نشریه مهندسی عمران و نقشه برداری- دانشکده فنی، دوره ۴۴، شماره ۱، فروردین ماه ۱۳۸۹، از صفحه ۱۳ تا ۲۵

روش نیمه تحلیلی برای محیط بی‌نهایت سه ماده‌ای با رفتار ایزوتروپ جانبی در فضای فرکانسی

عزیزالله اردشیر بهرستاقی [1] و مرتضی اسکندری قادی [2]*

[1] دانش آموخته کارشناسی ارشد سازه - دانشگاه علوم و فنون مازندران- بابل

[2] استادیار گروه علوم پایه مهندسی - پردیس دانشکده‌های فنی - دانشگاه تهران

(تاریخ دریافت ۸۶/۶/۱۰ ، تاریخ تصویب ۸۷/۳/۱۲)

چکیده

در این مقاله فضای کامل ایزوتروپ جانبی[1] شامل یک نیم فضای بالایی، یک نیم فضای پایین و یک لایه میانی طـوری در نظـر گرفتـه می‌شود که محور ایزوتروپی آنها موازی هم بوده و عمود بر سطوح تماس آنها باشد. این مجموعه با اثر نیروی دلخواه مؤثر بر سطح تماس نیم فضای بالایی و لایه میانی در فضای فرکانسی[2] مورد تحلیل قرار می گیرد. برای این تحلیل، معادلات حرکت در فضای فرکانسی به وسیله توابع پتانسیل[3] ارائه شده توسط اسکندری قادی در سال ۲۰۰۵ میلادی در هر قسمت (نیم فضای بالایی، نیم فضای پایینی و لایه میانی) به صورت مستقل در آمده و سپس معادلات حاکم بر توابع پتانسیل در دستگاه مختصات استوانه ای با استفاده از سری فوریه[4] و تبـدیل هنکـل[5] حـل می‌شود. جواب به دست آمده در نیم فضاهای بالایی و پایینی چنان است که اصل تشعشع[6] در آن‌ها در نظر گرفته می‌شود. تعریف مسئله چنان است که از آن نتایج برای (الف) فضای کامل دو ماده‌ای، (ب) فضای کامل شامل یک ماده، (ج) نیم فضا با بار سطحی دلخواه، (د) نیم فضا با بار مدفون دلخواه، (ه) نیم فضای دو ماده‌ای با بار سطحی دلخواه، (و) نیم فضای دو ماده‌ای با بار مدفون دلخواه و (ز) لایه با ضخامت محدود با نیروی سطحی دلخواه به دست می‌آید. نتایج نهایی برای تغییرمکان‌ها و تنش‌ها در فضای واقعی به صورت انتگرال‌هایی ارائه می‌شوند کـه در عین سادگی ظاهری، به دلیل داشتن نقاط شاخه‌ای[7] و قطب‌ها[8] از پیچیدگی خاصی برای برآورد عددی برخوردار اسـت. بـا توجـه بـه نقـاط شاخه‌ای و قطب، نتایج عددی با دقت خاصی برآورده شده و انطباق عالی نتایج عددی در حالت نیم‌فضای ایزوتروپ جانبی با بار سطحی دلالت بر درستی نتایج عددی به دست آمده در این مقاله دارد. برآورد عددی نتایج به دست آمده در محدودهٔ فرکانسی وسیع انجام و نتایج به صورت منحنی‌های تغییرات تغییر مکان و تنش بر حسب عمق و فاصله افقی ارائه شده است. نتایج این مقاله، هم در تحلیـل عـددی بـه روش‌هـای انتگرال های مرزی، همانند روش المان‌های مرزی و هم در تعیین توابع امپدانس[9] شالوده‌های سطحی یا مدفون استفاده می شود.

واژه‌های کلیدی: فضای کامل ایزوتروپ جانبی، نیروی سطحی، نیروی مدفون، انتشار امواج[10]، توابع پتانسیل، تغییرمکان، نقاط شاخه‌ای، قطب

مقدمه

انتشار امواج در یک محیط ایزوتروپ ناشی از بارگذاری خارجی از جمله مباحثی بوده است که در قرن گذشته بسیاری از محققان و مهندسان در زمینه ریاضیات کاربردی و مکانیک مهندسی را به خود جلب کرده است. از آن جمله می‌توان از Lamb در سال ۱۹۰۴[۸]، Achenbach در سال ۱۹۷۳[۱]، Aki وRichards در سال ۱۹۸۰[۲]، Apsel وLuco در سال ۱۹۸۳[۳]، Pak در سال ۱۹۸۷[۱۰]، رحیمیان و همکاران در سال ۲۰۰۷[۱۲] نام برد.

انتشار امواج در محیط‌های ناهمسان[11] نیز در گذشته مورد توجه بوده است ولی در حال حاضر با توجه به استفاده روزافزون از مواد ناهمسان نیاز به تحقیقات در زمینه انتشار امواج در این محیطها بیشتر احساس می‌شود. برای مثال مواد کامپوزیت[12] که در سال‌های اخیر در زمینه علوم و مهندسی کاربرد گسترده‌ای یافته‌اند خاصیت ناهمسانی دارند. از سوی دیگر در زمین‌هایی که خاک با اثر نیروی ثقل رسوب کرده است و نهشته‌های طبیعی سربار شده روی هم تشکیل داده است، خاصیت ناهمسانی وجود دارد. اما با توجه به ملاحظات کاربردی در زمینه مهندسی، محیط‌های ناهمسان به طور معمول به صورت ایزوتروپ جانبی و یا ارتوتروپیک[13] مدل می‌شوند. یکی از بررسی‌های اولیه در زمینه انتشار امواج در محیط‌های ایزوتروپ جانبی توسط Stoneley و در سال ۱۹۴۹ [۱۶] انجام گرفته است. او نشان داد که وجود مواد با خاصیت ایزوتروپ جانبی می‌تواند منجر به تفاوت‌های قابل توجهی در زمینه انتشار امواج نسبت به مواد ایزوتروپ

* نویسنده مسئول : تلفن : ۶۱۱۱۲۱۷۱ ، فاکس : ۶۶۴۶۹۸۰۹ ، Email: ghadi@ut.ac.ir

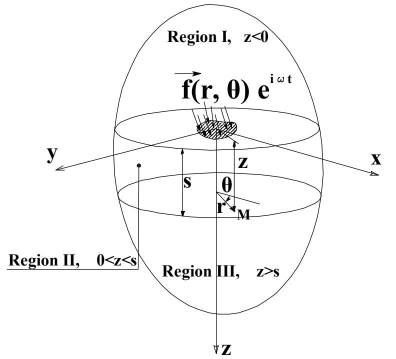
شود. Synge در سال ۱۹۵۷ [۱۷]، انتشار امواج ریلی[۱۴] در محیط‌های ایزوتروپ جانبی را بررسی کرده است و نتیجه گرفته که این امواج فقط در صورتی در این محیط‌ها منتشر می‌شوند، که محور ایزوتروپی محیط یا عمود بر سطح آزاد و یا موازی این سطح باشد. همچنین او بیان داشته است که امواج ریلی معمولی (در محیط های ایزوتروپ) موازی سطح آزاد محیط منتشر می شوند در حالی که امواج ریلی کلی (در محیط های ناهمسان) می‌توانند با شیب نسبت به سطح آزاد منتشر شوند.

از دیگر محققینی که در زمینه انتشار امواج در محیط‌های ایزوتروپ جانبی تحقیق کرده‌اند، Rajapakse و Wang در سال‌های ۱۹۹۱ [۱۳] و ۱۹۹۳ [۱۴] و رحیمیان و همکاران در سال ۲۰۰۷ [۱۲] هستند. Rajapakse و Wang معادلات حرکت را با استفاده از سه تابع پتانسیل به دو معادله درگیر و یک معادله مستقل تبدیل کرده‌اند و معادلات به دست آمده را با استفاده از تبدیلات انتگرالی حل کرده‌اند، در حالی که رحیمیان و همکاران معادلات حرکت را با استفاده از دو تابع پتانسیل ارائه شده در مرجع [۶] به صورت کاملاً مستقل در آورده و آن را حل کرده‌اند.

در این مقاله، محیط مورد بررسی با اثر نیروی هارمونیک دلخواه مؤثر بر سطح تماس نیم فضای بالایی و لایه میانی مورد توجه قرار گرفته و معادلات حرکت هر یک از اجزای محیط با استفاده از دو تابع پتانسیل که توسط اسکندری قادی در سال ۲۰۰۵ [۶] ارائه شده است، به طور کامل مجزاسازی می‌شوند. با استفاده از بسط فوریه در امتداد θ و استفاده از تبدیل هنکل در امتداد شعاعی در دستگاه مختصات استوانه‌ای، معادلات مسئله در هر جزء محیط به حل دو معادله دیفرانسیل معمولی که به طور کامل از هم مجزا هستند، برای توابع پتانسیل در فضای تبدیل یافته[۱۵] هنکل- فوریه تبدیل می‌شود. برای به دست آوردن جواب‌ها در فضای واقعی[۱۶] باید از جواب‌های تحلیلی به دست آمده در فضای تبدیل یافته به صورت عددی انتگرال‌گیری کنیم. در انتها پاسخ های مختلف ناشی از بار گسترده یکنواخت با برآیند واحد در جهت افقی (مماس بر سطح) و قائم مؤثر بر سطح دایره‌ای به شعاع a در محدوده وسیع فرکانسی و به صورت گرافیکی ارائه می‌شوند. برای اثبات درستی، جواب‌های به دست آمده برای حالت نیم‌فضای ایزوتروپ با بار سطحی، با جواب داده شده در Pak [۱۰] مقایسه شده و انطباق عالی آن معرف درستی جواب‌ها است.

بیان مسئله و معادلات حاکم

محیط کاملاً نامتناهی ارتجاعی سه ماده‌ای با رفتار ایزوتروپ جانبی را در دستگاه مختصات استوانه‌ای (r, θ, z) چنان در نظر می‌گیریم که محور z عمود بر صفحه ایزوتروپی نیم‌فضای بالایی، نیم‌فضای پایینی و لایه میانی باشد (شکل ۱).



شکل ۱: محیط بی نهایت سه ماده‌ای با رفتار ایزوتروپ جانبی با اثر نیروی دلخواه $\bar{f}(r,\theta)e^{i\omega t}$ مؤثر بریک سطح محدود.

