ضرایب از حل معادلات (۳۷) با روش های عددی استفاده می شود[۱۹].

$$
\begin{aligned}
G_{Im}&=-\bar{P}e^{\lambda_{I3}s}\left(A_{I44}\lambda_{I3}+A_{II44}\lambda_{II3}\right)/\Upsilon(\xi,s),\\
H_{Im}&=-\bar{P}e^{-\lambda_{I3}s}\left(A_{I44}\lambda_{I3}-A_{II44}\lambda_{II3}\right)/\Upsilon(\xi,s),\\
G_{IIm}&=-2\bar{P}A_{I44}\lambda_{I3}e^{\lambda_{II3}s}/\Upsilon(\xi,s),
\end{aligned}
\qquad (۳۵)
$$



Complex ξ -plane

شکل ۲: بریدگی‌های شاخه برای $(\lambda_{t1},\lambda_{t2},\lambda_{t3} \quad t=I,II)$.

که در آن:

$$
\begin{aligned}
\Upsilon(\xi,s)&=\left(A_{I44}\lambda_{I3}+A_{II44}\lambda_{II3}\right)e^{\lambda_{I3}s}\\
&-\left(A_{I44}\lambda_{I3}-A_{II44}\lambda_{II3}\right)e^{-\lambda_{I3}s}
\end{aligned}
\qquad (۳۶)
$$

$$
\begin{aligned}
&\eta_{I1}(A_{Im}+C_{Im})+\eta_{I2}(B_{Im}+D_{Im})=\frac{X_m-Y_m}{2A_{I44}\xi},\\
&-\nu_{I1}A_{Im}-\nu_{I2}B_{Im}+\nu_{I1}C_{Im}+\nu_{I2}D_{Im}=\frac{Z_m}{A_{I33}},\\
&-A_{I44}\left[\eta_{I1}(A_{Im}e^{-\lambda_{I1}s}+C_{Im}e^{\lambda_{I1}s})+\eta_{I2}(B_{Im}e^{-\lambda_{I2}s}\right.\\
&\left.+D_{Im}e^{\lambda_{I2}s})\right]+A_{II44}\left[\eta_{II1}A_{IIm}e^{-\lambda_{II1}s}+\eta_{II2}B_{IIm}e^{-\lambda_{II2}s}\right]=0,\\
&A_{I33}\left[\nu_{I1}(A_{Im}e^{-\lambda_{I1}s}-C_{Im}e^{\lambda_{I1}s})+\nu_{I2}(B_{Im}e^{-\lambda_{I2}s}\right.\\
&\left.-D_{Im}e^{\lambda_{I2}s})\right]-A_{II33}\left(\nu_{II1}A_{IIm}e^{-\lambda_{II1}s}+\nu_{II2}B_{IIm}e^{-\lambda_{II2}s}\right)=0,\\
&\alpha_{I3}\left(-\lambda_{I1}A_{Im}e^{-\lambda_{I1}s}-\lambda_{I2}B_{Im}e^{-\lambda_{I2}s}+\lambda_{I1}C_{Im}e^{\lambda_{I1}s}\right.\\
&\left.+\lambda_{I2}D_{Im}e^{\lambda_{I2}s}\right)+\alpha_{II3}\left(\lambda_{II1}A_{IIm}e^{-\lambda_{II1}s}+\lambda_{II2}B_{IIm}e^{-\lambda_{II2}s}\right)=0,\\
&\varphi_{I1}(A_{Im}e^{-\lambda_{I1}s}+C_{Im}e^{\lambda_{I1}s})+\varphi_{I2}(B_{Im}e^{-\lambda_{I2}s}\\
&+D_{Im}e^{\lambda_{I2}s})-\varphi_{II1}A_{IIm}e^{-\lambda_{II1}s}-\varphi_{II2}B_{IIm}e^{-\lambda_{II2}s}=0,
\end{aligned}
\qquad (۳۷)
$$

که در آن:

$$
\begin{aligned}
&X_m=P_m^{m-1}-iQ_m^{m-1},\ Y_m=P_m^{m+1}+iQ_m^{m+1},\\
&Z_m=R_m^m(\xi),\ \bar{P}=\frac{X_m+Y_m}{2A_{I44}\xi i\lambda_{I3}}.
\end{aligned}
\qquad (۳۸)
$$

با به دست آوردن این ضرایب وقرار دادن آنها در روابط

(۲۵-الف و ب) توابع $F_{t\,m}^{m}$ و $\chi_{t\,m}^{m}$ در محیط‌های $t=\mathrm{I,II}$ به دست می آیند. با در اختیار داشتن این توابع، توابع تغییر مکان با استفاده از (۳۲) به صورت زیر بدست می آیند[۱۹]:

$$u_{t\,m}(r,z)=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\left[\xi\left(-\alpha_{t\,3}\xi\frac{dF_{t\,m}^{m}}{dz}-i\,\xi\chi_{t\,m}^{m}\right)J_{m-1}(\xi r)+\xi\left(\alpha_{t\,3}\xi\frac{dF_{t\,m}^{m}}{dz}-i\,\xi\chi_{t\,m}^{m}\right)J_{m+1}(\xi r)\right]d\xi,$$