در این صورت معادلات حرکت بر حسب تنش‌ها برای هر یک از اجزای محیط نامتناهی، به صورت زیر نوشته می‌شوند[۹]:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{\theta r}}{\partial\theta}+\frac{1}{r}(\sigma_{rr}-\sigma_{\theta\theta})+\frac{\partial\sigma_{zr}}{\partial z}=\rho\frac{\partial^2 U}{\partial t^2},\\
&\frac{\partial\sigma_{r\theta}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{\theta\theta}}{\partial\theta}+\frac{2}{r}\sigma_{r\theta}+\frac{\partial\sigma_{z\theta}}{\partial z}=\rho\frac{\partial^2 V}{\partial t^2},\\
&\frac{\partial\sigma_{rz}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{\theta z}}{\partial\theta}+\frac{1}{r}\sigma_{rz}+\frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z}=\rho\frac{\partial^2 W}{\partial t^2},
\end{aligned}\qquad (۱)$$

که در آن $\sigma_{ij}\,(i,j=r,\theta,z)$ تانسور تنش[۱۷] و U ، V و W مؤلفه‌های بردار تغییرمکان به ترتیب در امتدادهای r ، θ ، z هستند. ρ جرم مخصوص محیط و t معرف زمان است. رابطه تنش ـ کرنش در مصالح ایزوتروپ جانبی به این صورت است[۹]:

$$\begin{aligned}
&\sigma_{rr}=A_{11}\varepsilon_{rr}+A_{12}\varepsilon_{\theta\theta}+A_{13}\varepsilon_{zz},\\
&\sigma_{\theta\theta}=A_{12}\varepsilon_{rr}+A_{11}\varepsilon_{\theta\theta}+A_{13}\varepsilon_{zz},\\
&\sigma_{zz}=A_{13}\varepsilon_{rr}+A_{13}\varepsilon_{\theta\theta}+A_{33}\varepsilon_{zz},\\
&\sigma_{rz}=2A_{44}\varepsilon_{rz},\sigma_{\theta z}=2A_{44}\varepsilon_{\theta z},\ \sigma_{r\theta}=2A_{66}\varepsilon_{r\theta}
\end{aligned}\qquad (۲)$$

که در آن $(i,j=r,\theta,z)\,A_{ij}$ ثابت‌های ارتجاعی بوده و داریم:

$$A_{66}=\left(A_{11}-A_{12}\right)/2 \qquad (۳)$$

در حالتی که مصالح ایزوتروپ هستند، ضرایب ارتجاعی A_{11} تا A_{66} بر حسب ضرایب لامه λ و μ [۱۸] عبارتند از:

$$A_{11}=A_{33}=\lambda+2\mu,\ A_{12}=A_{13}=\lambda,\quad A_{44}=A_{66}=\mu \qquad (۴)$$

همچنین رابطه کرنش ـ تغییرمکان در دستگاه مختصات استوانه‌ای به این شرح است [۹]:

$$\begin{aligned}&\varepsilon_{rr}=\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \mathrm{r}},\quad \varepsilon_{\theta\theta}=\frac{1}{\mathrm{r}}(\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \theta}+\mathrm{U}),\quad \varepsilon_{zz}=\frac{\partial \mathrm{W}}{\partial \mathrm{z}},\\ &\varepsilon_{rz}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \mathrm{z}}+\frac{\partial \mathrm{W}}{\partial \mathrm{r}}\right),\ \varepsilon_{\theta z}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mathrm{r}}\frac{\partial \mathrm{W}}{\partial \theta}+\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \mathrm{z}}\right),\\ &\varepsilon_{r\theta}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mathrm{r}}\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \theta}+r\frac{\partial}{\partial \mathrm{r}}(\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{r}})\right).\end{aligned} \qquad (۵)$$

با قرار دادن رابطه (۵) در رابطه (۲)، تنش‌ها بر حسب تغییر مکان‌ها به دست می‌آیند. با قرار دادن روابط تنش ـ تغییر مکان در معادلات (۱)، معادلات حرکت بر حسب مؤلفه‌های بردار تغییر مکان به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned}&\mathrm{A}_{11}(\frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial \mathrm{r}^2}+\frac{1}{\mathrm{r}}\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \mathrm{r}}-\frac{\mathrm{U}}{\mathrm{r}^2})+\frac{\mathrm{A}_{11}-\mathrm{A}_{12}}{2}\frac{1}{\mathrm{r}^2}\frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial \theta^2}\\ &+\mathrm{A}_{44}\frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial \mathrm{z}^2}+\frac{\mathrm{A}_{11}+\mathrm{A}_{12}}{2}(\frac{1}{\mathrm{r}}\frac{\partial^2 \mathrm{V}}{\partial \mathrm{r}\partial \theta}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \theta})\\ &-2\mathrm{A}_{11}\frac{1}{\mathrm{r}^2}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \theta}+(\mathrm{A}_{13}+\mathrm{A}_{44})\frac{\partial^2 \mathrm{W}}{\partial \mathrm{r}\partial \mathrm{z}}=\rho\frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial \mathrm{t}^2},\\ &\frac{\mathrm{A}_{11}-\mathrm{A}_{12}}{2}(\frac{\partial^2 \mathrm{V}}{\partial \mathrm{r}^2}+\frac{1}{\mathrm{r}}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \mathrm{r}}-\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{r}^2})+\mathrm{A}_{11}\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}\\ &+\mathrm{A}_{44}\frac{\partial^2 \mathrm{V}}{\partial \mathrm{z}^2}+\frac{\mathrm{A}_{11}+\mathrm{A}_{12}}{2}(\frac{1}{\mathrm{r}}\frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial \mathrm{r}\partial \theta}-\frac{1}{\mathrm{r}^2}\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \theta})\\ &+2\mathrm{A}_{11}\frac{1}{\mathrm{r}^2}\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \theta}+(\mathrm{A}_{13}+\mathrm{A}_{44})\frac{1}{\mathrm{r}}\frac{\partial^2 \mathrm{W}}{\partial \theta\partial \mathrm{z}}=\rho\frac{\partial^2 \mathrm{V}}{\partial \mathrm{t}^2},\\ &\mathrm{A}_{33}\frac{\partial^2 \mathrm{W}}{\partial \mathrm{z}^2}+\mathrm{A}_{44}(\frac{\partial^2 \mathrm{W}}{\partial \mathrm{r}^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial r}+\frac{1}{\mathrm{r}^2}\frac{\partial^2 \mathrm{W}}{\partial \theta^2})\\ &+(\mathrm{A}_{13}+\mathrm{A}_{44})(\frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial \mathrm{r}\partial \mathrm{z}}+\frac{1}{\mathrm{r}}\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \mathrm{z}})+(\mathrm{A}_{13}+\mathrm{A}_{44})\\ &\qquad\times\frac{1}{\mathrm{r}}\frac{\partial^2 \mathrm{V}}{\partial \theta\partial \mathrm{z}}=\rho\frac{\partial^2 \mathrm{W}}{\partial \mathrm{t}^2}\end{aligned} \qquad (۶)$$

جواب‌های کلی معادلات حرکت

معادلات حرکت (۶) یک دستگاه معادلات دیفرانسیل درگیر با مشتقات جزیی هستند. برای مجزاسازی این معادلات از دو تابع پتانسیل $\tilde{F}$ و $\tilde{\chi}$ استفاده شده است. مؤلفه‌های بردار تغییر مکان بر حسب توابع پتانسیل $\tilde{F}$ و $\tilde{\chi}$ در دستگاه مختصات استوانه‌ای و در حالت دینامیـــکی به صورت زیر نوشته می‌شوند [۶]:

$$\begin{aligned}&U=-\alpha_3\frac{\partial^2\tilde{F}}{\partial r\partial z}-\frac{1}{r}\frac{\partial\tilde{\chi}}{\partial\theta},\ V=-\alpha_3\frac{1}{r}\frac{\partial^2\tilde{F}}{\partial\theta\partial z}+\frac{\partial\tilde{\chi}}{\partial r}\\ &W=(1+\alpha_1)\left[\nabla^2{}_{r\theta}+\beta\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\frac{\rho_0}{1+\alpha_1}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]\tilde{F}\end{aligned} \qquad (۷)$$

که در آن

$$\begin{aligned}&\alpha_1=\frac{A_{66}+A_{12}}{A_{66}},\qquad \alpha_2=\frac{A_{44}}{A_{66}},\qquad \alpha_3=\frac{A_{13}+A_{44}}{A_{66}}\\ &\beta=\frac{\alpha_2}{1+\alpha_1},\ \ \rho_0=\frac{\rho}{A_{66}},\ \ \nabla^2_{r\theta}=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\end{aligned} \qquad (۸)$$

اما با فرض‌هارمونیک بودن حرکت می‌توان توابع پتانسیل و مؤلفه‌های بردار تغییر مکان را به شرح زیر نوشت:

$$\begin{aligned}&\left[U,V,W(r,\theta,z,t)\right]=\left[u,v,w(r,\theta,z)\right]e^{i\omega t},\\ &\left[\tilde{F},\tilde{\chi}(r,\theta,z,t)\right]=\left[F,\chi(r,\theta,z)\right]e^{i\omega t},\ etc.\end{aligned} \qquad (۹)$$

به طوری که ω فرکانس زاویه‌ای حرکت هارمونیک و u، v و w دامنه‌های مؤلفه‌های بردار تغییر مکان به ترتیب در امتدادهای r، θ و z هستند. با جایگزینی روابط (۹) در (۷) و نتیجه آن در معادلات حرکت (۶)، دو معادله دیفرانسیل کاملاً مستقل از هم حاکم بر توابع پتانسیل F و χ به صورت زیر در می‌آیند:

$$\left[\Box_1\Box_2+\delta\omega^2\frac{d^2}{dz^2}\right]F(r,\theta,z)=0, \qquad (۱۰)$$

$$\Box_0\,\chi(r,\theta,\mathrm{z})=0, \qquad (۱۱)$$

که در آن:

$$\Box_i=\nabla^2_{r\theta}+\frac{1}{s_i^2}\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\frac{1}{\mu_i}\rho_0\omega^2\,(i=0,1,2) \qquad (۱۲)$$

و

$$\begin{aligned}&\mu_0=1,\ \mu_1=\alpha_2=\frac{\mathrm{A}_{44}}{\mathrm{A}_{66}},\ \ \mu_2=1+\alpha_1=\frac{\mathrm{A}_{11}}{\mathrm{A}_{66}},\\ &\frac{\delta}{\rho_0}=\left[\frac{\mathrm{A}_{66}}{\mathrm{A}_{11}}(1+\frac{\mathrm{A}_{33}}{\mathrm{A}_{44}})-\frac{1}{\mu_1 s_2^2}-\frac{1}{\mu_2 s_1^2}\right],\\ &s_0^2=\frac{1}{\alpha_2}=\frac{\mathrm{A}_{66}}{\mathrm{A}_{44}}\end{aligned} \qquad (۱۳)$$

پارامترهای s_1^2 و s_2^2 ریشه‌های معادله زیر هستند:

$$\mathrm{A}_{33}\mathrm{A}_{44}\mathrm{s}^4+(\mathrm{A}_{13}^2+2\mathrm{A}_{13}\mathrm{A}_{44}-\mathrm{A}_{11}\mathrm{A}_{33})\mathrm{s}^2+\mathrm{A}_{11}\mathrm{A}_{44}=0, \qquad (۱۴)$$

s_1 و s_2 می‌توانند اعداد مختلط باشند، اما نمی‌توانند اعداد موهومی خالص باشند [۹].