$$v_{t\,m}(r,z)=\frac{i}{2}\int_0^{\infty}\left[\xi\left(-\alpha_{t\,3}\xi\frac{dF_{t\,m}^{m}}{dz}-i\,\xi\chi_{t\,m}^{m}\right)J_{m-1}(\xi r)-\xi\left(\alpha_{t\,3}\xi\frac{dF_{t\,m}^{m}}{dz}-i\,\xi\chi_{t\,m}^{m}\right)J_{m+1}(\xi r)\right]d\xi,$$

$$w_{t\,m}(r,z)=\int_0^{\infty}\xi\left((1+\alpha_{t\,1})[-\xi^2+\beta_t\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\frac{\rho_{t\,0}\omega^2}{1+\alpha_{t\,1}}]F_{t\,m}^{m}\right)J_m(\xi r)d\xi,$$

(۳۹)

به همین ترتیب توابع تنش با استفاده از روابط (۳۱) به دست می آیند، به عنوان مثال:

$$\sigma_{t\,zzm}=\int_0^{\infty}\xi\left\{\begin{array}{l}\frac{d}{dz}\Big[\alpha_{t\,3}A_{t\,13}\xi^2+A_{t\,33}\\ \times\left(\rho_{t\,0}\omega^2-\xi^2(1+\alpha_{t\,1})\right)\\ +A_{t\,33}\alpha_{t\,2}\frac{d^2}{dz^2}\Big]F_{t\,m}^{m}\end{array}\right\}J_m(\xi r)\,d\xi \qquad (۴۰)$$

با جایگذاری ضرایب m ام سری فوریه تغییر مکان در بسط فوریه مربوطه دامنه مولفه‌های تغییر مکان به شرح زیر به دست می‌آید:

$$u_t(r,\theta,z),v_t(r,\theta,z),w_t(r,\theta,z)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left[u_{tm}(r,z),v_{tm}(r,z),w_{tm}(r,z)\right]e^{im\theta} \qquad (۴۱)$$

بنابراین براساس رابطه(۸) مولفه‌های تغییرمکان عبارتند از

$$U(r,\theta,z,t),V(r,\theta,z,t),W(r,\theta,z,t)=\left[u(r,\theta,z),v(r,\theta,z),w(r,\theta,z)\right]e^{i\omega t} \qquad (۴۲)$$

نتایجی که تا کنون به دست آمده است برای فرکانس دلخواه بوده است. برای به دست آوردن جواب استاتیکی باید فرکانس بارگذاری را به سمت صفر میل دهیم. در صورتی که ω به سمت صفر میل کند λ_{ti} به سمت ξs_{ti} میل می‌کند. یادآوری می‌شود که s_{ti} i=1, 2, 3 در روابط (۱۳) و (۱۴) داده شده است. با دقت در معادله (۲۲) با اپراتور (۲۴) مشاهده می‌شود که از آنجایی که $s_{t1}\neq s_{t2}$، آنگاه جواب استاتیکی تفاوت خاصی با جواب دینامیکی ندارد و برآورد عددی در بخش نتایج عددی برای $\omega=0$ ارائه می‌شود.

تحریک هارمونیک مماس‌برسطح

در بخش گذشته تغییرمکان‌ها و تنش‌ها برای تحریک هارمونیک دلخواه در سطح *z=0* به دست آمد. در این جا نتایج به دست آمده قبلی برای بار گسترده یکنواخت با برآیند واحد در جهت افقی (در راستای محورx) موثر بر سطح دایره‌ای به شعاع a ، بررسی می گردد. برای بار گسترده یکنواخت با برآیند واحد در جهت افقی (در راستای محور x) موثر بر سطح دایره‌ای به شعاع a مولفه‌های بردار بارگذاری عبارتند از

$$\begin{cases}\left[P,Q,R\right](r,\theta,t)=(\frac{\cos\theta}{\pi a^2},-\frac{\sin\theta}{\pi a^2},0)\,e^{i\omega t}\\ \pi_0=\left\{(x,y,z)\,\middle|\,x^2+y^2<a^2,z=0\right\}\end{cases} \qquad (۴۳)$$

در این صورت می‌توان نشان داد مولفه‌های تابع بارگذاری در فضای فوریه به شرح زیر است:

$$\begin{array}{l}P_1(r)=P_{-1}(r)=\begin{cases}1/2\pi a^2, & r<a\\ 0, & r\ge a\end{cases},\ P_{m\neq\pm1}(r)=0,\\ Q_1(r)=-Q_{-1}(r)=\begin{cases}i/2\pi a^2, & r<a\\ 0, & r\ge a\end{cases},Q_{m\neq\pm1}(r)=0,\\ R_m(r)=0 \qquad \text{for all } m\end{array} \qquad (۴۴)$$

با جایگذاری روابط (۴۴) در رابطه (۳۸) می‌توان نشان داد

$$\begin{array}{l}X_1=J_1(\xi a)/\pi\xi a,\ \ X_{m\neq1}=0,\\ Y_{-1}=J_1(\xi a)/\pi\xi a,\ \ Y_{m\neq-1}=0,\\ Z_m=0, \qquad \text{for all } m\end{array} \qquad (۴۵)$$

نتایج عددی

همان طور که ملاحظه شد مولفه‌های بردار تغییر مکان به صورت انتگرال‌های یک بعدی نیمه متناهی با توابع انتگران[۲۴] (توابع زیر علامت انتگرال) مختلط بدست آمده‌اند. این انتگرال‌ها حتی در حالت‌های ساده مربوط به مصالح ایزوتروپ هم به صورت تحلیلی قابل انتگرال‌گیری نیستند. لذا این انتگرال‌ها به صورت عددی برآورد شده‌اند. توابع انتگران توابعی پیچیده با رفتار نوسانی به علت وجود توابع بسل می‌باشند. توابع بسل در بی‌نهایت به سمت صفر میل می‌کنند، اما روند همگرایی این توابع در بی‌نهایت بسیار کند می‌باشد، به همین دلیل یکی از موارد مهم در برآورد انتگرال‌ها تعیین بی‌نهایت فیزیکی است. همچنین توابع انتگران شامل نقاط تکین محدودی می‌باشند. این نقاط تکین شامل نقاط شاخه‌ای و قطب می‌باشند. در حالت کلی برای مصالح ایزوتروپ جانبی سه بعدی سه نقطه شاخه‌ای در مسیر انتگرال‌گیری وجود دارد. این نقاط بر اساس رابطه (۳۷) در $\xi_{\lambda m_i}$ $(i=1,2,3)$ واقع

شده‌اند. در حالت کلی برای یک ماده ایزوتروپ جانبی سه بعدی سه موج حجمی[۲۵] وجود دارد. نقاط شاخه‌ای فوق در واقع اعداد موج[۲۶] متناظر با این امواج هستند. حرکت متناظر با این امواج نه به طور خالص برشی و نه به طور خالص محوری است [۵]. اما برای حالت مربوط به مصالح ایزوتروپ تعداد نقاط شاخه‌ای فوق به دو کاهش می‌یابد.

علاوه بر ریشه‌های معادله جبری ناشی از صفر شدن دترمینان ماتریس ضرایب در معادلات (۳۷)، ریشه‌های $\Upsilon(\xi,s)=0$ نیز قطب‌های انتگرال‌گیری را مشخص می‌کنند. معادله دوم مربوط به ضرایب $H_{\rm I},G_{\rm I}$ و $G_{\rm II}$ و دیگری مربوط به بقیه ضرایب هستند. معادله $\Upsilon(\xi,s)=0$ همان معادله موج لاو[۲۷] است و همان طور که مشاهده می‌شود، این معادله تابعی از فرکانس می‌باشد. این معادله را می‌توان به شکل زیر نیز نوشت:

$$\Upsilon(\xi,s)=\sqrt{\frac{A_{\rm II44}A_{\rm II66}}{A_{\rm I44}A_{\rm I66}}}\sqrt{\xi^2-\frac{\rho_{II}}{A_{\rm II66}}\omega^2}+\sqrt{\xi^2-\frac{\rho_I}{A_{\rm I66}}\omega^2}\,\mathbf{tanh}s\sqrt{\frac{A_{\rm I66}}{A_{\rm I44}}(\xi^2-\frac{\rho_I}{A_{\rm I66}}\omega^2)}=0 \qquad (۴۶)$$

این معادله برای محیط‌های ایزوتروپ به صورت زیر در می‌آید:

$$\Upsilon(\xi=\omega\varsigma\sqrt{\frac{\rho_I}{\mu_{\rm I}}},s)=\frac{\mu_{\rm II}}{\mu_{\rm I}}\sqrt{(\varsigma^2-\frac{\rho_{II}\mu_I}{\mu_{II}\rho_I})}-\sqrt{1-\varsigma^2}\,\mathbf{tan}\,s\omega\sqrt{\frac{\rho_I}{\mu_I}}\sqrt{(1-\varsigma^2)}=0. \qquad (۴۷)$$

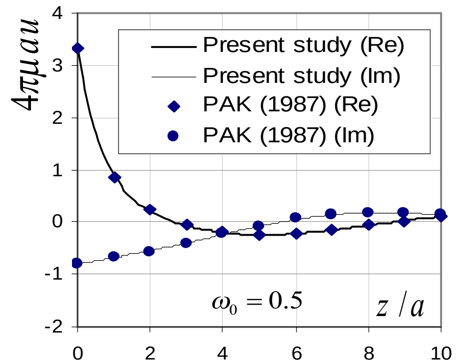
که در آن μ_I و μ_{II} ضرایب برشی لایه فوقانی و محیط تحتانی می‌باشد. معادله دوم برای تعیین قطب‌ها، معادله ناشی از مساوی صفر قرار دادن دترمینان ماتریس ضرایب $A_{\rm I\it m}$ ، $B_{\rm I\it m}$، $C_{\rm I\it m}$، $D_{\rm I\it m}$، $A_{\rm II\it m}$ و $B_{\rm II\it m}$ است که در معادله (۳۷) آمده است. پیچیدگی این دترمینان به علت وجود ضرایب ارتجاعی مختلف و توابع نمایی آنقدر زیاد است که حتی در حالت ساده ایزوتروپ نیز کمتر به صورت تحلیلی قابل بحث می‌باشد. اما با رسم مقادیر حقیقی و موهومی این دترمینان بر حسب آرگومان انتگرال‌گیری، ξ، می‌توان ریشه‌های این معادله را به دست آورد. ریشه‌های این معادله قطب‌های مسیر انتگرال‌گیری می‌باشند که باید با دقت با آنها برخورد کرد.