برای حل معادلات (۱۰) و (۱۱)، می‌توان توابع F و χ را نسبت به θ به صورت سری فوریه نوشت. سری فوریه مختلط این توابع به صورت زیر هستند:

$$[F,\chi](r,\theta,z)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}[F_m,\chi_m](r,z)e^{im\theta}, \quad (۱۵)$$

که در آن F_m و χ_m ضرایب mام سری فوریه توابع F و χ هستند [۱۵]

$$[F_m,\chi_m](r,z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[F,\chi](r,\theta,z)\,e^{-im\theta}d\theta \quad (۱۶)$$

با قرار دادن روابط (۱۵) در معادلات (۱۰) و (۱۱) این معادلات به صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$\left[\square_{1m}\square_{2m}+\delta\omega^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]F_m(r,z)=0, \quad (۱۷)$$

$$\square_{0m}\,\chi_m(r,z)=0, \quad (۱۸)$$

که در آن برای $i=(0,1,2)$:

$$\square_{im}=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}-\frac{m^2}{r^2}+\frac{1}{s_i^2}\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\frac{1}{\mu_i}\rho_0\omega^2. \quad (۱۹)$$

با توجه به هندسه و شرایط مرزی مسئله بسیار مناسب است که از تبدیل هنکل مرتبه mام نسبت به امتداد شعاعی r به شرح زیر استفاده شود[۱۵]:

$$\left[F_m^m,\chi_m^m\right](\xi,z)=\int_0^\infty\left[F_m,\chi_m\right](r,z)\,r\,J_m(\xi r)dr, \quad (۲۰)$$

و تبدیل معکوس هنکل آنها عبارتند از:

$$\left[F_m,\chi_m\right](r,z)=\int_0^\infty\left[F_m^m,\chi_m^m\right](\xi,z)\,\xi\,J_m(\xi r)d\xi, \quad (۲۱)$$

که در آن J_m تابع بسل نوع اول از مرتبه m است. با قرار دادن رابطه (۲۱) در معادلات (۱۷) و (۱۸) این معادلات به صورت زیر در می‌آیند:

$$\left[\overline{\square}_{1m}\overline{\square}_{2m}+\delta\omega^2 d^2/dz^2\right]F_m^m(\xi,z)=0, \quad (۲۲)$$

$$\overline{\square}_{0m}\,\chi_{\mathrm{m}}^{\mathrm{m}}(\xi,\mathrm{z})=0, \quad (۲۳)$$

که در آن:

$$\overline{\square}_{im}=\frac{\rho_0\omega^2}{\mu_i}-\xi^2+\frac{1}{s_i^2}\frac{d^2}{dz^2}\quad(i=0,1,2), \quad (۲۴)$$

معادلات (۲۲) و (۲۳) به ترتیب یک معادله دیفرانسیل معمولی درجه چهارم و یک معادله دیفرانسیل معمولی درجه دوم با ضرایب ثابت هستند. جواب این معادلات در محیط‌های I، II و III به ترتیب به این صورت است:

$$\begin{cases}F_{\mathrm{I}m}^m(\xi,z)=C_{\mathrm{I}m}(\xi)e^{\lambda_{\mathrm{I}1}z}+D_{\mathrm{I}m}(\xi)e^{\lambda_{\mathrm{I}2}z},\\ \chi_{\mathrm{I}m}^m(\xi,z)=H_{\mathrm{I}m}(\xi)e^{\lambda_{\mathrm{I}3}z},\end{cases} \quad (۲۵)$$

$$\begin{cases}F_{\mathrm{II}m}^m(\xi,z)=A_{\mathrm{II}m}(\xi)e^{-\lambda_{\mathrm{II}1}z}+B_{\mathrm{II}m}(\xi)e^{-\lambda_{\mathrm{II}2}z}\\ \qquad\qquad +C_{\mathrm{II}m}(\xi)e^{\lambda_{\mathrm{II}1}z}+D_{\mathrm{II}m}(\xi)e^{\lambda_{\mathrm{II}2}z},\\ \chi_{\mathrm{II}m}^m(\xi,z)=G_{\mathrm{II}m}(\xi)e^{-\lambda_{\mathrm{II}3}z}+H_{\mathrm{II}m}(\xi)e^{\lambda_{\mathrm{II}3}z},\end{cases} \quad (۲۶)$$

$$\begin{cases}F_{\mathrm{III}m}^m(\xi,z)=A_{\mathrm{III}m}(\xi)e^{-\lambda_{\mathrm{III}1}z}+B_{\mathrm{III}m}(\xi)e^{-\lambda_{\mathrm{III}2}z},\\ \chi_{\mathrm{III}m}^m(\xi,z)=G_{\mathrm{III}m}(\xi)e^{-\lambda_{\mathrm{III}3}z},\end{cases} \quad (۲۷)$$

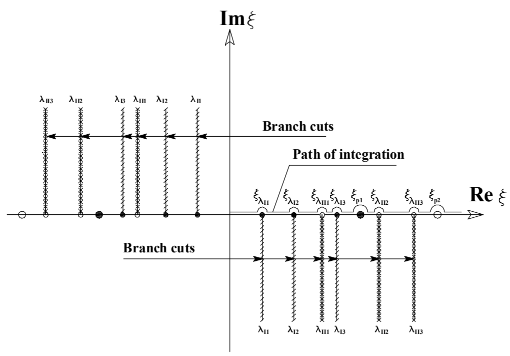
که در آن [۱۲]:

$$\begin{aligned}\lambda_{q1}&=\sqrt{a_q\xi^2+b_q+0.5\sqrt{c_q\xi^4+d_q\xi^2+e_q}},\\ \lambda_{q2}&=\sqrt{a_q\xi^2+b_q-0.5\sqrt{c_q\xi^4+d_q\xi^2+e_q}},\\ \lambda_{q3}&=\sqrt{s_{q0}^2(\xi^2-\rho_{q0}\omega^2)}.\end{aligned} \quad (۲۸)$$

ثابت‌ها در رابطه (۲۸) برای $q=\mathrm{I,II,III}$ به صورت زیر هستند:

$$\begin{aligned}a_q&=\frac{1}{2}(s_{q1}^2+s_{q2}^2),\ b_q=-\frac{1}{2}\rho_q\omega^2\left(\frac{1}{A_{q33}}+\frac{1}{A_{q44}}\right),\\ c_q&=(s_{q2}^2-s_{q1}^2)^2,\ e_q=\rho_q^2\omega^4\left(\frac{1}{A_{q33}}-\frac{1}{A_{q44}}\right)^2,\\ d_q&=-2\rho_q\omega^2\left[\left(\frac{1}{A_{q33}}+\frac{1}{A_{q44}}\right)(s_{q1}^2+s_{q2}^2)\right.\\ &\qquad\left.-2\frac{A_{q11}}{A_{q33}}\left(\frac{1}{A_{q11}}+\frac{1}{A_{q44}}\right)\right].\end{aligned} \quad (۲۹)$$

$\lambda_{qj}\ (j=1,2,3,\ q=\mathrm{I,II,III})$ چنان اختیار می‌شوند که قسمت حقیقی آن مثبت باشد. در این صورت جواب‌های داده شده در روابط (۲۵ تا ۲۷) چنان هستند که شرط تشعشع در آنها برقرار است. توابع $C_{\mathrm{I}m}$ تا $G_{\mathrm{III}m}$ توابعی مجهول هستند که با استفاده از شرایط پیوستگی در مرزهای $z=0$ و $z=s$ به دست می‌آیند.



Complex ξ -plane

شکل ۲: بریدگی‌های شاخه برای λ_{q1} ، λ_{q2} و λ_{q3}.