به علت وجود توابع بسل و توابع نمایی، توابع انتگران توابعی پیچیده با رفتار نوسانی و بعضاً با تغییرات سریع می‌باشند. لذا برای انتگرال‌گیری باید روشی اختیار شود که با توجه به تغییرات تابع انتگران در نواحی مختلف بازه انتگرال‌گیری، محاسبه مقادیر تابع انتگران را در نقاط با فاصله نامساوی از هم انجام دهد. درروش اختیار شده باید توجه خاصی به کران بالای انتگرال، قطب‌ها و نقاط شاخه‌ای نمود. دراین جا روش Adaptive quadrature [۲۱] برای برآورد عددی انتخاب شده است. به منظور یکسان‌سازی روش انتگرال‌گیری برای مصالح مختلف، حد بالای انتگرال‌گیری برای مصالح مختلف، یکسان اختیار شده است. اما این حد بالا چنان اختیار شده است که طبیعت نوسانی توابع بسل در آن مورد توجه قرار گرفته و نتایج انتگرال‌گیری با دقت عالی به دست آید.

نتایج عددی محاسبه قطب ها در حالت های مختلف در ادامه خواهد آمد. به منظور ارزیابی میزان دقت نتایج عددی حاصل از این مقاله مقایسه‌هایی با نتایج موجود برای مصالح ایزوتروپ و ایزوتروپ جانبی انجام گرفته است. ذکر این نکته ضروری است که کلیه نتایج عددی ارائه شده به صورت بی‌بعد می‌باشد. هم چنین فرکانس بی‌بعد $\omega_0=a\omega\sqrt{\rho_{\rm I}/A_{\rm I44}}$ برای ارائه نتایج عددی تعریف شده است که در آن a شعاع دیسک بارگذاری می‌باشد. جدول (۱) تغییر مکان‌های بی‌بعد ناشی از بار گسترده یکنواخت p_0 موثر بر سطح دایره‌ای به شعاع a را در حالت استاتیک و برای حالتی که محیط‌های I و II یکسان و ایزوتروپ می‌باشند، نشان می‌دهد. در این جدول نتایج عددی حاصل از مطالعه حاضر با نتایج عددی ارائه شده توسط Rajapakse در سال ۱۹۸۳ و نتایج عددی ارائه شده توسط Rajapakse و Wang در سال ۱۹۹۳[۱۱] مقایسه شده است. تطابق خوب جواب‌ها معرف صحت نتایج عددی به دست آمده در این بخش می‌باشد.

شکل (۳) مقایسه نتایج عددی را برای حالت دینامیکی نشان می دهد. برای مقایسه نتایج در حالت دینامیکی از نتایج ارائه شده توسط Pak در سال ۱۹۸۷[۵] برای مصالح ایزوتروپ و برای تغییر مکان افقی ناشی از بار گسترده یکنواخت با برآیند واحد موثر بر سطح دایره‌ای به شعاع a استفاده شده است. در این شکل نتایج تحقیقات Pak [۵] به صورت نقاط توپر نشان داده شده است. تطابق خوب جواب‌ها چه در قسمت حقیقی و چه در قسمت موهومی معرف صحت نتایج به دست آمده در این بخش می‌باشد. به منظور ارائه نتایج عددی، ۳ نوع مصالح مختلف با رفتار ایزوتروپ جانبی به همراه یک نوع مصالح ایزوتروپ در نظر گرفته شده است. خصوصیات مکانیکی

مصالح ایزوتروپ چنان است که در آن $\upsilon = ۰/۲۵$ می‌باشد. مصالح ایزوتروپ جانبی به ترتیب ماده شماره ۲، ۳ و ۴ نامیده می‌شوند.



شکل۳: مقایسه مولفه تغییر مکان در جهت محور x برحسب عمق در فضای نیمه متناهی با رفتار ایزوتروپ.

در کلیه مصالح جدول (۲) ضرایب الاستیک محیط، ضرایب الاستیک نسبی هستند بدین معنی که این ضرایب بر جرم مخصوص محیط تقسیم شده اند. قطب های مربوط به حالت‌های مختلف قرارگیری لایه‌ها با جنس‌های مختلف روی نیم فضاها با جنس‌های مختلف در جدول (۳) آمده است. این قطب ها معرف ورود امواج ریلی می‌باشد و در واقع ریشه‌های معادله مشخصه ریلی می‌باشند. نقاط شاخه‌ای قبلا به صورت تحلیلی در رابطه (۲۹) به دست آمده اند. به منظور نشان دادن صحت نتایج عددی برای مواد ایزوتروپ جانبی، در شکل (۴) مقایسه‌ای بین نتایج این مقاله و نتایج رحیمیان و همکاران [۲۰] برای تغییرمکان افقی ناشی از بار گسترده یکنواخت با برآیند واحد موثر بر سطح دایره‌ای به شعاع a مستقر بر نیم‌فضای ایزوتروپ جانبی از مواد شماره ۲ نشان داده شده است. دقت نتایج به خوبی قابل مشاهده است. نتایج گرافیکی برای مصالح معرفی شده در جدول (۲) برای حالات مختلف در شکل‌های (۵) تا (۸) نشان داده شده است. این نتایج برای فرکانس های مختلف ω_0=۰/۵ و ω_0=۳/۰ ارائه شده‌اند.