توابع $\lambda_{qj}\ (j=1,2,3,\ q=\mathrm{I,II,III})$ توابعی چند مقداره[۱۹] هستند. هر تابع چند مقداره در واقع مجموعه‌ای از توابع تک مقداری[۲۰] است. هر یک از اعضای این مجموعه یک بریدگی شاخه[۲۱] از تابع چند مقداره نامیده می‌شود [Churchill and Brown, 1990]. نقطه تکین[۲۲] مشترک بین همه بریدگی‌های شاخه برای تابع چند

مقداره یک نقطه شاخه‌ای نامیده می‌شود [Churchill and Brown, 1990]. نقاط شاخه‌ای متناظر با توابع $\lambda_{qi},(\mathrm{i}=1,2,3)$ توسط معادله زیر به دست می‌آیند:

$$\lambda_{qi}=0 \qquad (\mathrm{i}=1,2,3) \tag{۳۰}$$

با قراردادن رابطه (۲۸) در رابطه (۳۰) نقاط شاخه‌ای متناظر با توابع $\lambda_{qi},(\mathrm{i}=1,2,3)$ به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\xi_{\lambda_{q1}}=\omega\sqrt{\rho_q/A_{q11}},\ \xi_{\lambda_{q2}}=\omega\sqrt{\rho_q/A_{q44}},\ \xi_{\lambda_{q3}}=\omega\sqrt{\rho_q/A_{q66}} \tag{۳۱}$$

همان طور که در قبل آمده است، به منظور تک مقداری کردن توابع $\lambda_{qi},(\mathrm{i}=1,2,3)$ بریدگی‌های شاخه به گونه‌ای انتخاب می‌شوند که $\mathrm{Re}(\lambda_{qi})\geq 0$ باشد (شکل۲). با انتخاب بریدگی‌های شاخه به شکل ذکر شده و برای ارضای شرط تشعشع جملات $\mathrm{e}^{-\lambda_{11}}$، $\mathrm{e}^{-\lambda_{12}}$ و $\mathrm{e}^{-\lambda_{13}}$ در روابط (۲۵) و جملات $\mathrm{e}^{\lambda_{\mathrm{III}1}}$، $\mathrm{e}^{\lambda_{\mathrm{III}2}}$ و $\mathrm{e}^{\lambda_{\mathrm{III}3}}$ در روابط (۲۷) حذف شده‌اند. مطابق شکل (۱) فرض می‌شود که نیروی هارمونیک دلخواه به شدت $\vec{f}(r,\theta)e^{i\omega t}$ روی صفحه π_0 در z=0 اعمال می‌شود. بر این اساس شرایط پیوستگی در z=0 و z=s در فضای فرکانسی عبارتند از:

$$\begin{aligned}
&\sigma_{\mathrm{I}rz}(r,\theta,z=0)-\sigma_{\mathrm{II}rz}(r,\theta,z=0)=P(r,\theta),\\
&\sigma_{\mathrm{I}z\theta}(r,\theta,z=0)-\sigma_{\mathrm{II}z\theta}(r,\theta,z=0)=Q(r,\theta),\quad (r,\theta)\in\pi_0.\\
&\sigma_{\mathrm{I}zz}(r,\theta,z=0)-\sigma_{\mathrm{II}zz}(r,\theta,z=0)=R(r,\theta),\\
&\sigma_{\mathrm{I}rz}(r,\theta,z=0)-\sigma_{\mathrm{II}rz}(r,\theta,z=0)=0,\\
&\sigma_{\mathrm{I}z\theta}(r,\theta,z=0)-\sigma_{\mathrm{II}z\theta}(r,\theta,z=0)=0,\qquad (r,\theta)\notin\pi_0.\\
&\sigma_{\mathrm{I}zz}(r,\theta,z=0)-\sigma_{\mathrm{II}zz}(r,\theta,z=0)=0,\\
&U_{\mathrm{I}}=U_{\mathrm{II}},\ V_{\mathrm{I}}=V_{\mathrm{II}},\ W_{\mathrm{I}}=W_{\mathrm{II}},\qquad (r,\theta,z=0).
\end{aligned} \tag{۳۲}$$

$$\begin{aligned}
&\sigma_{\mathrm{III}rz}(r,\theta,z=s)-\sigma_{\mathrm{II}rz}(r,\theta,z=s)=0,\\
&\sigma_{\mathrm{III}z\theta}(r,\theta,z=s)-\sigma_{\mathrm{II}z\theta}(r,\theta,z=s)=0,\\
&\sigma_{\mathrm{III}zz}(r,\theta,z=s)-\sigma_{\mathrm{II}zz}(r,\theta,z=s)=0,\\
&U_{\mathrm{II}}=U_{\mathrm{III}},\ V_{\mathrm{II}}=V_{\mathrm{III}},\ W_{\mathrm{II}}=W_{\mathrm{III}},\quad (r,\theta,z=s).
\end{aligned} \tag{۳۳}$$

در بی نهایت دور $(r\to\infty)$ یا $(z\to\infty)$ همه مؤلفه‌های تانسور تنش و بردار تغییرمکان صفر هستند. شرایط در $(r\to\infty)$ در تبدیل هنکل دیده شده است و شرایط در $(z\to\infty)$ در رابطه (۲۵ تا ۲۷) در نظر گرفته شده است. در روابط (۳۲)، $\mathrm{P}(\mathrm{r},\theta)$، $\mathrm{Q}(\mathrm{r},\theta)$ و $\mathrm{R}(\mathrm{r},\theta)$ مؤلفه‌های بردار بارگذاری $\vec{f}(\mathrm{r},\theta)$ به ترتیب در امتدادهای r, θ, z هستند.

شرایط پیوستگی داده شده باید در فضای هنکل-فوریه نوشته شوند، تا با جایگزینی معادلات (۲۵ تا ۲۷) در آنها، بتوان ۱۲ تابع $C_{\mathrm{I}m}$ تا $G_{\mathrm{III}m}$ را به دست آورد. برای این هدف تغییر مکان ها و تنش‌ها به این صورت با هم ترکیب شده تا بر حسب توابع F^m_{qm}, χ^m_{qm} در هر محیط نوشته شوند:

$$\begin{aligned}
&u_m^{m-1}-iv_m^{m-1}=-\alpha_3\xi\, dF_m^m/dz-i\xi\chi_m^m,\\
&u_m^{m+1}+iv_m^{m+1}=\alpha_3\xi\, dF_m^m/dz-i\xi\chi_m^m),\\
&w_m^m=(1+\alpha_1)[-\xi^2+\beta\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\frac{\rho_0\omega^2}{1+\alpha_1}]F_m^m
\end{aligned} \tag{۳۴}$$

$$\begin{aligned}
&\sigma_{zrm}^{m-1}-i\sigma_{z\theta m}^{m-1}=-A_{44}\xi\left[(\alpha_3-\alpha_2)d^2/dz^2\right.\\
&\left.+\xi^2(1+\alpha_1)-\rho_0\omega^2\right]F_m^m-A_{44}\xi i\, d\chi_m^m/dz,\\
&\sigma_{zrm}^{m+1}+i\sigma_{z\theta m}^{m+1}=A_{44}\xi\left[(\alpha_3-\alpha_2)d^2/dz^2\right.\\
&\left.+\xi^2(1+\alpha_1)-\rho_0\omega^2\right]F_m^m-A_{44}\xi i\, d\chi_m^m/dz,\\
&\sigma_{zzm}^m=\frac{d}{dz}\left[\alpha_3A_{13}\xi^2+A_{33}\right.\\
&\left.\times(\rho_0\omega^2-\xi^2(1+\alpha_1))+A_{33}\alpha_2\, d^2/dz^2\right]F_m^m,
\end{aligned} \tag{۳۵}$$

که در آن u_m^{m-1} , u_m^{m+1} به ترتیب تبدیل هنکل مرتبه *m-1* و مرتبه *m+1* تابع u_m و v_m^{m-1}, v_m^{m+1} به ترتیب تبدیل هنکل مرتبه m-1 و m+1 تابع v_m و w_m^m, χ_m^m و F_m^m به ترتیب تبدیل هنکل مرتبه m توابع w_m, χ_m و F_m هستند. همچنین σ_{rzm}^{m-1} و $\sigma_{z\theta m}^{m+1}$ و ... تبدیل هنکل مرتبه *m-1*, *m+1* و ... ضرایب m ام سری فوریه مؤلفه‌های تانسور تنش هستند. با جایگزینی روابط (۳۴) و (۳۵) در معادلات پیوستگی (۳۲ و ۳۳)، این معادلات در فضای هنکل- فوریه نوشته شده و با استفاده از روابط (۲۵) تا (۲۷)، ۱۲ معادله برای ۱۲ مجهول $C_{\mathrm{I}m}$ تا $G_{\mathrm{III}m}$ به دست می‌آیند. با حل معادلات حاصل برای توابع مجهول $C_{\mathrm{I}m}(\xi)$، $D_{\mathrm{I}m}(\xi)$، $H_{\mathrm{I}m}(\xi)$، $A_{\mathrm{II}m}(\xi)$، $B_{\mathrm{II}m}(\xi)$، $C_{\mathrm{II}m}(\xi)$، $D_{\mathrm{II}m}(\xi)$، $G_{\mathrm{II}m}(\xi)$، $H_{\mathrm{II}m}(\xi)$، $A_{\mathrm{III}m}(\xi)$، $B_{\mathrm{III}m}(\xi)$ و $G_{\mathrm{III}m}(\xi)$، این توابع به دست می‌آیند. با به دست آوردن این ضرایب و قرار دادن آنها در روابط (۲۵) تا (۲۷)، توابع F_{qm}^m و χ_{qm}^m در محیط‌های $q=\mathrm{I,II,III}$ به دست می آیند. با در اختیار داشتن این توابع، توابع تغییرمکان با استفاده از (۳۴) در محیط‌های $q=\mathrm{I,II,III}$ به صورت زیر به دست می آیند:

$$\begin{aligned}
u_{qm}(r,z) &= \frac{1}{2}\int_0^\infty \Big[\xi\left(-\alpha_{q3}\xi\, dF_{qm}^m/dz - i\xi\chi_{qm}^m\right)J_{m-1}(\xi r) \\
&+\xi\left(\alpha_{q3}\xi\, dF_{qm}^m/dz - i\xi\chi_{qm}^m\right)J_{m+1}(\xi r)\Big]d\xi, \\
v_{qm}(r,z) &= \frac{i}{2}\int_0^\infty \Big[\xi\left(-\alpha_{q3}\xi\, dF_{qm}^m/dz - i\xi\chi_{qm}^m\right)J_{m-1}(\xi r) \\
&-\xi\left(\alpha_{q3}\xi\, dF_{qm}^m/dz - i\xi\chi_{qm}^m\right)J_{m+1}(\xi r)\Big]d\xi, \\
w_{qm}(r,z) &= \\
&\int_0^\infty \xi\left((1+\alpha_{q1})[-\xi^2+\beta_q\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\frac{\rho_{q0}\omega^2}{1+\alpha_{q1}}]F_{qm}^m\right) \\
&\times J_m(\xi r)d\xi,
\end{aligned} \quad (۳۶)$$

به همین ترتیب توابع تنش با استفاده از روابط (۳۵) به صورت زیر تعیین می شوند:

$$\sigma_{qzrm}(r,z) =$$

$$\frac{1}{2}\left[\int_0^\infty \xi\left\{\begin{array}{l} -A_{q44}\xi\left[\left(\alpha_{q3}-\alpha_{q2}\right)\dfrac{d^2}{dz^2}\right. \\ \left.+\xi^2\left(1+\alpha_{q1}\right)-\rho_{q0}\omega^2\right]F_{qm}^m \\ -A_{q44}\xi i\,\dfrac{d\chi_{tm}^m}{dz}\end{array}\right\}J_{m-1}(\xi r)d\xi\right.$$

$$\left.+\int_0^\infty \xi\left\{\begin{array}{l} A_{q44}\xi\left[\left(\alpha_{q3}-\alpha_{q2}\right)\dfrac{d^2}{dz^2}\right. \\ \left.+\xi^2\left(1+\alpha_{q1}\right)-\rho_{q0}\omega^2\right]F_{qm}^m \\ -A_{q44}\xi i\,\dfrac{d\chi_{qm}^m}{dz}\end{array}\right\}J_{m+1}(\xi r)d\xi\right]$$

$$\sigma_{qz\theta m}(r,z) =$$

$$\frac{i}{2}\left[\int_0^\infty \xi\left\{\begin{array}{l} -A_{q44}\xi\left[\left(\alpha_{q3}-\alpha_{q2}\right)\dfrac{d^2}{dz^2}\right. \\ \left.+\xi^2\left(1+\alpha_{q1}\right)-\rho_{q0}\omega^2\right]F_{qm}^m \\ -A_{q44}\xi i\,\dfrac{d\chi_{qm}^m}{dz}\end{array}\right\}J_{m-1}(\xi r)d\xi\right.$$

$$\left.-\int_0^\infty \xi\left\{\begin{array}{l} A_{q44}\xi\left[\left(\alpha_{q3}-\alpha_{q2}\right)\dfrac{d^2}{dz^2}\right. \\ \left.+\xi^2\left(1+\alpha_{q1}\right)-\rho_{q0}\omega^2\right]F_{qm}^m \\ -A_{q44}\xi i\,\dfrac{d\chi_{qm}^m}{dz}\end{array}\right\}J_{m+1}(\xi r)d\xi\right]$$

$$\sigma_{qzzm}(r,z) =$$

$$\int_0^\infty \xi\left\{\begin{array}{l} \dfrac{d}{dz}\left[\alpha_{q3}A_{q13}\xi^2\right. \\ \left.+A_{q33}\left(\rho_{q0}\omega^2-\xi^2\left(1+\alpha_{q1}\right)\right)\right]F_{qm}^m \\ +A_{q33}\alpha_{q2}\dfrac{d^2}{dz^2}\end{array}\right\}J_m(\xi r)d\xi$$

$$\begin{aligned}
&\sigma_{qrrm}+\left(A_{q11}-A_{q12}\right)\{(\frac{u_{qm}}{r})+im(\frac{v_{qm}}{r})\} \\
&=\int_0^\infty \xi\left\{\frac{d}{dz}\left[\alpha_{q3}A_{q11}\xi^2-A_{q13}\xi^2(1+\alpha_{q1})+A_{q13}\alpha_{q2}\frac{d^2}{dz^2}\right]F_{qm}^m\right\}J_m(\xi r)d\xi \\
&\sigma_{q\theta\theta m}-\left(A_{q11}-A_{q12}\right)\{(\frac{u_{qm}}{r})+im(\frac{v_{qm}}{r})\} \\
&=\int_0^\infty \xi\left\{\frac{d}{dz}\left[\alpha_{q3}A_{q12}\xi^2-A_{q13}\xi^2(1+\alpha_{q1})+A_{q13}\alpha_{q2}\frac{d^2}{dz^2}\right]F_{qm}^m\right\}J_m(\xi r)d\xi \\
&\sigma_{qr\theta m}+\left(A_{q11}-A_{q12}\right)\{(\frac{v_{qm}}{r})-im(\frac{u_{qm}}{r})\} \\
&=\int_0^\infty \xi\left[-\frac{A_{q11}-A_{q12}}{2}\xi^2\chi_{qm}^m\right]J_m(\xi r)d\xi
\end{aligned} \quad (۳۷)$$

با جای‌گذاری ضرایب m ام سری فوریه تغییرمکان در بسط فوریه مربوط به آن دامنه مؤلفه‌های تغییر مکان به شرح زیر به دست می‌آید:

$$u(r,\theta,z),v(r,\theta,z),w(r,\theta,z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty}\left[u_m(r,z),v_m(r,z),w_m(r,z)\right]e^{im\theta} \quad (۳۸)$$

بنابراین بر اساس رابطه (۹) مولفه‌های تغییرمکان عبارتند از:

$$U(r,\theta,z,t),V(r,\theta,z,t),W(r,\theta,z,t) = \left[u(r,\theta,z),v(r,\theta,z),w(r,\theta,z)\right]e^{i\omega t} \quad (۳۹)$$

نتایج برای تحریک هارمونیک خاص

در قسمت‌های گذشته معادلات حرکت برای تحریک هارمونیک دلخواه در سطح z=0 به دست آمده‌اند. در این قسمت دو بارگذاری خاص معرفی می‌شوند و نتایج عددی برای آنها ارائه خواهد شد. این بارگذاری‌ها عبارتند از: (۱) بار گسترده یکنواخت با برآیند واحد در امتداد قائم مؤثر بر سطح دایره‌ای به شعاع a و (۲) بار گسترده یکنواخت در امتداد افقی مؤثر بر سطح دایره به شعاع a. بار گسترده یکنواخت با برآیند واحد در امتداد قائم مؤثر بر سطح دایره‌ای به شعاع a دارای مؤلفه‌های زیر است:

$$\begin{cases}\left[P,Q,R\right](r,\theta,t)=(0,0,\dfrac{1}{\pi a^2})e^{i\omega t},(r,\theta)\in\pi_0 \\ \pi_0=\left\{(x,y,z)\,\middle|\,x^2+y^2<a^2,z=0\right\}\end{cases} \quad (۴۰)$$

همچنین برای بار گسترده یکنواخت با برآیند واحد در جهت افقی (در راستای محور x) مؤثر بر سطح دایره‌ای به شعاع a مؤلفه‌های بردار بارگذاری عبارتند از:

$$\begin{cases}\left[P,Q,R\right](r,\theta,t)=(\dfrac{\cos\theta}{\pi a^2},-\dfrac{\sin\theta}{\pi a^2},0)e^{i\omega t} \\ \pi_0=\left\{(x,y,z)\,\middle|\,x^2+y^2<a^2,z=0\right\}\end{cases} \quad (۴۱)$$

نتایج عددی

همان‌طور که ملاحظه شده است، مؤلفه‌های بردار تغییر مکان به صورت انتگرال‌های یک بعدی نیمه متناهی با توابع انتگران[۲۳] یا توابع انتگرال‌ده (توابع زیر علامت انتگرال) مختلط به دست آمده‌اند. این انتگرال‌ها حتی در حالت‌های ساده مربوط به مصالح ایزوتروپ هم به صورت تحلیلی قابل انتگرال‌گیری نیستند. بنابراین این انتگرال‌ها به صورت عددی برآورد می‌شوند. توابع انتگران، توابعی پیچیده با رفتار نوسانی به علت وجود توابع بسل هستند. توابع بسل در بی‌نهایت به سمت صفر میل می کنند، اما روند همگرایی این توابع در بی‌نهایت بسیار کند است، به همین دلیل یکی از موارد مهم در برآورد انتگرال‌ها تعیین بی‌نهایت فیزیکی است. همچنین توابع انتگران شامل نقاط تکین محدودی می‌باشند. این نقاط تکین شامل نقاط شاخه ای و قطب هستند. در حالت کلی برای مصالح ایزوتروپ جانبی سه بعدی، سه نقطه شاخه‌ای در مسیر انتگرال گیری وجود دارد. این نقاط بر اساس رابطه (۳۱) در $\xi_{\lambda_{qi}}$ $(i=1,2,3)$ واقع شده‌اند. در حالت کلی برای یک ماده ایزوتروپ جانبی سه بعدی، سه موج حجمی[۲۴] وجود دارد. نقاط شاخه‌ای ذکر شده، در واقع اعداد موج[۲۵] متناظر با این امواج هستند. اما برای حالت مربوط به مصالح ایزوتروپ تعداد نقاط شاخه‌ای ذکر شده، به دو کاهش می‌یابد:

$$\xi_{\lambda_{q1}}=k_{qd}=\frac{\omega}{C_{qd}},\ \xi_{\lambda_{q2}}=\xi_{\lambda_{q3}}=k_{qs}=\frac{\omega}{C_{qs}},\ q=\mathrm{I,II,III}. \qquad (۴۲)$$

علاوه بر این، ریشه‌های معادله جبری ناشی از دترمینان ماتریس ضرایب در معادلات (۳۲) و (۳۳) بر حسب ضرایب استفاده شده در روابط (۲۵) تا (۲۷) قطب‌های انتگرال گیری را مشخص می‌کند. با توجه به این معادلات، دو معادله برای تعیین قطب‌ها وجود دارد. یکی از آنها مربوط به ضرایب H_{I}, G_{II}, H_{II} و G_{III} و دیگری مربوط به بقیه ضرایب هستند. معادله مربوط به قطب‌های ضرایب H_{I}, G_{II}, H_{II} و G_{III} به صورت زیر است:

$$\Upsilon(\xi,s)=\Big[\left(\bar{Q}_{\mathrm{II}}-\bar{Q}_{\mathrm{I}}\right)\left(\bar{Q}_{\mathrm{II}}-\bar{Q}_{\mathrm{III}}\right)e^{-2\lambda_{\mathrm{II}3}s} -\left(\bar{Q}_{\mathrm{II}}+\bar{Q}_{\mathrm{I}}\right)\left(\bar{Q}_{\mathrm{II}}+\bar{Q}_{\mathrm{III}}\right)\Big] \qquad (۴۳)$$

این معادله همان معادله موج لاو است و همان‌طور که مشاهده می‌شود، این معادله تابعی از فرکانس است. این معادله در حالت ایزوتروپ به این شکل در می‌آید:

$$\Upsilon(\xi=\omega\varsigma\sqrt{\frac{\rho_I}{\mu_{\mathrm{I}}}},s)=\frac{\mu_{\mathrm{II}}}{\mu_{\mathrm{I}}}\sqrt{(\varsigma^2-\frac{\rho_{II}\,\mu_I}{\mu_{II}\,\rho_I})} -\sqrt{1-\varsigma^2}\,\mathbf{tan}\,s\,\omega\sqrt{\frac{\rho_I}{\mu_I}}\sqrt{(1-\varsigma^2)}. \qquad (۴۴)$$

معادله (۴۴) به طور دقیق منطبق بر معادله‌ای است که Guzina به دست آورده است[۷].