نتایج عددی مختلف برای قسمت های حقیقی و موهومی مولفه تغییر مکان افقی u (در راستای محور x) ناشی از بار گسترده یکنواخت با برآیند واحد در جهت افقی (در راستای محور x) موثر بر سطح دایره‌ای به شعاع a ارائه شده است.

جدول ۱: مقایسه تغییر مکانهای افقی و قائم محیط ایزوتروپ ناشی از بار یکنواخت p_0 موثر بر سطح دایره‌ای به شعاع a (υ =۰/۲۵).

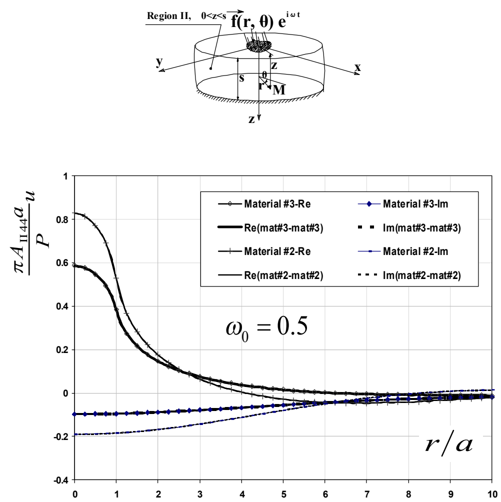
r/a, θ, z/a	$\mu u/p_0 a$			$\mu w/p_0 a$		
	مطالعه حاضر	Rajapakse and Wang (1993)	Rajapakse (1983)	مطالعه حاضر	Rajapakse and Wang (1993)	Rajapakse (1983)
0,0,0	0.8750	0.8758	0.8750	0.0000	0.0	0.0
0,0,.25	0.6358	0.6367	0.6358	0.0000	0.0	0.0
0,0,1.0	0.2892	0.2898	0.2901	0.0000	0.0	0.0
0,0,2.0	0.1538	0.1542	0.1542	0.0000	0.0	0.0
.5,0,0	0.8216	0.8226	0.8216	0.0625	0.0625	0.0625
1.0,0,0	0.5835	0.5845	0.5835	0.1245	0.1243	0.1250
2.0,0,0	0.2545	0.2554	0.2544	0.0626	0.0626	0.0626

جدول ۲: خصوصیات مکانیکی مصالح مختلف.

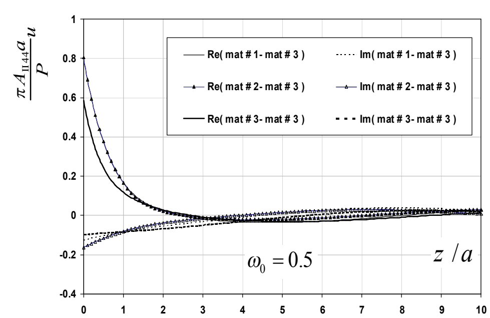
Material	E (N/mm^2)	E' (N/mm^2)	G (N/mm^2)	G' (N/mm^2)	υ	υ'
1 (Isotropic)	50000	50000	20000	20000	0.25	0.25
2 (Transversely Isotropic)	50000	150000	20000	20000	0.25	0.25
3 (Transversely Isotropic)	100000	50000	40000	20000	0.25	0.25
4 (Transversely Isotropic)	150000	50000	60000	20000	0.25	0.25

جدول ۳: قطب های موجود در انتگرال ها.

	$(\xi_p/\omega)\sqrt{A_{II\,44}/\rho_{II}}$	
	$\omega_0 = 0.5$	$\omega_0 = 3.0$
Material 1 on material 2	1.03405	1.06002
Material 2 on material 2 (half-space contains material 2)	1.03558	1.03558
Material 3 on material 2	1.04421	1.00000
Material 4 on material 2	1.00020	1.00000
Material 1 on material 3	1.12105	1.18906
Material 2 on material 3	1.25972	1.25352
Material 3 on material 3 (half-space contains material 3)	1.03800	1.03800

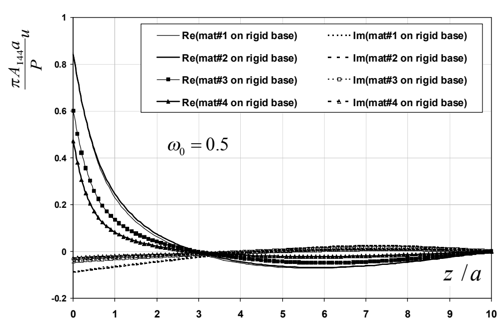


شکل ۴: مقایسه تغییر مکان افقی برحسب فاصله افقی (Mat#3-Mat#3 و Mat #2-Mat#2) در نیم فضا با رفتار ایزوتروپ جانبی ناشی از بار گسترده یکنواخت با برآیند واحد مؤثر بر دایره‌ای به شعاع a با رحیمیان و همکاران (۲۰۰۷) (Material #2 و Material #2).



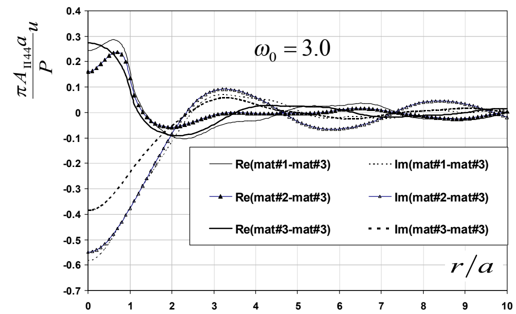
شکل ۵: قسمت های حقیقی و موهومی تغییر مکان افقی ناشی از بار گسترده یکنواخت با برآیند واحد مؤثر بر دایره‌ای به شعاع a بر حسب عمق با فرکانس بی بعد ۰/۵ و $s=a$.

با توجه به این نکته که هم بارگذاری وهم تغییر مکان در راستای افقی (در صفحه ایزوتروپی) است، میتوان انتظار داشت که تغییر مکان ها باید به طور خاص متأثر از ضریب E یعنی مدول یانگ در صفحه ایزوتروپی باشند. نمودارهای ارائه شده در شکل‌های (۵) تا (۸) این موضوع را به خوبی نشان می‌دهند. ملاحظه می شود که به خصوص در فرکانس های کم ($\omega_0 \leq 1$) قسمت های حقیقی و موهومی مؤلفهٔ تغییر مکان افقی با کاهش مقدار ضریب E افزایش می‌یابد. همچنین مقایسه نمودارهای ارائه شده در شکل‌های (۵) تا (۸) نشان دهندهٔ این است که تغییر مکان ها به صورت قابل توجهی متأثر از فرکانس تحریک می‌باشند. در این نمودارها تغییر علامت در تغییر مکانها را بر حسب عمق می توان مشاهده نمود. تأخیر توابع تغییر مکان در ارتباط با فاصله در فرکانسهای کم بسیار یکنواخت است در حالی که در فرکانس های زیاد این تأخیر نوسانی بوده وبا افزایش فرکانس نوسانی‌تر می شود.



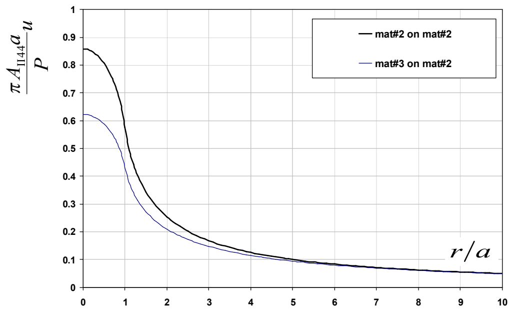
شکل ۶: قسمت های حقیقی و موهومی تغییر مکان افقی ناشی از بار گسترده یکنواخت با برآیند واحد مؤثر بر دایره‌ای به شعاع a بر حسب عمق با فرکانس بی بعد ۰/۵ و $s=10a$.

همچنین با افزایش فرکانس نوسان، طول موج کاهش می‌یابد. نتایج برای فرکانس های مختلف نشان می‌دهد که در حالت کلی امواج با فرکانس بی بعد بزرگ‌تر، دیرتر (در فاصله دورتر) مستهلک می‌شوند. زمانی که یک لایه به ضخامت s مستقر بر سنگ بستر تحت اثر تحریک سطحی قرار می‌گیرد تغییر مکان محل تماس لایه با سنگ بستر برابر صفر است و این موضوع در شکل (۶) برای فرکانس بی‌بعد ۰/۵ مشاهده می‌شود.



شکل ۷: قسمت های حقیقی و موهومی تغییر مکان افقی ناشی از بار گسترده یکنواخت با برآیند واحد مؤثر بر دایره‌ای به شعاع a بر حسب فاصله افقی با فرکانس بی بعد ۳/۰ و $s=a$

با مقایسه شکل‌های (۵) و (۶) مشاهده می‌شود که برای فرکانس بی‌بعد ۰/۵ ضخامت لایه به اندازه ۱۰ برابر شعاع بارگذاری تقریبا معادل کل نیم فضا است در حالی که با دقت در شکل (۷) مشاهده می‌شود که برای فرکانس بی‌بعد بزرگتر این ضخامت برای معادل سازی لایه و نیم فضا باید افزایش یابد و این افزایش برای لایه‌های رویی مستقر بر نیم فضاهای متفاوت به مراتب بیشتر است. با بررسی دقیق شکل (۷) دیده می‌شود که اگر نیم فضا همگن باشد تغییرمکان به سرعت میرا می‌شود در حالی که اگر یک لایه با جنس متفاوت بر روی یک نیم فضا قرار گیرد سرعت میرا شدن تغییرمکان بسیار کمتر شده و آثار تشدید نمایان می‌گردد. شکل (۸) تغییرمکان افقی برای بارگذاری افقی را نشان می‌دهد. همانطور که قبلا آمده است بر عکس آنالیز محیط‌های ایزوتروپ، جواب استاتیکی بدون هیچ محدویتی قابل محاسبه می‌باشد. مطابق شکل (۸) زمانی که فرکانس بارگذاری برابر صفر است، پاسخ محیط به لحاظ کیفی همانند فرکانس‌های کوچک می‌باشد با این تفاوت که تغییرمکان سریعتر میرا می‌شود.