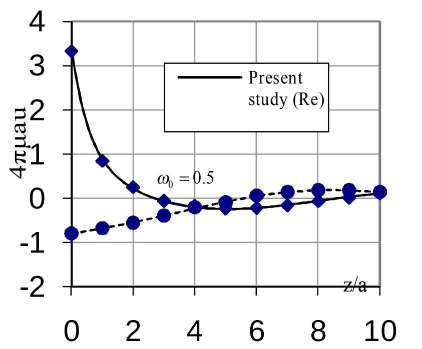
معادله دوم برای تعیین قطب‌ها، معادله ناشی از مساوی صفر قرار دادن دترمینان ماتریس ضرایب تعیین توابع $C_{\mathrm{I}m}$، $D_{\mathrm{I}m}$، $H_{\mathrm{I}m}$، $A_{\mathrm{II}m}$، $B_{\mathrm{II}m}$، $C_{\mathrm{II}m}$، $D_{\mathrm{II}m}$، $A_{\mathrm{III}m}$ و $B_{\mathrm{III}m}$ است. پیچیدگی این دترمینان به علت وجود ضرایب ارتجاعی مختلف و توابع نمایی، آن‌قدر زیاد است که کمتر به صورت تحلیلی قابل بحث است. اما با رسم مقادیر حقیقی و موهومی این دترمینان بر حسب آرگومان انتگرال‌گیری، ξ، می‌توان ریشه‌های این معادله را به دست آورد. ریشه‌های این معادله قطب‌های مسیر انتگرال‌گیری هستند که باید با دقت با آنها برخورد کرد.

در روش های معمول انتگرالگیری عددی مانند روش ذوزنقه‌ای یا روش سیمپسون مقدار انتگرال از تقسیم بازه انتگرال‌گیری به فواصل مساوی ومحاسبه مقادیر تابع انتگران در نقاط با فاصله مساوی از هم برآورد می شود. به علت وجود توابع بسل و توابع نمایی توابع انتگران، توابعی پیچیده با رفتار نوسانی و کاهی با تغییرات سریع وجود دارند. بنابراین باید روشی اختیار شود که با توجه به تغییرات تابع انتگران در نواحی مختلف بازه انتگرال‌گیری، محاسبه مقادیر تابع انتگران با دقت انجام گیرد.
با توجه به موارد مهمی که ذکر شد، باید روش مناسبی برای برآورد انتگرال‌ها انتخاب کرد. درروش اختیار شده باید توجه خاصی به بینهایت، قطب‌ها و نقاط شاخه‌ای کرد. دراین جا روش Adaptive quadrature برای برآورد عددی انتخاب شده است.

به منظور ارزیابی میزان دقت نتایج عددی حاصل از این مقاله مقایسه‌ای با نتایج موجود انجام گرفته است. ذکر این نکته ضروری است که کلیه نتایج عددی ارائه شده به صورت بی بعد است. همچنین فرکانس بی‌بعد $\omega_0=a\omega\sqrt{\rho_{\mathrm{I}}/A_{\mathrm{I}44}}$ برای ارائه نتایج عددی تعریف شده است. حالت استاتیکی به صورت مجانبی با قرار دادن $\omega_0=۰/۰۰۱$ برای حالت دینامیک به دست آمده است. شکل (۳) نتایج عددی را برای یک نیم‌فضای ایزوتروپ با

اثر نیروی افقی با برآیند واحد مؤثر بر سطح دایره‌ای به شعاع a با فرکانس بی‌بعد $\omega_0 = 0.5$ نشان می‌دهد. برای مقایسه، نتایج این شکل با نتایج ارائه شده توسط Pak در سال ۱۹۸۷[۱۰] برای مصالح ایزوتروپ مقایسه شده‌اند. در این شکل نتایج تحقیقات Pak [۱۰] به صورت نقاط توپر نشان داده شده است. تطابق خوب جواب‌ها چه در قسمت حقیقی و چه در قسمت موهومی، معرف درستی نتایج به دست آمده در این بخش است.

برای ارائه نتایج عددی، سه نوع مصالح مختلف با رفتار ایزوتروپ جانبی به همراه یک نوع مصالح ایزوتروپ در نظر گرفته شده است. خصوصیات مکانیکی مصالح ایزوتروپ چنان است که $\nu = ۰/۲۵$ است. مصالح ایزوتروپ جانبی به ترتیب ماده شماره ۲، ۳و ۴ نامیده می شوند. جدول (۱) مقادیر ضرایب A_{ij} را برای این مواد ارائه می کند.



شکل ۳ : مقایسه مؤلفه تغییر مکان در جهت محور x برحسب عمق در فضای نیمه متناهی با رفتار ایزوتروپ.

برای ارائه نتایج گرافیکی ترکیبی از مصالح جدول (۱)، مطابق جدول (۲) تعریف شده و نتایج آن می تواند به صورت گراف‌هایی ارائه شود. حالت‌های مختلف جدول (۲) در شکل (۶) نشان داده شده است. در جدول (۲) و نیز در شکل (۶)، صفر به معنی وجود نداشتن مصالح است.

جدول ۱: خصوصیات مکانیکی مصالح مختلف ($\times 10^4\ N/mm^2$).

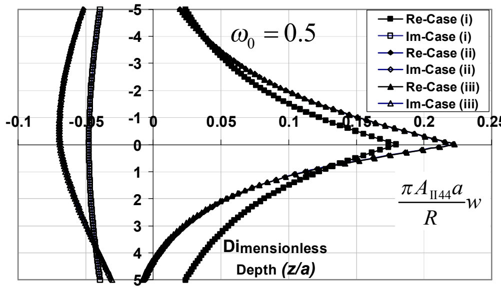
Material	A_{11}	A_{33}	A_{66}	A_{44}	A_{13}	A_{12}
1 (Isotropic)	6	6	2	2	2	2
2 (T.I.)	5.5	15.9	2	2	1.8	1.5
3 (T.I.)	14	7.5	4	2	5	6
4 (T. I.)	26	10	6	2	10	14

این نتایج برای فرکانس های بی‌بعد ۰/۵ و ۳/۰ ارائه شده است. نتایج عددی مختلف برای قسمت های حقیقی و موهومی مؤلفه تغییر مکان افقی u (در راستای محور x) ناشی از بار گسترده یکنواخت با برآیند واحد در جهت افقی (در راستای محور x) و تغییرمکان قائم ناشی از بار گسترده یکنواخت با برآیند واحد در جهت قائم مؤثر بر سطح دایره‌ای به شعاع a ارائه شده است. در شکل‌های (۶) و (۷) و شکل‌های (۹) و (۱۰) تغییر مکان قائم به ترتیب بر حسب عمق و بر حسب فاصله افقی ناشی از نیروی قائم برای فرکانس‌های ۵/. و ۰/۳ در حالت‌های (i) تا (iii) نشان داده شده‌اند. قسمت حقیقی مؤلفه تغییر مکان به طور کلی با افزایش فرکانس تحریک کاهش می‌یابد در حالی که قسمت موهومی مؤلفه تغییر مکان به طور کلی با افزایش فرکانس تحریک افزایش می یابد. علاوه بر این تأخیر توابع تغییرمکان در ارتباط با فاصله در فرکانس‌های کم بسیار یکنواخت است، در حالی که در فرکانس های زیاد این تأخیر نوسانی بوده و با افزایش فرکانس، نوسانی تر می‌شود. همچنین با افزایش فرکانس نوسان، طول موج کاهش می‌یابد. نتایج برای فرکانس‌های مختلف نشان می‌دهد که در حالت کلی امواج با فرکانس بی بعد بزرگ‌تر، دیرتر (در فاصله دورتر) مستهلک می‌شوند.

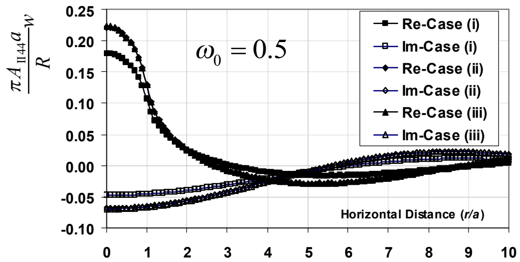
جدول ۲: خصوصیات مکانیکی مصالح مختلف در حالت‌های مختلف برای تعیین جواب عددی.

Case	i	ii	iii	iv
I	۲	۲	۲	۰
II	۲	۳	۳	۲
III	۲	۴	۳	۲

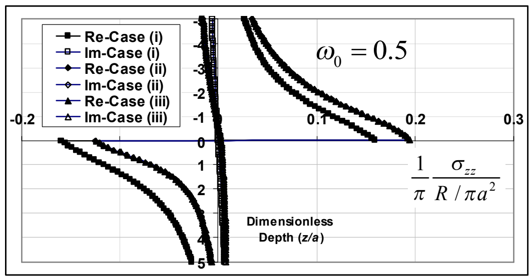
با دقت در شکل‌های (۴) و (۷) مشاهده می‌شود که نتایج تغییر مکان در حالت‌های Case(iii) و Case(ii) ، در محیط بالایی ولایه میانی که برای هر دو حالت به ترتیب ماده (۲) و (۳) است، بر هم منطبق بوده و در قسمت پائینی تغییر مکان‌ها نسبت به هم واگرا می‌شوند. در شکل‌های (۵) و (۸) تغییر مکان قائم در فضای کامل با لایه‌های مختلف را برای دو فرکانس بی بعد ۰/۵ و ۳/۰ بر حسب فاصله افقی نشان می‌دهند و همان طور که مشاهده می‌شود، پاسخ وابسته به جنس لایه‌ها متفاوت بوده و لایه سخت‌تر تغییر مکان کمتری ایجاد می‌کند.