شکل ۸: مولفه تغییرمکان افقی ناشی از بار گسترده یکنواخت استاتیکی با برآیند واحد مؤثر بر دایره‌ای به شعاع a بر حسب فاصله افقی در حالت $s=a$

نتیجه گیری

در این مقاله یک روش تحلیلی برای بدست آوردن پاسخ یک لایه ایزوتروپ جانبی مستقر بر یک محیط نیمه بینهایت با رفتار ایزوتروپ جانبی تحت اثر تحریک هارمونیک مماس برسطح آزاد لایه فوقانی در حالت سه بعدی ارائه شده‌است. معادلات تعادل دینامیکی حاکم بر مسئله در دستگاه مختصات استوانه‌ای (r,θ,z) به صورت یک سری معادلات درگیر می‌باشند که با استفاده از دو تابع پتانسیل که توسط اسکندری قادی در سال ۲۰۰۵[۱۴] برای مسائل الاستودینامیک ارائه گردیده است، به طور کامل مجزا سازی شده‌اند. جواب تحلیلی برای توابع پتانسیل در هر محیط با نوشتن آنها به صورت سری فوریه در امتداد θ و استفاده از تبدیل هنکل در امتداد شعاعی در فضای هنکل بدست آمده است. میدان تغییرمکان با استفاده از ارتباط مولفه‌های بردار تغییرمکان و توابع پتانسیل در فضای هنکل به صورت تحلیلی بدست آمده است. مولفه‌های بردار تغییر مکان و تانسور تنش در فضای واقعی به صورت انتگرال‌های یک بعدی نیمه متناهی با توابع انتگران (توابع زیر علامت انتگرال) مختلط بدست آمده‌اند. توابع انتگران توابعی پیچیده با رفتار نوسانی به علت وجود توابع بسل می‌باشند. توابع بسل در بی‌نهایت به سمت صفر میل می کنند، اما روند همگرایی این توابع در بی‌نهایت بسیار کند می‌باشد، به همین دلیل یکی از موارد مهم در برآورد انتگرال‌ها تعیین کران بالایی انتگرال‌ها است. همچنین توابع انتگران شامل نقاط تکین محدودی می‌باشند و در برآورد انتگرال‌ها باید توجه خاصی به این نقاط نمود. این نقاط تکین شامل نقاط شاخه‌ای و قطب می‌باشند. به منظور تأیید روش انتگرال‌گیری عددی

انتخاب شده، نتایج عددی برای محیط‌های ایزوتروپ و ایزوتروپ جانبی موجود با نتایج این مقاله مقایسه گردیده است. به منظور نشان دادن تأثیر فرکانس تحریک و میزان ناایزوتروپی مصالح بر پاسخ، نتایج عددی مختلف برای مولفه‌های تغییرمکان ارائه گردیده است. تأخیر توابع تغییرمکان در ارتباط با فاصله در فرکانس‌های کم بسیار یکنواخت است در حالی که در فرکانس‌های زیاد این تأخیر نوسانی بوده وبا افزایش فرکانس نوسانی‌تر می‌شود. همچنین با افزایش فرکانس نوسان، طول موج کاهش می یابد. نتایج برای فرکانسهای مختلف نشان می‌دهد که در حالت کلی امواج با فرکانس بی‌بعد بزرگتر، دیرتر (در فاصله دورتر) مستهلک می‌شوند. تأثیر ناهمسانی مصالح و میزان این ناایزوتروپی بر تغییر مکان‌ها در حالت فرکانس‌های کوچک مستقیماً وابسته به اندازهٔ ثابت‌های ارتجاعی در این امتدادها می باشد در حالی که در فرکانس‌های بزرگ اندازهٔ پاسخ‌ها نه تنها وابسته به اندازهٔ ثابت‌های ارتجاعی در امتداد آن توابع پاسخ است بلکه وابسته به بقیهٔ ثابت‌های ارتجاعی نیز می باشد. میدان تغییر مکان بدست آمده برای حل بسیاری از مسائل الاستودینامیک کاربرد دارند. نشان داده شده است که اگر نیم فضا همگن باشد تغییرمکان به سرعت با عمق میرا می‌شود در حالی که اگر یک لایه با جنس متفاوت بر روی یک نیم‌فضا با جنس دیگر قرار گیرد سرعت میرا شدن تغییرمکان بسیار کمتر شده و پدیده تشدید نمایان می‌گردد. همچنین نشان داده شده است که برای فرکانس بی‌بعد ۰/۵ و کوچکتر ضخامت لایه به اندازه ۱۰ برابر شعاع بارگذاری تقریبا معادل کل نیم فضا است در حالی که برای فرکانس بی‌بعد بزرگتر این ضخامت برای معادل سازی لایه و نیم فضا باید افزایش یابد و این افزایش برای لایه‌های رویی مستقر بر نیم فضاهای متفاوت از لایه رویی به مراتب بیشتر است. جواب در حالت استاتیکی نیز بدون هیچ مشکل عددی اضافی برآورد شده و روند سریع میرا شدن تغییرمکان در مثال به وضوح دِیده می‌شود.