شکل ۴: قسمت های حقیقی و موهومی مولفه تغییرمکان در جهت محور z ناشی از بار گسترده یکنواخت با برآیند واحد در جهت محور z مؤثر بر دایره‌ای به شعاع a بر حسب عمق در فرکانس بی بعد ۰/۵.

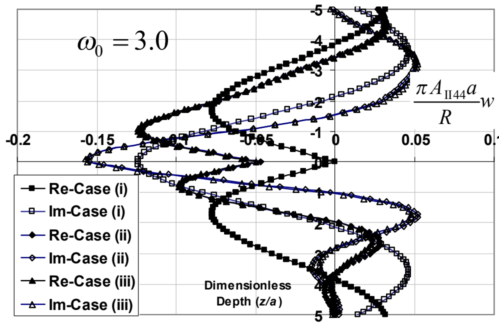


شکل ۵: قسمت های حقیقی و موهومی مولفه تغییرمکان در جهت محور z ناشی از بار گسترده یکنواخت با برآیند واحد در جهت محور z مؤثر بر دایره‌ای به شعاع a بر حسب فاصله افقی در فرکانس بی بعد ۰/۵.

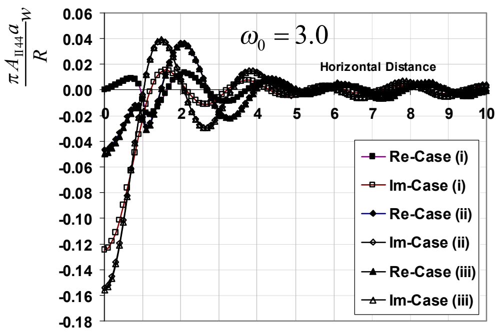


شکل ۶ : قسمت های حقیقی و موهومی تنش σ_{zz} ناشی از بار گسترده یکنواخت با برآیند واحد در جهت محور z مؤثر بر دایره‌ای به شعاع a بر حسب عمق در فرکانس بی بعد ۰/۵.

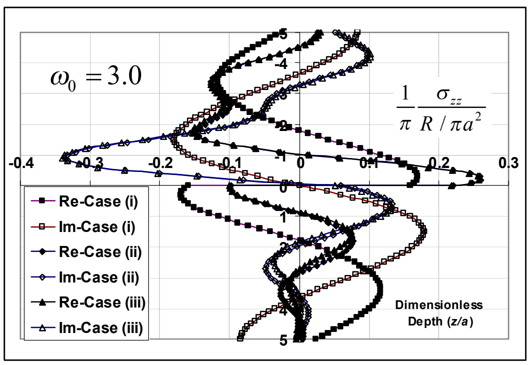
شکل‌های (۶) و (۹) تنش بی‌بعد $\frac{1}{\pi} \frac{\sigma_{zz}}{R / \pi a^2}$ را برای حالت‌های (i) تا (iii) در دو فرکانس بی بعد ۰/۵ و۳/۰ نشان می‌دهد. صفر بودن مقدار موهومی تنش و گسسته بودن قسمت حقیقی آن در z=0 واضح است. تنش σ_{zz} در فرکانس پایین با روند بسیار آرامی تغییر می‌کند، در حالی که در فرکانس بالا بسیار نوسانی است. شکل های (۱۰) تا (۱۲) تغییر مکان‌ها و تنش‌ها برای حالت‌های (i) تا (iii) در دو فرکانس بی بعد ۰/۵ و۳/۰ نشان داده شده اند. اثر اندازه فرکانس بر پاسخ محیط به طور واضح دیده می‌شود و مشاهده می‌شود که فرکانس‌های بزرگ‌تر اثر نوسانی بیشتر داشته و با دامنه بزرگ‌تر تا عمق بیشتر می‌رود.



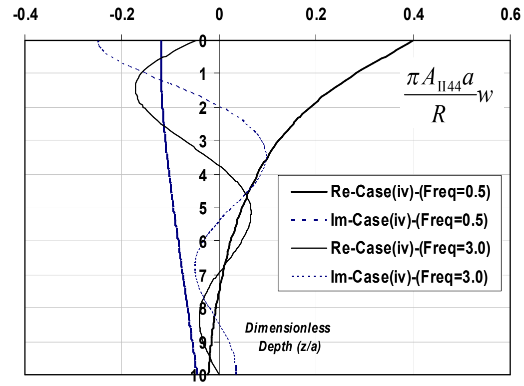
شکل ۷: قسمت های حقیقی و موهومی مؤلفه تغییرمکان در جهت محور z ناشی از بار گسترده یکنواخت با برآیند واحد در جهت محور z مؤثر بر دایره‌ای به شعاع a بر حسب عمق در فرکانس بی بعد ۳/۰.



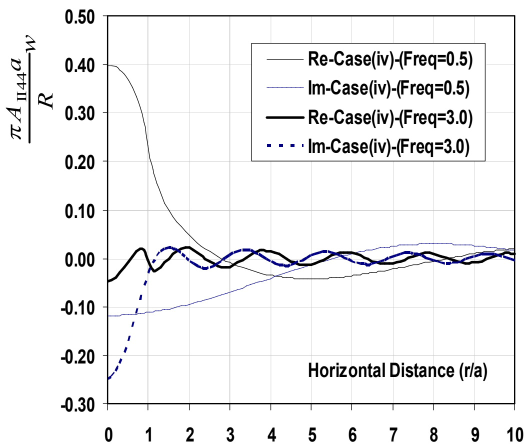
شکل ۸: قسمت های حقیقی و موهومی مؤلفه تغییرمکان در جهت محور z ناشی از بار گسترده یکنواخت با برآیند واحد در جهت محور z مؤثر بر دایره‌ای به شعاع a بر حسب فاصله افقی در فرکانس بی بعد ۳/۰.



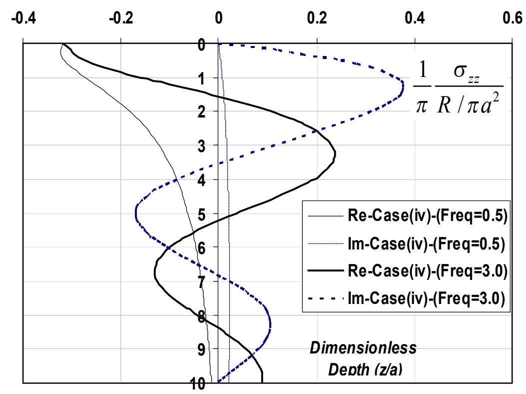
شکل ۹: قسمت های حقیقی و موهومی تنش σ_{zz} ناشی از بار گسترده یکنواخت با برآیند واحد در جهت محور z مؤثر بر دایره‌ای به شعاع a بر حسب عمق در فرکانس بی بعد ۳/۰.



شکل ۱۰: قسمت های حقیقی و موهومی مؤلفه تغییر مکان در جهت محور z ناشی از بار گسترده یکنواخت با برآیند واحد در جهت محور z مؤثر بر دایره‌ای به شعاع a بر حسب عمق در فرکانس‌های بی بعد ۰/۵ و ۳/۰.

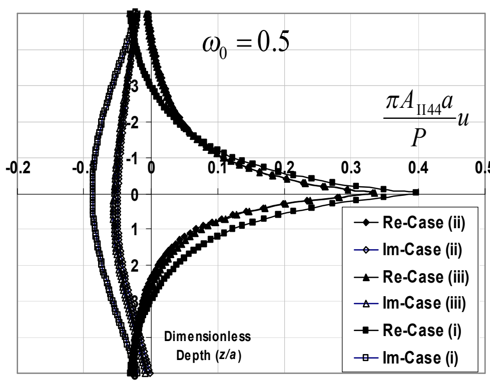


شکل ۱۰: قسمت های حقیقی و موهومی مؤلفه تغییر مکان در جهت محور z ناشی از بار گسترده یکنواخت با برآیند واحد در جهت محور z مؤثر بر دایره‌ای به شعاع a بر حسب فاصله افقی در فرکانس‌های بی بعد ۰/۵ و ۳/۰.

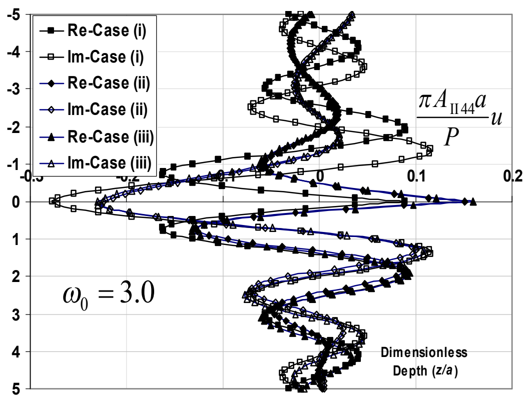


شکل ۱۱: قسمت های حقیقی و موهومی تنش σ_{zz} ناشی از بار گسترده یکنواخت با برآیند واحد در جهت محور z مؤثر بر دایره‌ای به شعاع a بر حسب عمق در فرکانس‌های بی بعد ۳/۰.

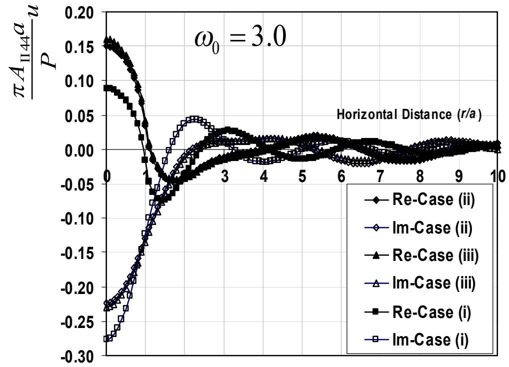
با توجه به این نکته که در حالت بارگذاری افقی، هم بارگذاری و هم تغییرمکان در راستای افقی (در صفحه ایزوتروپی) است، می‌توان انتظار داشت که تغییر مکان‌ها و تنش‌ها باید به طور خاص متأثر از ضریب A_{11} یعنی پارامتر مؤثر بر مدول یانگ در صفحه ایزوتروپی باشند. نمودارهای ارائه شده در شکل (۱۳) تا (۱۶) این موضوع را به خوبی نشان می‌دهند. ملاحظه می‌شود که بخصوص در فرکانس‌های کم ($\omega_0 = 0.5$) قسمت‌های حقیقی و موهومی مؤلفهٔ تغییر مکان افقی با کاهش مقدار ضریب A_{11} افزایش می‌یابد. همچنین مقایسه نمودارهای ارائه شده در شکل‌های (۱۴) تا (۱۶) نشان دهنده این است که تغییر مکان‌ها و تنش‌ها به طور قابل توجهی متاثر از فرکانس تحریک ($\omega_0 = 3.0$) هستند.