مراجع

1 - Lamb, H. (1904). “On the propagation tremors over the surface the surface of an elastic solid.” *Phil. Trans.* , Royal Society of London, Vol. A(203), PP. 1-42.

2 - Achenbach, J. D. (1973). *Wave propagation in elastic solids.* North-Holland Publishing Co., Amsterdam, The Netherlands.

3 - Aki, K. and Richards, P. G. (1980). *Quantitative seismology theory and methods*. W. H. Freeman and Co., New York, N. Y.

4 - Apsel, R. J. and Luco, J. E. (1983). “On the Green’s functions for a layered half space part II.” *Bull. Seism. Soc. of Am.* Vol. 73, No. 4, PP. 931-951.

5 - Pak, R. Y. S. (1987). “Asymmetric wave propagation in an elastic half-space by a method of potentials.” *J. Appl. Mech.,* Vol. 54, No. 1, PP. 121-126.

6 - Pekeris, C. L. and Longman, I. (1955). “The motion of the surface of a uniform elastic half-space produced by a buried torque pulse,” *Geophs. Journal*, Vol. 1,PP. 146-153.

7 - Stoneley, R. (1949). “The seismological implications of aelotropy in continental structures.” *Royal Astronomical Soc. Monthly Notices,* Geophisical Supplement, London, England, Vol. 5, PP. 343-353.

8 - Synge, J. L. (1957). “Elastic waves in anisotropic media.” *J. Math. and Physics*, Vol. 35, No. 35, PP.323-334.

9 - Buchwald, V. T. (1961). “Rayleigh waves in transversely isotropic media.” *Quart. J. Mech. and Appl. Math.*, Vol. 14, No. 4, PP. 293-317.

10 - Rajapakse, R. K. N. D., and Wang, Y. (1991). “Elastodynamic Green’s functions of an orthotropic half-space.” J. *Engrg. Mech., ASCE*, Vol. 117, No. 3, PP. 588-604.

11 - Rajapakse, R. K. N. D. and Wang, Y. (1993). “Green’s functions for transversely isotropic elastic half-space.” *J. Engrg. Mech., ASCE,* Vol. 119, No. 9, PP. 1724-1746.

12 - Rahimian, M. and Eskandari-Ghadi, M. (2001). *Theory of Elasticity*, Tehran University Press (In Persian).

13 - Malvern, L. E. (1969). *Introduction to the mechanics of a continious medium.* Prentice – Hall, Inc.

14 - Eskandari-Ghadi, M. (2005). "A complete solutions of the wave equations in the transversely isotropic media." *J. of Elasticity,* Vol. 81, PP. 1-19.

15 - Lekhnitskii, S. G. (1981). *Theory of elasticity of an anisotropic body*. Mir Publishers Moscow.

16 - Sneddon, I. N. (1951). *Fourier transforms*. McGraw-Hill, New York, N. Y.

17 - Khojasteh, A. (2005). *Three Dimensional Dynamic Analysis of a Transversely Isotropic Half-Space.* Msc Thesis, Faculty of Eng., University of Tehran (In Persian).

18 - Khojasteh, A., Rahimian, M. and Eskandari-Ghadi, M. (2006). "3D analysis of a transversely isotropic half-space subjected to time-harmonic surface tangential force." *Journal of Faculty of Engineering, University of Teran,* Vol. 40, No. 5, PP. 611-624 (In Persian).

19 - Ardeshir-Behrestaghi, A. (2007). *Three dimensional dynamic analysis of a bi-material transversely isotropic half-space*, Msc Thesis, Mazandaran University of Science and Technology (In Persian).

20 - Rahimian, M., Eskandari-Ghadi, M., Pak, R. Y. S. and Khojasteh, A. (2007). "Three dimensional dynamic analysis of a transversely isotropic half-space." *ASCE J. Engrg. Mech*, Vol. 133, PP. 1134-1145.

21 - Burden, R. L. and Faires, J. D.. (1993). *Numerical analysis*. PWS-KENT Publishing Company.

واژه‌های انگلیسی به ترتیب استفاده در متن

1 - Transversely Isotropic Layer
2 - Coupled Equations
3 - Potential Function
4 - Fourier Series
5 - Hankel Transform
6 - Radiation Condition
7 - Branch Points
8 - Poles
9 - Wave Propagation
10 - Anisotropic
11 - Orthotropic
12 - Rayleigh Waves
13 - Integral Transforms
14 - Transformed Domain
15 - Physical Domain
16 - Isotropic Plane
17 - Lame Coefficients
18 - Hankel Inverse Transform
19 - Bessel Function
20 - Multiple Valued
21 - Single Valued
22 - Branch Cut
23 - Singular Point
24 - Integrand Functions
25 - Body Wave
26 - Wave Numbers
27 - Love's Wave Equation