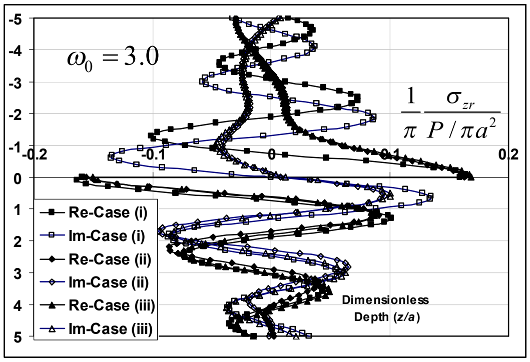
شکل ۱۲: قسمت‌های حقیقی و موهومی مؤلفه تغییر مکان در جهت محور x ناشی از بار گسترده یکنواخت با برآیند واحد در جهت محور x مؤثر بر دایره ای به شعاع a بر حسب عمق در فرکانس بی بعد ۰/۵.



شکل ۱۴: قسمت های حقیقی و موهومی مؤلفه تغییر مکان در جهت محور x ناشی از بار گسترده یکنواخت با برآیند واحد در جهت محور x مؤثر بر دایره‌ای به شعاع a بر حسب عمق در فرکانس بی بعد ۰/۵.



شکل ۱۳: قسمت های حقیقی و موهومی مؤلفه تغییر مکان در جهت محور x ناشی از بار گسترده یکنواخت با برآیند واحد در جهت محور x مؤثر بر دایره‌ای به شعاع a بر حسب فاصله افقی در فرکانس بی بعد ۰/۵.



شکل ۱۴: قسمت های حقیقی و موهومی تنش σ_{rz} ناشی از بار گسترده یکنواخت با برآیند واحد در جهت محور x مؤثر بر دایره ای به شعاع a بر حسب عمق در فرکانس‌های بی بعد ۰/۵.

نتیجه گیری

در این مقاله یک روش نیمه تحلیلی برای به دست آوردن پاسخ محیط کاملاً بی نهایت متشکل از یک نیم‌فضای بالایی، یک نیم‌فضای پایینی و یک لایه میانی هر یک با رفتار ایزوتروپ جانبی با اثر تحریک هارمونیک دلخواه مؤثر بر سطح مشترک محیط بالایی و لایه میانی در حالت سه بعدی ارائه شده است. معادلات حرکت حاکم بر مسئله در دستگاه مختصات استوانه‌ای (r,θ,z) به صورت یک سری معادلات درگیر می‌باشد که با استفاده از دو تابع پتانسیل [۶] که برای مسائل الاستودینامیک ارائه شده است، به طور کامل مجزاسازی شده‌اند. جواب تحلیلی برای توابع پتانسیل با نوشتن آنها به صورت سری فوریه در امتداد θ و استفاده از تبدیل هنکل در امتداد شعاعی در فضای هنکل به دست آمده است. میدان تغییرمکان با استفاده از ارتباط مؤلفه‌های بردار تغییرمکان و توابع پتانسیل در فضای هنکل به صورت تحلیلی به دست آمده است. مؤلفه‌های بردار تغییر مکان در فضای واقعی به صورت انتگرال‌های یک بعدی نیمه متناهی با توابع انتگران (توابع زیر علامت انتگرال) مختلط به دست آمده‌اند. توابع انتگران توابعی پیچیده با رفتار نوسانی به علت وجود توابع بسل می‌باشند. توابع بسل در بی‌نهایت به سمت صفر میل می‌کنند، اما روند همگرایی این توابع در بی‌نهایت بسیار کند می‌باشد، به همین دلیل یکی از موارد مهم در برآورد انتگرال‌ها تعیین بی‌نهایت فیزیکی است. همچنین توابع انتگران شامل نقاط تکین محدودی است و در برآورد انتگرال‌ها باید توجه خاصی به این نقاط کرد. این نقاط تکین شامل نقاط شاخه ای و قطب می‌باشند. در حالت کلی در یک ماده ایزوتروپ جانبی سه بعدی سه موج حجمی وجود دارد. این نقاط شاخه‌ای در واقع اعداد موج متناظر با این امواج هستند. حرکت متناظر با این امواج نه به طور خالص برشی و نه به طور خالص محوری است. همچنین قطب در واقع متناظر با ورود امواج ریلی یا استونلی است. برای تأیید روش انتگرال‌گیری عددی انتخاب شده، نتایج عددی برای محیط‌های ایزوتروپ با استفاده از جواب‌های نتیجه شده برای محیط‌های ایزوتروپ جانبی به دست آمده و با نتایج موجود برای محیط‌های ایزوتروپ مقایسه گردیده است. همچنین نتایج این مقاله برای ماده ایزوتروپ‌جانبی با نتایج موجود در حالت نیم‌فضای متأثر از بار سطحی مقایسه شده است. برای نشان دادن تأثیر فرکانس تحریک و میزان ناایزوتروپی مصالح بر پاسخ، نتایج عددی مختلف برای مؤلفه‌های تغییر مکان ارائه شده است. تأخیر توابع تغییر مکان در ارتباط با فاصله در فرکانس‌های کم بسیار یکنواخت است، در حالی که در فرکانس‌های زیاد این تأخیر نوسانی بوده و با افزایش فرکانس نوسانی‌تر می‌شود. همچنین با افزایش فرکانس نوسان، طول موج کاهش می‌یابد. نتایج برای فرکانس های مختلف نشان می‌دهد که در حالت کلی امواج با فرکانس بی‌بعد بزرگ‌تر، دیرتر (در فاصله دورتر) مستهلک می شوند. تأثیر ناهمسانی مصالح و میزان این ناایزوتروپی بر تغییر مکان‌ها در حالت فرکانس‌های کوچک به طور مستقیم وابسته به اندازهٔ ثابت های ارتجاعی در این امتدادها است در حالی که در فرکانس‌های بزرگ اندازهٔ پاسخ‌ها نه تنها وابسته به اندازهٔ

ثابت های ارتجاعی در امتداد آن توابع است بلکه وابسته به بقیهٔ ثابت‌های ارتجاعی نیز هست. میدان تغییرمکان و تنش به دست آمده برای حل بسیاری از مسائل الاستودینامیک و همچنین به عنوان هسته برای حل معادلات انتگرال مرزی کاربرد دارند.

مراجع

1 - Achenbach, J. D. (1973). *Wave propagation in elastic solids. North-Holland Publishing Co*., Amsterdam, The Netherlands.

2 - Aki, K., and Richards, P. G. (1980), *Quantitative seismology theory and methods*, W. H. Freeman and Co., New York.

3 - Apsel, R. J., and Luco, J. E. (1983). "On the Green's functions for a layered half space part II. Bull." *Seism. Soc. of Am.* Vol. 73,No. 4, PP. 931-951.

4 - Buchwald, V. T. (1961). "Rayleigh waves in transversely isotropic media." *Quart. J. Mech. and Appl. Math.,,* Vol. 14, No. 4, PP. 293-317.

5 - Churchill, R. V., and Brown, J. W. (1990). *Complex variables and applications,* McGraw-Hill, New York, N. Y.

6 - Eskandari-Ghadi, M. (2005). "A complete solutions of the wave equations for transversely isotropic media." *J. of Elasticity,* Vol. 81, PP. 1-19.

7 - Guzina, B. B. (1996). *Seismic response of foundations and structures in multilayered media,* Ph.D. dissertation, University of Colorado, Boulder (USA).

8 - Lamb, H. (1904). *On the propagation tremTrans*, Royal Society of London, A (203), PP. 1-42.

9 - Lekhnitskii, S. G. (1981). *Theory of elasticity of an anisotropic body*. Mir Publishers Moscow.

10 - Pak, R. Y. S. (1987). "Asymmetric wave propagation in an elastic half-space by a method of potentials." *J. Appl. Mech.,* Vol. 54, No. 1, PP.121-126.

11 - Pekeris, C. L. and Longman, I. (1955). "The motion of the surface of a uniform elastic half-space produced by a buried torque pulse." *Geophs. Journal,* Vol. 1, PP. 146-153.

12 - Rahimian, M., Eskandari-Ghadi, M., Pak, R. Y. S. and Khojasteh, A. (2007). "An Elastodynamic Potential Method for a Transversely Isotropic Solid, Journal of Engineering Mechanics." *ASCE,* Vol. 133, No.10, PP. 1134-1145.

13 - Rajapakse, R. K. N. D. and Wang Y. (1991). "Elastodynamic Green's functions of an orthotropic half-space." *J. Engrg. Mech., ASCE,* Vol. 117, No.3, PP. 588-604.

14 - Rajapakse, R. K. N. D. and Wang, Y. (1993). "Green's functions for transversely isotropic elastic half-space." *J. Engrg. Mech., ASCE,* Vol. 119, No. 9, PP. 1724-1746.

15 - Sneddon, I. N. (1951). *Fourier transforms,* McGraw-Hill, New York, N. Y.

16 - Stoneley, R. (1949). "The seismological implications of aelotropy in continental structures." *Royal Astronomical Soc. Monthly Notices, Geophisical Supplement."* London, England, Vol. 5, PP. 343-353.

17 - Synge, J. L. (1957). "Elastic waves in anisotropic media." *J. Math. and Physics*, Vol. 35, No. 35, PP. 323-334.

واژه‌های انگلیسی به ترتیب استفاده در متن

1 - Transversely isotropic
2 - Frequency domain
3 - Potential Function
4 - Fourier series
5 - Hankel transform
6 - Radiation condition

7 - Branch points
8 - Poles
9 - Impedance function
10 - Wave propagation
11 – Anisotropic
12 - Composite materials
13 – Orthotropic
14 - Rayleigh wave
15 - Transformed space
16 - Real space
17 - Stress tensor
18 - Lame coefficients
19 - Multiple valued
20 - Single valued
21 - Branch cut
22 - Singular point
23 – Integrand
24 - Volumetric wave
25 - Wave numbers